VII. ラーメン

(一) ラーメンの定義

トラスの節點が固定してゐるものをラーメン（英 Rigid frame 獨 Rahmen）といふ。從てラーメンの部材は一端もしくは兩端に端力のモーメントを有してゐる梁又は長柱であるが通常長柱としての直接壓力は無視して單に一端もしくは兩端に端力のモーメントを有つ梁と考へて計算する。此の端力のモーメントは片側固定又は兩端固定の梁の場合に似てゐるが等しいとは限らないそれは兩端に連續さるゝ他の部材及それ等に載れる荷重によつて影響される（片側又は兩端固定梁はラーメンのその端に續く部材が無限大の曲げ剛さを有つ場合に當る）。今兩端の端力のモーメント M_l 及 M_r がわかれば部材の任意の點に於ける曲げモーメント及剪斷力は V (60) (61) と同じ下式によつて求められる。

$$M = M' + M'' \quad \cdots\cdots(1)$$

$$S = S' + S'' \quad \cdots\cdots(2)$$

但

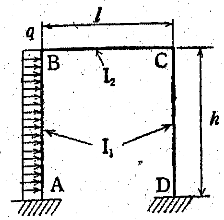
$$M' = M_l - \frac{M_l - M_r}{l}x \quad \cdots\cdots(3)$$

$$S' = -\frac{M_l - M_r}{l} \quad \cdots\cdots(4)$$

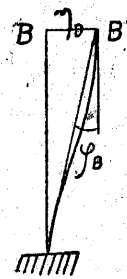
M'' S'' は各々單純梁としての曲げモーメント及剪斷力である。

(二) 矩形門形ラーメン (Rectangular Portal)

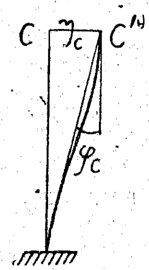
第1圖の如く AB 柱が風壓の如き横の等分布荷重 $q^{kg}/_m$ を受け



第 1 圖



第 2 圖



第 3 圖

る場合 ABCD の各點に於ける曲げモーメントを $M_1M_2M_3M_4$ とし（但圖示の方向卽外側凹面の曲げモーメントが正）柱の慣性モーメントを I_1 梁のそれを I_2 とす。AB をとつて x 點に於ける Ax 側の曲げモーメント M を求めれば（第2圖）Bx 側の M に負號をつけて

$$M = -M_2 + \frac{q(h-x)^2}{2} - P(h-x)$$

故に V(10) より

$$EI_1\frac{d^2\eta}{dx^2} = -M_2 + \frac{q(h-x)^2}{2} - P(h-x) \quad \cdots\cdots(5)$$

此式を一回及二回積分して A に於て $\frac{d\eta}{dx}=0$ 及 $\eta=0$ なる條件を入れ B 點に於ける $\frac{d\eta}{dx}$ 及 η を求めれば

$$\varphi_B = -\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_B = -\frac{h}{EI_1}\left(-M_2 + \frac{qh^2}{6} - \frac{Ph}{2}\right) \quad \cdots\cdots(6)$$

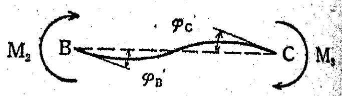
$$\eta_B = \frac{1}{EI_1}\left(-\frac{M_2h^2}{2} + \frac{qh^4}{8} - \frac{Ph^3}{3}\right) \quad \cdots\cdots(7)$$

同樣に DC に於て（第 3 圖）

$$\varphi_C = -\frac{h}{EI_1}\left(-M_3 + \frac{Ph}{2}\right) \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\eta_C=\frac{1}{EI_1}\left(-\frac{M_3h^2}{2}+\frac{Ph^3}{3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

BC に於ては端力モーメントは第 2 圖第 3 圖の M_2 M_3 より第 4 圖の如くなる故に



第 4 圖

V(62) に於て M_3 の方向は M_B と反對なる故

$$l(M_2-2M_3)=6EI_2\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_C=6EI_2(-\varphi'_C)$$

$$l(2M_2-M_3)=6EI_2\left\{-\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_B\right\}=6EI_2\varphi'_B$$

但此の場合 $M''=0$, $\eta_B=\eta_C$ である。

$$\therefore\ \varphi'_B=\frac{l}{6EI_2}(2M_2-M_3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

