I. 靜力學の原理

力の平衡

(一) 物體靜止の條件

物體が靜止してゐる時は如何なる方向にも直動 (Translation) が起らない故任意の方向に向ふ外力の分力の總和は零である今 $x\ y\ z$ 三軸についての外力の分力を X Y Z とすれば

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

又如何なる軸についても廻轉 (Rotation) を起さない故任意の方向を軸とする外力のモーメントの總和は零である今 $x\ y\ z$ 三軸についての外力のモーメントを $M_x\ M_y\ M_z$ とすれば

$$\Sigma M_x=0,\quad \Sigma M_y=0,\quad \Sigma M_z=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

この Σ は外力についての總和を示す。

(1) 及 (2) は又外力の合力 (Resultant Force) 及合偶力 (Resultant Couple) が零なりといふことと同じである。故に合力の $x\ y\ z$ 軸に對する分力を $\mathfrak{R}_x\ \mathfrak{R}_y\ \mathfrak{R}_z$ とし合偶力の $x\ y\ z$ 軸についてとつたものを $\mathfrak{M}_x\ \mathfrak{M}_y\ \mathfrak{M}_z$ とすれば (1) 及 (2) は

$$\mathfrak{R}_x=0,\quad \mathfrak{R}_y=0,\quad \mathfrak{R}_z=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\mathfrak{M}_x=0,\quad \mathfrak{M}_y=0,\quad \mathfrak{M}_z=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

となる。

以上の條件は物體全體をとつて考へた場合に當てはまるのみならず物體の一部分を切りとつて考へるときでもその切斷面に適當なる力を入れてその部分の釣合が破れない樣にすればこゝにも亦當てはまる。

(二) 平面力の場合の靜止の條件

平面力 (Co-planer Forces) 即力が凡て平面内に働いてゐる時その面を xy 面とすれば (1) (2) (3) (4) は

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\Sigma M_z=0 \quad \cdots\cdots(6)$$

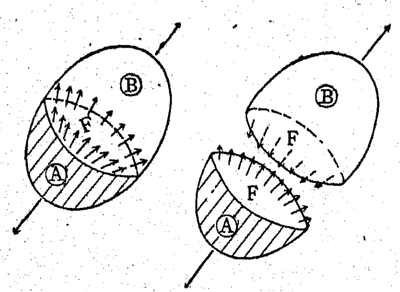
$$\mathfrak{R}_x=0,\quad \mathfrak{R}_y=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\mathfrak{M}_z=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

となる。

應　力

(三) 應　力



第 1 圖

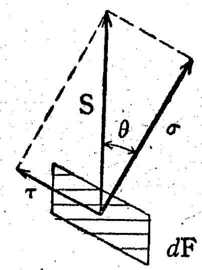
外力の働く物體の內部の切斷面Fに於て應力 (Stress) が存在するとき（第1圖）其の一部 A の切斷面上に働く應力は他部Bの同一切斷面上に働く應力に等しく方向は反對である。即應力は常に一對をなす。

應力の大さ S は切斷面內の微分面積を dF 其の上に働く力を dT とすれば

$$S=\frac{dT}{dF} \quad \cdots\cdots(9)$$

即力を面積で割つたもので表はす。故に應力は面力 (Traction) であつて (kg/cm²) (lbs/ins²) の單位を有する。

(四) 引張應力、壓縮應力及剪斷應力



第 2 圖

應力 S と dF 面の垂線との角を θ とすれば

$$\sigma=S\cos\theta \quad \cdots\cdots(10)$$

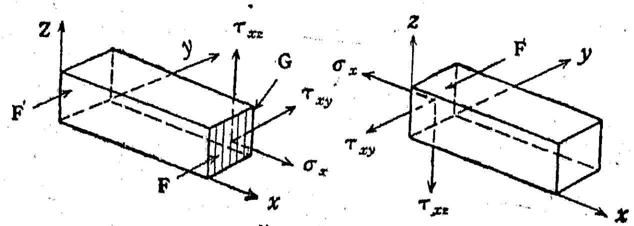
$$\tau=S\sin\theta \quad \cdots\cdots(11)$$

