

## 第九章 建物其他の構造物の振動

### 163. 構造物の種類及びその振動の原因

こゝに構造物と名をつけたのは、建物、橋梁、煙突、塔など特に建築學、土木學に關係のある構造物のみを指すのである。かうしておいた方が、振動の原因やその傳はり方などに共通な點がある爲に便利であると考へられるし、又、之等の構造物には架構的の物が比較的によく含まれてをって他の一般構造物から切離して考へる方が都合がよいやうに思はれたからである。實際の場合にも構造物を上述の意味に取つてゐることが屢々あるやうに思ふ。それで本章に於ても構造物といへば常に斯る定義のもとにあるものと假定しておく。

さて構造物の振動問題で第一に重要な事柄は地震動による振動である。歐米諸國のことはともかくとして、我國の如き地震國では地震現象を除いて構造物の振動を論ずることは全く無意味な程に思はれる。耐震構造學といふものは我國だけで發達したものと言つても過言でないと思ふ。勿論、我國に發達した耐震構造學も學問としては餘り完全ではないけれども、諸外國では今まで殆ど顧みられなかつた爲に、從て耐震構造については外國でもその研究の文獻などが極めて乏しいやうである。

振動の原因としてその次に考へられることは、機械の運轉や走行車體に基づく構造物の振動である。工業文化の發達に伴つて之等は益々緊要な問題になりつゝあることはいふまでもない。内燃及び蒸氣機關や其他の振動を起すやうな機械のある工場自身や、その附近の建物の振動問題、鐵道等に接近せる家屋、列車が通過するときの橋梁の振動などは諸外國でも常に注意されて來た事柄である。

尙、水力や風力等の流體力學的原因による振動も構造物の振動として餘り侮ることができぬ。無線電信塔や電線を含む電柱等が高速の風によつて常に振動する事はよく知られてゐる。

斯の如く振動の原因を大別して三種類となすことができるけれども、一番大切なのはやはり地震動による振動の問題である。故に本章でもこの場合を特別によく考へることとする。

#### 164. 地震動に伴ふ構造物振動型の種類

地震動の性質は後章に於て述べることにするが本章の必要上から地震が傳はつて來る場合に構造物のある土地が大體如何なる動き方をするかといふことを極く簡単に説明して見ようと思ふ。勿論、地震の型といつても場合場合によつて非常に違つてをり、假令同一の地震であつても震央からの距離や土地の性質によつて著しく變つてゐるものである。しかし震央から適當の距離に當つてゐる所では地震動が大體三つの位相から成立つてゐる。地震の起り初めから少しの間は不規則に小さく揺れる部分があり、そのうちに急に大きく而も割合規則的な振動をなす部分が起り、其後に多少緩く且つもつと規則的の振動があつて地震が終るのである。この初期の部分に初期微動 (preliminary tremor) と名づけ、地震の進む方向に振動する所謂縦波の部分である。中間の大きく揺れる所を主要動 (main shock) といひ、建物が被害を被るのはこの部分である。この主要動の中に種々の位相があるけれども、大きく揺れる部分は波の進行方向に直角に且つ水平の動き方をなすものである。主要動の終りから最後の位相にかけては波の進行方向や上下方向の變位をも含んでゐる。尚、震央から非常に遠い所では前述の初期微動と主要動の間に第二初期微動があり、これは變位は僅かであるけれども波の進行方向に直角な變位が多く、弾性體の横波に屬するものである。以上は地震記象の比較的普通の場合を示しただけであるが、實際には種々特別な振動形式があるのであつて、こゝで一々説明する暇がない。それで委しいことは土地の振動問題に譲ることとして、こゝに注意を促しておき度いことの一つは地震動は一般に非常に不規則なものであつて、週期的の振動などは殆どなく、單に結果として擬週期的な場合が多いことと、その擬週期的な週期も場合場合によつて變るとはいへ、大抵の近地地震の主要動は數分の一秒乃至數秒といつた場合が多いといふ事柄である。従て構造物に及ぼす事項として共振のやうな現象を考へることがやはり大切である。又、他方には單に衝撃による力の

みを與へるやうな作用をなすこともあつて、問題を深く考へると一層複雑になるものである。

地震の與へる力、所謂震力に關して種々の人が夫々程度の階級を與へてゐる。例へば大森博士は地震の最大加速度毎秒 300 耗乃至 4000 耗を 1 乃至 6 の震度に分けておき、之に 4000 耗より遙かに大なる所を 7 として加へ結局七個の震度に分けた。又、中央氣象臺は單に力のみでなく、被害の程度から微震、弱震、強震、烈震に分けて考へ、靜止した人が一寸感じる位を微震、一般の人が氣付き家や戸障子が強く動いたりする場合を弱震、坐りの悪いものが倒れたり、壁に龜裂が出來たりする場合を強震、家が潰れたり山崩れが起る大地震を烈震と名づけてゐる。之等の分け方は何れも餘り科學的ではないけれど、家屋の設計などの爲に相當な目安となるものである。

次に震動の週期も前述の如く餘り明瞭ではないけれども、その效果的の週期や震動形の鋭さは構造物の種々の大きさや組立に相當して夫々特有の振動型式を與へるものである。勿論、この振動型式は振動週期や鋭さに大して關係がなく、構造物の構造様式によつて大體は定まるものであるけれども、この週期及び鋭さによつて型が多少變更することは明かな事實である。例へば、同じ建物でも長週期の地震動によつては動搖的動き方をなすとしても、短週期の震動では剪斷的の變形振動をなすが如きがそれである。

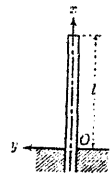
地震動の主要な部分は水平の動き方をなすのが通例であることは誰でも知つてゐるが、上下動もやはり存在するものである。主要動中の極めて規則正しい或る部分や、深層部から進んで來る地震は目立つた上下動がある。其他一般の地震動でも多少上下動を含むものである。しかし建物に被害を及ぼすやうな地震では上下動は水平動に比較して割合に小さいのが普通である。故に構造物震動の計算や實驗は主としてこのやうな場合を狙つて研究することが非常に多い。

構造物振動の形式は前述の事情や構造物基礎の状態、及び構造の種類に應じて種々できる譯である。例へば、建物が割合に剛に出來上つてゐて基礎が緩い場合には地震が同じでも建物全體としての動搖が起るであらうし、基礎の割合に建物が剛でなく而も幅に比して餘り高くない建築では、全く同じ地震であつても建物に弾性

應力のかゝるやうな振動がよく誘起されることが想像できる。又、構造物が塔状をなすときは屈曲振動が起り、架橋構造の場合には各組織的素材は屈曲振動をなしても全體としては剪断振動の如き型を取る。同様にして地震動の週期や鋭さによつても構造物振動の型が違つて來ることは既に述べた通りである。以上の如く様々の條件によつて振動型の變ることは構造物の振動の研究を一層複雑ならしめるものである。しかし、地震動の型が大抵或る範囲内にあるといふことはわかつてゐるから、各構造物の種類に應じてなるべく實際の地震動的數値を入れて計算を施せば、それに類似の構造物の耐震の比較には充分役立つであらう。

### 165. 塔状構造物の震動

地上構造物の中には煙突や無線塔の如く細長いものが案外多く、而も之等は地震の場合に壊れ易いばかりでなく、土地土地の地震動の強さを比較するに極めて便利な材料ともなるのである。しかし之等は上部程次第に細くなつてをり、塔體と見做すことはどうかと思はれるけれども、取扱が便利なことと、出て來る結果がその性質を極めてよく表して呉れる爲に、一應は塔體として計算を行ふべきである。この問題に最も早く注目したのは物部博士<sup>1)</sup>であつて、同氏は地震動が一定週期をなす水平動であるときに塔狀體が振動する模様を正確なる力學を以て研究したのである。其後末廣博士<sup>2)</sup>は一般の地震が示してゐるやうに不規則な型の地動がある場合の振動を之亦力學的に計算したのであつて、塔狀體の震動問題はこれだけでも完璧に近い所まで進んでしまつたやうにも思はれる。



第 137 圖

左圖に示す如く  $x$  軸を塔體の長さの方向に取り、 $y$  を  $x$  なる點の撓みの變位とすれば、塔狀體の振動方程式が

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k^2 b^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

となることは既に述べてある。こゝに  $k$  は斷面の慣性半徑、 $b^2 = E/\rho$ 、 $E$  は Young

<sup>1)</sup> 物部長徳, “塔狀構造物の震動並に其耐震性に就て,” 土木學會誌, 5 (1919), 561-647.

<sup>2)</sup> 末廣恭二, “構造物振動の理論及其測定法,” 建築雜誌, 40, 第 434 號 (1920), 531-559; “Vibration of a Structure and Methods of measuring it,” 井口集.

率、 $\rho$  は密度である。この式には塔體の自重による影響は入つてをらぬ。又、塔體が太い場合の影響も考へぬことにする。式 (1) の解を塔體の自由振動に對して求めることは極めて容易であるけれども、數多の書物に載つてゐるからこゝでは説明を省く。

地震動が  $2\pi/p$  なる週期及び振幅  $\beta$  を以て定常的に水平振動をなす場合を考へることは塔狀體の性質の一部をしらべるには充分である。物部博士の計算を末廣博士のと同じ符號で表すことにして、地動を

$$y_0 = \beta \cos pt \quad (2)$$

と書く。塔體の振動は (1) から

$$y = \beta U \cos pt \quad (3)$$

の形を取るべきである。然るときはこの  $U$  なる  $x$  の函數は

$$\frac{d^4 U}{dx^4} - \frac{m^4}{l^4} U = 0 \quad (4)$$

なる微分方程式で與へられる譯である。但し  $m^4/l^4 = p^2/k^2b^2$ 。さて (4) の解式は容易に書くことができるが、今塔體の兩端の條件

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad U=1, \quad \frac{dU}{dx}=0. \\ x=l; \quad \frac{d^2 U}{dx^2}=0, \quad \frac{d^3 U}{dx^3}=0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を満足するやうな解式を書いて見ると

$$U = \frac{1}{2} \left[ \left( \cos \frac{m}{l} x + \cosh \frac{m}{l} x \right) - \frac{\sin m \sinh m}{1 + \cos m \cosh m} \left( \cos \frac{m}{l} x - \cosh \frac{m}{l} x \right) + \frac{\sin m \cosh m + \cos m \sinh m}{1 + \cos m \cosh m} \left( \sin \frac{m}{l} x - \sinh \frac{m}{l} x \right) \right] \quad (6)$$

となる。

物部博士は大體上述のやうな形でもつて振動による撓みを算出したのであつて、この  $U$  を式 (3) の中へ入れれば時々刻々の振動の形がわかる譯である。(6) に於て

$$1 + \cos m \cosh m = 0 \quad (7)$$

と置くときは  $U$  が無限大となり、柱の振幅が非常に増大することがわかる。然るに Rayleigh の教科書<sup>1)</sup> などによつて (7) は下端固定、上端自由なる棒の自由振動の各型の週期に相當する  $p_r (= m^2 kb/l^2)$  を與へる式である。従て、地震動の週期が自由振動週期の一つと一致した場合に (7) が成立するのであつて、共振の性質を示すのは當然といはねばならぬ。

振動によつて生ずる構體の屈曲モーメントは  $\cos pt=1$  のとき (3) によつて  $EI\beta \frac{d^2 U}{dx^2}$  となるから、その計算は大してむづかしくはない。しかし構體が非常に剛な場合には  $m^4 (= p^2 l^4/k^2 b^2)$  は零に置いてよい。そこで末廣博士<sup>2)</sup> は  $\frac{d^2 U}{dx^2}$  を與へる式に於て三角函數や雙曲函數を展開して第二次迄の微小量を取り、最大屈曲モーメントを

$$M = EI\beta \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{2} \beta EI \frac{m^4}{l^4} (l-x)^2 \quad (8)$$

の如く作つたのである。  $A$  を構體の截面積、 $\alpha$  を強制振動の最大加速度  $\alpha = \beta p^2$  とすれば、 $m^4 = p^2 l^4/k^2 b^2$  から

$$M = \frac{1}{2} \beta p^2 A \rho (l-x)^2 = \frac{1}{2} \alpha A \rho (l-x)^2. \quad (9)$$

即ち、末廣博士<sup>3)</sup> も強く説いてゐる如く、この (9) 式は通例建築學者などの用ひてゐる實用式であるのであつて、構體が振動する爲に生ずる各箇所の加速度の變化を少しも見込まずして、唯附根の受ける地震の加速度と同一の加速度を構體の全部が受けるものと假定して計算する公式である。斯る順序で常用式を誘導して見れば、常用式を安全に適用し得る場合は振動體が非常に剛いこと、換言すれば振動體の自己週期が強制の週期に比して非常に小なる場合に限られてゐることがわかる。

全く規則正しい週期的の震動が連続的に働き且つ振幅が一定のときは今迄の

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, Chap. 8.