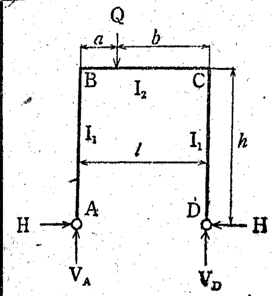
$$\varphi'_C=-\frac{l}{6EI_2}(M_2-2M_3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$\varphi_B=\varphi'_B$, $\varphi_C=\varphi'_C$, $\eta_B=\eta_C$ とすれば (6)(7)(8)(9)(10)(11) より

$$\left.\begin{aligned}
M_2&=\frac{23n+6}{(n+6)(2n+1)}\ \frac{qh^2}{24}\\
M_3&=\frac{25n+18}{(n+6)(2n+1)}\ \frac{qh^2}{24}\\
P&=\frac{3n+2}{2n+1}\ \frac{qh}{8}\\
M_1&=M_2+Ph-\frac{qh^2}{2}=-\frac{15n^2+73n+30}{(n+6)(2n+1)}\ \frac{qh^2}{24}\\
M_4&=M_3-Ph=-\frac{9n^2+35n+18}{(n+6)(2n+1)}\ \frac{qh^2}{24}\\
&\text{但}\quad n=\frac{l}{h}\ \frac{I_1}{I_2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

(三) 各種門形ラーメンの表

門形ラーメン



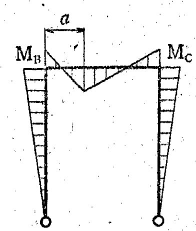
$V_A=\dfrac{Qb}{l}$, $V_D=\dfrac{Qa}{l}$

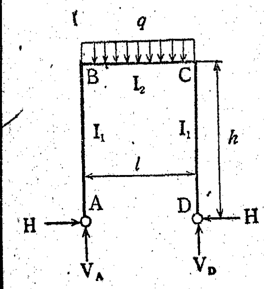
$H=\dfrac{3Qab}{2hl(2k+3)}$,

$k=\dfrac{I_2}{I_1}\ \dfrac{h}{l}$,

$M_B=M_C$

$=\dfrac{3}{2}\ \dfrac{Qab}{(2k+3)l}$





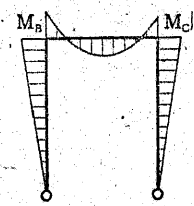
$V_A=V_D=\dfrac{ql}{2}$

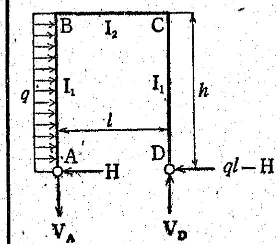
$H=\dfrac{ql^2}{4h(2k+3)}$,

$k=\dfrac{I_2}{I_1}\ \dfrac{h}{l}$,

$M_B=M_C$

$=\dfrac{ql^2}{4(2k+3)}$





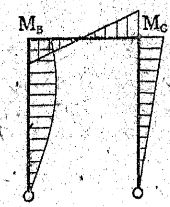
$V_A=V_D=\dfrac{qh^2}{2l}$

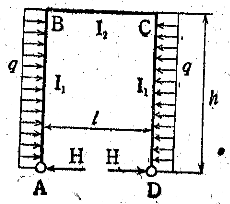
$H=\dfrac{11k+18}{2k+3}\ \dfrac{qh}{8}$,

$k=\dfrac{I_2}{I_1}\ \dfrac{h}{l}$,

$M_B=-\dfrac{3qh^2}{8}\ \dfrac{k+2}{2k+3}$,

$M_C=\dfrac{qh^2}{8}\ \dfrac{5k+6}{2k+3}$





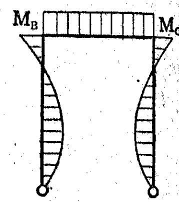
$$V_A = V_D = 0,$$

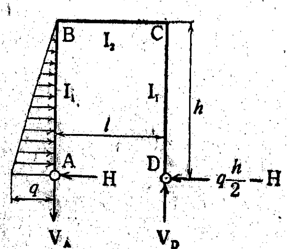
$$H = \frac{3}{4}\,\frac{k+2}{2k+3}\,qh,$$

$$k = \frac{I_2}{I_1}\,\frac{h}{l},$$

$$M_B = M_C$$

$$= \frac{qh^2}{4}\,\frac{k}{2k+3}$$





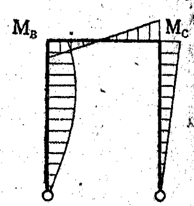
$$V_A = V_D = \frac{qh^2}{6l}$$

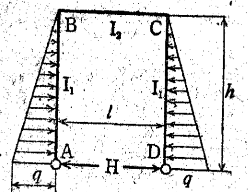
$$H = \frac{31k+50}{2k+3}\,\frac{qh}{40},$$