σ を垂直應力 (Normal Stress) といひ物體を此の部分で引き張る樣に働くときこれを引張應力 (Tensile Stress) といひ別に斷りなき場合はこれを正號を以て表はし物體を壓縮する樣に働くときこれを壓縮應力 (Compressive Stress) といひこれを負號を以つて表はす。即 σ の正は引張應力負は壓縮應力を示す。τ を接線應力 (Tangential Stress) 又は剪斷應力 (Shearing Stress) といふ。

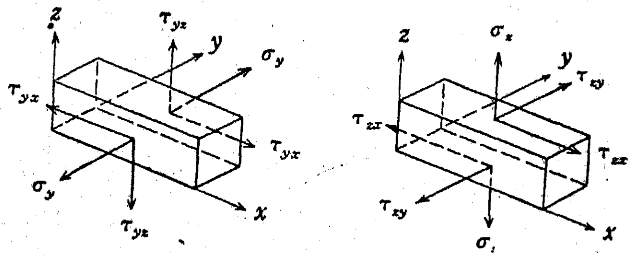
(五) 應力の表はし方

第3圖の如く微量直六面體をとりその上のF面に働く垂直應力を σ_x 接線應力を $\tau_{xy}\ \tau_{xz}$ とする。添附記號のxは應力の働く面を

示し（卽 F 面は x 軸に垂直の面也）y 及 z は接線應力の働く方向を示し第 3 圖に示す方向を以て應力の正の方向とす。F′ 面に於ては從て F 面に於けると反對の方向に向ふ應力が正である。



第　3　圖



第　4　圖

他の面に於ける應力は同様の書き方に從へば

$$\sigma_y,\quad \tau_{yz},\quad \tau_{yx}$$
$$\sigma_z,\quad \tau_{zx},\quad \tau_{zy}$$

となる（第 4 圖）。

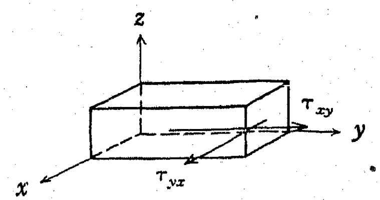
平　面　應　力

（六）　互に直角に交る面内にあつて互に直交する接線應力は常に等しい。

第 5 圖に於て

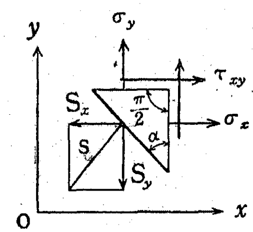
$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}&=\tau_{yx}\\ \tau_{xz}&=\tau_{zx}\\ \tau_{yz}&=\tau_{zy}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(12)$$

同様に

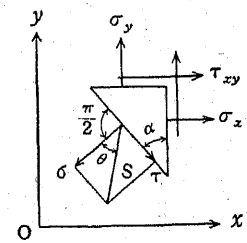


第　5　圖

（七）　互に直角に交る面に於ける應力を以て其の交りを通り任意の傾きをなす面に於ける應力を表はすこと。



第　6　圖



第　7　圖

第 6 圖に於て $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}$ を用ひてこれと α の傾きをなす面の分應力 $S_x\ S_y$ を表せば

$$\left.\begin{aligned}S_x&=\sigma_x\cos\alpha+\tau_{xy}\sin\alpha\\ S_y&=\tau_{xy}\cos\alpha+\sigma_y\sin\alpha\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(13)。$$

同じく第七圖に於て $\sigma,\ \tau$ をこれ等を用ひて表せば

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=S_x\cos\alpha+S_y\sin\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha+2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha\\ \tau&=S_y\cos\alpha-S_x\sin\alpha=(\sigma_y-\sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha+\tau_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

（八）　主應力及主應力面

$\tau=0$ なる場合の σ を主應力（Principal Stress）といひ主應力の

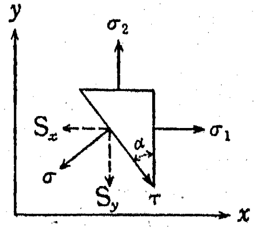
働く面を主應力面 (Principal Plane) といふ。(14) の式から主應力面は