2) 末廣恭二, “構造物振動の理論及其測定法,” 建築雑誌, 40 (1926), 581-559; “Vibration of a Structure and Methods of measuring it,” 井口集.

3) 末廣恭二, 前掲.

計算で充分であるけれども、地震動の如く不規則でも短時間の往復運動の下に振動する場合には、上述の強制振動の外に構體の自由振動を併せて考へねばならぬ。極く簡単な場合として地震が起り始めるときを考へてもその始條件に適合させるにはどうしても自由振動が重複する筈である。末廣博士<sup>1)</sup> はこの理論に思ひついてかなり委しい研究結果を與へたのである。今、下端を固定し上端が自由なる溝状體の振動解式を

$$y = a_r u_r \cos \left( \frac{kb}{l^2} m_r^2 t \right) \quad (10)$$

とする。ここに  $a_r$  は任意常數、 $u_r$  はノーマル函數、 $m_r$  はそれに相當する  $m_r^2 = \omega_r l^2/kb$ 、 $2\pi/\omega_r$  はそれに相當する振動週期である。(10)の導き方は前記 Rayleigh の書物に載つてゐる。今 (3) と (10) とを組合せると  $(kbm_r^2/l^2 = \omega_r)$  として次の如くなる:

$$y = \beta U \cos pt + \sum_r a_r u_r \cos \omega_r t. \quad (11)$$

始動條件として  $t=0$  のとき (i)  $y=0$  及 (ii)  $\partial y/\partial t=0$  と置いてよい譯であるが (ii) の方は自然に満足してゐる。(i) の條件を満足させる爲には

$$0 = \beta U + \sum_r a_r u_r \quad (12)$$

とし、この式に  $u_r$  を乘じて後 0 から  $l$  迄積分するとノーマル函數の性質<sup>2)</sup>

$$\int_0^l u_n u_m dx = 0 \quad [n \neq m] \quad (13)$$

から

$$-\beta \int_0^l U u_r dx = a_r \int_0^l u_r^2 dx. \quad (14)$$

然るに

$$\frac{d^4 u_r}{dx^4} - \frac{m_r^4}{l^4} u_r = 0, \quad \frac{d^4 U}{dx^4} - \frac{m^4}{l^4} U = 0. \quad (15)$$

この如き關係から

$$\int_0^l U u_r dx = \frac{l^4}{m_r^2 - m^2} \int_0^l \left( U \frac{d^4 u_r}{dx^4} - u_r \frac{d^4 U}{dx^4} \right) dx.$$

1) 末廣恭二, 前掲.

2) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, Chap. 8.

この右邊は

$$= \frac{l^4}{m_r^4 - m^4} \left[ U \frac{d^3 u_r}{dx^3} - u_r \frac{d^3 U}{dx^3} + \frac{du_r}{dx} \frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{dU}{dx} \frac{d^2 u_r}{dx^2} \right]_0$$

となり、且つ  $x=l$  の所で

$$\frac{d^3 u_r}{dx^3} = \frac{d^3 U}{dx^3} = \frac{d^2 u_r}{dx^2} = \frac{d^2 U}{dx^2} = 0,$$

又、 $x=0$  の所で

$$u_r = \frac{du_r}{dx} = \frac{dU}{dx} = 0$$

といふ関係があるので、

$$\int_0^l U u_r dx = -\frac{l^4}{m_r^4 - m^4} U_0 \left( \frac{d^3 u_r}{dx^3} \right)_0$$

となる。 $u_r$  は Rayleigh の書にあるから、それから  $\left( \frac{d^3 u_r}{dx^3} \right)_0$  を出し、又  $U_0=1$  であることに注意して、

$$\int_0^l U u_r dx = -\frac{2m_r^2 l}{m_r^4 - m^4} (\cosh m_r + \cos m_r), \quad (16)$$

且つ

$$\int_0^l u_r^2 dx = \frac{1}{4} (l u_r^2)_{x=l} \quad (17)$$

であるから、(14) によつて

$$a_r = 2\beta \frac{m_r}{m_r^4 - m^4} \frac{\cos m_r + \cosh m_r}{(\sin m_r + \sinh m_r)^2} \quad (18)$$

之を (11) に入れ、且つ  $U$  及  $u_r$  の形も丁寧に書いて見ると、

$$y = \frac{\beta}{2} \left[ \left( \cos \frac{mx}{l} + \cosh \frac{mx}{l} \right) \frac{\sin m \sinh m}{1 + \cos m \cosh m} \left( \cos \frac{m}{l} x - \cosh \frac{m}{l} x \right) \right. \\ \left. + \frac{\sin m \cosh m + \cos m \sinh m}{1 + \cos m \cosh m} \left( \sin \frac{m}{l} x - \sinh \frac{m}{l} x \right) \right] \cos pt \\ + 2\beta \sum_r \frac{m_r^2 (\cos m_r + \cosh m_r)}{(m_r^4 - m^4) (\sin m_r + \sinh m_r)^2} \left[ (\sin m_r + \sinh m_r) \left( \cos \frac{m_r}{l} x - \cosh \frac{m_r}{l} x \right) \right]$$

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, Chap. 8.

$$-(\cos m_r + \cosh m_r) \left( \sin \frac{m_r}{l} x - \sinh \frac{m_r}{l} x \right) \cos \omega_r t. \quad (19)$$

之が所求の振動式である。その屈曲モーメントは

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (20)$$

によつて容易に作る事ができる。(19) 及 (20) に實際の数値を入れて計算して見ると、實用式などとはかなり違つた結果が得られるのみでなく、普通の強制振動のみ考へた場合に比較しても一層大なる屈曲モーメントを生ずる可能性がある。

尚、溝體が最大屈曲モーメントによつて折れる場所が屢々問題になるやうであるが、單に強制振動のみを考へるときは、地震動の週期が溝體の自由週期よりも小なれば小なる程、最大屈曲モーメントの箇所が上部へ行くものである。然るに末廣博士の如く強制、自由の兩振動を重ねて考へて見ると地震動の週期が自由振動の週期よりも長いときでさへも溝體が上部で折れる可能性のあることがわかる。

こゝに注意しておきたいことは、實際の溝體では下端が固着してゐるといふことが殆ど不可能な事實である。故に本節の理論を實際に應用するに當つては適當に調整して用ひるか、又は初めから下端の條件を変更して用ひればよい譯である。

末廣博士が關東地震で折れた數十本の煙突の壞れ場所を調査研究した結果によれば統計的に餘り定つた位置のないことがわかつた。之は上述の基礎の問題や、製作の良否、其他震動問題に自由週期の事柄が入ることによつて説明がつくかも知れぬが、何れにしても複雑な事柄である。

最後に附加へ度いことは、溝體にステーや筋違が附着してゐる場合が實際の耐震其他の事柄から極めて多いことである。勿論之等の附加物の存在せぬことも數多くある。而してこのステーや筋違の影響を數理的に計算できれば大變都合な譯であるが、之も末廣博士<sup>1)</sup>によつてかなり正確な力學を以て解かれてゐる。ステーがあるときは煙突の振動週期が數分の一になる爲、溝體が剛になつたのと同結果になることや、又筋違ひがあるときも同様な効果のあることが理論的にわかつたのである。之等のことは常識でも推定できることとはいへ、やはり正確な數理によつ

1) 末廣恭二、前掲

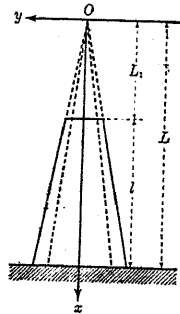
て研究の結果確定できることであるのはいふまでもない。

166. 錐形及び楔状構造物の震動及び振動観測

前節では便宜上均一なる断面を有する塔體の振動を論じたのであるが、實際の細長い構造物は大抵上程細くなつてゐるもの、即ち錐形や楔状の形状が非常に多い。この目的に對して錐體及び楔状體の振動を力學的に考へることにする。この研究には Kirchhoff が試みた非中空錐體や楔状體に對する解法や、物部博士<sup>1)</sup>の出した中空錐體の一般解法及び同博士<sup>2)</sup>の楔状柱體のそれなどがある。其他 Nicholson<sup>3)</sup>や Wrinch<sup>4)</sup>は断面に種々の變化のある柱の振動を研究した。こゝでは主として物部博士の解法及び同博士が實際構造物の振動試験結果と比較された例を挙げ、終りに錐體が地震に強制される場合の物部博士の研究結果を附加へることにした。

中空錐體の自由振動 断面が一樣でない棒の振動方程式を作つて見ると

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (21)$$



第 123 圖

となる。今、中空錐體の研究をする爲にその厚さ、半径、断面積及び断面の慣性モーメントを夫々下の如く表して見る。但し、 $R_0, A_0, I_0$  は夫々錐體底面に於ける夫々の値を表すものである。

$$r = t_0 \frac{x}{L}, \quad R = \frac{x}{L} R_0, \quad A = A_0 \frac{x^2}{L^2}, \quad I = I_0 \frac{x^4}{L^4} \quad (22)$$

振動のノーマル函数を  $u$  と書けば、

$$y = u \cos pt \quad (23)$$

の如く置いて差支ない。そこで

1) 物部長穂, “塔状構造物の震動並に其耐震性に就て,” 土木學會誌, 5 (1919), 561-647.  
 2) 物部長穂, “Die Eigenschwingungen, eingespannter Stäbe von veränderlichem Querschnitt,” ZAMM, 1 (1921), 445-451.  
 3) 物部長穂, “載荷せる構造物の震動並に其耐震性に就て,” 土木學會誌 6 (1920), 581-690  
 4) J. W. Nicholson, “The Lateral Vibrations of Bars of Variable Section,” Proc. Roy. Soc., 93 (1917), 506-519; “The Lateral Vibrations of Sharply-pointed Bars,” Proc. Roy. Soc., 97 (1920), 172-181.  
 5) M. Wrinch, “On the Lateral Vibrations of Rods of Variable Cross-section,” Phil. Mag., 46 (1923), 273-291.

$$\mu^2 = \frac{\rho A_0}{EI_0} P^2 L^2, \quad \mu x = v \quad (24)$$

と書けば、式 (21) は結局

$$v \frac{d^2 u}{dv^2} + 3 \frac{du}{dv} = \pm u \quad (25)$$

の如くなる。±の兩方共必要な符號である。(25)の解は

$$u = \frac{1}{v} \left\{ A J_2(2\sqrt{v}) + B Y_2(2\sqrt{v}) + C I_2(2\sqrt{v}) + D K_2(2\sqrt{v}) \right\} \quad (26)$$

である、 $A, B$ の係数を持つものは(25)の右邊が正號に相當するものの解であり、 $C, D$ のものはその負號に相當するものの解である。さて錐體の兩端の條件を考へて見ると、

$$\left. \begin{aligned} x=L (v=\mu L \equiv b); \quad u=0, \quad \frac{du}{dv}=0, \\ x=L_1 (v=\mu L_1 \equiv a); \quad \frac{d^2 u}{dv^2}=0, \quad \frac{d}{dv} \left( v \frac{d^2 u}{dv^2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(26)を(27)に代入し、 $A, B, C, D$ を消去すれば

$$\begin{vmatrix} J_2(2\sqrt{b}), & Y_2(2\sqrt{b}), & I_2(2\sqrt{b}), & K_2(2\sqrt{b}) \\ J_3(2\sqrt{b}), & Y_3(2\sqrt{b}), & -I_3(2\sqrt{b}), & -K_3(2\sqrt{b}) \\ J_4(2\sqrt{a}), & Y_4(2\sqrt{a}), & I_4(2\sqrt{a}), & K_4(2\sqrt{a}) \\ J_5(2\sqrt{a}), & Y_5(2\sqrt{a}), & I_5(2\sqrt{a}), & -K_5(2\sqrt{a}) \end{vmatrix} = 0. \quad (28)$$