$$k = \frac{I_2}{I_1}\,\frac{h}{l},$$

$$M_B = -\frac{qh^2}{120}\,\frac{13k+30}{2k+3}$$

$$M_C = \frac{qh^2}{40}\,\frac{9k+10}{2k+3}$$





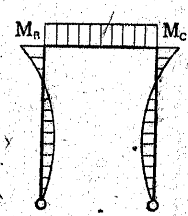
$$V_A = V_D = 0,$$

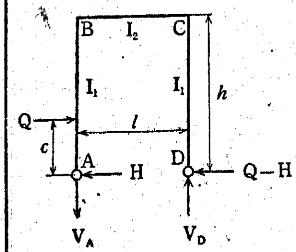
$$H = \frac{qh}{20}\,\frac{11k+20}{2k+3},$$

$$k = \frac{I_2}{I_1}\,\frac{h}{l},$$

$$M_B = M_C$$

$$= \frac{qh^2}{60}\,\frac{7k}{2k+3}$$



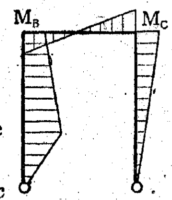


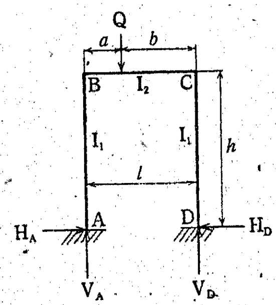
$$V_A = V_D = \frac{Qc}{l},$$

$$H = \frac{k(4h^3+c^3-3ch^2)+6h^3-3ch^2}{h^3(2k+3)}\,\frac{Q}{2},$$

$$M_B = -\frac{k(h^2+c^2)+3h^2}{2h^2(2k+3)}\,Qc$$

$$M_C = -\frac{k(c^2-3h^2)-3h^2}{2h^2(2k+3)}\,Qc$$





$$k = \frac{I_2}{I_1}\,\frac{h}{l}, \quad \delta = \frac{a}{l},$$

$$V_A = \frac{Qb}{l}\,\frac{1+\delta-2\delta^2+6k}{1+6k}$$

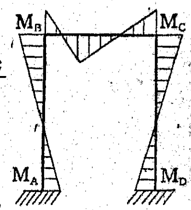
$$V_D = \frac{Qa}{l}\,\frac{3\delta-2\delta^2+6k}{1+6k},$$

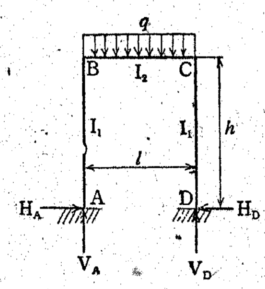
$$H_A = H_D = \frac{3Qab}{2hl(2+k)},$$

$$M_A = -\frac{abQ}{2l}\,\frac{5k-1+2\delta(2+k)}{(2+k)(1+6k)},$$

$$M_D = -\frac{abQ}{2l}\,\frac{3+7k-2\delta(2+k)}{(2+k)(1+6k)}$$

$$M_B = M_A + H_A h, \quad M_C = M_D + H_A h$$



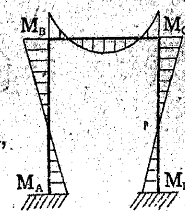


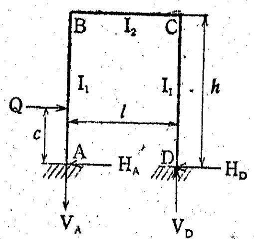
$$V_A = V_D = \frac{ql}{2},$$

$$H_A = H_D = \frac{ql^2}{4h(2+k)},$$

$$M_A = M_D = -\frac{ql^2}{12(2+k)},$$

$$M_B = M_C = \frac{ql^2}{6(2+k)}$$





$$k=\frac{I_2}{I_1}\,\frac{h}{l},\quad \delta=\frac{c}{h},$$

$$V_A=V_D=\frac{3Qc\delta k}{l(1+6k)},$$

$$H_A=Q-H_D,$$

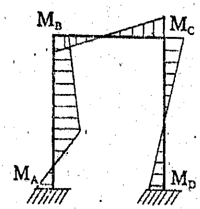
$$H_D=\frac{Q\delta^2}{2(2+k)}\{3(1+k)-\delta(1+2k)\},$$

