

VI. 長 柱

オイラーの長柱式

(一) 両端回転端の長柱

第1圖の如き両端回転端の長柱 (Long Column) の將に挫屈 (Buckling) せんとする危険荷重 (Critical Load) P は V (10) 式に於て C 又は C' に於ける曲げモーメント $M = \pm P\eta$ を入れ

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \pm \alpha^2 \eta \quad \text{但し} \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI} \dots\dots (1)$$

棒の曲げ剛さ EI を定數とすれば即ち斷面不變なれば α^2 は x に無關係なる正常數である。故に (1) の解は

$$\eta = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad \text{又は} \quad A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \dots\dots (2)$$

但し A, B は積分常數である。

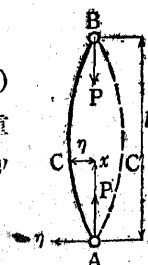
$x=0$ 及 $x=l$ で $\eta=0$ なる條件を満足ししかも AB 同時に零とならざる爲めには第二式をとり

$$\sin \alpha l = 0 \quad \text{即} \quad \alpha l = n\pi \quad \text{但し} \quad n=1, 2, 3, \dots\dots (3)$$

故に

$$P = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EI \dots\dots (4)$$

$$\eta = B \sin \frac{n\pi}{l} x \dots\dots (5)$$



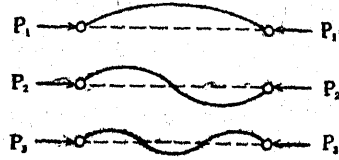
第1圖

P をオイラーの危険荷重 (Euler's Critical Load) といふ。今 n に 1, 2, 3 を與へれば

n=1: P1 = π²/l² EI

n=2: P2 = 4π²/l² EI

n=3: P3 = 9π²/l² EI

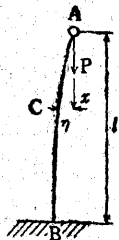


第 2 圖

の如き色々の形で挫屈するときの危険荷重を得。

(一) 一端自由他端固定の長柱

第 3 圖に於て x=0 で η=0 及 x=l で dη/dx=0 故に η=A cos αx + B sin αx に於て



第 3 圖

cos αl = 0

即ち αl = (2n-1)π/2

∴ P = (2n-1)² π² / 4 l² EI

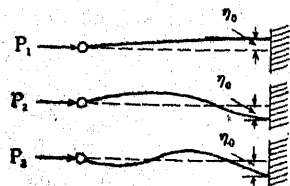
η = B sin (2n-1)πx / 2l

今 n に 1, 2, 3 を與へれば

n=1: P1 = π²/4l² EI

n=2: P2 = 9π²/4l² EI

n=3: P3 = 25π²/4l² EI



第 4 圖

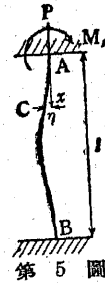
B に於ける η を η₀ とすれば

M_B = Pη₀

(三) 両端固定の長柱

C に於ける曲げモーメント M = -Pη + M_A を V

(10) に入れて



第 5 圖

d²η/dx² + α²(η - M_A/P) = 0
且し α² = P/EI

故に η - M_A/P = A cos αx + B sin αx

x=0 で η=0 及 dη/dx=0 なる故

A = -M_A/P, B=0

x=l で η=0 及 dη/dx=0 なる故

cos αl = 1, sin αl = 0 即ち αl = 2nπ

∴ P = 4n²π²/l² EI

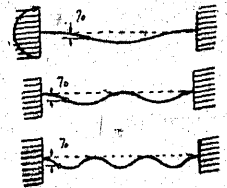
η = M_A/P (1 - cos (2nπ/l)x)

(13) で n に 1, 2, 3 を入れると

n=1: P1 = 4π²/l² EI

n=2: P2 = 16π²/l² EI

n=3: P3 = 36π²/l² EI

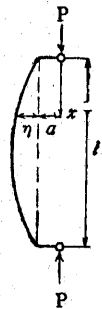


第 6 圖

M_A は (14) に於て $x = \frac{l}{4n}$ の點に於ける η の値を η_0 とすれば

$$M_A = P\eta_0 \dots\dots\dots(15)$$

(四) 離心荷重をもつ長柱



第7圖の如く P が棒の軸心より a 丈それてゐる場合は

$$M = -P(a + \eta)$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dx^2} + \alpha^2(a + \eta) &= 0 \\ \text{但し } \alpha^2 &= \frac{P}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

第7圖 故に

$$\eta + a = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \dots\dots\dots(17)$$

$x=0, x=l$ で $\eta=0$ なる故

$$a = A, \quad a(1 - \cos \alpha l) = B \sin \alpha l$$

故に (17) は

$$\eta = a \left(\tan \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha x + \cos \alpha x - 1 \right) \dots\dots\dots(18)$$

η の最大値は $\frac{d\eta}{dx} = 0$ より

$$\tan \alpha x = \tan \frac{\alpha l}{2} \quad \text{即} \quad x = \frac{l}{2}$$

で與へられる。

$$\therefore \text{最大 } \eta = a \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right)$$