この式から自由振動の週期を決定することができる。特別に  $a=0$  のとき、即ち頂部までである錐體の場合には週期が次の如くなる:

$$T = 0.719 \frac{l^2}{k} \sqrt{\frac{\rho}{E}},$$

茲に  $k$  は底面の慣性半径、 $l$  は錐體の高さである。圓錐體のときには次の如くなる:

$$T = 1.787 \frac{l^2}{k} \sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

中空截頭體の場合は兩者の中間にあたり

$$T = C_1 \frac{l^2}{k} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (29)$$

である。茲に  $C_1=0.719\sim 1.787$  の間にある。

物部博士は之等の  $C_1$  を一々計算する手数を省く爲に、振動勢力保持の法則及び數値略近法を用ひることによつて  $C_1$  を實驗式を以て表したのである。然し後に<sup>1)</sup>圓錐函數の漸近法を用ひることにより、(28) から直接にかなり理論的な  $C_1$  の實驗式的公式を下の如く出したのである：

$$C_1=0.719+1.069\frac{L_1}{L}+\left\{0.14-2.24\left(0.5-\frac{L_1}{L}\right)^4\right\}. \quad (30)$$

(29), (30) が中空載頭錐體の自由振動週期を與へることがわかる。

楔狀體の自由振動 楔狀體の振動の問題も物部博士のものを取つて見る。(21) の微分方程式を取り、前と同様な方法を施せば楔狀體の厚さの變化する方向への振動の微分方程式として

$$u=\frac{1}{\gamma v}\{AJ_1(2\gamma v)+BY_1(2\gamma v)+CI_1(2\gamma v)+DK_1(2\gamma v)\} \quad (31)$$

が得られる。之から週期を算出する代りに前の如く勢力の関係から直ちに

$$\left. \begin{aligned} T &= C_2 l^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{ET_0}}, \\ C_2 &= 1.788 - 0.605 \left(1 - \frac{L_1}{L}\right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

の如き近似式を得る。  $\rho, A_0, I_0, l, L, L_1$  等は前の説明及びその附圖と同様に取りことを意味してゐる。Kirchhoff の特別の場合、即ち  $L_1=0$  のときの正確な計算でも  $C_2=1.18$  位である。物部博士の理論から振動週期を出すことは容易であるけれども、同博士は實際の便宜上から屢々勢力式を用ひたものと思はれる。一般には勢力式を用ひるときはどうしても不正確になる事は豫期すべきである。松山工學士<sup>2)</sup>は Tobin の行つた船體振動數算定法を應用して佐賀關の煙突其他の固有振動數

<sup>1)</sup> 物部長徳, "Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichem Querschnitt," ZAMM, 1 (1921), 445-451.

<sup>2)</sup> 物部長徳, "載荷せる構造物の震動位に其耐震性に就て," 土木學會誌, 6 (1920), 581-690.

<sup>3)</sup> 松山武秀, "断面一様ならざる柱狀體の固有振動週期を求むる一近似計算法," 應用力學聯合大會論文 (1931)

を算定したが、やはり近似的の値が出るやうである。

塔狀構造物の振動測定 實際の塔狀體の振動測定は主として大森博士によつて試みられ、その他眞野、田中館兩博士の實驗や最近では谷口博士の測定などがある。最初のものは眞野、田中館兩博士<sup>1)</sup>の測定であり、東京帝國大學舊教師館燒跡の煉瓦造煙突に關するものである。高さは僅か 19 尺 6 寸であり、彈性振動の外に固體動搖の傾向を持つことがわかつた。その方法は頂上を綱で引張つて動かし微動計で測定するのである。次に大森博士<sup>2)</sup>は明治三十三年京大機械工學教室附屬工場の高さ 51 尺の方形煉瓦煙突の頂部をやはり綱で引張つて振動を測り、1 秒前後の週期とその振幅を觀測した。同博士<sup>3)</sup>は又、東大衛生學教室にある高さ 24 尺、底部 3 尺平方、頂部は 2.05 尺平方の煙突について種々の振幅の振動試驗を行ひ 0.34 秒  $\sim$  0.37 秒の週期を得、振幅によつて週期の餘り變らぬことを確めた。

大森博士<sup>4)</sup>は鐵筋コンクリート煙突の發達に伴ひ、數種の煙突の振動を試驗した。その一つは日立鑛山助川にある高さ 100 呎の圓錐狀煙突のもの週期が 0.8 秒前後であることがわかつた。但しこの場合の振動は風力と人爲的との二種を取つたが、何れも大體同じ自由振動週期が誘起されたのである。次の一つのは佐賀關精煉所にある高さ 550 呎の煙突で、週期 2.5 秒位が測定された。今一つは東大附屬病院の 100 呎の煙突であつて、週期 0.85 秒となつた。其後、大森博士<sup>5)</sup>は東大工學部の柴田、永山、草間三教授と共に原ノ町の無線塔(高さ 660 呎、底部外側直徑 57 呎 9 吋、頂部外側直徑 4 呎 6 吋)の振動試驗を行ひ週期 2.12 秒を觀測した。而も測定位置は無線塔の頂部の外に中間數箇所であり、それ等の場所の風力も測定したのであるが、結果について面白いことは風向に直角の方の振幅が風向の方のそれよりも大きいこ

<sup>1)</sup> 田中館愛橋, 眞野文二, "煙突振動實驗報告," 震災豫防調査會報告, 第 21 號 (1898), 7-16.

<sup>2)</sup> 大森房吉, "Note on the Vibration of Chimneys," 震災豫防調査會歐文報告, 第 12 號 (1903), 29-37.

<sup>3)</sup> 大森房吉, 前掲.

<sup>4)</sup> 大森房吉, "On the Vibration of Reinforced Concrete Chimneys," 震災豫防調査會歐文紀要, 9, 第 1 號 (1918), 1-29.

<sup>5)</sup> 大森房吉, "Measurement of Vibration of the 660-Foot Wireless Telegraph Station Tower at Haranomachi," 震災豫防調査會歐文紀要, 9, 第 3 號 (1921), 78-99; 大森房吉, Engineering, 112 (1921), 196.

とである。之等は流體力學的の説明<sup>1)</sup>によつて明かにすることができる。

煙突や無線塔以外の塔状構造物の振動測定も多く行はれた。California 大學の Sather Tower<sup>2)</sup> 高さ 287 呎鐵骨石造のものについて 1918 年頃試験が行はれ、週期 1.14 秒が得られた。大正八年には淺草凌雲閣が大森博士<sup>3)</sup>の手によつて試験され、その週期 1.08 秒が観測された。大森博士<sup>4)</sup>は又、五重塔の研究を行ひ、法隆寺、東寺、上野東照宮、池上本門寺、日光、淺草等の五重の塔の振動や性質をしらべた。その一見不思議な性質に就ては今尙論議<sup>5)</sup>されつゝあるが、その確かなことは構造物下底の状態や、高さと幅の割合等を十分に研究すれば直ちに明かになるであらう。之等の數多くの研究は皆、物部博士等の理論的研究と相關聯してゐるのである。

物部博士<sup>6)</sup>は上述の實際観測の中の數種の結果と同博士の錐状構造物振動理論の結果とを適當の方法で比較した所が單に塔状體と見做して行ふ計算よりも遙かによく一致することを確めたのである。實際の塔状構造物の形狀が全く同博士が取扱つたやうな中空截頭の錐形構造物の場合に割合に近い爲であるかも知れぬ。しかし複雑な建築構造物でも米國にあるやうな數十階の建物になると復た物部博士や末廣博士の如き棒や塔状體の計算が役に立つものである。

錐状構造物の強制振動 最後に彈性錐體が單弦的強制振動をなす場合の理論を物部博士<sup>7)</sup>に従て附加へることとする。地動の振動數を  $p_1/2\pi$  とすれば  $v = \mu x = p_1 l \sqrt{\rho A_0/EI_0} x$  であり、振動の方程式は Kirchhoff により次の如き形を取る：

$$u = A\phi(v) + B\Psi(v) + C\phi_1(v) + P\Psi_1(v). \quad (33)$$

<sup>1)</sup> 長岡半太郎, 數學物理學會記事, [3], 1 (1919).

<sup>2)</sup> C. Derleth, "Vibration of the Sather Tower," 震災豫防調査會歐文紀要, 9, 第 3 號 (1921), 107-109.

<sup>3)</sup> 大森房吉, "Vibration of a 12-Story Brick Tower," 震災豫防調査會歐文紀要, 9, 第 3 號 (1921), 100-106; 大森房吉, 建築雜誌, 35 (1920).

<sup>4)</sup> 大森房吉, "Measurement of Vibration of Gojunotos or 5-Story Buddhist Stupas (Pagodas)," 震災豫防調査會歐文紀要, 9, 第 3 號 (1921), 110-152; 建築雜誌, 35 (1920).

<sup>5)</sup> 武藤清, 萬國工業會議論文, 3 (1930).

<sup>6)</sup> 物部長穗, "塔状構造物の振動並に其耐震性に就て," 土木學會誌, 5, 第 3 號 (1919), 561-647.

<sup>7)</sup> 物部長穗, "地震上下動に関する考察並に振動雜論," 土木學會誌, 10, 第 5 號 (1924), 1063-1084.

但し

$$\phi(v) = \frac{1}{1.2} + \frac{v}{1.2 \cdot 3} + \frac{v^2}{(1.2)^2 \cdot 3.4} + \frac{v^3}{(1.2 \cdot 3)^2 \cdot 4.5} + \dots,$$

$$\Psi(v) = \frac{1}{1.2} - \dots + \dots - \dots + \dots,$$

$$\phi_1(v) = \frac{d^2\phi_1}{dv^2}, \quad \Psi_1 = \frac{d^2\Psi_1}{dv^2},$$

$$\phi_1 = \phi \log v - 2 \left\{ \frac{v}{1^2} + \frac{v^2(1+\frac{1}{2})}{(1.2)^2} + \frac{v^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{(1.2 \cdot 3)^2} + \dots \right\},$$

$$\Psi_1 = \psi \log v + 2 \left\{ \dots - \dots + \dots - \dots \right\},$$

$$\phi = 1 + \frac{v}{1^2} + \frac{v^2}{(1.2)^2} + \frac{v^3}{(1.2 \cdot 3)^2} + \dots,$$

$$\psi = 1 - \dots + \dots - \dots + \dots \quad (34)$$

今、地動の振幅を  $\beta$  と書けば

$$\left. \begin{aligned} x=0 \quad (v=0); \quad \frac{d^2u}{dv^2} = 0, \quad \frac{d}{dv} \left( v \frac{d^2u}{dv^2} \right) = 0, \\ x=l \quad (v=\mu l = v_1); \quad u = \beta, \quad \frac{du}{dv} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(33) を (35) に入れ

$$C = D = 0, \quad A = \beta \frac{\Psi'}{\phi\Psi' - \phi'\Psi}, \quad B = \beta \frac{\phi'}{\phi\Psi' - \phi'\Psi}. \quad (36)$$

となる。但し

$$\phi' = \left( \frac{d\phi}{dv} \right)_{v=1}, \quad \Psi' = \left( \frac{d\Psi}{dv} \right)_{v=1} \quad (37)$$

(36), (37) を (33) に代入すれば振動の撓みが得られる。この値から最大應力の値を種々の週期、種々の場所に就て計算して見ると、固有週期が地震の週期よりも著しく小なる間は破壊を起す點が最下端にあるけれども、地震の週期が小さくなるに従ひ、斯る點が上昇して行く傾向が塔體よりも一層甚しいことがわかる。尙、物部博士<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 物部長穗, "Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichem Querschnitt," ZAMM, 1 (1921), 445-451.



