

# V. 梁

## 梁の種類及荷重

### (一) 梁の種類

横から来る荷重を支へる目的に用ふるものを梁といひその支持の方法によつて下の如き種類を生ずる。

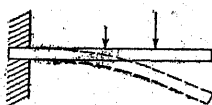
(イ) 単純梁 (Simple Beam) (第1圖)

(ロ) 片持梁 (Cantilever) (第2圖)

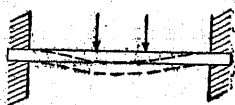
(ハ) 固定梁 (Built-in Beam or Fixed Beam) (第3圖)



第 1 圖



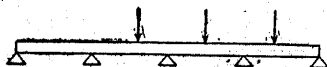
第 2 圖



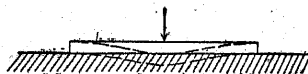
第 3 圖

(ニ) 連続梁 (Continuous Beam) (第4圖)

(ホ) 弾性基礎上の梁 (Beam on Elastic Foundation) (第5圖)



第 4 圖



第 5 圖

### (二) 梁の受ける荷重

梁の受ける荷重を動、不動といふ點から大別して

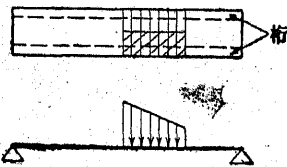
(イ) 固定荷重 (Fixed Load or Dead Load) 梁自身の重量, 橋上の敷石積雪の重量等にて不動の荷重。

(ロ) 移動荷重 (Moving Load or Live Load) 梁の上に去來する各種の車, 人等動的の荷重。

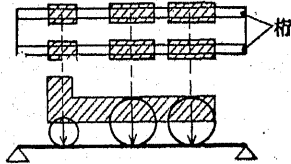
又分布面の大きさにより大別して

(イ) 分布荷重 (Distributed Load) 梁自身の重量, 道路橋上の密集せる群集及鐵道橋上の客車等或面積に分布されたものと假定しうるもの (第6圖)。

(ロ) 集中荷重 (Concentrated Load) 鐵道橋上の機關車の如く車輪と梁との接觸する一點に集中してかゝるものと假定しうべきもの (第7圖)。



第 6 圖



第 7 圖

分布荷重の等しく分布されたるものを等分布荷重 (Uniform Load) といふ (第8圖)。



第 8 圖

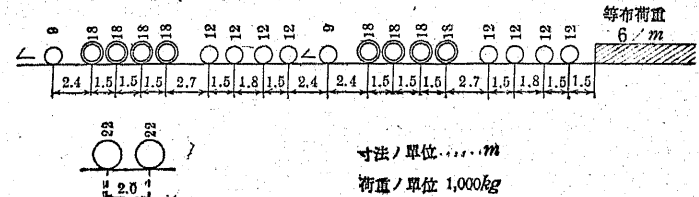
(三) 橋梁及建物の受くる荷重規定

固定荷重の算出には使用材料一立方メートルの重量を下の如くとる。

材料一立方メートルの重量 (kg)

鋼	7850	鐵筋混凝土	2400
鑄鋼	7900	モルタル	1700
鑄鐵	7200	煉瓦	2000
木材	800	石地鋪裝	2600
砂利	1800	煉瓦鋪裝	2200
混凝土	2200	瀝青鋪裝	2100
石材	2500	木地鋪裝	1000
土	1700	マカダム鋪裝	2100

移動荷重は鐵道橋に於ては一軌道に對し下の如き二種の荷重をとる (鐵道省規定)。



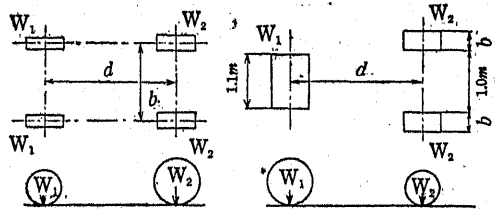
公道橋に於ては群衆荷重としては下の等分布荷重をとり

	車道	歩道
一等橋	600kg/m <sup>2</sup>	500kg/m <sup>2</sup>
二, 三等橋	500 ,,	400 ,,

自動車荷重としては・12噸, 8噸, 6噸の三種, ローラー (Road Roller) 荷重としては 14噸, 11噸, 8噸の三種の各集中荷重をとる (内務省道路規定)。

自動車

輾壓機



自動車		輾壓機	
d	b	W <sub>1</sub>	W <sub>2</sub>
m	m	t	t
12 噸	3.8	1.8	1.5 4.5
8 噸	3.6	1.8	1.0 3.0
7 噸	3.0	1.8	.75 2.26

建物の床に於ては最小限に於て下の如き等分布移動荷重をとる (市街地建築物法)。

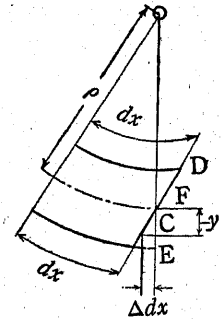
住家	250 kg/m <sup>2</sup>
事務室, 病院	370 "
学校	420 "
集會所, 劇場寄席	500 "
商品陳列館	550 "

梁の應力

(四) 垂直應力

梁に外力がかゝるときは曲げを生じ外曲部は伸び内曲部は縮まり中央に近い處に不變の處があるこれを中立軸 (Neutral Axis) といふ。元々平面であつた横断面が曲げの後にもそのまゝ平面を

なして傾くものと假定し (此を Bernoulli-Euler の假定又は Coulomb の假定といふ)  $xy$  の座標原點を中立軸の上にとり  $x$  を梁の軸の方向にとれば第 9 圖に於て  $dx$  の長さに就いて C 點の伸び  $\Delta dx$  は  $\frac{-dx}{\rho} y$  但  $\rho$  は曲率半径である。



第 9 圖

故に歪度は

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{-y}{\rho} \dots \dots \dots (1)$$

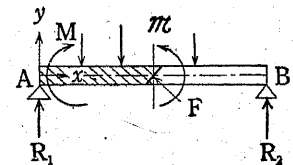
故に C 點の垂直應力  $\sigma_x$  は

$$\sigma_x = -E \frac{y}{\rho} \dots \dots \dots (2)$$

E は常數  $\rho$  は断面 DFE に於ては常數と見ることが出来る故  $\epsilon_x$  及  $\sigma_x$  は共に中立軸上の點 F より上下に等變的分布をなし外曲部に於ては張力内曲部に於ては壓縮力となる。F では曲げによる垂直應力は零である。今この等變垂直應力の F についての力のモーメントの總和を求むれば

$$M = \int \sigma_x y dA = \frac{-E}{\rho} \int_{(A)} y^2 dA = \frac{-\sigma_x}{y} I \dots \dots \dots (3)$$

但  $I = \int_{(A)} y^2 dA$  は F を通り梁に垂直の直線についての断面の慣性モーメントである。



第 10 圖

第 10 圖に於て陰影を施せる部分に働く凡ての外力の F についての力

のモーメントの和を今  $M$  とするときは静止の条件 (I, 6) により (3) 式の  $\mathfrak{M}$  との和は零となる即

$$M - \mathfrak{M} = 0$$

故に

$$\sigma_x = -\frac{M}{I} y \dots \dots \dots (4)$$

$M$  は曲げモーメント (Bending Moment) と稱し各種の梁に於て外力の配置と  $F$  點の位置によつてきまる。特に斷り無き場合に於ては下向凸面の彎曲を起す如に働くときを正の曲げモーメントとする。

$\sigma_x$  は上下の縁  $y = \pm y_0$  に於て最大でありこれを縁應力 (Extreme Fibre Stress) といふ。

$$\sigma_x' = \pm \frac{M}{I} \frac{y_0}{y_0} \dots \dots \dots (5)$$

$\frac{I}{y_0}$  を断面係數 (Section Modulus) といふ [附録 (I) (II) 参照]。角形梁に於て断面の幅  $b$  高さ  $h$  とすれば

$$\sigma_x' = \mp \frac{6M}{bh^2} \dots \dots \dots (6)$$

(五) 剪斷應力

第 11 圖に於て  $\delta x$  の兩面に働く垂直應力の大きさの差  $\delta \sigma_x$  は断面  $A''$  に於ける接線應力  $\tau$  の働きによつて釣合つてゐる。故に陰影部に働く應力の軸方向の釣合を考へれば

$$\int_{(A')} (\sigma_x + \delta \sigma_x) dA - \int_{(A')} \sigma_x dA - \int_{(A')} \tau dA = 0$$

或は 
$$\int_{(A')} \tau dA = \int_{(A')} \delta \sigma_x dA$$

今  $\tau$  を  $b$  の方向に於て不變と考へれば

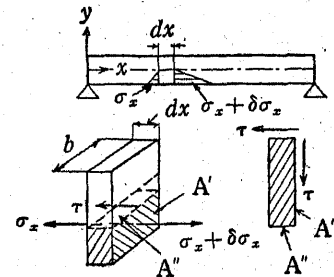
$$\tau = \frac{1}{b} \int_{(A')} \delta \sigma_x dA$$