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

で與へられる。卽斯くの如き面は二個あつて互に垂直である。

(九) 互に直角なる二主應力を以て他の面内の應力を表はすこと。

第8圖に於て σ_1 及 σ_2 を各々 x 及 y 面の主應力としこれを用ひて他の α の傾きをなす面の分應力 S_x, S_y を表せば



第 8 圖

$$S_x=\sigma_1\cos\alpha,\ S_y=\sigma_2\sin\alpha\cdots\cdots(16)$$

又 σ, τ を同様に表せば

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_2\sin^2\alpha=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\cos 2\alpha\\ \tau&=(\sigma_2-\sigma_1)\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\sin 2\alpha\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

(一〇) 應力楕圓

(16) 式は σ_1 及 σ_2 を主軸とする楕圓の式である。卽

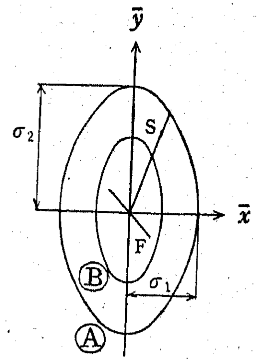
$$\frac{S_x^2}{\sigma_1^2}+\frac{S_y^2}{\sigma_2^2}=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

此れを第一應力楕圓 (First Stress Ellipse) といふ。これによつて物體内の或點に於ける應力 S はその働く面の方向を廻轉するとき常に連續的に楕圓の中心から周邊に至る動徑と等しい變化をすることが解る (第9圖 A)。

但し或面 F 上に働く應力 S の方向を定めるには

$$\frac{S_x^2}{\sigma_1}+\frac{S_y^2}{\sigma_2}=\pm 1\cdots\cdots\cdots(19)$$

なる第二應力圓錐曲線 (Second Stress Conic) 又は方向圓錐曲線 (Stress-director conic) を描いて (第9圖 B) これに F に平行なる切線をひきその切點を通る動徑が卽ち S を示す。(19) の ±1 は σ_1 及 σ_2 の符號如何により楕圓又は雙曲線の實曲線を與へる如くに適宜にとる。



第 9 圖

上記の楕圓より主應力は最大又は最小なる應力であることがわかる。

(一一) モールの圓

(17) より

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^2$$

故に $\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=a$; $\dfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}=b$ と置けば

$$(\sigma-a)^2+\tau^2=b^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

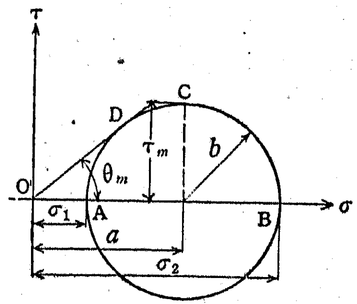
これは $\sigma\,\tau$ を横及縱の坐標軸にとれば σ 軸上の a 點に中心をもち半徑 b に等しい圓の式である (第10圖) 此れをモールの圓 (Mohr's Circle) といふ。

任意の面上に働く應力は原點から此の圓周上に至る動徑で表は

すことが出來る。A, B では $\tau=0$ となり主應力 σ_1 及 σ_2 を示す。C 點は τ の最大値を示す。即

$$\tau_m=b=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\quad\ldots\ldots(21)$$

即最大接線應力は二つの主應力の差の半分に等しい。これは物體の破壊及塑性學上重要なる定理である。圓周上の一點と原點を結ぶ動徑の σ 軸となす角は應力 S の F 面の垂線となす傾き θ を示すにより第10圖の D 點は最大傾斜 θ_m をなす場合の應力を示す。故に

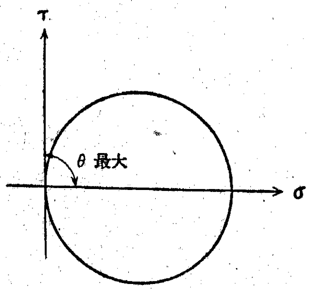


第　10　圖

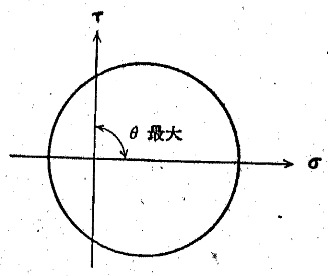
$$\sin\theta_m=\frac{b}{a}=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+\sigma_1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