は(33),(34)の如き表し方を錐體の自由振動を出すことにも應用してゐる。

### 167. 構造物の剪断振動及び壁體の振動

構造物の高さが間口や奥行に比して大きくない場合、即ち適當な形の鐵筋コンクリート造の如き建物では、屈曲振動が全體としても又部分的にも餘り誘起されず、寧ろ剪断的の振動が可能となるものである。この事實に注目したのは末廣博士<sup>1)</sup>であつて、問題を容易にする爲に基礎が地盤に固着してをらぬやうな場合を考へ且つ之を塔狀體の特別な極限として取扱つたのである。しかし初めから壁體の性質を考慮に入れてその剪断振動の可能性及び壁體その物の屈曲振動の事實を指摘したのは佐野博士<sup>2)</sup>であるといはねばならぬ。こゝでは最初に末廣博士の理論を擧げることにする。

構造物の剪断振動 先づ水平に振動する場合の剪断自由振動を考へて見る。その高さの方向に  $x$  を取り、水平に動く變位を  $y$  と書けば、振動の微分方程式が容易に次の如くなる：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (38)$$

この方程式の解を作り、そのノーマル函數を  $u_r$  とすれば

$$y = u_r \cos n \alpha t \quad (39)$$

基底  $x=0$  に於ける條件  $u_r=0$ 、頂部  $x=l$  に於ける條件  $\frac{du_r}{dx}=0$  から  $u_r$  及  $n$  が次の如くなる：

$$u_r = b_r \sin n x, \quad n = \frac{(2r+1)\pi}{2l} \quad [r=0, 1, 2, \dots] \quad (40)$$

振動の主要週期は(38),(39),(40)から  $\alpha$  を決定して次の如くなる：

$$T_0 = \frac{2\pi}{n\alpha} = 4l \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \quad (41)$$

この式は高さのみに週期が關係することを示すものであつて、之によつて大森博士

<sup>1)</sup> 末廣恭二, “構造物振動の理論及其測定法,” 建築雑誌, 40, 第484號(1926), 531-559.

<sup>2)</sup> 佐野利器, “家屋耐震構造論 上下編,” 震災豫防調査會報告, 第83號(1916), 1-142, 1-137; 谷口忠, “Seismic Action and Damage in Relation to Character of Building,” 萬國工業會議論文, 3, 第645論文.

等が行つた高い建築物の測定に於て週期が主として高さにのみ關係するといふ事實が割合によく了解されるのである。

次に週期的永久性強制振動を考へて見ると、地面の振幅を  $\beta$  として

$$y = \beta U \cos pt \quad (42)$$

となり、之を(38)に入れて  $U$  を作り、且つ  $x=0$  で  $U=1$ 、 $x=l$  で  $\frac{dU}{dx}=0$  といふ條件を用ひるときは

$$U = \cos \frac{p}{\alpha} x + \tan \frac{p}{\alpha} l \sin \frac{p}{\alpha} x \quad (43)$$

となる。

さてもつと一般的な強制振動、即ち  $t=0$  のとき  $y=0$ 、 $\frac{\partial y}{\partial t}=0$  の如き條件にも適する解を作れば

$$y = \beta U \cos pt + \sum_n b_n u_n \cos n \alpha t \quad (44)$$

$t=0$ ;  $\frac{\partial y}{\partial t}=0$  なる條件は自然に満足し、 $t=0$ ;  $y=0$  の爲には

$$\beta U = - \sum_n b_n u_n \quad (45)$$

とすればよい。これに次の如き關係

$$\int_0^l u_n u_m dx = 0, \quad \int_0^l u_n^2 dx = \frac{l}{2} \quad (46)$$

を適用して

$$b_n = -\frac{2\beta}{l} \frac{n\alpha^2}{n^2\alpha^2 - p^2} \quad (47)$$

この(47)及(44)が一般的の振動を示すものである。又、之等からその剪断應力を計算して見ると、加速度から力を考へる所の靜力學的の應力よりも遙かに大であること、最大應力の起る高さが自由振動の附加へ方によつて如何にでも變ることがわかるのである。尙以上の如く末廣博士の方法によつても、その震動の性質はそれが一度起り始めてからは週期的の振動が永久に繰返されるものと假定するものである。若しこの繼續的の震動がもつと不規則なものであれば、取扱が尙更複雑になることはいふまでもない。

壁體の震動 佐野博士<sup>1)</sup>の研究は大分以前に行はれた爲に多少不完全な點がないでもないが、しかし壁體の震動性質の大體は解決されたと見てもよい。同博士は柔港地震其他の結果を參考として壁體がその面に垂直な震動を受ける場合と平行な震動を受ける場合の兩方を半理論的に研究したのである。その結論は大體に於て事實をよく説明するやうに思はれる。しかし佐野博士もその論文中で明かに斷つてゐる如く、斯る二次元的震動問題の完全な解答は將來數理的力學の發達を俟つて初めて得られるものであらう。

### 168. 構造物の動搖、滑動及び顛倒

大地震に於て地盤の弱い下町では震動が強く木造家屋などはどうしても被害が多い。然るに煉瓦造やコンクリート造などは却て下町の方が損害が少い。この説明として末廣博士<sup>2)</sup>はかゝる泥土の上にある堅固な構造物に於ては、建物が一つの剛體として動搖し、彈性的の振動は比較的に少いといふことに歸したのである。實際、同博士の稱へられたやうな傾向が非常に多いやうに思はれる。のみならず、末廣博士<sup>3)</sup>は石本博士と共に特殊な微動計を作り、之を或る低い鐵筋コンクリート造建物内の數箇所に掲えつけて各箇所との相對的の變位を測定し、前述の傾向が充分に存在することを證明した。振動の週期も勿論剛性として近似的の計算をやつて見ると非常によくあふことがわかつたのである。石本博士や齋田理學士は後に土地の固有振動そのものが場所によつて違ふ爲に建物に異なる影響を與へるのではないかといふ議論を出した。

上述のやうな考方は以前からもあつたけれども、それは構造的振動の性質としてよりも寧ろ一般構造物の振動を最も簡單に取扱ひ得るといふ便宜上の理由と實際の地震に於ても極く小さな固體の顛倒、滑動の如き現象が屢々見られるといふ事實がある爲であつて、末廣博士の如く分析的の實驗の結果ではない。末廣博士の考

1) 佐野利器、前掲。

2) 末廣恭二、“構造物振動の理論及其測定法、”建築雜誌、4) (1906), 531-559。

3) 末廣恭二、石本巳四雄、“On the Vibration of Low Monolithic Buildings、”第三回汎太平洋會議紀事 (1926), 1482-1485。

方から實驗をやつて見ると、もつと大きな建物でもかゝる現象が行はれてゐるかも知れぬ。顛倒問題に關して直觀的に注意したのは C. D. West 博士や大森博士である。West 博士は簡単な公式を作つたので知られてゐるし、大森博士<sup>1)</sup>は振動臺を作つて柱體や錐體の滑動や顛倒を試した。又、振動による模型の破壊を研究したのである。同博士<sup>2)</sup>は尙、實物の煙突に近い位の煉瓦の柱體を作り、之を押して振動させその測定をも試みた。之等の研究では常に質量の中心に加速度が働くと考え、従つてその慣性力が恰も外力の如く質量中心に働くと思ふのである。佐野博士<sup>3)</sup>はやはり同じ方針によつて土藏などの研究を試み、又、同様な慣性力の考から固體内の應力を計算して構造物の耐震力を出す方法を案出した。物部博士<sup>4)</sup>は水平動の外に上下動をも考慮に入れて物體が顛倒したり、滑動したりすることの數理的理論を提出した。物部博士の理論では固體の重心に上下、水平の加速度による力と固體の重量及び底面の摩擦による力とを考へて、その平衡問題を解くことである。しかしこゝでは委しい説明を省略する。物部博士の考方は更に押し進めて地震力に對する土砂の支持力<sup>5)</sup>其他<sup>6)</sup>に迄も持つて行くことができるのであるが、之の説明もやはり省略することにした。

### 169. 載荷せる塙體の震動

一層の載荷がある場合の自由振動 實際の構造物に於ては簡單なる組立のものでも屢々、その頂部又は中間に殊更に大なる集中質量を有することが多い。そのみでなく、普通の架構建築や橋梁の如きは寧ろ載荷せる塙體の延長と見

1) 大森房吉、“On the Overturning and Sliding of Columns、”震災豫防調査會歐文報告、第12號 (1903), 8-27; “Seismic Experiments on the Fracturing and Overturning of Columns、”震災豫防調査會歐文報告、第4號 (1900), 69-141。

2) 大森房吉、“Seismic Experiments on the Fracturing and Overturning of Columns (2nd Paper) ”震災豫防調査會歐文紀要、4, 第1號 (1910), 1-31。

3) 大森房吉、“Experiments on the Vibration of Brick Columns、”震災豫防調査會歐文紀要、2, 第3號 (1908), 223-228。

4) 佐野利器、前掲。

5) 物部長徳、“地震上下動に關する考察並に振動雜論、”土木學會誌、10, 第5號 (1924), 1063-1094。

6) 物部長徳、上掲。

7) 物部長徳、松尾春雄、地震研究所彙報、10 (1932)。

の方が至當でもある。建築物の床面の荷重はその鉛直部に比して遙かに大なるものである。物部博士<sup>1)</sup>は主として橋脚の研究の目的の爲にこの問題を研究した。但し載荷塙體の簡單なる場合の研究は他の力學家も取扱つてゐるが、こゝでは應用に向つて試みられた物部博士の正確なる研究結果を紹介しようと思ふ。

今、塙體の長を  $l$  とし、その方向に  $x$  軸を取り、 $x=l$  の所に  $M$  なる質量を與へてあるものとする。他の符號は既に述べた場合と同様に取ることにする。柱状部の振動方程式は次の如くなる：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k^2 U^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (48)$$

この式の解は次式で示される：

$$y = a_r u_r \cos\left(\frac{kb}{l^2} m_r t\right), \quad (49)$$

但し  $u_r$  は棒の振動のノーマル函数であり、又  $m_r^2 = p^2 l^2 / kb$  である。 $u_r$  は

$$u_r = A \cosh \frac{m_r}{l} x + B \sinh \frac{m_r}{l} x + C \cos \frac{m_r}{l} x + D \sin \frac{m_r}{l} x \quad (50)$$

の如く四個の異なる形のもので表される。境界條件として

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad u_r=0, \quad \frac{du_r}{dx}=0, \\ x=l; \quad \left(\frac{d^2 u_r}{dx^2}\right)_{x=l}=0, \quad EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=l} = M \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=l} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

を置く。但し  $I$  は棒の断面慣性モーメント、即ち  $Ak^2$  である。又  $A$  は棒の断面積である。 $x=0$  に於ける條件から

$$C = -B, \quad D = -A. \quad (52)$$

従て  $x=l$  に於ける條件を用ひて次の關係が出る：

$$m_r = \frac{\rho A l}{M} \cdot \frac{(1 + \cosh m_r \cos m_r)}{(\cosh m_r \sin m_r - \sinh m_r \cos m_r)}. \quad (53)$$

種々の  $\rho A l / M$  が與へられる場合に、 $m_r$  なる根の最小値を出せば次の如くなる：

<sup>1)</sup> 物部長穂, “載荷せる構造物の震動位に其耐震性に就て,” 土木學會誌, 6, 第4號 (1920), 531-590.