然るに

$$\sigma_x = -\frac{M}{I} y \text{ なる故}$$

$$\frac{dM}{dx} = S \text{ と置けば}$$

$$\tau = -\frac{1}{bI} \frac{\delta M}{\delta x} \int_{(A')} y dA = -\frac{S G_{A'}}{bI} \dots \dots \dots (7)$$



第 11 圖

この  $\tau$  は  $A'$  面に働く剪斷應力と等しい [I (六) 参照]。

$G_{A'} = \int_{(A')} y dA$  は断面  $A'$  部分 (第 11 圖陰影部) の中立軸についての断面一次モーメントである故に剪斷應力の最大値は中立軸に於て起る。

$S = \frac{\delta M}{\delta x}$  は曲げモーメントの微分係數であるがこれは物體静止の條件より第 10 圖陰影部に働く凡ての外力の  $y$  軸の方向の分力の總和に當り剪斷力 (Shearing Force or Shear) と稱し各種の梁に於て外力の配置と  $F$  點の位置とにより決定する値である。即ち

$$S = - \int_{(A)} \tau b dy \dots \dots \dots (8)$$

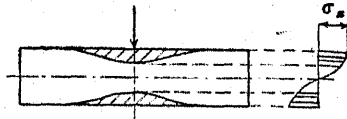
特に斷なき限り上向の値を剪斷力の正の値とする。

角形梁に於ては中立軸剪斷應力は断面の幅  $b$ , 高さ  $h$  とすれば

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{S}{bh} \dots \dots \dots (9)$$

(六) 曲げ応力雑論

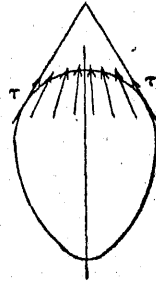
弾性限度を超えて曲げるときは梁の一部は第 12 圖の陰影部の如く塑性領域に入る。従てかゝる部分には上の計算は補正を要する。かゝる場合に於ても尚變形については



第 12 圖

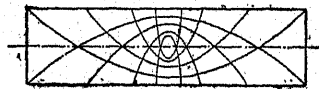
Bernoulli-Euler の假定が用ひらるゝとするも垂直應力はもはや等變的ではなく拋物線に近い分布 (Bach の定理) か又は等分布をなす。

(五) に於て用ひた假定「 $\tau$  が  $b$  について不變」としたのは矩形断面以外の時は當てはまらない。他の形では邊緣で  $\tau$  が邊緣の接線に一致する如になつてゐて第 13 圖の如くなる。



第 13 圖

梁が曲げを受けた場合の主應力曲線 (Principal Stress Line) をかけば下圖の如し。

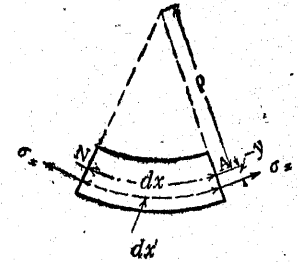
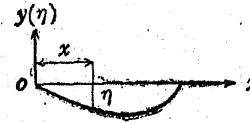


第 14 圖

梁の撓

(七) 垂直應力による撓

剪斷應力の爲めに起る撓は通常小なる故これを略して垂直應力によるもののみを考ふ。



第 15 圖

第 15 圖に於て (2) 式より

$$\frac{y}{\rho} = -\frac{\sigma_x}{E}$$

又 (4) より  $\sigma_x = -\frac{M}{I} y$  故て  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$  ..... (10)

且  $\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2\eta}{dx^2}$   
 $\therefore \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EI}$  ..... (10)

但 M は曲げモーメントである。

(10) を弾性曲線の式 (Equation of Elastic Line) といひ EI を梁の曲げ剛さ (Flexural Rigidity) といふ。

今曲げ剛さを常數と考へて (10) を微分すれば

$$\frac{d^3\eta}{dx^3} = \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} = \frac{S}{EI}$$
 ..... (11)

但 S は剪斷力である。

更に微分して



$$\frac{d^4\eta}{dx^4} = \frac{1}{EI} \frac{dS}{dx} = \frac{q}{EI} \dots\dots\dots(12)$$

但  $q$  は分布荷重であつて (kg/m) で表はす。  $q$  は上向が正下向は負になる。

逆に (10) を積分すれば

$$\frac{d\eta}{dx} = i = \frac{1}{EI} \int Mdx \dots\dots\dots(13)$$

$i$  を撓角 (Deflection Angle) といふ。

更に積分して

$$\eta = \frac{1}{EI} \int \int Mdx \, dx \dots\dots\dots(14)$$

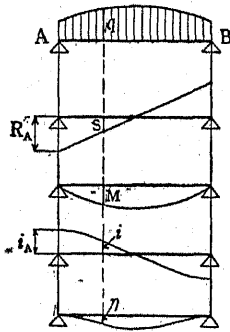
$\eta$  を撓 (Deflection) といふ。

(12) 式から出發して (11) (10) (13) (14) と順次に積分した模様を圖示せば第 16 圖の如し。

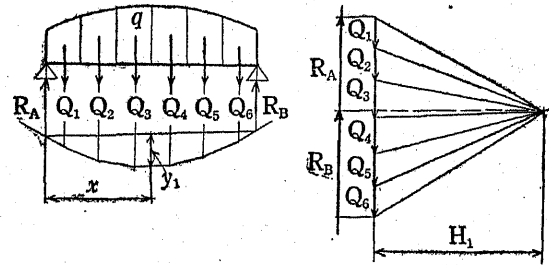
此の積分は A 點の値を考へて積分器を用ひてやれば  $q$  は如何なる分布でも出来る。又は (10) と (12) とより

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^2\eta}{dx^2} &= M \\ \frac{d^2M}{dx^2} &= q \end{aligned} \right\}$$

即この二次積分を二回行へば  $q$  より  $\eta$  を得。此の二次積分を圖式的に行ふには圖解力學 II, (一) の方法を用ひ先づ下式について積分すれば  $q$  より  $M$  を第 17 圖の如くして得。



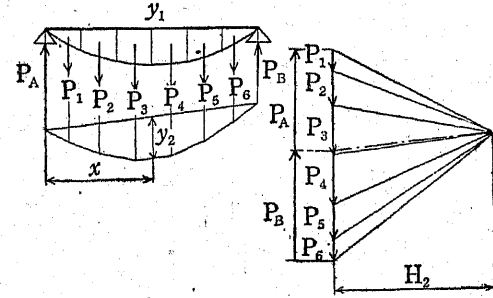
第 16 圖



第 17 圖

$$M = y_1 H_1$$

次に此の  $y_1$  を更に同様に扱つて  $\eta$  を得 (第 18 圖)



第 18 圖

$$EI\eta = y_2 H_1 H_2 \dots\dots\dots(15)$$

(八) 各種の梁の撓表

	$\eta = -\frac{Ql^3}{2EI} \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$
	$\eta_0 = -\frac{Q}{EI} \frac{l^3}{3}$

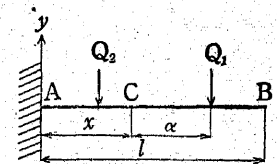
	$\eta = \frac{-Ql^3}{16EI} \left( \frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$ $\eta_0 = \frac{-Q}{EI} \frac{l^3}{48}$
	$\eta = \frac{-Q}{EI} \frac{a^2 b^2}{6l} \left( \frac{2x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2 b} \right)$ $\eta' = \frac{-Q}{EI} \frac{a^2 b^2}{6l} \left( \frac{2x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{(x')^3}{b^2 a} \right)$ $\eta_0 = \frac{-Q}{EI} \frac{l^3}{8} \cdot \frac{a^2}{l^2} \cdot \frac{b^2}{l^2}$
	$\eta = \frac{-Q}{EI} \frac{l^3}{32} \left( \frac{x}{l} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$ $\eta' = \frac{-Q}{EI} \frac{l^3}{32} \left( \frac{1}{4} \frac{x'}{l} + \frac{5}{2} \frac{(x')^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{(x')^3}{l^3} \right)$ $\eta_0 = \frac{-Q}{EI} \frac{17l^3}{768}$
	$\eta = \frac{-Q}{EI} \frac{l^3}{16} \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right)$ $\eta_0 = \frac{-Q}{EI} \frac{l^3}{192}$

	$\eta = \frac{-ql^3}{EI} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{8} \frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{12} \frac{x^4}{l^4} \right)$ $\eta_0 = \frac{-ql}{EI} \frac{l^3}{8}$
	$\eta = \frac{-ql}{EI} \frac{l^3}{24} \left( \frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$ $\eta_0 = \frac{-ql}{EI} \frac{5l^3}{384}$
	$\eta = \frac{-ql}{EI} \frac{l^3}{48} \left( \frac{x}{l} - \frac{3x^3}{l^3} + \frac{2x^4}{l^4} \right)$ $\eta_0 (\text{最大 } \eta) = \frac{-ql}{EI} \frac{l^3}{185}$
	$\eta = \frac{-ql}{EI} \frac{l^3}{24} \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$ $\eta_0 = \frac{-ql}{EI} \frac{l^3}{384}$