これは土壓論に於て用ひられる定理である。

第10圖は $\sigma_1>0, \sigma_2>0$ の場合のモール圓であるが $\sigma_1=0, \sigma_2>0$ 及 $\sigma_1<0, \sigma_2>0$ の時は第 11 圖第 12 圖の如くなる。



第　11　圖



第　12　圖

これ等の場合には

$$\theta_m=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

となる。

(一二)　任意の二面に於ける應力及傾斜角から主應力を求むること。

F_1 面上の應力 S_1 垂線となす傾斜角 θ_1, F_2 面上の應力 S_2 垂線となす傾斜角 θ_2 が與へられて主應力 σ_1, σ_2 を求むるには F_1, F_2 の σ_2 軸となす角を α_1, α_2 とすれば (16) (17) より

$$S_1^2=\sigma_1^2\cos^2\alpha_1+\sigma_2^2\sin^2\alpha_1$$

$$S_2^2=\sigma_1^2\cos^2\alpha_2+\sigma_2^2\sin^2\alpha_2$$

$$S_1\cos\theta_1=\sigma_1\cos^2\alpha_1+\sigma_2\sin^2\alpha_1$$

$$S_2\cos\theta_2=\sigma_1\cos^2\alpha_2+\sigma_2\sin^2\alpha_2$$

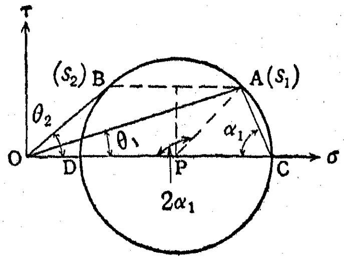
なるによりこれより

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}&=\frac{S_1^2-S_2^2}{2(S_1\cos\theta_1-S_2\cos\theta_2)}\\ \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}&=\sqrt{\left(\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(S_1\cos\theta_1+S_2\cos\theta_2)(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2)}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(24)$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos 2\alpha_1=\frac{\sigma_2+\sigma_1-2S_1\cos\theta_1}{\sigma_2-\sigma_1}\\ \text{又は}\qquad&\cos 2\alpha_2=\frac{\sigma_2+\sigma_1-2S_2\cos\theta_2}{\sigma_2-\sigma_1}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

を得らる從つて $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2$ を求め得。

モール圓を用ひて圖式的に解けば第 13 圖の如し。即 OA を S_1 にとり OB を S_2 にとり AB の垂直二等分線と σ 軸との交點を P とすればこれを中心として AB を通る圓を描けば此れモール圓である。夫れ故に $OC=\sigma_2$, $OD=\sigma_1$, $\angle ACD=\alpha_1$ となる。



第 13 圖

（一三） 二つの共軛應力 S_1, S_2 が與へられて主應力 σ_1, σ_2 を求むる式。

應力方向楕圓で S_1, S_2 が一組の共軛徑に當る時卽ち S_1, S_2 の働く面 F_1, F_2 内に S_2 及 S_1 が夫れ夫れ入つてゐる時此れを共軛應力 (Conjugate Stress) といふ。故にこの場合には $\theta_1=\theta_2=\theta$ で (24) 及 (25) は下の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}&=\frac{S_1+S_2}{2\cos\theta}\\ \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}&=\sqrt{\left(\frac{S_1+S_2}{2\cos\theta}\right)^2-S_1S_2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

$$\cos 2\alpha_1=\frac{\sigma_2+\sigma_1-2S_1\cos\theta}{\sigma_2-\sigma_1},\quad 又は$$

$$\cos 2\alpha_2=\frac{\sigma_2+\sigma_1-2S_2\cos\theta}{\sigma_2-\sigma_1}\cdots\cdots(27)$$

（一四） 二つの互に直角なる面上の應力 σ_x, σ_y, τ_{xy} を知つて主應力を求むる式。

$$S_1^2=\sigma_x^2+\tau_{xy}^2$$

$$S_2^2=\sigma_y^2+\tau_{xy}^2$$

$$S_1\cos\theta_1=\sigma_x$$

$$S_2\cos\theta_2=\sigma_y$$

を (24) (25) に入れて

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\\ \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}&=\sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