$\frac{\rho A l}{M}$	0.1	0.4	0.8	1.0	1.6	$\infty$
$m_r$	0.733	1.02	1.19	1.24	1.34	1.875

週期は上の關係を用ひて次式で示される：

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{m_r}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}.$$

一層の載荷のある場合の強制振動 載荷せる塙體の強制振動を出すには、先づ地動の振幅を  $\beta$ , 振動週期を  $2\pi/p_1$  とし、振動方程式の解を次の如く書く：

$$y = \beta \left( A \cosh \frac{m}{l} x + B \sinh \frac{m}{l} x + C \cos \frac{m}{l} x + D \sin \frac{m}{l} x \right) \cos p_1 t = \beta U \sin p_1 t. \quad (54)$$

但し  $m^2 = p_1^2 \sqrt{\rho/Ek^2} = p_1^2 \sqrt{\rho A/EI}$  である。境界條件として

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad U=1, \quad \frac{dU}{dx}=0, \\ x=l; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0, \quad EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{x=l} = M \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=l} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

を置く。(54)を(55)に入れて問題を解けば次の如くなる：

$$U = \cos m \frac{x}{l} + A_1 \left( \cosh m \frac{x}{l} - \cos m \frac{x}{l} \right) + B_1 \left( \sinh m \frac{x}{l} - \sin m \frac{x}{l} \right), \quad (56)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{-\frac{K}{2} (1 + \cosh m \cos m + \sinh m \sin m) - \sinh m \cos m}{\cosh m \sin m - \sinh m \cos m - K (1 + \cosh m \cos m)}, \\ B_1 &= \frac{\cosh m \cos m \frac{K}{2} (\cosh m \sin m + \sinh m \cos m)}{\cosh m \sin m - \sinh m \cos m - K (1 + \cosh m \cos m)}, \end{aligned} \right\} \quad (56')$$

茲に

$$K = \frac{\rho A l}{m M}$$

である。屈曲モーメントは  $-EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  で與へられるから、この中へ前に得た  $y$  の式(54)を代入すればその數値を算出することができる。又、(54)によつて  $M$  の變位

を出して見ると、 $M$ の質量が柱の質量に比して非常に大なるときは、変位が極めて小さいことがわかる。尚、このやうな場合に質量に比例する力が構造の各部に働くとして計算することは全く誤つてゐることも気がつくであらう。

二層の載荷のある場合の自由振動 同様にして筆者は金井氏<sup>1)</sup>と共に長さ $l_1+l_2$ なる構體の下端 $x=0$ が固定し、 $x=l_1$ の所に $m_1$ 、 $x=l_1+l_2$ なる端に $m_2$ なる集中質量を支へてゐる場合の固有振動を計算して見た。  $x=0$ から $x=l_1$ までは構體の密度、Young率、断面の慣性モーメント、その慣性半径、撓み及び座標が夫々 $\rho_1, E_1, I_1, k_1, y_1, x_1$ とし、 $x=l_1$ から $x=l_2$ までのそれ等が $\rho_2, E_2, I_2, k_2, y_2, x_2$ とする。振動方程式は棒の屈曲振動の場合と同じであるけれども、境界条件としては

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad y_1=0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} &= 0. \\ x_1=l_1, \quad x_2=0; \quad y_1=y_2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \\ -E_2 I_2 \frac{\partial^3 y_2}{\partial x_2^3} &= -E_1 I_1 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x_1^3} + m_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, \quad E_2 I_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} = E_1 I_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}, \\ x_2=l_2; \quad -E_2 I_2 \frac{\partial^3 y_2}{\partial x_2^3} + m_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

を用ひればよい。このやうにして次の振動数の式が得られる：

$$\begin{aligned} & \xi \{ (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \gamma_1 (\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha) \} \\ & \cdot \{ (1 + \cos \beta \cosh \beta) + \gamma_2 (\cos \beta \sinh \beta - \sin \beta \cosh \beta) \} \\ & + \eta \{ (\cos \alpha \sinh \alpha + \sin \alpha \cosh \alpha) - \gamma_1 (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) \} \\ & \cdot \{ (\cos \beta \sinh \beta - \sin \beta \cosh \beta) - 2\gamma_2 \sin \beta \sinh \beta \} \\ & - 2\xi \eta \sin \alpha \sinh \alpha \{ \sin \beta \sinh \beta + \gamma_2 (\cos \beta \sinh \beta_2 + \sin \beta \cosh \beta) \} \\ & + \xi^2 \eta (\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha) \{ \cos \beta \sinh \beta + \sin \beta \cosh \beta \} + 2\gamma_2 \cos \beta \cosh \beta \} \\ & + \xi \eta^2 (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) \{ (1 - \cos \beta \cosh \beta) - \gamma_2 (\cos \beta \sinh \beta - \sin \beta \cosh \beta) \} = 0, \quad (58) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> 筆者、金井清、"Vibrations of a Two- or Three-storied Structure," 地震研究所彙報, 10 (1932), 第4冊。

茲に $2\pi/p$ が振動週期であつて、且つ

$$\alpha = \left( \frac{\rho_1 p^2}{E_1 k_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} l_1 = n_1 l_1,$$

$$\beta = \left( \frac{\rho_2 p^2}{E_2 k_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} l_2 = n_2 l_2,$$

$$\xi = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\rho_2 (E_1 k_2^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 (E_2 k_1^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\eta = \frac{E_2 I_2 n_2^2}{E_1 I_1 n_1^2} = \frac{E_2 I_2 (\rho_2 E_1 k_1^2)^{\frac{1}{2}}}{E_1 I_1 (\rho_1 E_2 k_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\gamma_1 = \frac{m_1 p^2}{E_1 I_1 n_1^2} = \frac{c_1 \rho_1 a_1 l_1 p^2}{E_1 I_1 n_1^2}, \quad \left[ c_1 = \frac{m_1}{\rho_1 a_1 l_1} \right]$$

$$\gamma_2 = \frac{m_2 p^2}{E_2 I_2 n_2^2} = \frac{c_2 \rho_2 a_2 l_2 p^2}{E_2 I_2 n_2^2}, \quad \left[ c_2 = \frac{m_2}{\rho_2 a_2 l_2} \right]$$

である。特別に $m_1=m_2, \rho_1=\rho_2, E_1=E_2, I_1=I_2, k_1=k_2, l_1=l_2$ とすると、振動数を上式によつて計算して見ると次の如くなる：

$\frac{m_1}{\rho_1 a_1 l_1}$	1/2	1	2	4
$\left( \frac{\rho_1 p^2}{E_1 k_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} l_1$	0.777	0.698	0.612	0.526

二層又はそれ以上の載荷のある構體の振動問題は物部博士其他によつてもつと近似的に研究された。それ等の方法でも略近的には固有振動週期を出し得るものである。

### 170. 架構構造物の振動問題及びその數理的解法

建築物や橋梁などは何れも架構式のもの非常に多い。鐵骨の骨組は勿論架構構造と見て差支ないが、之をコンクリートで包んだ場合や鐵筋コンクリート構造のときと雖も多くは架構構造と見做してもよいと思はれる。又、我國の木造建築でさへも架構の特別な場合と考へる方が至當であらう。従て架構構造物の振動研究は家屋や橋梁の問題としては極めて重要なものである。

架構造の振動の研究をなるべく純理論的に行ふことは難しも望む所であらう。しかし問題が餘り複雑である爲に、極く特別な場合の外は多くは略式に取扱はれてゐる。比較的簡単な場合を捉へて稍數理的に取扱つた人には Reissner<sup>1)</sup>、物部博士<sup>2)</sup>、Prager<sup>3)</sup>、その他後に述べるやうに多くの人々の研究がある。之等の人々は構造をなるべく簡単に假定しておいて、振動の方程式を満足するやうな解を作る事を考へたのである。振動の型を初めから想像しておいてその運動及ポテンシャル勢力を算定し、然る後その週期等を見出す方法は Reissner<sup>4)</sup>、物部博士<sup>5)</sup>、谷口博士<sup>6)</sup>などによつて採用されてゐる。かなり複雑な構造物の各素材間の力學的關係をなるべく簡易化して、多少わかり易い振動方程式の形に導くことは Pohlhausen<sup>7)</sup>、武藤博士<sup>8)</sup>などによつて試みられた。しかし一番多くの人に利用されてゐる方法は振動の慣性力を外力と見做して問題を静力學的に取扱ふことである。この方法は建築構造物とは限らないが、架構造物に於て特に便利である事は否めない。殊に固有振動の問題や週期の長い地震動の場合には大して間違とはならない。振動問題で最初にこの方法に手を付けたのは佐野博士であつて、其後物部博士<sup>10)</sup>、眞島博士<sup>11)</sup>、

1) H. Reissner, "Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks," *ZS. f. Bauwesen*, 8 (1903), 135-162.

2) 物部長穂, "載荷せる構造物の震動並に其耐震性に就て," *土木學會誌*, 6, 第4號 (1920), 581-690.

3) W. Prager, "Die Eigenschwingungen von Rahmenfundamenten," *ZS. f. tech. Phys.*, 9 (1928), 223-227; "Zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen ebener und räumlicher Stabwerke," *ZS. f. tech. Phys.*, 10 (1929), 275-280.

4) H. Reissner, "Zur Dynamik der Fachwerke," *ZS. f. Bauwesen*, 49 (1899), 479-483.

5) 物部長穂, "地震上下動に關する考察並に振動雜論," *土木學會誌*, 10 (1924), 1063-1094.

6) 谷口忠, "架構の固有振動週期に就て," *建築雜誌*, 39 (1925), 43-62, 91-99, 177-206, 487-498.

7) E. Pohlhausen, "Eigenschwingungen statisch-besimmter Fachwerks," *ZAMM*, 1 (1921) 28-42.

8) 武藤清, "建築物の振動に及ぼす地震動の影響," *建築雜誌*, 39 (1925), 第476號; "矩形架構の水平振動に就て," *建築雜誌*, 43 (1929), 67-106; "構造物振動理論," *建築雜誌*, 43 (1929), 49-66.

9) 佐野利器, "家屋耐震構造論 上下編," 前掲.

10) 物部長穂, "載荷せる構造物の震動並に其耐震性に就て," 前掲.

11) 眞島健三郎, "重層架構建築耐震構造論," *土木學會誌*, 12 (1926), 229-304; *地震と建築* (1930); "On Earthquake and Building Construction," *萬國工業會議論文*, No. 163 (1929).

水原技師<sup>1)</sup>、谷口博士<sup>2)</sup>、内藤博士<sup>3)</sup>、Martel<sup>4)</sup>などによつて著しい進歩を遂げたのである。このやうな方法といつても、各研究者によつて夫々別の取扱方がしてあるから、これ等を一つの部類に含めることは多少無理かも知れぬが、大體の方針は共通な所があるやうに思ふ。初めに述べた振動様式から出發する方法や、振動勢力を考へるやり方及びこの静力學的に進める取扱方の間には夫々一利一害がある。

初めに示したやうに架構造の複雑なる場合は普通の純理的考方では到底立入ることはできぬけれども、構造が比較的簡單なる場合、即ち鉛直なる數本の柱の所々に荷重のある水平桁があつて而もこの水平部が比較的に剛であると見做し得るときや、柱の頂部に一本の水平桁のあるときなどは、塙狀體振動の問題を擴張する事によつて解くことができる。複雑に見える實際の構造物でもよく考へるとこのやうな問題に導き得る場合の方がむしろ多い。物部博士<sup>5)</sup>は載荷せる塙狀體の振動の研究の應用として、構柱(bent)の自由及び強制振動を計算し之を橋脚の震害事實と比較した。然しその計算は載荷塙狀體の場合と大差がない。筆者は金井氏<sup>6)</sup>と共に二階建建物を二段の載荷構造物として計算を試みた。

桁材をも弾性體と見て計算する問題は非常な困難を伴ふ。Reissner<sup>7)</sup>はよほど前に下端が固定せる二本の柱の上部が交叉せる問題を、微分方程式に基づく解を用ひて解き、併せて Lagrange の方程式を應用して橋桁の振動問題を解いた。Prager<sup>8)</sup>は下端が固定せる二本の柱の上部に弾性的と見られる桁のある二次元問題や、

1) 水原旭, "On the Vibration Curves of High Framed Structures," *萬國工業會議論文* (1929); "構造物の振動曲線," 其他, *建築雜誌*, 39 (1925), 第475號; 40 (1926) 第487號, 第489號.

2) 谷口忠, "地震に依る架構建築の破壊位置に就て," *建築雜誌*, 40 (1926), 第480號.

3) 内藤多作, "架構建築耐震構造論" (1925).

4) R. R. Martel, "The Dynamic Behaviour of Some Simple Bents Subjected to Established Simple Harmonic Motion," *萬國工業會議論文*, 3 (1929), 第490論文.

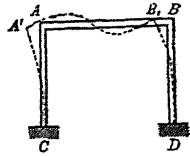
5) 物部長穂, "載荷せる構造物の震動並に其耐震性に就て," 前掲.

6) 筆者, 金井清, "Vibrations of a Two- or Three-storied Structure," 前掲.

7) H. Reissner, 前掲.

8) W. Prager, 前掲.

四本又はそれ以上の柱の上部に桁があり空間的に擴げられる架構の問題を解いた。<sup>1)</sup>



第 129 圖

同氏は又 Gradstein<sup>2)</sup> と共にこの場合の強制振動の場合を研究した。最も簡單なる場合を取つて見ると左圖に於て CA, AB, BD なる棒が夫々振動の微分方程式を満足し、且つ交叉點が固定の條件を満足するやうに取扱ふのである。Prager の研究は家屋でなくて機關臺の振動を目的とするものであるけれども、それ等の結果は直ちに架構建

築の場合に應用できるものである。Rausch<sup>3)</sup>は機關臺の構造的條件を簡單にして、あらゆる自由度の振動を取扱つた。これに似た研究は河野工學士<sup>4)</sup>が試みた。Walkling<sup>5)</sup>は柱が二本ある二階建の架構問題について適當の近似法を用ひることによつて分析的研究を試みた。Prager<sup>6)</sup>は nomograph を用ひて架構の振動を簡單に解くことを考へた。又、F. H. v. Dungen<sup>7)</sup>や Hohenemser<sup>10)</sup>は柱が二本、桁が一本

1) W. Prager, "Die Berechnung der Eigenschwingungen von Rahmenfundamenten," *Bauing.*, 8 (1927), 129-131.