片持梁の曲げモーメント及剪断力

(九) 集中荷重の曲げモーメント

第 19 圖に於て OB の間にのる荷重を  $Q_1$ , AC の間にのる荷重を  $Q_2$  とすれば C 點に於ける AC 側の曲げモーメントは下向凸面の彎曲を起すものを



第 19 圖

正とすれば

$$M = -Q_1 \alpha \dots\dots\dots(16)$$

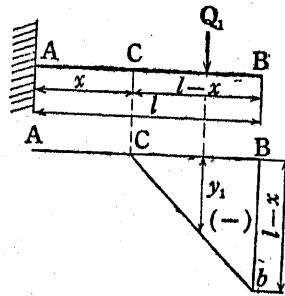
即  $M < 0$  で  $Q_2$  には無関係である。 $Q_1$  が移動荷重なるときは  $\alpha$  が大となる程  $M$  の絶対値は大となり C に於ける AC 側の負最大曲げモーメントは  $Q_1$  が自由端に來りたるときで

$$M_1 = -Q_1(l-x) \dots\dots\dots(17)$$

今  $Q_1 = 1$  として此れを圖式的に示すと第 20 圖の如し。

ACb を影響線 (Influence Line)

と稱し  $y_1$  に  $Q_1$  をかければその位置に  $Q_1$  が來つたときの C 點に於ける AC 側の曲げモーメントが出る。 $Q_1$  が多數あつたときも  $\Sigma Q_1 y_1$  で求められる。



第 20 圖

C 點が A に近づくに従ひ M が

大となることは第 20 圖で明である。故に片持梁で絶対最大曲げモーメントは A 點に於ける値でありしかも  $Q_1$  が自由端に行つた時である即

$$M_0 = -Q_1 l \dots\dots\dots(18)$$

$Q_1$  が多數あるときはこれを加算すればよい。 $M_0$  を端力のモーメント (End Moment) 又は反力のモーメント (Reaction Moment) といふことあり。

(一〇) 集中荷重の剪斷力

第 19 圖に於て C に於ける AC 側の剪斷力は上の方向を正とすれば

$$S = Q_1 \dots\dots\dots(19)$$

$S > 0$  で  $Q_2$  には無関係である。且  $Q_1$  の位置にも無関係である。故に此の場合の影響線は第 21 圖 ACcb の如し。

片持梁の絶対最大剪斷力は A に於て起り

$$S_0 = Q_1 \dots\dots\dots(20)$$

多數  $Q_1$  があれば加算する。 $S_0$  を反力 (Reaction) といふ。

(一一) 等分布荷重の曲げモーメント

等分布荷重の大きさを毎米  $q$  庇とし  $a$  米の間に分布されてゐるものとすれば第 22 圖より C に於ける AC 側の曲げモーメントは

$$M = -qa\alpha \dots\dots\dots(21)$$

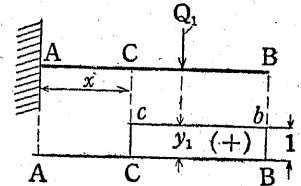
但  $\alpha$  は C より  $a$  の中心迄の距離。

$\alpha$  大なる程  $M$  の絶対値は大であり又  $\alpha$  が變りうればこれが大なる程  $M$  は大となる。故に C に於ける AC 側の最大曲げモーメントはこの場合には CB 間に一ぱいに  $q$  がのつたときで

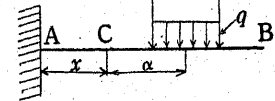
$$M_1 = \frac{-q(l-x)^2}{2} \dots\dots\dots(22)$$

片持梁の絶対最大曲げモーメントは滿載荷重 (Full Load) のときに於て起り

$$M_0 = \frac{-ql^2}{2} \dots\dots\dots(23)$$



第 21 圖



第 22 圖



色々の所に C 点をとつて  $M_1$  の大きさを圖示すれば拋物線で表し得。

(一) 等分布荷重の剪斷力

C に於ける AC 側の剪斷力は

$$S = qa \dots\dots\dots (24)$$

最大の値は  $a$  が變りうれば

$$S_1 = q(l-x) \dots\dots\dots (25)$$

絶對最大値は

$$S_0 = ql \dots\dots\dots (26)$$

$S_1$  を圖示すれば第 24 圖の如し。(22)

と(25)とを比較すると(五)に於けると同じく次の曲げモーメント及剪斷力についての重要な關係式を得。

$$\frac{dM_1}{dx} = S_1 \dots\dots\dots (27)$$

又(25)を微分して

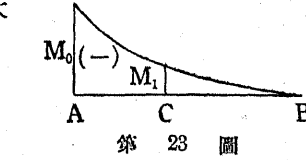
$$\frac{dS_1}{dx} = \frac{d^2M_1}{dx^2} = -q \dots\dots\dots (28)$$

單純梁に於ける曲げモーメント及剪斷力

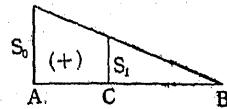
(一三) 集中荷重の曲げモーメント

ト

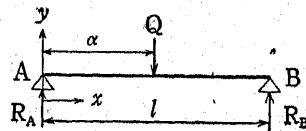
單純梁の曲げモーメントを求むるに際して先づ反力(Reaction)を求めねばならない。第 25 圖に於



第 23 圖



第 24 圖



第 25 圖

て B 點にて力のモーメントをとり零とすれば反力  $R_A$  を得同様に A について力のモーメントをとれば反力  $R_B$  を得。

$$R_A = \frac{Q(l-\alpha)}{l} \dots\dots\dots (29)$$

$$R_B = \frac{Q\alpha}{l} \dots\dots\dots (30)$$

$R_A$   $R_B$  共に正即上向であつて其和の絶對値は荷重  $Q$  に等しい。 $Q$  が移動荷重るときは A にあるとき  $R_A$  最大となり B にあるとき  $R_B$  最大となる。荷重  $Q$  が數個あるときも同様に取扱ひて加算すればよい最大反力は  $Q$  の内の何れかゝその支點の上にあるときである。

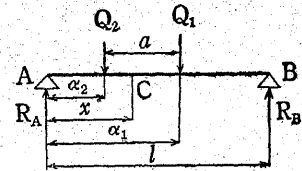
C 點に於ける AC 側の曲げモーメントは  $Q_1$  が C 點の右にあるときこれによつて起る曲げモーメントは

$$M = R_A x = \frac{Q_1(l-\alpha_1)}{l} x \quad [\alpha_1 > x] \dots\dots\dots (31)$$

$Q_2$  が C の左にあるときこれによつて起る曲げモーメントは

$$M = R_A x - Q_2(x-\alpha_2) = \frac{Q_2\alpha_2}{l} (l-x) \quad [\alpha_2 < x] \dots\dots\dots (32)$$

$M$  は何れも正である。 $Q_1$  による曲げモーメントは  $Q_1$  が B にあるとき即  $\alpha_1 = l$  のときは零、 $Q_2$  による曲げモーメントは  $Q_2$  が A にあるとき即  $\alpha_2 = 0$  のとき零、今  $Q_1 = Q_2 = Q$  とするときは  $Q$  が C に来る時は(31)(32)何れの



第 26 圖

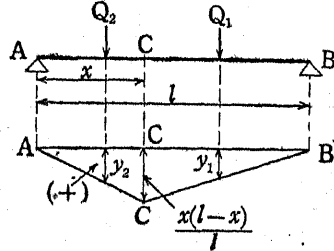
式よりも同じく

$$M = \frac{Qx(l-x)}{l} \dots\dots\dots (33)$$

これ C 點に於ける最大曲げモーメントである。

今  $Q=1$  として影響線をかけば第 27 圖の如し。

$Q_1$  による  $M$  は  $Q_1 y_1$ ,  $Q_2$  による  $M$  は  $Q_2 y_2$  で與へられる。 $Q$  が幾個あつても加算すればよい。 $Q_1, Q_2$  が兩方共あつてしかも  $Q_1$



第 27 圖

と  $Q_2$  との距離  $a$  が橋上の電車

の車輪距りの如く一定なときは  $\alpha_1 = \alpha_2 + a$  で

$$M = \frac{x}{l} \left\{ (l-a)Q_1 - \alpha_2 \left( Q_1 - \frac{l-x}{x} Q_2 \right) \right\} \dots\dots\dots (34)$$

此式で荷重が動いたとき變化するものは  $\alpha_2$  である。故に此の係数を零とする所の

$$\frac{Q_1}{l-x} = \frac{Q_2}{x} = \frac{Q_1 + Q_2}{l} \dots\dots\dots (35)$$

なるときは,  $Q_1, Q_2$  が動いても  $M$  は一定である。この事は  $Q_1, Q_2$  が幾個あつても互の距離が不變ならば成立する。即  $CB$  の上にのつた荷重の和を  $CB$  の長さで割つた比と  $AC$  の上にのつた荷重の和を  $AC$  の長さで割つた比とが等しい時はそのままで荷重が動いても  $M$  の値は不變である。尙この比は何れも全荷重を  $AB$  スパンの長さで割つた比に等しい。即式で書けば上の定理は

$$\frac{\sum Q_1}{l-x} = \frac{\sum Q_2}{x} = \frac{\sum (Q_1 + Q_2)}{l} \dots\dots\dots (36)$$