此式で分母零の時

$$\text{即} \quad \alpha l = (2n-1)\pi \dots\dots\dots(19)$$

の時 η は無限大となる。

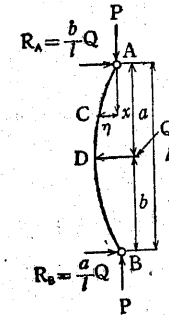
故にオイラーの危険荷重は下の如し。

$$P = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{l^2} EI \dots\dots\dots(20)$$

この式で $n=1$ と置けば (4) 式の $n=1$ の場合と一致し危険荷重の値が離心率に無関係と出るが撓の式で見る如くその値は離心率 α に比例してゐる。故に危険荷重に達せざる荷重では α 大なる程 η 大となり α 大なる程危険なることを示してゐる。

(五) 横より荷重を受けた長柱

C 點に於ける曲げモーメント



第8圖

$$\left. \begin{aligned} M &= -P\eta - \frac{b}{l} Qx & [x < a] \\ &= -P\eta - \frac{b}{l} Qx + Q(x-a) & [x > a] \end{aligned} \right\}$$

を V (10) に入れて

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^2\eta}{dx^2} &= -P \left\{ \eta + \frac{Qb}{Pl} x \right\} & [x < a] \\ &= -P \left\{ \eta - \frac{Q}{P} \left(x - a - \frac{b}{l} x \right) \right\} & [x > a] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

此の上式の解は

$$\eta = -\frac{Qb}{Pl} x + A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

$$\text{但 } \alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

$x=0$ で $\eta=0$ より $A=0$

$$\therefore \eta = -\frac{Qb}{Pl}x + B \sin \alpha x$$

下式より同様に

$$\eta = -\frac{Qa}{Pl}(l-x) + B' \sin \alpha(l-x)$$

此の兩式は $x=a$ に於て η 及 $\frac{d\eta}{dx}$ が相等しい

$$\left. \begin{aligned} \therefore B \sin \alpha a - B' \sin \alpha b &= 0 \\ \alpha \{ B \cos \alpha a + B' \cos \alpha b \} &= \frac{Q}{P} \end{aligned} \right\}$$

これより B, B' を定め

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{Q}{P} \left\{ \frac{\sin \alpha b \sin \alpha x}{\alpha \sin \alpha l} - \frac{b}{l} x \right\} & [x < a] \\ &= \frac{Q}{P} \left\{ \frac{\sin \alpha a \sin \alpha(l-x)}{\alpha \sin \alpha l} - \frac{a}{l}(l-x) \right\} & [x > a] \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

故にオイラーの危険荷重は

$$\sin \alpha l = 0 \quad \text{即} \quad \alpha l = n\pi \dots\dots\dots (23)$$

と與へられ (8) 式即横荷重 Q のなき場合と同一である。然し乍ら η の値は Q に比例してゐる故危険荷重以下では Q のあることはこれ無き場合よりも危険であることを示してゐる。

(六) オイラー長柱式の缺點

オイラーによる最小の危険荷重は要するに下式と與へられる。

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \dots\dots\dots (24)$$

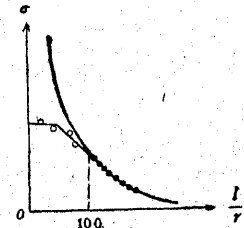
但し此式で兩端回轉端の長柱の長さを l とすれば一端固定他端自由のときは l の代りに $2l$ を用ひ兩端固定のときは l の代りに $\frac{l}{2}$ を用ふればよい。(24) 式から危険壓縮應力を出すとき

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} \dots\dots\dots (25)$$

但し r は柱断面の回轉半徑。

$\frac{l}{r}$ を細長比 (Slenderness Ratio) といふ。(25) は σ と $\frac{l}{r}$ とを坐標軸にとれば一種の雙曲線をなすを以てこれをオイラーの雙曲線 (Euler's Hyperbola) といふ (第 9 圖)。

元來オイラー長柱式は柱が十分に細いものと考へて誘導したものであるから $\frac{l}{r}$ が大きくなければ當てはまらない。例へば鋼柱に於て實驗せる結果は第 9 圖に示す點の如く $\frac{l}{r}$ が充分小さくなれば (凡 $\frac{l}{r} < 40 \sim 20$) 勿論直接應力の場合となつてもはや長柱の範圍ではないがそれ程小さくなくとも $\frac{l}{r} < 100$ ではオイラー式が適合しないのである。



第 9 圖

(七) テトマイヤーの長柱式及直線長柱式

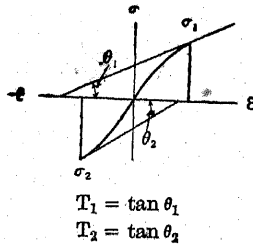
第 9 圖の實驗圖より Tetmajer は鋼柱では $\frac{l}{r}$ が或値以下の時はオイラーの雙曲線よりも一つの直線式の方が實驗とよく適合することを發見した。

$$\sigma = a - b\left(\frac{l}{r}\right) \dots\dots\dots(26)$$

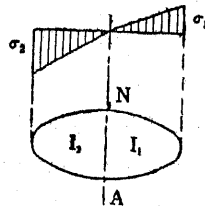
即これをテトマイヤーの直線 (Tetmajer's Straight Line) といふ。Tetmajer は (26) 式とオイラー式とを併用して鋼で作つた長柱断面の凡ての大きさに適用することとした。