2) W. Prager, "Die Beanspruchung von Tragwerken durch schwingende Lasten," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 527-532.

3) S. Gradstein u. W. Prager, "Beanspruchung und Formänderung von Stabwerken bei erzwungenen Schwingungen," *Ing. Arch.*, 2 (1932), 622-650.

4) E. Rausch, "Beitrag zur Schwingungserscheinungen von Dampfturbinenfundamenten," *Bauing.*, 8 (1927), 518.

5) E. Rausch, "Richtige und fehlerhafte Maschinengründungen," *ZVDI*, 75 (1931), 1069-1074.

6) 河野輝夫, "矩形架構振動理論," *建築雑誌*, 41 (1927), 第 502 號.

7) F. W. Walkling, "Zur Ermittlung der Eigenschwingungszahlen ebener Stabwerke," *Ing. Arch.*, 2 (1931), 247-274.

8) W. Prager, "Nomographische Bestimmung der Eigenschwingungszahlen einfacher Tragwerksformen," *Ing. Arch.*, 3 (1932), 238-299.

9) F. H. van den Dungen, "Les coefficients d'influence harmonique," *Verh. 3-int. Kongr. j. tech. Mech.* (Stockholm, 1930), 3, 150-153.

10) K. Hohenemser, "Praktische Wege zur angenäherten Schwingungsberechnung elastischer Systeme," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 271-292.

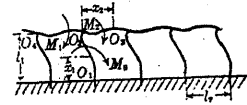
ある構柱問題を積分方程式を應用することによつてその計算に成功した。Hinz<sup>1)</sup>は機關臺の柱の強制振動問題を取扱ひ、Weishaupt<sup>2)</sup>は實際の建物の壁に直接に強制力を與へて壁の固有振動、強制振動、彈性減衰性等を測定した。

單層多張間架構や單層二張間架構の固有振動及び地震による強制振動の問題は筆者が金井氏<sup>3)</sup>と共に極めて正確に解いて見た。それは非常に複雑であるから次の章に移つてから説明する。

### 171. 單層架構構造物の正確なる解法

架構構造物の數理的解法は前節で述べたやうに種々の程度の正確さを以て試みられてゐる。こゝでは一例として筆者が金井氏<sup>3)</sup>と共に企てた單層架構構造の數理的研究を述べて見たいと思ふ。問題は二種に分れ、一つは多張間架構の場合であり、他は二張間の場合である。而して各、固有振動と強制振動とが取扱はれ、且つあらゆる點に於て近似法が用ひてないのである。

多張間架構の固有振動 右圖を参照して  $\rho_1$ ,  $E_1$ ,  $a_1$ ,  $k_1$ ,  $l_1$ ,  $y_1$  を夫々柱の密度, Young 率, 斷面積, 斷面の慣性半徑, 長さ, 屈曲變位とし,  $\rho_2$ ,  $E_2$ ,  $a_2$ ,  $k_2$ ,  $l_2$ ,  $y_2$  を夫々梁の同様なものであるとする。又  $M_r$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  を  $O_2$  に於ける柱と梁の屈曲モーメントとする。然るときは  $O_1O_2$ ,  $O_2O_3$  (又は  $O_3O_2$ ) についての振動の微分方程式が夫々次の如くなる:



第 130 圖

$$\left. \begin{aligned} E_1 k_1^2 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} + \rho_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= 0, \\ E_2 k_2^2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4} + \rho_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

1) K. Hinz, "Spanbolzenschwingungen bei grossen Asynchronmotoren," *ZS. f. tech. Phys.*, 8 (1927), 370-373.

2) J. Weishaupt, "Messung der Eigenperiode, der Dämpfung und des Elastizitätsmoduls von Mauern," *ZS. f. tech. Phys.*, 13 (1932), 286-288.

3) 1) 筆者, 金井清, "Vibrations of a Single-storied Framed Structure," *地震研究所彙報*, 10 (1932), 767-803.

之等を解き境界の条件

$$\left. \begin{aligned}
 x_1=0; \quad y_1=0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} &=0, \\
 x_1=l_1; \quad -E_1 a_1 k_1^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} &=M_0, \quad -E_1 a_1 k_1^2 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x_1^3} = -\rho_2 a_2 l_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, \\
 x_2=0, \quad x_1=l_1; \quad y_2=0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \quad -E_2 a_2 k_2^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} = M_2, \\
 x_2=l_2, \quad x_2=l_1; \quad y_2=0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \quad -E_2 a_2 k_2^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} = M_1, \\
 M_0 + M_1 - M_2 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

を適用し、且つ

$$m_1 l_1 = \alpha, \quad m_2 l_2 = \beta, \quad \frac{\rho_2 a_2 l_2 p^2}{E_1 a_1 k_1^2 m_1^2} = \gamma, \quad \frac{m_2}{m_1} = \xi, \quad \frac{E_2 a_2 k_2^2 m_2^2}{E_1 a_1 k_1^2 m_1^2} = \eta$$

なる記號を用ひるときは、筆者が試みたタービン翼群の振動問題と同じ計算法によつて

$$\begin{aligned}
 &2\{(\cos \alpha \sinh \alpha + \sin \alpha \cosh \alpha) + \gamma(\cos \alpha \cosh \alpha - 1)\} \{\sin \beta(\cosh \beta - 1) \\
 &\quad + \sinh \beta(1 - \cos \beta)\} = \frac{\xi}{\eta} \{(\cos \alpha \cosh \alpha + 1) \\
 &\quad + \gamma(\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha)\} (\cos \beta \cosh \beta - 1) \quad (61)
 \end{aligned}$$

なる関係を出すことができる。計算の便宜上  $l_1=l_2, E_1=E_2, a_1=a_2$  とし、且つ  $\rho_1/\rho_2 = 1/4, 1/2, 1$  の三つの場合につき、上式を trial and error の方法で解いて振動数  $p/2\pi$  の式を出して見ると次の如くなる：

$\rho_1/\rho_2$	1	1/2	1/4
$\left(\frac{\rho_1 p^2}{E_1 k_1^2}\right)^{1/2} l_1$	1.645	1.429	1.224

多張間架構の強制振動 柱の下端が固定の代りに、下端が  $2\pi/p'$  といふ振動数と振幅  $b$  を以て水平地震動の如く振動するときには

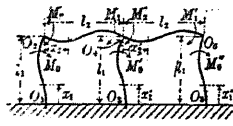
$$x_1=0; \quad y_1=b \cos p't, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0 \quad (62)$$

なる条件と他は固有振動のときと同じ条件を用ひて問題を解けばよい。結局、柱及び梁の振動形として次式が出る：

$$\left. \begin{aligned}
 y_1 &= \frac{b \cos p't \{ \xi(1 - \cos \beta \cosh \beta) \{ (\cos \alpha \cosh \alpha - \sin \alpha \sinh \alpha + 1) - 2\gamma \sin \alpha \cosh \alpha \} \\
 &\quad + 2\eta \{ \sin \beta(\cosh \beta - 1) + \sinh \beta(1 - \cos \beta) \} \{ 2 \cos \alpha \sinh \alpha \\
 &\quad + \gamma(\cos \alpha \cosh \alpha - \sin \alpha \sinh \alpha - 1) \} \} (\cos m_1 x_1 - \cosh m_1 x_1)}{2 \{ \xi(1 - \cos \beta \cosh \beta) \{ (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \gamma(\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha) \} \\
 &\quad + 2\eta \{ \sin \beta(\cosh \beta - 1) + \sinh \beta(1 - \cos \beta) \} \{ (\sin \alpha \cosh \alpha \\
 &\quad + \cos \alpha \sinh \alpha) + \gamma(\cos \alpha \cosh \alpha - 1) \} \}} \\
 &+ \frac{b \cos p't \{ \xi(1 - \cos \beta \cosh \beta) \{ (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) + 2\gamma \cos \alpha \cosh \alpha \} \\
 &\quad + 2\eta \{ \sin \beta(\cosh \beta - 1) + \sinh \beta(1 - \cos \beta) \} \{ 2 \sin \alpha \sinh \alpha \\
 &\quad + \gamma(\cos \alpha \sinh \alpha + \sin \alpha \cosh \alpha) \} \} (\sin m_1 x_1 - \sinh m_1 x_1)}{2 \{ \xi(1 - \cos \beta \cosh \beta) \{ 1 + \cos \alpha \cosh \alpha \} + \gamma(\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha) \} \\
 &\quad + 2\eta \{ \sin \beta(\cosh \beta - 1) + \sinh \beta(1 - \cos \beta) \} \{ (\sin \alpha \cosh \alpha \\
 &\quad + \cos \alpha \sinh \alpha) + \gamma(\cos \alpha \cosh \alpha - 1) \} \}} \\
 &+ b \cos p't \cosh m_1 x_1, \\
 y_2 &= \frac{b \cos p't \{ (\sin \alpha - \sinh \alpha) + \gamma(\cos \alpha - \cosh \alpha) \} \{ [\sin \beta(1 - \cosh \beta) \\
 &\quad - (1 - \cos \beta) \sinh \beta] (\cos m_2 x_2 - \cosh m_2 x_2) \\
 &\quad + \{ \sinh \beta(\sin \beta + \sinh \beta) - (1 - \cosh \beta)(\cos \beta - \cosh \beta) \} \sin m_2 x_2 \\
 &\quad + \{ (1 - \cos \beta)(\cos \beta - \cosh \beta) - \sin \beta(\sin \beta - \sinh \beta) \} \sinh m_2 x_2 \}}{2 \{ \xi(1 - \cos \beta \cosh \beta) \{ (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \gamma(\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha) \} \\
 &\quad + 2\eta \{ \sin \beta(\cosh \beta - 1) + \sinh \beta(1 - \cos \beta) \} \{ (\sin \alpha \cosh \alpha \\
 &\quad + \cos \alpha \sinh \alpha) + \gamma(\cos \alpha \cosh \alpha - 1) \} \}}
 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

茲に  $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta$  は自由振動の場合の之等の値に於て  $p$  の代りに  $p'$  と置いたものに等しい。之等の式の分母が零になるとき、即ち強制振動の週期  $2\pi/p'$  が固有振動週期  $2\pi/p$  に等しいときに共振が起ることはいふまでもない。この式を種々の場合について計算して見ると、強制振動週期が固有振動週期よりも大なるときに比して小なるときの方が、屈曲モーメントは概して大きくなるけれども、梁の水平變位は寧ろ小さくなる傾向を示すものである。即ち地震のときに屋根瓦のよく落ちる家と、柱の折れる家とが必しも一致せぬことがこれでもよく説明されるのであつて、屋根瓦が早く落ちてしまつてから家屋が stiff になつたとする必要もなくて済むのである。計算結果は筆者及び金井氏の論文を見れば委しく出でる。

二張間架構の固有振動 次圖を参照して  $y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2'$  を夫々  $x_1, x_1', x_1'', x_2, x_2', x_2''$  の撓み變位、 $M_0, M_0', M_0'', M_2, M_1, M_2', M_1'$  を圖に示すやうな屈曲モーメン