なるとき  $M$  は不變である。

今連絡した汽關車の如く多數の集中荷重が梁上に来るとき  $C$  點に於て

$$\frac{\sum Q_1}{l-x} > \frac{\sum Q_2}{x}$$

なりとする。

又  $Q_1$  の群から一個(例へば第 28 圖中  $P_1$ ) が  $C$  を超えて  $Q_2$  に入るとき

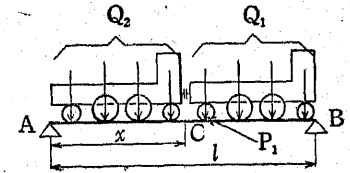
$$\frac{\sum Q_1}{l-x} < \frac{\sum Q_2}{x}$$

となる様なときは  $Q_1$  の群中の  $P_1$  が恰かも  $C$  上にあるとき  $M$  の最大値  $M_1$  を與へる。

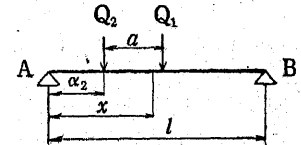
$Q_1, Q_2$  が各一個ならば(第 29 圖)

$$\alpha_2 = x - a$$

$$M_1 = \frac{1}{l} \{ x(l-x)Q_1 + (x-a)(l-x)Q_2 \} \dots\dots\dots (37)$$



第 28 圖



第 29 圖

更に  $C$  點を變へて  $M$  の最大値即桁の絶対最大曲げモーメントの起る點を求めるときは

$$\frac{dM_1}{dx} = 0: \quad x = \frac{(l-x)Q_1 + (l-x+a)Q_2}{Q_1 + Q_2} \dots\dots\dots (38)$$

即  $B$  端から荷重群の重心迄の距離と等しく  $A$  端から距れる  $C$  點をとればこの點に於て梁の絶対最大曲げモーメント  $M_0$  が起る。 $Q_1, Q_2$  が澤山あつてもこの定理は成立する。

(一四) 集中荷重の剪断力

第 26 圖に於て C に於ける AC 側の  $Q_1$  による剪断力は

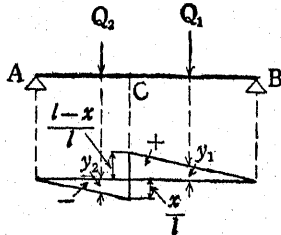
$$S = R_A = \frac{Q_1(l - \alpha_1)}{l} \quad [\alpha_1 > x] \dots\dots\dots(39)$$

同じく  $Q_2$  による剪断力は

$$S = R_A - Q_2 = \frac{-Q_2\alpha_2}{l} \quad [\alpha_2 < x] \dots\dots\dots(40)$$

$Q_1$  による  $S$  は正で  $Q_1$  が B 端にあるとき  $l = \alpha_1$  で零  $Q_2$  による  $S$  は負で  $Q_2$  が A 端にあるとき

$\alpha_2 = 0$  で零となり今  $Q_1 = Q_2 = 1$  と  
して影響線をかけば第 30 圖の如  
し。 $Q_1$  による  $S$  は  $Q_1 y_1$ ,  $Q_2$  による  
 $S$  は  $Q_2 y_2$  で與へられる。 $Q_1 Q_2$  幾  
個もあるときは加算すればよい。



第 30 圖

$Q_1 Q_2$  が共にあつてしかも  $Q_1 Q_2$   
との距離  $a$  が橋上の電車の場合の如く一定なときは  $\alpha_1 = \alpha_2 + a$

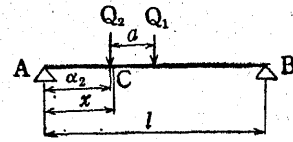
$$S = \frac{1}{l} \{ (l - a)Q_1 - \alpha_2(Q_1 + Q_2) \} \dots\dots\dots(41)$$

此の  $S$  は正負何れにもなりうる。若し  $S < 0$  なるときは  $\alpha_2$  大なる程  $S$  の絶対値は大なる故  $Q_2$  が C 上にあるとき最大負  $S_1$  を與ふ即  $\alpha_2 = x$  (第 31 圖)

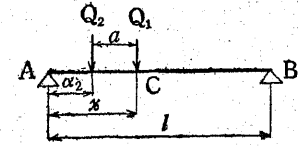
$$S_1 = \frac{1}{l} \{ (l - a)Q_1 - x(Q_1 + Q_2) \} \quad [S_1 < 0] \dots\dots\dots(42)$$

$S > 0$  なるときは  $\alpha_2$  小なる程  $S$  は大となり  $Q_1$  が C 上に来ると

き最大となる即  $\alpha_2 = x - a$  (第 32 圖)



第 31 圖



第 32 圖

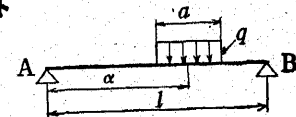
$$S_1 = \frac{1}{l} \{ lQ_1 + aQ_2 - x(Q_1 + Q_2) \} \quad [S_1 > 0] \dots\dots\dots(43)$$

C 點を變じて梁の絶対最大剪断力  $S_0$  を求むるときは  $S_0 < 0$  は B 端に於て起り  $S_0 > 0$  は A 端に於て起り共にその點の反力と等しくなる。

幾個かの  $Q_1 Q_2$  あるときはその各  $Q$  について上のことが當てはまる。

(一五) 等分布荷重の曲げモーメント

等分布荷重の大きさを毎米  $q$  託とし  $a$  米の間に分布されてゐるものとすれば第 33 圖より反力は



第 33 圖

$$R_A = \frac{qa(1 - \alpha)}{l} \dots\dots\dots(44)$$

$$R_B = \frac{qa\alpha}{l} \dots\dots\dots(45)$$

全長に分布された場合は  $\alpha = l$ , 即満載荷重の時は

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2} \dots\dots\dots(46)$$

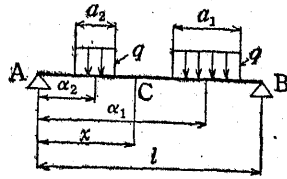
C 點に於ける AC 側の曲げモーメント第 34 圖に於て

$qa_1$  によるもの

$$M = \frac{qa_1}{l}(l - \alpha_1)x \dots\dots\dots (47)$$

$qa_2$  によるもの

$$M = \frac{qa_2}{l}\alpha_2(l - x) \dots\dots\dots (48)$$



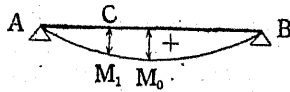
第 34 圖

$\alpha_1, \alpha_2$  が變化しうるものとして最大  $M$  を求むると満載荷重の時に起り

$$M_1 = \frac{qx(l-x)}{2} \dots\dots\dots (49)$$

尙梁の絶対最大曲げモーメント  $M_0$  は満載荷重のとき梁の中央に  $C$  をとるとき起り

$$M_0 = \frac{ql^2}{8} \dots\dots\dots (50)$$



第 35 圖

此等を圖示せば第 35 圖の如し。

(一六) 等分布荷重の剪斷力

第 34 圖に於て  $C$  點に於ける  $AC$  側の剪斷力は  $qa_1$  によるものは

$$S = \frac{qa_1}{l}(l - \alpha_1) [S > 0] \dots\dots\dots (51)$$

$qa_2$  によるものは

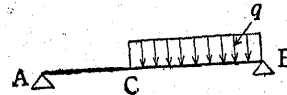
$$S = \frac{-qa_2}{l}\alpha_2 [S < 0] \dots\dots\dots (52)$$

$C$  點に於ける最大剪斷力  $S_1$  は  $S_1 > 0$  なる場合には  $CB$  間に満載で  $AC$  間は荷重なきとき(第 36 圖)に於て起り

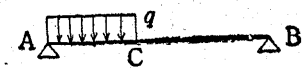
$$S_1 = \frac{q(l-x)^2}{2l} [S_1 > 0] \dots\dots\dots (53)$$

$S_1 > 0$  なるときは  $AC$  間満載  $CB$  間に荷重なきとき(第 37 圖)に起り

$$S_1 = -\frac{qx^2}{2l} [S_1 < 0] \dots\dots\dots (54)$$



第 36 圖

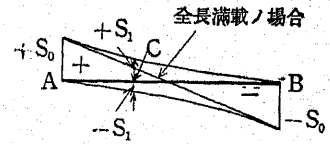


第 37 圖

梁の絶対最大剪斷力  $S_0$  は満載の時  $A$  及  $B$  端に於て起り

$$S_0 = \frac{-ql}{2} [B \text{ 端}] \dots\dots\dots (55)$$

$$S_0 = +\frac{ql}{2} [A \text{ 端}] \dots\dots\dots (56)$$



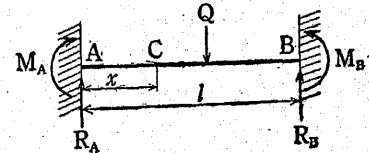
第 38 圖

此等を圖示せば第 38 圖の如し。

固定梁の曲げモーメント及剪斷力

(一七) 端力のモーメントによる曲げモーメント剪斷力

第 39 圖の如き固定梁に於て端力のモーメント (End Moment) を  $M_A$  及  $M_B$  とすれば此の端力のモーメントのみによる反力  $R'_A$