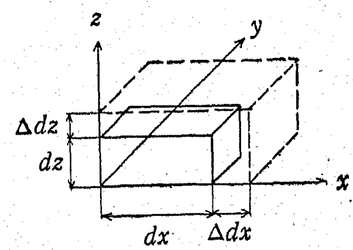
$$\cos 2\alpha_1=-\cos 2\alpha_2=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{\sigma_2-\sigma_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

歪

（一五） 歪

外力を受ける物體が彈性體なるときは應力の爲めに變形して歪 (Strain) を生ずる。今微量直六面體をとつて其 x y z 軸の方向に起る伸びを Δdx, Δdy, Δdz とし元の長さ dx, dy, dz で此を割り

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\Delta dx}{dx}\\ \varepsilon_y&=\frac{\Delta dy}{dy}\\ \varepsilon_z&=\frac{\Delta dz}{dz}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(30)$$



第 14 圖

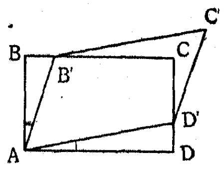
これを縱歪 (Longitudinal Strain) といふ。元の長さより伸びたるとき正にとり縮まりたるとき負にとる。卽ち引張應力に對しては歪度も亦正となり壓縮應力に對しては負となる。

又第 15 圖の如く直六面體の xy 面 ABCD が菱形 AB′C′D′ に

變形するとき

$$\gamma_{xy}=\angle \mathrm{BAB}'+\angle \mathrm{DAD}' \text{......................} (31)$$

を剪斷歪 (Shearing Strain) といふ。xy 面のみならず yz, zx 面に於ても同樣のこと起り得べきによりそれ等を γ_{yz}, γ_{zx} をを以て表す。剪斷歪は接線應力の爲めに起り接線應力が正なる時にこれに伴ふ剪線歪を正とする。

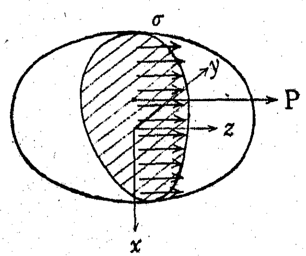


第 15 圖

歪にも剪斷歪が零となる主歪 (Principal Strain) 及主歪面があり此の後者は主應力面と一致してゐる。

垂直應力の合成

(一六) 平面斷面に於て働く垂直應力が到る處等しい場合の合力



第 16 圖

第 16 圖に於て垂直應力 σ が到る處等しい場合斷面の大さを A とすれば合力 (Resultant Force) の大さは

$$\mathrm{P}=\sigma \mathrm{A} \text{...........} (32)$$

P の通る點は A の圖心 (Centroid) である。

即

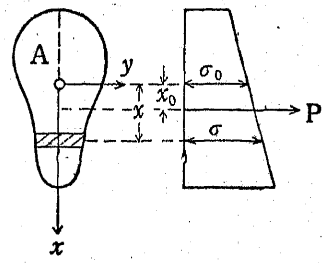
$$x_0=\frac{\mathrm{G}_y}{\mathrm{A}},\quad y_0=\frac{\mathrm{G}_x}{\mathrm{A}} \text{......................} (33)$$

但し G_x, G_y は x 及 y についてとつた斷面 A の斷面一次モーメントである (附錄 I 參照)。

(一七) 平面斷面が x 軸について對稱形で垂直應力が x について等變的の場合の合力

第 17 圖に於て坐標原點を圖心にとり σ は y に平行な線上では等しいとき圖心の所の σ を σ_0 とすれば合力の大さは

$$\mathrm{P}=\sigma_0\mathrm{A} \text{...........} (34)$$



第 17 圖

P の通る點は

$$x_0=\frac{\sigma-\sigma_0}{x}\ \frac{\mathrm{I}_y}{\mathrm{P}} \text{..........................} (35)$$

但し I_y は y 軸についての斷面 A の慣性モーメント (Moment of Inertia) である (附錄 I 參照)。

x に於ける垂直應力は

$$\sigma=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}}\left(1+\frac{x\,x_0}{r_y^2}\right) \text{..........................} (36)$$

但 r_y は y についての斷面 A の回轉半徑 (Radius of Gyration) である。

y 軸に就いて合力のモーメントをとれば

$$\mathrm{M}_y=\mathrm{P}x_0=\frac{\sigma-\sigma_0}{x}\ \mathrm{I}_y \text{......................} (37)$$