第 131 圖

トとすれば、柱と梁につき夫々多張間架構の場合の如き振動の方程式が出る。勿論柱と梁とは夫々均一な性質があるものとする。振動式の解を各柱の下端に於ける  $y_1=0, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0, \dots$  の如き条件及び、柱と梁との接手に於ける条件、即ち

$$\left. \begin{aligned} x_1=l_1; & -E_1 a_1 k_1^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = M_0, & -E_1 a_1 k_1^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = -\frac{\rho_2 a_2 l_2}{2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, \\ x_1'=l_1; & -E_1 a_1 k_1^2 \frac{\partial^2 y_1'}{\partial x_1'^2} = M_0', & -E_1 a_1 k_1^2 \frac{\partial^2 y_1'}{\partial x_1'^2} = -\frac{\rho_2 a_2 l_2}{2} \frac{\partial^2 y_1'}{\partial t^2}, \\ x_1''=l_1; & -E_1 a_1 k_1^2 \frac{\partial^2 y_1''}{\partial x_1''^2} = M_0'', & -E_1 a_1 k_1^2 \frac{\partial^2 y_1''}{\partial x_1''^2} = -\frac{\rho_2 a_2 l_2}{2} \frac{\partial^2 y_1''}{\partial t^2}, \\ x_2=0, & x_1=l_1; & y_2=0, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & -E_2 a_2 k_2^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} = M_2, \\ x_2=l_2, & x_1'=l_1; & y_2=0, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1'}{\partial x_1'}, & -E_2 a_2 k_2^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} = M_1, \\ x_2=0, & x_1=l_1; & y_2=0, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & -E_2 a_2 k_2^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} = M_2', \\ x_2=l_2, & x_1''=l_1; & y_2=0, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1''}{\partial x_1''}, & -E_2 a_2 k_2^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} = M_1'' \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

に代入し、且つモーメントの条件

$$M_0 - M_2 = 0, \quad M_0' + M_1' = 0, \quad M_0'' + M_1 - M_2' = 0 \quad (65)$$

を用ひて振動数を定める式を出すことができる。式が餘り複雑であるから、委しいことは前記論文を参考にするに於て特別な場合の計算結果を示して見ると、 $l_1=l_2, E_1=E_2, a_1=a_2$  のとき、

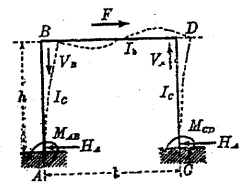
$\rho_1/\rho_2$	1/4	1/2	1	
$\left(\frac{\rho_1 \rho_2}{E_1 k_1^2}\right)^{1/2} l_1$	1.117 (1.224)	1.365 (1.429)	1.73 (1.645)	二張間の場合 多張間の場合

以上の結果によつて、特別の場合の外は多張間架構の計算も二張間架構の計算も大して違はぬことがわかる。従て三張間、四張間等には多張間として考へても大して差支ないのである。

二張間架構の強制振動 この場合も同様に試みた計算の結果があるけれども餘り長くなるから省略する。

### 172. 架構振動問題の勢力式による近似解法

架構の複雑な場合は普通は構造上の条件を簡單にしておいて計算を施すのである。しかるに条件は割合に正確にしておいて方程式の方を適宜省略して行く方法は勢力式を應用することである。谷口博士<sup>1)</sup> は架構の固有振動週期を決定する爲に、振動體の歪み勢力と運動勢力とを算出し、その兩者の最大値を等しく置くことによつて容易に之を求め得たのである。この方法は遙か以前に Reissner<sup>2)</sup> によつて既に手をつけられ、認るけれども、茲には谷口博士のやり方を紹介しようと思ふ。この方法では振動の型を初めから假定しておく爲に多少の誤があるけれども、實用上の複雑な問題ではそれ程正確でなくてもよいし、又他に大した逃げ道がないから従てよく應用されるのである。谷口博士は架構の振動曲線が適當な静力學的荷重の働いた場合の撓み曲線と同じであると假定して研究を進めた。以下、谷口博士が出した種々の張間数と層数のある架構の計算結果を擧げて見よう。



第 132 圖

今、右圖の如き下端固定の一張間の單層矩形架構を考へ、之に静力學的に  $F$  なる力が加はつたとすれば、Castigliano 原理其他の方法により

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{Fh}{2} \frac{1+3\beta}{1+6\beta} (=FhL_{AB}), & M_{BA} &= \frac{Fh}{2} \frac{3\beta}{1+6\beta} (=FhL_{BA}), \\ H_A &= \frac{F}{2} (=FR_A), & V_B &= \frac{F}{m} \frac{3\beta}{1+6\beta} (=FQ_B), \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

<sup>1)</sup> 谷口忠, "架構の固有振動週期に就て," 建築雑誌, 39 (1925), 43-62, 91-99, 177-206, 487-498.

<sup>2)</sup> H. Reissner, "Zur Dynamik der Fachwerke," ZS. f. Bauwesen, 49 (1899), 479-483.



但し  $M_{AB}$  は A 点の屈曲モーメント,  $M_{BA}$  は B 点の屈曲モーメント,  $H_A$  は AB 柱の剪應力,  $V_B$  は BD 梁の剪應力である. 又,  $I_b$  は梁の断面の慣性モーメント,  $I_c$  は柱の断面慣性モーメント,  $l$  = 張間,  $h$  を層高として,  $I_b/I_c = n$ ,  $l/h = m$ ,  $n/m = \beta$  の如き関係があるものとする. 式 (66) により AB 柱の撓みの弾性曲線式を作れば, A を原点として

$$y = \frac{F}{6EI_c} (3hx^2 L_{AB} - R_A x^3), \quad (67)$$

但し  $E$  は Young 率である. 次に BD 梁の撓み曲線式を作れば B 点を原点として

$$y = \frac{F}{6EI_b} \{ Q_B x^3 - 3L_B h x^2 + 3h^2 x (2L_{AB} - R_A) n \} \quad (68)$$

この式は  $x=0$  に於て  $y=0$  といふことと, 同点で  $dy/dx$  なる撓み角が AB 柱の B 点に於ける撓み角に等しいといふ二つの条件を満足するやうにしてある. CD 柱に就ても同様に算定できる. 振動の週期が  $2\pi/p$  とする. 各材の極大歪み勢力は

$$\frac{EI}{2} \int \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad [I \text{ は断面慣性モーメント}] \quad (69)$$

の如き積分式で表され, 又極大運動勢力は

$$\frac{\rho p^2}{2} A \int y^2 dx \quad [A \text{ は断面積}] \quad (70)$$

で示される. 尚 BD 梁に  $M$  なる別の質量があり, BD 材の水平の變位を  $y_h$  とすれば, その運動勢力の極大値は

$$\frac{M y_h^2}{2} \quad (71)$$

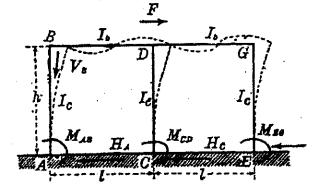
で與へられる. そこで (67), (68), から (69), (70) に代入し, 振動勢力保持の法則を適用して

$$p^2 = \frac{2EI_c \int_A^B \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + EI_b \int_B^D \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{2\rho A_c \int_A^B y^2 dx + \rho A_b \int_B^D y^2 dx + M y_h^2} \quad [A_c, A_b \text{ は AB 及 BD の断面積}] \quad (72)$$

と書けば, 結局自由振動の週期は次の如くなる:

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi h^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho A_c}{EI_c}} \sqrt{\left\{ \frac{66 + 246\beta + 234\beta^2 + 1.5m^2\epsilon}{35(2 + 15\beta + 18\beta^2)} + \frac{M}{M_c} \frac{4 + 12\beta + 9\beta^2}{4 + 15\beta + 18\beta^2} \right\}} \quad (73)$$

茲に  $\epsilon = A_b/A_c$  とし, 又  $M_c$  は AB 柱の質量とする.  $\beta$  や  $M$  を種々變更して計算すると次のやうなことがわかる. 即ち架橋の材料が一定してゐるときは架橋の振動週期が柱の高さの自乗に正比例し, 柱の断面慣性モーメントに反比例し, 梁材に特別に大きな質量が附着してゐるときは, その質量の平方根に比例し, 張間及び  $\beta$  の影響が非常に少い. 全く同様な方法によつて右圖の如き二張間の單層矩形架橋や, 張間数のもつと多い單層架橋の問題を解いて見ると,



第 133 圖

$$T = \frac{\pi h^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho A_c}{EI_c}} f\left(\beta, m^2\epsilon, \frac{M}{M_c}\right) \quad (73')$$

の如き函数形として週期を出すことができる.

上述の場合は柱の下層が固定してあるときであるが, 下端を支持してそれ等の点の屈曲モーメントを取除いて見ると, 一張間の架橋では

$$T = \frac{\pi h^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho A_c}{EI_c}} \sqrt{\left\{ \frac{70 + 336\beta + 408\beta^2 + 0.5m^2\epsilon}{35(3\beta + 6\beta^2)} + \frac{M}{M_c} \frac{1 + 2\beta}{\beta} \right\}} \quad (74)$$

となり, 張間数の澤山ある場合も亦同様に書くことができる. 而して之等の結果を前述の下端固定の場合と比較して見ると, 下端を支持する爲に週期が略二倍となり, 若し又梁部に特別に大なる質量があるときは, 下端を支持する場合の週期が, 下端を固定して附加質量を五倍にした場合のそれに略等しいといふことがわかるのである. 上の説明は實際の建築物にあるやうに  $\beta > 1$  なるが如き場合に適用できるものであることを断つておく.

谷口博士は更に進んで單張間數層の矩形架橋の振動週期の算定を試みた. それには各層に等單位水平力の働く場合を想像して架橋が静力學的に變形する形状

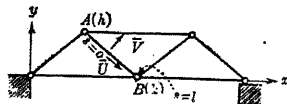
を定めるのである。その計算に所謂 slope deflection method などを應用するのが最も便利な處置である。その上に於て變形を起す振動の最大歪み勢力及び最大運動勢力、附加質量による運動勢力を導き出すことによつて、週期を見出すことができる次第である。この計算による週期と同博士が極く簡単な模型を作つて實驗せる結果とを比較した所が大體に於てよく一致したといふことである。同様な方針によつて谷口博士は數層數張間の問題をも解くことに成功した。

同様な問題は Pöschl<sup>1)</sup> も近頃研究し始めたやうである。週期が小さくなる程に剛にせる建物は耐震的にも勿論抵抗が多い。之等に関し實際の建物についての根本的説明は末廣博士<sup>2)</sup> が1931年米國に於てされた講演録に委しく出てる。

173. 架構振動問題の條件節約による近似解法

振動の取扱を容易にする爲に、構造に働く種々の弾性的の内力や其他の條件を簡單化することも亦やむを得ぬ逃げ道に相違ない。Reissner<sup>3)</sup> が架構問題の正確なる解の後に附加へた所の橋桁の計算や Pohlhausen<sup>4)</sup> が同様に橋梁を目的として行つた論文、武藤博士<sup>5)</sup> が建築物について試みたものなどは何れもこの部類に屬する。しかしそれにも種々の程度があり、Pohlhausen の如きは微分方程式の解を作る

場合に構造物の變形が簡単な形のものであると想像して近似法を試みたものである。今、本節の代表としてこの方法による自由振動の計算を擧げて見ることにする。



第 184 圖

今、上圖の如き架構に於て AB なる素材を取り、その AB に平行及び直角の變位

1) Th. Pöschl, "Über die angenäherte Berechnung der Schwingzahlen von Rahmenträgern," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 469-480.  
 2) 末廣 巷二, "Engineering Seismology," *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, 58 (1932), No. 4.  
 3) H. Reissner, "Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks," *ZS. f. Bauwesen*, 8 (1908), 135-162.  
 4) E. Pohlhausen, "Eigenschwingungen statisch-bestimmter Fachwerks," *ZAMM*, 1 (1921), 23-42.  
 5) 武藤 清, "建築物の振動に及ぼす地震動の影響," *建築雑誌*, 39 (1925), 第 476 號; "矩形架構の水平振動に於て," *建築雑誌*, 43 (1929), 67-106; "構造物振動理論," *建築雑誌*, 43 (1929), 49-66.