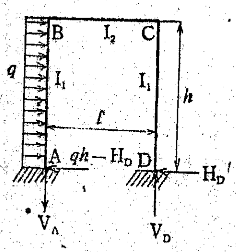
$$M_A=\frac{Qc\delta}{2}\left\{\frac{2}{\delta}-\frac{3+2k-\delta(1+k)}{2+k}-\frac{3k}{1+6k}\right\},$$

$$M_D=-\frac{Qc\delta}{2}\left\{\frac{3+2k-\delta(1+k)}{2+k}-\frac{3k}{1+6k}\right\},$$

$$M_B=M_A+H_Dh-Qc,$$

$$M_C=-M_D+H_Dh$$





$$V_A=V_D=\frac{qh^2k}{l(1+6k)},$$

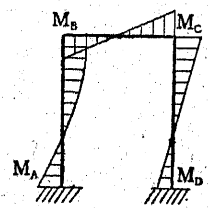
$$H_D=\frac{qh}{8}\,\frac{3+2k}{2+k},$$

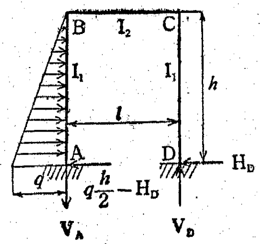
$$M_A=\frac{qh^2}{24}\left(12-\frac{9+5k}{2+k}-\frac{12k}{1+6k}\right),$$

$$M_D=-\frac{qh^2}{24}\left(\frac{9+5k}{2+k}-\frac{12k}{1+6k}\right),$$

$$M_B=M_A+H_Dh-\frac{qh^2}{2},$$

$$M_C=-M_D+H_Dh$$





$$V_A=V_D=\frac{qkh^2}{4l(1+6k)},$$

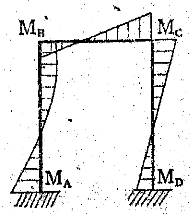
$$H_D=\frac{qh}{40}\,\frac{4+3k}{2+k},$$

$$M_A=\frac{qh^2}{120}\left(20-\frac{12+7k}{2+k}-\frac{15k}{1+6k}\right),$$

$$M_D=-\frac{qh^2}{120}\left(\frac{12+7k}{2+k}-\frac{15k}{1+6k}\right),$$

$$M_B=M_A+H_Dh-\frac{qh^2}{6},$$

$$M_C=-M_D+H_Dh$$



（四）　矩形函形ラーメン (Rectangular box)

V（二二）のクラペイロンの三力モーメントの定理を曲げ剛さの異る場合に擴張するときは V(79) 式は

$$k_rM_{r-1}+2(k_r+k_{r+1})M_r+k_{r+1}M_{r+1}=6E\phi_r$$

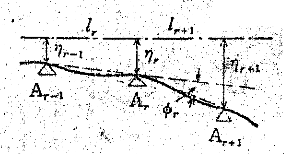
$$-\frac{6k_r}{l_r^2}m_r-\frac{6k_{r+1}}{l_{r+1}^2}m'_{r+1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

但　$k_r=\frac{l_r}{I_r}$,　　$k_{r+1}=\frac{l_{r+1}}{I_{r+1}}$,

$$-\Phi_r=\frac{\eta_r-\eta_{r-1}}{l_r}-\frac{\eta_{r+1}-\eta_r}{l_{r+1}}$$

$$m_r=\int_0^{l_r}M_r''\,xdx,$$

$$m'_{r+1}=\int_0^{l_{r+1}}M''_{r+1}(l_{r+1}-x)dx$$



第 5 圖

M''_r, M''_{r+1} は各 l_r, l_{r+1} 上の單純梁としての曲げモーメント。

第6圖の如き函形ラーメンに於ては

$$M_1=M_4$$

$$M_2=M_3$$

$$m_1=\int_0^l M''_1\,x\,dx=-\frac{q_u l^4}{24}$$

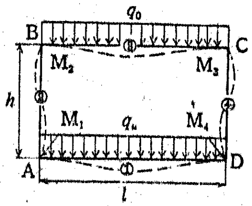
$$m'_1=\int_0^l M''_1(l-x)\,dx=-\frac{q_u l^4}{24}$$

$$m_2=m'_2=0$$

$$m_3=\int_0^l M''_3\,x\,dx=\frac{q_0 l^4}{24}$$

$$m'_3=\int_0^l M''_3(l-x)\,dx=\frac{q_0 l^4}{24}$$

$$m_4=m'_4=0$$



第　6　圖

且 $I_1=I_3$, $I_2=I_4$, 即 $k_1=k_3$, $k_2=k_4$ とすれば $\Phi_1=\Phi_2=0$ なる故 (13) 式は