第 39 圖

$R'_B$  は  $B$  及  $A$  について力のモーメントをとれば直に

$$R'_A = -\frac{M_A - M_B}{l}, \quad R'_B = \frac{M_A - M_B}{l} \dots\dots\dots (57)$$

端力のモーメントのみによる C 點に於ける AC 側の曲げモーメントは

$$M' = M_A + R'_A x = M_A - \frac{M_A - M_B}{l} x \dots\dots\dots(58)$$

端力のモーメントのみによる C 點に於ける AC 側の剪断力は

$$S' = -\frac{M_A - M_B}{l} \dots\dots\dots(59)$$

固定梁の C 點に於ける AC 側の曲げモーメント及剪断力は、M', S' に Q の外力による單純梁としての C 點に於ける AC 側の曲げモーメント及剪断力 M'', S'' を加へればよい。即

$$M = M' + M'' \dots\dots\dots(60)$$

$$S = S' + S'' \dots\dots\dots(61)$$

(一八) 端力のモーメント

彈性曲線式  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EI}$  の M に (60) を入れ AB の間に下の積分をすれば (但し EI = 常數と假定す)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \frac{M}{EI} x dx &= \frac{1}{EI} \left\{ M_A \frac{l^2}{2} - (M_A - M_B) \frac{l^2}{3} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^l M'' x dx = l \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_B - (\eta_B - \eta_A) \\ \int_0^l \frac{M}{EI} (l-x) dx &= \frac{1}{EI} \left\{ M_A \frac{l^2}{2} - (M_A - M_B) \frac{l^2}{6} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^l M'' (l-x) dx = -l \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_A + (\eta_B - \eta_A) \end{aligned} \right\}$$

故に

$$\left. \begin{aligned} l(M_A + 2M_B) &= 6EI \left\{ \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_B - \frac{\eta_B - \eta_A}{l} \right\} - \frac{6}{l} \int_0^l M'' x dx \\ l(2M_A + M_B) &= 6EI \left\{ -\left( \frac{d\eta}{dx} \right)_A + \frac{\eta_B - \eta_A}{l} \right\} - \frac{6}{l} \int_0^l M'' (l-x) dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

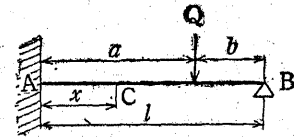
此式により端力のモーメント  $M_A, M_B$  を決定する。

(一九) 一端固定他端支持の梁

(62) 下式に於て

$$\eta_A = \eta_B = 0, \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_A = 0, M_B = 0$$

$$\therefore M_A = -\frac{3}{l^2} \int_0^l M'' (l-x) dx$$



第 40 圖

集中荷重 Q の場合には

$$M'' = \frac{Qb}{l} x \quad [x < a]$$

$$= \frac{Qa}{l} (l-x) \quad [x > a]$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^l M'' (l-x) dx &= \int_0^a \frac{Qb}{l} x (l-x) dx + \int_a^l \frac{Qa}{l} (l-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} Qab(a+2b) \end{aligned}$$

故に端力のモーメント及反力は

$$M_A = -\frac{1}{2l^2} Qab(a+2b) \dots\dots\dots(63)$$

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{1}{2l^3} Qb(3a^2 + 6ab + 2b^2) \\ R_B &= \frac{1}{2l^3} Qa^2(2a + 3b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(64)$$

C 點に於ける AC 側の曲げモーメント及剪斷力は

$$\begin{aligned}
 M = M' + M'' &= \frac{1}{2l^3} Q(l-a) \{ (2l^2 + 2la - a^2)x - la(2l-a) \} \\
 &= \frac{1}{2l^3} Qa^2(3l-a)(l-x) \quad \left. \begin{array}{l} [x < a] \\ [x > a] \end{array} \right\} \dots\dots\dots (65)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = S' + S'' &= \frac{1}{2l^3} Q(2l^3 - 3la^2 + a^3) \quad [x < a] \\
 &= -\frac{1}{2l^3} Qa^2(3l-a) \quad [x > a] \quad \dots\dots\dots (66)
 \end{aligned}$$

等分布満載荷重の場合には其の強度を  $q$  とすれば

$$M'' = \frac{qx(l-x)}{2}$$

$$\therefore \int_0^l M''(l-x)dx = \frac{ql^4}{24}$$

故に端力のモーメント及反力は

$$M_A = -\frac{ql^2}{8} \dots\dots\dots (67)$$

$$\left. \begin{aligned}
 R_A &= \frac{5}{8} ql \\
 R_B &= \frac{3}{8} ql \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

C 點に於ける AC 側の曲げモーメント及剪斷力は

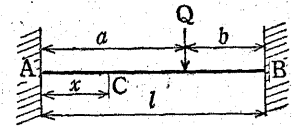
$$M = \frac{q}{8l} (5l^2x - 4lx^2 - l^3) \dots\dots\dots (69)$$

$$S = \frac{5}{8} ql - qx \dots\dots\dots (70)$$

(二〇) 両端固定の梁

(62) 式に於て

$$\eta_A = \eta_B = 0, \quad \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_A = \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_B = 0$$



第 41 圖

$$\left. \begin{aligned}
 \therefore M_A + 2M_B &= -\frac{6}{l^2} \int_0^l M'' x dx \\
 2M_A + M_B &= -\frac{6}{l^2} \int_0^l M'' (l-x) dx \end{aligned} \right\}$$

集中荷重の場合には前節の  $\int_0^l M''(l-x)dx$  及

$$\int_0^l M'' x dx = \int_0^a \frac{Qb}{l} x^2 dx + \int_a^l \frac{Qa}{l} (l-x) x dx = \frac{1}{6} Qab(2a+b)$$

を入れて  $M_A$   $M_B$  を求むれば

$$M_A = -\frac{1}{l^2} Qab^2, \quad M_B = -\frac{1}{l^2} Qa^2b \dots\dots\dots (71)$$

故に

$$R_A = \frac{1}{l^3} Qb^2(3a+b), \quad R_B = \frac{1}{l^3} Qa^2(a+3b) \dots\dots\dots (72)$$

C 點に於ける AC 側の曲げモーメント及剪斷力は

$$\left. \begin{aligned}
 M &= M_A - \frac{M_A - M_B}{l} x + M'' \\
 &= \frac{1}{l^3} Q(l-a)^2 \{ -la + (l+2a)x \} \quad [x < a] \\
 &= \frac{1}{l^3} Qa^2 \{ l(2l-a) - (3l-2a)x \} \quad [x > a] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{M_A - M_B}{l} + S'' \\
 &= \frac{1}{j^3} Q(l^3 - 3la^2 + 2a^3) \quad [x < a] \\
 &= \frac{-1}{j^3} Q(3la^2 - 2a^3) \quad [x > a]
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (74)$$

等分布満載荷重の場合は強度を  $q$  とすれば

$$M_A = M_B = -\frac{1}{12} ql^2 \dots\dots\dots (75)$$

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} ql \dots\dots\dots (76)$$

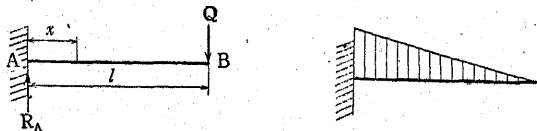
$$M = -\frac{1 - 6\frac{x}{l} + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2}{12} ql^2 \dots\dots\dots (77)$$

$$S = \frac{1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)}{2} ql \dots\dots\dots (78)$$

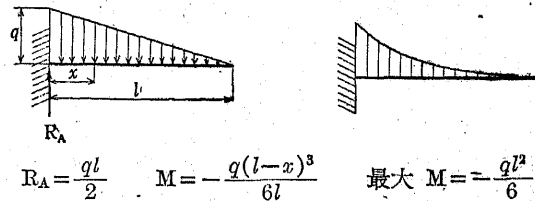
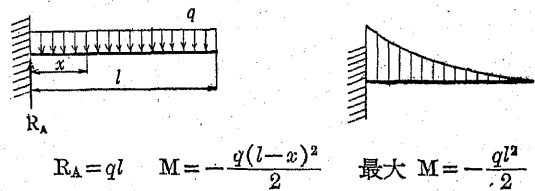
(二) 梁の反力及曲げモーメント