(八) エンゲツセル及カルマンの長柱式

Engesser 及 Kármán はあまり長からざる柱は挫屈する際に



第 10 圖



第 11 圖

は大なる曲げを生じ應力は既に弾性限度を超えてゐるといふ新見地よりヤング係数 E の代りに縁應力に應ずる點の接線係數 (Tangent Modulus) を用ひ伸張部に於て T₁ 壓縮部に於て T₂ として下の式を出した (第 10 圖)。

$$(T_1 I_1 + T_2 I_2) \frac{d^2 \eta}{dx^2} = M \dots\dots\dots(27)$$

但 I₁, I₂ は柱の断面の中立軸についての伸張部及壓縮部の慣性モーメントである (第 11 圖)。

或は T₁I₁+T₂I₂ を柱の全断面の中立軸に對する慣性モーメント I で除して

$$T_1 \frac{I_1}{I} + T_2 \frac{I_2}{I} = T \dots\dots\dots(28)$$

T を挫屈係數 (獨 Knickmodul) と呼ぶことがある。又は

$$\frac{T}{E} = \kappa \dots\dots\dots(29)$$

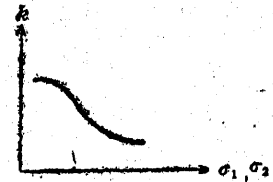
と置き κ を挫屈係數 (獨 Knickzahl) ともいふ。T 又は κ を用ひて (28) 式を書けば

$$\left. \begin{aligned} TI \frac{d^2 \eta}{dx^2} &= M \\ \kappa EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} &= M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

又は

となる。

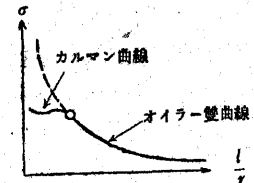
故にオイラーの長柱式に於て EI の代りに κEI を用ひればエンゲツセル及カルマンの式を得。此の κ は材料の種類及 σ₁, σ₂ の値によつて變る (第 12 圖)。



第 12 圖

故に危險壓縮應力 σ と細長比 $\frac{l}{r}$ とを兩軸とする曲線も複雑なる形をなす (第 13 圖)。

此の曲線は $\frac{l}{r}$ の大なる値では勿論オイラーの雙曲線と一致する。



第 13 圖

長柱の設計

(九) 長柱の設計

先づ柱の断面の形状大きさを豫定して慣性モーメント I 又は回轉半径 r を求めこれをオイラー式又は其他の式に入れて危險荷重 P 及危險應力 σ を計算し P の値が所定の荷重より大であり且 σ が使用材料の長柱壓縮強さより小なればよい。

(一〇) 鋼柱の許容應力

鋼柱に於ては通常 $\frac{l}{r} < 40$ を短柱と考へ

$$\left. \begin{aligned} 40 < \frac{l}{r} < 100 \text{ では } \sigma &= 1200 - 5 \frac{l}{r} \text{ (テトマイヤー)} \\ \frac{l}{r} > 100 \quad \sigma &= \frac{21,000,000}{8} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \text{ (オイラー)} \end{aligned} \right\} (31)$$

を以つて長柱の許容應力 (單位 kg 及 cm) とする (鐵道省)。

(一一) シュワルツ及ランキンの長柱式

オイラー長柱式と直接壓縮力の式とを併合して Schwarz 及 Rankine は下の如き實驗式を作つた

$$\text{許容長柱應力 } \sigma = \sigma_c \left\{ \frac{1}{1 + c \left(\frac{l}{r} \right)^2} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

但し σ_c は許容壓縮應力, $\frac{l}{r}$ は細長比即ち l は柱長 r は断面の回轉半径, c は各種の材料及兩端支持の方法によつて異なる實驗値である。

兩端回轉端の場合

鑄 鐵 $c = 0.0007$ 但 $\frac{l}{r} = 20 \sim 150$

鋼 $c = 0.00014$ $\frac{l}{r} = 20 \sim 250$

木 材 $c = 0.00023$ $\frac{l}{r} = 20 \sim 200$

(一二) 直線式

米國に於ては實際上用ひられる柱の細長比がほぼ一定の範圍内にある故屢々直線のみを用ひる。その一二の例を示せば下の如し。

許容長柱應力 $\sigma = 630 - 3 \frac{l}{r}$ 鑄鐵柱 $0 < \frac{l}{r} < 70$ (33)

許容長柱應力 $\sigma = 1120 - 5 \frac{l}{r}$ 鋼 柱 $30 < \frac{l}{r} < 120$ (34)

但何れも回轉端の場合である。