DAB に於て：　$(3k_1+2k_2)M_1+k_2M_2-\frac{k_1}{4}q_u l^2=0$

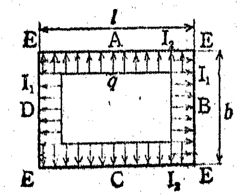
ABC に於て：　$k_2M_1+(3k_1+2k_2)M_2+\frac{k_1}{4}q_0 l^2=0$

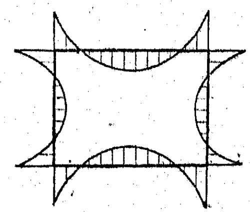
故に

$$\left.\begin{aligned} M_1=M_4&=\frac{kq_0+(2k+3)q_u}{4\{(2k+3)^2-k^2\}}l^2\\ M_2=M_3&=-\frac{(2k+3)q_0+kq_u}{4\{(2k+3)^2-k^2\}}l^2\\ &\left[\text{但}\quad k=\frac{k_2}{k_1}=\frac{I_1}{I_2}\,\frac{h}{l}\right]\\ \overline{AD}=-\overline{BC}&=\frac{M_1-M_2}{h} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

(五)　各種函形ラーメンの表

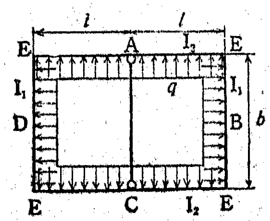
函 形 ラ ー メ ン

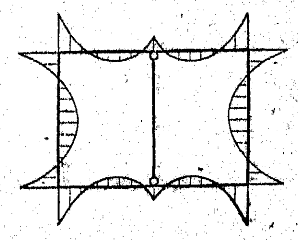




$k=\frac{I_2}{I_1}\,\frac{b}{l}$,　　$M_E=-\frac{q}{12}\,\frac{l^2+b^2k}{1+k}$,

$M_A=M_C=\frac{ql^2}{8}+M_E$,　　$M_B=M_D=\frac{qb^2}{8}+M_E$

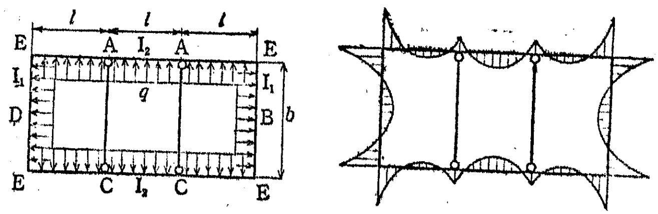




$k=\frac{I_2}{I_1}\,\frac{b}{l}$,　　$M_E=-\frac{q}{12}\,\frac{l^2+2b^2k}{1+2k}$,

$M_A=M_C=-\frac{q}{12}\,\frac{l^2+(3l^2-b^2)k}{1+2k}$,

$M_B=M_D=\frac{qb^2}{8}+M_E$,　　$\overline{AC}=\frac{q}{2l}\,\frac{2l^2+(5l^2-b^2)k}{1+2k}$



$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{b}{l}$, $M_E=-\frac{q}{12}\cdot\frac{3l^2+5b^2k}{3+5k}$,

$M_A=M_C=-\frac{q}{12}\cdot\frac{3l^2+(6l^2-b^2)k}{3+5k}$,

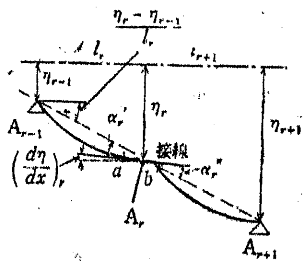
$M_B=M_D=\frac{qb^2}{8}+M_E$, $\overline{AC}=\frac{q}{2l}\cdot\frac{6l^2+(11l^2-b^2)k}{3+5k}$

(六) **連續ラーメン** (Multiple-field Framework)