梁の反力及曲げモーメント

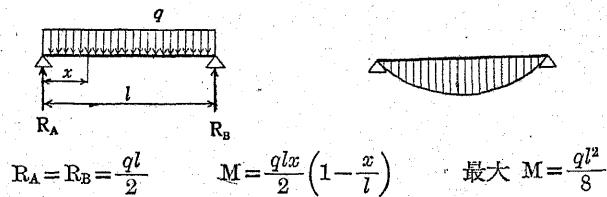
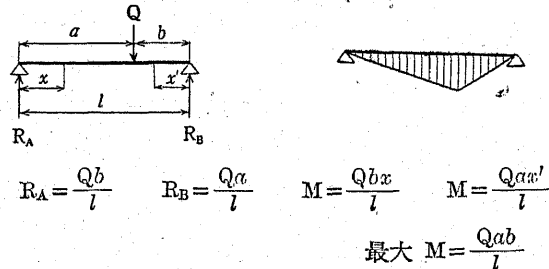
一、片持梁

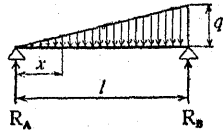


$$R_A = Q \quad M = -Q(l-x) \quad \text{最大 } M = -Ql$$



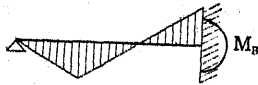
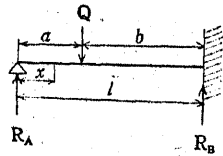
二、単純梁





$$R_A = \frac{ql}{6} \quad R_B = \frac{ql}{3} \quad M = \frac{ql}{6} x \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad \text{最大 } M = 0.128 \frac{ql^2}{2}$$

### 三、一端固定梁

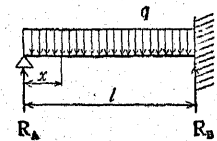


$$M = -R_A x$$

$$M_B = -\frac{Qab}{2l^2} (a+l)$$

$$R_A = \frac{Qb^2}{2l^3} (a+2l)$$

$$R_B = Q - R_A$$



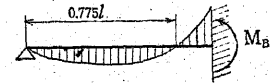
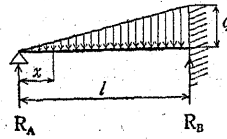
$$M = \frac{qx}{8} (3l - 4x)$$

$$\text{正最大 } M = \frac{9}{128} ql^2$$

$$R_A = \frac{3}{8} ql$$

$$R_B = \frac{5}{8} ql$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{8}$$



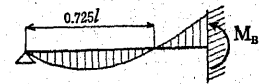
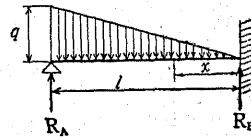
$$M = \frac{qlx}{10} - \frac{qx^3}{6l}$$

$$\text{正最大 } M = \frac{ql^2}{33.5}$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{15}$$

$$R_A = \frac{ql}{10}$$

$$R_B = \frac{2ql}{5}$$



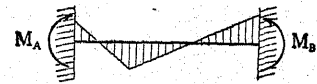
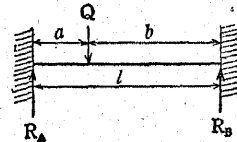
$$\text{正最大 } M = \frac{ql^2}{23.7}$$

$$M_B = -\frac{7}{120} ql^2$$

$$R_A = \frac{11}{40} ql$$

$$R_B = \frac{9}{40} ql$$

### 四、两端固定梁



$$\text{正最大 } M = R_A a + M_A$$

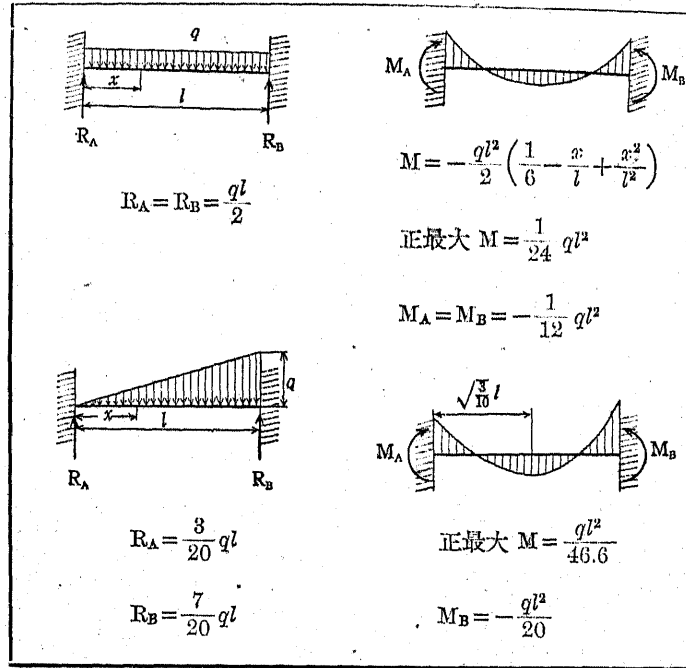
$$R_A = Q \frac{b^2(3a+b)}{l^3}$$

$$M_A = -Q \frac{ab^2}{l^2}$$

$$R_B = Q \frac{a^2(3b+a)}{l^3}$$

$$M_B = -Q \frac{a^2b}{l^2}$$





連続梁に於ける曲げモーメント及剪断力

(二) クラベイロンの

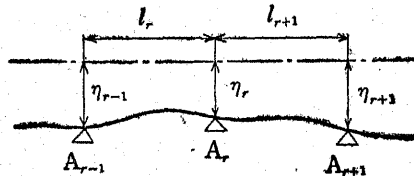
の三力モーメントの

定理

連続せる二梁  $l_r, l_{r+1}$

に (62) の上式及下式

を各々適用すれば



第 42 圖

$$\left. \begin{aligned}
 l_r(M_{r-1} + 2M_r) &= 6EI \left\{ \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_r - \frac{\eta_r - \eta_{r-1}}{l_r} \right\} - \frac{6}{l_r} \int_0^{l_r} M''_r x dx \\
 l_{r+1}(2M_r + M_{r+1}) &= 6EI \left\{ -\left( \frac{d\eta}{dx} \right)_r + \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{l_{r+1}} \right\} \\
 &\quad - \frac{6}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M''_{r+1}(l_{r+1} - x) dx
 \end{aligned} \right\}$$

此を加へるとき

$$\begin{aligned}
 l_r M_{r-1} + 2(l_r + l_{r+1})M_r + l_{r+1}M_{r+1} &= -6EI \left( \frac{\eta_r - \eta_{r-1}}{l_r} - \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{l_{r+1}} \right) \\
 &\quad - \frac{6}{l_r} \int_0^{l_r} M''_r x dx - \frac{6}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M''_{r+1}(l_{r+1} - x) dx \dots \dots (79)
 \end{aligned}$$

此式をクラベイロンの三力モーメントの定理 (Clapeyron's Theorem of Three Moments) といふ。

各支點  $A_{r-1}, A_r, A_{r+1}$  が一直線になれるときは

$$\begin{aligned}
 l_r M_{r-1} + 2(l_r + l_{r+1})M_r + l_{r+1}M_{r+1} &= -\frac{6}{l_r} \int_0^{l_r} M''_r x dx \\
 &\quad - \frac{6}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M''_{r+1}(l_{r+1} - x) dx \dots \dots (80)
 \end{aligned}$$

但  $M''_r$  及  $M''_{r+1}$  は各  $l_r$  及  $l_{r+1}$  上の外力の単純梁としての曲げモーメントである。

(二三)  $n$  ケの連続梁の端力のモーメント及反力

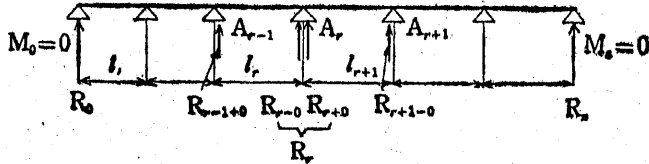
集中荷重に對しては

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^{l_r} M''_r x dx &= \frac{1}{6} Qab(2a+b) \\
 \int_0^{l_{r+1}} M''_{r+1}(l_{r+1} - x) dx &= \frac{1}{6} Qab(a+2b)
 \end{aligned} \right\} \dots \dots (81)$$

満載等分布荷重に対しては

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{l_r} M''_{r-1} dx &= \frac{1}{24} q_r l_r^4 \\ \int_0^{l_{r+1}} M''_{r+1} (l_{r+1}-x) dx &= \frac{1}{24} q_{r+1} l_{r+1}^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots (82)$$

此等は何れも外力により決定する値である故に (80) 式に入れ



第 43 圖

ば右邊は既知の値となるこれを  $k$  で表すときは  $n$  ケの連続梁 (第 43 圖) では

$$\left. \begin{aligned} M_0=0, \quad M_n=0 \\ 2(l_1+l_2)M_1+l_2M_2 &= k_1 \\ l_2M_1+2(l_2+l_3)M_2+l_3M_3 &= k_2 \\ l_3M_2+2(l_3+l_4)M_3+l_4M_4 &= k_3 \\ \dots\dots\dots \\ l_{n-1}M_{n-2}+2(l_{n-1}+l_n)M_{n-1} &= k_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots (83)$$