但坐標軸の方向を指さして時計の針と反對の方向に廻轉する樣な偶力を正にとる。

x に於ける垂直應力は (37) より

$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{M_y}{I_y}x \qquad \cdots\cdots(38)$$

これは (36) と同一式である。

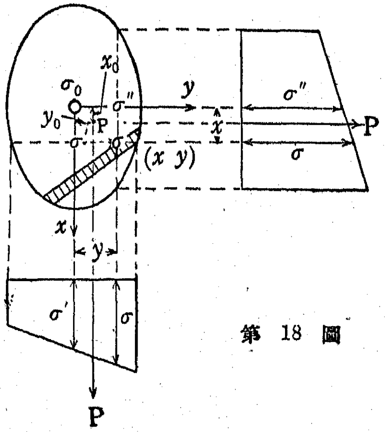
(一八) 平面斷面が x 及 y 軸について對稱形で垂直應力が x 及 y について等變的の場合の合力

第 18 圖に於て坐標原點を圖心にとり σ は圖に示す陰影線上に於ては等しく x y について一つの平面をなして變化するものとすれば合力は

$$P=\sigma_0 A \qquad \cdots\cdots(39)$$

P の通る點は

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{\sigma'-\sigma_0}{x}\ \frac{I_y}{P} \\ y_0&=\frac{\sigma''-\sigma_0}{y}\ \frac{I_x}{P}\end{aligned}\right\}\cdots(40)$$



第 18 圖

垂直應力は
$$\sigma=\frac{P}{A}\left(1+\frac{x_0 x}{r_y^2}+\frac{y_0 y}{r_x^2}\right) \qquad \cdots\cdots(41)$$

x, y 軸について合力のモーメントをとれば

$$M_x=-Py_0=-\frac{\sigma''-\sigma_0}{y}I_x, \quad M_y=Px_0=\frac{\sigma'-\sigma_0}{x}I_y \quad \cdots\cdots(42)$$

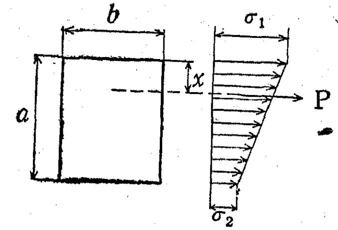
垂直應力は

$$\sigma=\frac{P}{A}-\frac{M_x}{I_x}y+\frac{M_y}{I_y}x \qquad \cdots\cdots(43)$$

(一九) 等變垂直應力の合力及合偶力の例

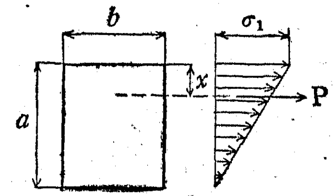
$$P=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}ab,$$

$$x=\frac{a}{3}\ \frac{\sigma_1+2\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2},$$



$$P=\frac{\sigma_1}{2}ab,$$

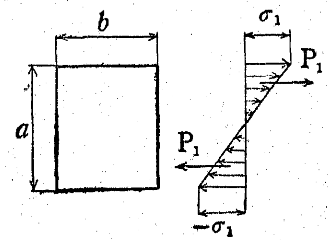
$$x=\frac{a}{3},$$



$$P_1=\sigma_1\frac{ab}{4},$$

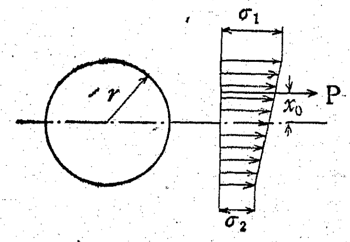
$$P=0,$$

$$M=\sigma_1\frac{ba^2}{6}$$



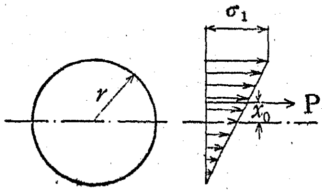
$$P=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\pi r^2,$$

$$x_0=\frac{r}{4}\ \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2},$$



$$P=\frac{\sigma_1}{2}\pi r^2,$$

$$x_0=\frac{r}{4},$$



$$M=\sigma_1\frac{\pi r^3}{4},$$

$$F=0$$