一點に於て三本の部材結合せられるラーメンでは四力モーメントの定理を用ふるのが便である。

V(二二) と同樣に第7圖 $A_{r-1}A_r$ について V(62) 式を應用すれば

$$6E\alpha'_r=k_r(M_{r-1}+2M_{ra})+\frac{6k_r}{l_r^2}m_r$$



第 7 圖

但 $\alpha'_r=\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_r-\frac{\eta_r-\eta_{r-1}}{l_r}$ 即 A_r 點の彈性曲線の接線と $A_{r-1}A_r$ の結線となす角, $m_r=\int_0^{l_r}M''_r x\,dx$, $k_r=\frac{l_r}{I_r}$, M_{ra} は A_r 點の a 側の端力のモーメントである。

同樣に $A_{r+1}A_r$ ついては

$$6E\alpha''_r=k_{r+1}(M_{r+1}+2M_{rb})+\frac{6k_{r+1}}{l^2_{r+1}}m_{r+1}$$

但 α''_r は A_r 點の彈性曲線の接線と $A_{r+1}A_r$ の結線となす角, $m_{r+1}=\int^{l_{r+1}}M''_{r+1}x\,dx$, $k_{r+1}=\frac{l_{r+1}}{I_{r+1}}$, M_{rb} は A_r 點の b 側の端力のモーメントであるこれは A_r が三本以上の岐點なるときは M_{ra} とは等しくない。

上の二式を加へて

$$6E\alpha_r=k_rM_{r-1}+2k_rM_{ra}+2k_{r+1}M_{rb}+k_{r+1}M_{r+1}+6\left\{\frac{k_r}{l^2_r}m_r+\frac{k_{r+1}}{l^2_{r+1}}m_{r+1}\right\}\quad\cdots\cdots(15)$$

但 $\alpha_r=\alpha'_r+\alpha''_r$

此れを四力モーメントの定理 (Theorem of Four Moments) といつてブライヒ (Bleich) が始めて誘導したものである。

第8圖に於て

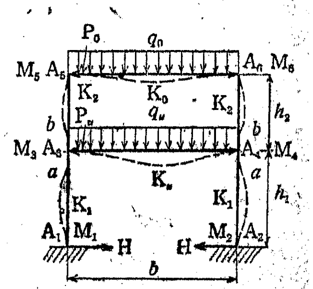
$M_1=M_2$

$M_5=M_6$

$M_{3a}=M_{4a}$

$M_{3b}=M_{4b}$

$M_{3c}=M_{4c}$



第 8 圖

$\alpha_r=\alpha'_r+\alpha''_r$ は各點で零である故に

A_1A_3 に於て: $2k_1M_1+k_1M_{3a}=0$

$A_1A_3A_5$ に於て: $k_1M_1+2k_1M_{3a}+2k_2M_{3b}+k_2M_5=0$

$A_1A_3A_4$ に於て：　$k_1M_1+2k_1M_{3a}+2k_uM_{3c}+k_uM_{3c}+6\frac{k_u}{b^2}m_u=0$

$A_3A_5A_6$ に於て：　$k_2M_{3b}+2(k_2+k_0)M_5+k_0M_5+6\frac{k_0}{b^2}m_0=0$

A_3 に於て　　：　$M_{3a}-M_{3b}-M_{3c}=0$

これより

$$\left.\begin{aligned}
&M_1=M_2=k_2\{(k_2+2k_0)q_u-k_0q_0\}\frac{b^2}{4D}\\
&M_5=M_6=-\{k_1k_2q_u+k_0\left(3k_1+\frac{2k_1k_2}{k_u}+4k_2\right)q_0\}\frac{b^2}{4D}\\
&M_{3a}=M_{4a}=-2k_2\{(k_2+2k_0)q_u-k_0q_0\}\frac{b^2}{4D}\\
&M_{3b}=M_{2b}=\{k_1(2k_2+3k_0)q_u+k_2k_0\left(\frac{k_1}{k_u}+2\right)q_0\}\frac{b^2}{4D}\\
&M_{3c}=M_{4c}=-\{[k_1(2k_2+3k_0)\\
&\qquad+2k_2(k_2+2k_0)]q_u+\frac{k_1k_2k_0}{k_u}q_0\}\frac{b^2}{4D}
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

$$\left.\begin{aligned}
&P_0=\frac{M_5-M_{3b}}{h_2},\qquad P_u=\frac{M_{3b}-M_5}{h_2}+\frac{M_{3a}-M_1}{h_1}\\
&H=\frac{M_1-M_{3a}}{h_1}
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

$$D=3(2k_1k_2+4k_0k_2+3k_0k_1+2\frac{k_0k_1k_2}{k_u}+\frac{k_1k_2^2}{k_u}+2k_2^2)\ \dots(18)$$