これより  $M_1, M_2, \dots$  を得。

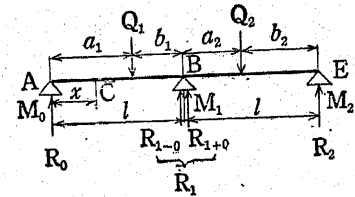
反力は

$$\left. \begin{aligned} R_{r-0} &= \frac{M_{r-1}-M_r}{l_r} + R''_{r-0} \\ R_{r+0} &= -\frac{M_r-M_{r+1}}{l_{r+1}} + R''_{r+0} \\ R_r &= R_{r-0} + R_{r+0} \end{aligned} \right\} \dots\dots (84)$$

但  $R''_{r-0}$  及  $R''_{r+0}$  は單純梁としての  $l_r$  の右端及  $l_{r+1}$  の左端の反力である。

(二四) 等スパン二連梁

第 44 圖に於て左梁にのれる集中荷重を  $Q_1$  右梁にのれるものを  $Q_2$  とすれば



第 44 圖

$$\left. \begin{aligned} M_0=0 \\ M_1 &= \frac{-1}{4l^2} \{Q_1 a_1 b_1 (2a_1+b_1) + Q_2 a_2 b_2 (a_2+2b_2)\} \\ M_2=0 \\ R_0 &= \frac{1}{4l^3} \{+Q_1 b_1 (2a_1^2+7a_1 b_1+4b_1^2) - Q_2 a_2 b_2 (a_2+2b_2)\} \\ R_{1-0} &= \frac{1}{4l^3} \{Q_1 a_1 (4a_1^2+10a_1 b_1+5b_1^2) + Q_2 a_2 b_2 (a_2+2b_2)\} \\ R_{1+0} &= \frac{1}{4l^3} \{Q_1 a_1 b_1 (2a_1+b_1) + Q_2 b_2 (5a_2^2+10a_2 b_2+4b_2^2)\} \\ R_2 &= \frac{1}{4l^3} \{-Q_1 a_1 b_1 (2a_1+b_1) + Q_2 a_2 (4a_2^2+7a_2 b_2+2b_2^2)\} \end{aligned} \right\} (85)$$

C 點に於ける AC 側の曲げモーメント

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1}{4l^3} \{Q_1 (l-a_1) (4l^2 - l a_1 - a_1^2) x - Q_2 a_2 (2l^2 - 3l a_2 + a_2^2) x\} \quad [x < a_1] \\ &= +\frac{1}{4l^3} \{Q_1 a_1 [4l^3 - (5l^2 - a_1^2) x] - Q_2 a_2 (2l^2 - 3l a_2 + a_2^2) x\} \quad [x > a_1] \end{aligned} \right\} (86)$$

C 點に於ける AC 側の剪断力は

$$S = \frac{1}{4l^3} \{ Q_1(l-a_1)(4l^2-la_1-a_1^2) - Q_2a_2(2l^2-3la_2+a_2^2) \} \quad [x < a_1] \quad (87)$$

$$= \frac{-1}{4l^3} \{ Q_1a_1(5l^2-a_1^2) + Q_2a_2(2l^2-3la_2+a_2^2) \} \quad [x > a_1]$$

満載等分布荷重に對しては

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0, & M_1 &= -\frac{1}{8}ql^2, & M_2 &= 0 \\ R_0 &= \frac{3}{8}ql, & R_{1-0} &= \frac{5}{8}ql, & R_{1+0} &= \frac{5}{8}ql \\ R_2 &= \frac{3}{8}ql \end{aligned} \right\} (88)$$

C 點に於ける AC 側の曲げモーメントは

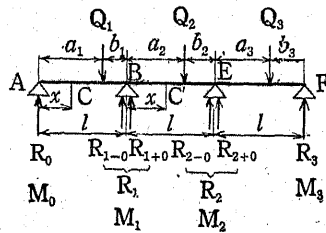
$$M = \frac{\left\{ 3 - 4\left(\frac{x}{l}\right) \right\} \left(\frac{x}{l}\right)}{8} ql^2 \dots\dots\dots (89)$$

同じく剪斷力は

$$S = \frac{3 - 8\left(\frac{x}{l}\right)}{8} ql \dots\dots\dots (90)$$

(二五) 等スパン三連梁

集中荷重の左梁上のものを  
 $Q_1$  中央梁のものを  $Q_2$  右梁の  
 ものを  $Q_3$  とすれば



第 45 圖

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_1 &= \frac{1}{15l^2} \{ -4Q_1a_1b_1(2a_1+b_1) - Q_2a_2b_2(2a_2+7b_2) \\ &\quad + Q_3a_3b_3(a_3+2b_3) \} \\ M_2 &= \frac{1}{15l^2} \{ Q_1a_1b_1(2a_1+b_1) - Q_2a_2b_2(7a_2+2b_2) \\ &\quad - 4Q_3a_3b_3(a_3+2b_3) \} \\ M_3 &= 0 \\ R_0 &= \frac{1}{15l^3} \{ Q_1b_1(7a_1^2+26a_1b_1+15b_1^2) - Q_2a_2b_2(2a_2+7b_2) \\ &\quad + Q_3a_3b_3(a_3+2b_3) \} \\ R_{1-0} &= \frac{1}{15l^3} \{ Q_1a_1(15a_1^2+38a_1b_1+19b_1^2) + Q_2a_2b_2(2a_2 \\ &\quad + 7b_2) - Q_3a_3b_3(a_3+2b_3) \} \\ R_{1+0} &= \frac{1}{3l^3} \{ Q_1a_1b_1(2a_1+b_1) + Q_2b_2(2a_2^2+7a_2b_2+3b_2^2) \\ &\quad - Q_3a_3b_3(a_3+2b_3) \} \\ R_1 &= R_{1-0} + R_{1+0} \\ R_{2-0} &= \frac{1}{3l^3} \{ -Q_1a_1b_1(2a_1+b_1) + Q_2b_2(3a_2^2+7a_2b_2+2b_2^2) \\ &\quad + Q_3a_3b_3(a_3+2b_3) \} \\ R_{2+0} &= \frac{1}{15l^3} \{ -Q_1a_1b_1(2a_1+b_1) + Q_2a_2b_2(7a_2+2b_2) \\ &\quad + Q_3b_3(19a_3^2+38a_3b_3+15b_3^2) \} \\ R_2 &= R_{2-0} + R_{2+0} \\ R_3 &= \frac{1}{15l^3} \{ Q_1a_1b_1(2a_1+b_1) - Q_2a_2b_2(7a_2+2b_2) \\ &\quad + Q_3a_3(15a_3^2+26a_3b_3+7b_3^2) \} \end{aligned} \right\} (91)$$

C 點に於ける AC 側の曲げモーメントは

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{15l^3} \{ Q_1(l-a_1)(15l^2-4la_1-4a_1^2)x - Q_2a_2(7l^2 \\
 &\quad -12la_2+5a_2^2)x + Q_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2)x \} \quad [x < a_1] \\
 &= + \frac{1}{15l^3} \{ Q_1a_1[15l^2-(19l^2-4a_1^2)x] - Q_2a_2(7l^2-12la_2 \\
 &\quad +5a_2^2)x + Q_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2)x \} \quad [x > a_1]
 \end{aligned} \quad (92)$$

C' 點に於ける BC' 側の曲げモーメントは

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{15l^3} \{ -Q_1a_1(l^2-a_1^2)(4l-5x) - Q_2(l-a_2)[la_2(7l-5a_2) \\
 &\quad -5(3l^2+la_2-2a_2^2)x] + Q_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2)(l-5x) \} \\
 &\quad [x < a_2] \\
 &= \frac{1}{15l^3} \{ -Q_1a_1(l^2-a_1^2)(4l-5x) + Q_2a_2[l(3l^2+12la_2-5a_2^2) \\
 &\quad -5(2l^2+3la_2-2a_2^2)x] + Q_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2)(l-5x) \} \\
 &\quad [x > a_2]
 \end{aligned} \quad (93)$$

C 點に於ける AC 側の剪断力は

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{15l^3} \{ Q_1(l-a_1)(15l^2-4la_1-4a_1^2) - Q_2a_2(7l^2-12la_2 \\
 &\quad +5a_2^2) + Q_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2) \} \quad [x < a_1] \\
 &= \frac{-1}{15l^3} \{ Q_1a_1(19l^2-4a_1^2) + Q_2a_2(7l^2-12la_2+5a_2^2) \\
 &\quad - Q_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2) \} \quad [x > a_1]
 \end{aligned} \quad (94)$$

C' に於ける BC' 側の剪断力は

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{3l^3} \{ Q_1a_1(l^2-a_1^2) + Q_2(l-a_2)(3l^2+la_2-2a_2^2) \\
 &\quad - Q_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2) \} \quad [x < a_2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3l^3} \{ Q_1a_1(l^2-a_1^2) - Q_2a_2(2l^2+3la_2-2a_2^2) \\
 &\quad - Q_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2) \} \quad [x > a_2]
 \end{aligned} \quad (95)$$

満載等分布荷重に對しては

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 0, \quad M_1 = M_2 = -\frac{1}{10}ql^2, \quad M_3 = 0 \\
 R_0 &= \frac{4}{10}ql, \quad R_{1-0} = \frac{6}{10}ql, \quad R_{1+0} = R_{2-0} = \frac{5}{10}ql, \\
 R_{2+0} &= \frac{6}{10}ql, \quad R_3 = \frac{4}{10}ql
 \end{aligned} \quad (96)$$

C に於ける AC 側の曲げモーメントは

$$M = \left\{ \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right) \right\} \left( \frac{x}{l} \right) ql^2 \dots \dots \dots (97)$$

C' に於ける BC' 側の曲げモーメントは

$$M = - \left\{ \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right\} ql^2 \dots \dots \dots (98)$$

C' に於ける AC 側の剪断力は

$$S = \left\{ \frac{2}{5} - \left( \frac{x}{l} \right) \right\} ql \dots \dots \dots (99)$$

C' に於ける BC' 側の剪断力は

$$S = \left\{ \frac{1}{2} - \left( \frac{x}{l} \right) \right\} ql \dots \dots \dots (100)$$

### 弾性床上の梁

#### (二六) 集中荷重の場合

弾性基礎上に横はる梁の弾性曲線式は

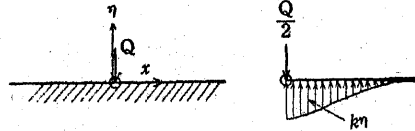
$$EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} = -k\eta \dots\dots\dots(101)$$

但し  $k$  は基礎の弾性による係数で基礎係数 (英 Modulus of the Foundation 獨 Grundziffer) といふ。

今  $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$  として (101) を積分すれば

$$\eta = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \dots(102)$$

無限に長い梁に集中荷重  $Q$  があるときは  $Q$  の下を原点とすれば  $x = \infty$  で  $\eta \neq \infty$  なる爲め  $A = B = 0$



第 46 圖

又原点に於て

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= 0 \\ EI \frac{d^3 \eta}{dx^3} &= S = -\frac{Q}{2} \end{aligned} \right\}$$

なるにより  $C = D = \frac{-Q}{8\beta^3 EI}$

$$\eta = \frac{-Q}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) [x > 0] \dots\dots\dots(103)$$

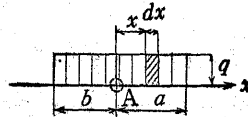
$$M = \frac{-Q}{4\beta} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) \dots\dots\dots(104)$$

(二七) 等分布荷重の場合

第 47 圖に於て  $q dx$  の爲めに起る

A 點の撓は (103) により

$$-\frac{q dx}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$



第 47 圖

故に  $a+b$  に分布されたる等分布荷重の爲めの A 點の撓は

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= -\int_0^b \frac{q dx}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ &- \int_0^a \frac{q dx'}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ &= \frac{-q}{2k} (2 - e^{-\beta b} \cos \beta b - e^{-\beta a} \cos \beta a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(105)$$

此式で  $a, b$  大なるときは

$$\eta_0 = \frac{-q}{k} \dots\dots\dots(106)$$

即此の場合には等分布荷重の中央の所では撓は荷重強度に比例しその比例係数の逆は即基礎係数となる。A を等分布荷重の右端にもち来れば

$$\eta_0 = \frac{-q}{2k} \dots\dots\dots(107)$$

即中央部の半分の撓となる。

梁の設計

(二八) 梁の設計

曲げモーメント及剪断力が梁の各點に於て決定すれば (5) 及 (7) 式によりそれ等の點に於ける最大垂直應力及最大剪断應力を求めこれが許容應力より大ならざる様梁の大きさを決定すればよい。此れ等の算出に要する梁用各種形鋼の慣性モーメント、断面係数の大き等は附録にある。通常長さの梁に於ては剪断力の計算は不要なることが多い。垂直應力に對しては断面係数大なる程これを小にすることが出来る故材料をなるべく中心軸より速くに集める

方経済的である。I 形等はこの目的で出来たのである。今曲げモーメントの影響のみを考へればその値大なる處は梁の高さを高くし小なる處には低くするが経済的である。勿論これは工作費との比較問題ではあるが例へば満載等分布



第 48 圖

荷重の單純梁に於ては巾一定で高さが等しき最大垂直應力をもち餘計な材料を使用せざることとなる。斯くの如き桁を等強度の梁 (Beam of Uniform Strength) といふ。

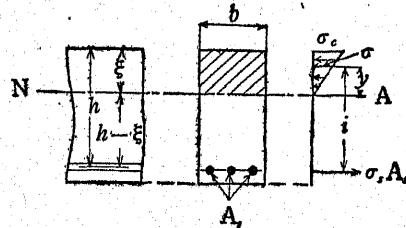
剪断力の影響は全く逆であつて通常曲げモーメントの零の所に最大剪断力あり又剪断應力は中心軸附近垂直應力の零の所で最大である。

(二九) 鐵筋混凝土梁

鋼と混凝土とのヤング係数の比を  $n$  で表はし

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 10 \sim 15 \dots \dots \dots (108)$$

とする。通常鐵筋混凝土梁では混凝土には引張應力は働かぬものと考へる。混凝土の受ける壓縮應力の總和と鐵筋の受ける引張應力と相等しきにより中立軸は壓縮應力を受ける混凝土の面積と鐵筋の斷面積  $A_s$  を  $n$  倍した



第 49 圖

る面積との圖心によつて求めることが出来る。第 49 圖の如く矩形斷面で片側鐵筋の場合に於ては

$$\frac{b\xi^2}{2} = nA_s(h-\xi)$$

$$\therefore \xi = \frac{nA_s}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{2bh}{nA_s}} - 1 \right) \dots \dots \dots (109)$$

慣性モーメントはこの中心軸について

$$I = \frac{b\xi^3}{3} + nA_s(h-\xi)^2 \dots \dots \dots (110)$$

緣壓縮應力(混凝土)は

$$\sigma_c = \frac{M}{I} \xi \dots \dots \dots (111)$$

鐵筋の受ける引張應力は

$$\sigma_s = \frac{M}{I} n(h-\xi) \dots \dots \dots (112)$$

或は

$$\sigma_s A_s = \sigma_c \frac{b\xi}{2}; \quad M = \sigma_s A_s i = \sigma_c \frac{b\xi}{2} i; \quad i = h - \frac{\xi}{3}$$

により

$$\sigma_c = \frac{M}{\frac{b\xi}{2} \left( h - \frac{\xi}{3} \right)} \dots \dots \dots (113)$$

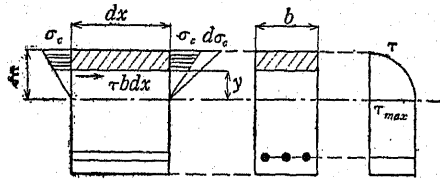
$$\sigma_s = \frac{M}{A_s \left( h - \frac{\xi}{3} \right)} \dots \dots \dots (114)$$

剪断應力は

$$\tau \cdot b \cdot dx = \int_y^{\xi} b d\sigma dy$$

$$d\sigma = \frac{y}{\xi} d\sigma_c =$$

$$\frac{y}{\xi} \frac{dM}{\frac{b\xi}{2} \left(h - \frac{\xi}{3}\right)}$$



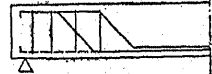
第 50 圖

$$\therefore \tau = \int_y^{\xi} \frac{y}{\xi} \frac{\frac{dM}{dx} dy}{\frac{b\xi}{2} \left(h - \frac{\xi}{3}\right)} = \frac{2 \cdot S}{b\xi^2 \left(h - \frac{\xi}{3}\right)} \int_y^{\xi} y dy$$

此の積分で  $y=0$  とすれば  $\tau_{Max}$  を得。

$$\tau_{Max} = \frac{S}{b \left(h - \frac{\xi}{3}\right)} \dots\dots\dots(115)$$

中心軸以下は剪断應力は鉄筋の所迄はこの値で不變である。混凝土は通常剪断強極めて小（凡許容剪断應力 4 乃至 5 kg/cm<sup>2</sup>）である爲め上記の  $\tau_{Max}$  は肋鐵筋（Stirrup）又は折曲鐵筋（Bend up bar）で支へる様に設計する（第 51 圖）。



第 51 圖

又鐵筋は其の周邊に於て  $dx$  の長さで  $d\sigma_s \cdot A_s = \tau_{Max} b \cdot dx$  の索力に耐へざるべからず故にその單位長に於ける鐵筋と混凝土との附着應力  $\tau_1$  は  $p$  を周邊とすれば

$$\tau_1 = \tau_{Max} \frac{b}{p} = \frac{S}{p \left(h - \frac{\xi}{3}\right)} \dots\dots\dots(116)$$

$\tau_1$  の許容應力は通常 5 kg/cm<sup>2</sup> 位にとる。これが萬一それより大なるときは波形棒（Corrugated bar）を用ひる。