を夫々  $\bar{U}, \bar{V}$  とすれば、其等の變位を生ずる振動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} &= E \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial s^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} &= -E \kappa^2 \frac{\partial^4 \bar{V}}{\partial s^4} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

の如き式を以て表される。s は AB の長さの方向の座標、 $\rho, E, \kappa$  は密度、Young 率、断面慣性半径とする。A 及 B 點が夫々  $u_h, v_h$  及  $u_k, v_k$  の如き振幅の變位をなすものとし、又 A 及 B 點が支持されてゐる爲に兩點で各  $\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial s^2} = 0$  の如き關係を満足するものと假定れば、(75) の解として

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= u_k \sin \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho}} (t - t_k) \frac{\sin \lambda s}{\sin \lambda l} + v_h \sin \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho}} (t - t_h) \frac{\sin \lambda (l - s)}{\sin \lambda l}, \\ \bar{V} &= \frac{v_k}{2} \sin \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho}} (t - t_k) \left\{ \frac{\sin s \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}}{\sin l \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}} + \frac{\sinh s \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}}{\sinh l \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}} \right\} \\ &\quad + \frac{v_h}{2} \sin \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho}} (t - t_h) \left\{ \frac{\sin (l - s) \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}}{\sin l \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}} + \frac{\sinh (l - s) \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}}{\sinh l \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

が作られる。 $t_h, t_k$  は夫々 A, B 點の振動の時間的位相差を示す。今、時間的變化を包含する A, B 點の座標を  $(\bar{U}_h, \bar{V}_h), (\bar{U}_k, \bar{V}_k)$  とし、(76) を展開して最も極端な近似式を作れば

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_h + (\bar{U}_k - \bar{U}_h) \frac{s}{l}, \\ \bar{V} &= \bar{V}_h + (\bar{V}_k - \bar{V}_h) \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

となる。h, k は A, B の如き互に隣接する節點を意味する。この h 節點と k 節點との間の棒は均一な断面であるとし之を  $A_{hk}$  と書いておく。さて互に直角な方向の變位が (77) の如く書き得るものとする、その直角な向を x 軸及び y 軸の方向に取つても差支ない。それで今後は  $U, V$  を x, y に平行な變位、 $(U_h, V_h), (U_k, V_k)$  を

夫\* h 點及びk 點の各x, y 變位成分と考へることとする。然るときは之等に相當して (77) の如き式が作れる。又、變位 U, V に相當する速度を  $\dot{U}, \dot{V}$  で表すこととし、他のものも同様に意味を與へることにしておく。AB なる棒の運動勢力は

$$L_{hk} = \frac{\rho}{2} A_{hk} \int_0^{l_{hk}} (\dot{U}^2 + \dot{V}^2) ds. \quad (78)$$

上式に (77) を代入すれば容易に次式が得られる:

$$L_{hk} = \frac{\rho}{2} A_{hk} l_{hk} \left\{ \frac{1}{3} (\dot{U}_k - \dot{U}_h)^2 + \frac{1}{3} (\dot{V}_k^2 - \dot{V}_h^2) + \dot{U}_k \dot{U}_h + \dot{V}_k \dot{V}_h \right\}. \quad (78')$$

茲に注意すべきことは節點の數が N 個あるときには (U<sub>h</sub>, V<sub>h</sub>) の如き振動變位の自由度が 2N-3 個あることである。(78) のやうな運動勢力をすべての棒に就て積分すれば次の如くなる:

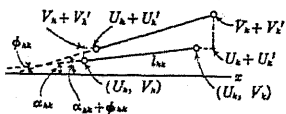
$$L = \frac{1}{2} \sum_h \sum_k L_{hk} + \frac{1}{2} \sum_h R_h \dot{V}_h^2, \quad (79)$$

但し R<sub>h</sub> は各節點に附着する質量を表す。この式から容易に

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_h} &= \rho \left\{ \dot{U}_h \frac{1}{3} \sum_k A_{hk} l_{hk} + \frac{1}{6} \sum_k \ddot{U}_k A_{hk} l_{hk} \right\}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{V}_h} &= \rho \left\{ \dot{V}_h \left( \frac{1}{3} \sum_k A_{hk} l_{hk} + \frac{R_h}{\rho} \right) + \frac{1}{6} \sum_k \ddot{V}_k A_{hk} l_{hk} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

が作られる。次にポテンシャル勢力を出す爲に AB なる棒の長さの變化を作つて見る。初めの近似的條件によつて撓みの歪みがないものと假定する。而して變化せる棒の長さは下圖を参照して次式で示すことができる:

$$\bar{l}_{hk} = \sqrt{(l_{hk} \cos \alpha_{hk} + U_k + U_k - U_h - U_h)^2 + (l_{hk} \sin \alpha_{hk} + V_k + V_k - V_h - V_h)^2}, \quad (81)$$



第 135 圖

茲に  $\alpha_{hk}$  は棒が延びることなく變位を起す爲に生ずる角變位を表す。又、AB なる棒のポテンシャル勢力(歪み勢力)は

$$\bar{\Phi}_{hk} = \frac{E}{2} A_{hk} \frac{(\bar{l}_{hk} - l_{hk})^2}{l_{hk}}. \quad (82)$$

従て之を架構全體に合計して

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} \sum_h \sum_k E A_{hk} \frac{(\bar{l}_{hk} - l_{hk})^2}{l_{hk}} + \sum_h R_h V_h^2 \quad (83)$$

即ち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial U_h} &= \sum_k E A_{hk} \frac{(\bar{l}_{hk} - l_{hk})}{l_{hk}} \frac{\partial \bar{l}_{hk}}{\partial U_h}, \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial V_h} &= \sum_k E A_{hk} \frac{(\bar{l}_{hk} - l_{hk})}{l_{hk}} \frac{\partial \bar{l}_{hk}}{\partial V_h} + R_h \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

今 S<sub>hk</sub> を AB なる棒に働く應力とすれば、(84) の中で

$$S_{hk} = E A_{hk} \frac{\bar{l}_{hk} - l_{hk}}{l_{hk}} \quad (85)$$

の如き置換が行はれる。然るに

$$\frac{\partial \bar{l}_{hk}}{\partial U_h} = \cos(\alpha_{hk} + \phi_{hk}), \quad \frac{\partial \bar{l}_{hk}}{\partial V_h} = \sin(\alpha_{hk} + \phi_{hk}), \quad (86)$$

且つ E=∞ のときは  $\phi_{hk}=0$  としてよいから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial U_h} &= \sum_k S_{hk} \cos \alpha_{hk}, \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial V_h} &= \sum_k S_{hk} \sin \alpha_{hk} + R_h. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

今

$$S_{hk} = S_{hk}^{(0)} + S_{hk}^{(1)} \quad (88)$$

と考へ、S<sub>hk</sub><sup>(0)</sup> は R<sub>h</sub> による静力學的の力とし、S<sub>hk</sub><sup>(1)</sup> のみを振動に關係する部分とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sum_k S_{hk}^{(1)} \cos \alpha_{hk} &= 0, \\ \sum_k S_{hk}^{(1)} \sin \alpha_{hk} + R_h &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

であり、且つ

$$S_{hk}^{(0)} = \frac{E A_{hk}}{l_{hk}} \{ (U_k - U_h) \cos \alpha_{hk} + (V_k - V_h) \sin \alpha_{hk} \} \quad (90)$$

となる。斯の如くして (80), (87), (88), (89), (90) を Lagrange の方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_h} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial U_h}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{V}_h} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial V_h}, \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

に代入するときは

$$\left. \begin{aligned} \rho \left\{ \ddot{U}_h \frac{1}{3} \sum_k A_{hk} l_{hk} + \frac{1}{6} \sum_k \ddot{U}_k A_{hk} l_{kk} \right\} &= -E \sum_k \epsilon_{hk} \cos \alpha_{hk}, \\ \rho \left\{ \ddot{V}_k \left( \frac{1}{3} \sum_k A_{hk} l_{hk} + \frac{R_h}{\rho} \right) + \frac{1}{6} \sum_k \ddot{V}_k A_{hk} l_{hk} \right\} &= -E \sum_k \epsilon_{hk} \sin \alpha_{hk}. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

の如き一次均等方程式が  $2N-3$  組出来る。(92) に於て

$$\epsilon_{hk} = \frac{A_{hk}}{l_{hk}} \left\{ (U_k - U_h) \cos \alpha_{hk} + (V_k - V_h) \sin \alpha_{hk} \right\} \quad (93)$$

である。今、自由振動週期を出す爲に

$$\left. \begin{aligned} U_h &= u_h \sin \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho}} t, \\ V_h &= v_h \sin \lambda \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \end{aligned} \right\}$$

の如く書けば

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 \left\{ u_h \frac{1}{3} \sum_k A_{hk} l_{hk} + \frac{1}{6} \sum_k u_k A_{hk} l_{kk} \right\} &= \sum_k \epsilon_{hk} \cos \alpha_{hk}, \\ \lambda^2 \left\{ v_h \left( \frac{1}{3} \sum_k A_{hk} l_{hk} + \frac{R_h}{\rho} \right) + \frac{1}{6} \sum_k v_k A_{hk} l_{hk} \right\} &= \sum_k \epsilon_{hk} \sin \alpha_{hk}. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

の如き式が  $2N-3$  個出来る。上式に於て

$$\epsilon_{hk} = \frac{A_{hk}}{l_{hk}} \left\{ (u_k - u_h) \cos \alpha_{hk} + (v_k - v_h) \sin \alpha_{hk} \right\}$$

である。  $u_h, v_h, u_k, v_k$  等は節點の振幅であるから之等に種々の値を入れて圖式其他の方法で計算し、且つ(94)に於て  $\cos \alpha_{hk}, \sin \alpha_{hk}$  を消去すれば或る  $\lambda^2$  の値が定まる。更に幾度も變位を假定して多くの  $\lambda^2$  を算出し、之等の  $\lambda$  の中で最小の値を取ればよい。従て假定せる型に相當し最も可能的な振動の週期  $\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  を見出し得

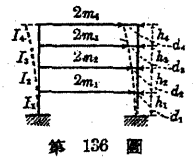
るのである。この方法は直ちに實用に供することはかなり困難であるけれども、その考方だけは採用する價値があると思ふ。

尙武藤教授<sup>1)</sup>は建築の矩形架構の問題に於て各素材の振動形に(77)に類似の近似法を用ひて之を柱の振動の如く假定し、然る後構造物全體に綜合した振動を極めて輕快に取扱つたのである。その問題の捉へ方に於て Pohlhausen とかなり共通した所があつて面白いと思ふ。尙武藤教授はその考を押し進めて架構の強制振動の問題や減衰振動までも委しく研究したのである。尙同氏が別に矩形架構に水平力の加はる問題を取扱つてゐるのは、恐らく架構の水平振動問題との關係を狙つたのであらう。

#### 174. 架構振動問題の静力學的解法

架構の如き複雑な構造物では、その慣性力を静力學的の力と見做して之に静力學的の計算法を施すことは必しも排斥すべきものではない。しかし斯る場合には單弦振動のやうな強制力が働くときでもその自由振動週期が強制振動の週期に比して極めて小であることを必要條件とするのである。それでもこれ等の週期が互に殆ど同じ位のとときに應用しても大しては誤がないやうである。前にも述べてあるやうにこの方法はかなり多くの人に採用され、その取扱方にも種々の行き方が考案されたのである。

自由振動 先づ最も簡単な例として Martel<sup>2)</sup>が試みた方法を示して見る。今、四階の構柱(bents)の自由振動週期を算定する目的を以て次の如き記號を擧げておく。各階の高さを夫々  $h_1, h_2, h_3, h_4$  とし、各階にある二次元的柱の斷面慣性モーメントを  $I_1, I_2, I_3, I_4$  とする。又、二階、三階、四階及び屋上の床の支持する質量を夫々  $2m_1, 2m_2, 2m_3, 2m_4$  とし、構柱が水平に振動する爲に生ずるこれ等の床の水平變位を夫々  $d_1, d_2, d_3, d_4$  とする。  $E$  を柱の Young 率、  $c_1 = I_1^2 / 12EI_1, c_2 = h_2^2 / 12EI_2,$



第 136 圖

<sup>1)</sup> 武藤清, 前掲.

<sup>2)</sup> R. R. Martel, "The Dynamic Behaviour of Some Simple Bents Subjected to Established Simple Harmonic Motion," 萬國工業會議論文(1929), 3, 第 490 論文.

$c_3 = h^3/12EI$ ,  $c_4 = h^3/12EI$  と書いておく。各床に加はる慣性力は  $T$  を週期として  $4\pi^2 md/T^2 \equiv mp^2 d$  の形を取る。又、各階間の變位の違ひは  $h^3/12EI$  に水平の剪断力を乗じたものに等しいと置き得るから、次の四個の方程式が作れるのである：

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= p^2 c_1 (d_1 m_1 + d_2 m_2 + d_3 m_3 + d_4 m_4), \\ d_2 &= p^2 c_2 (d_2 m_2 + d_3 m_3 + d_4 m_4) + d_1, \\ d_3 &= p^2 c_3 (d_3 m_3 + d_4 m_4) + d_2, \\ d_4 &= p^2 c_4 (d_4 m_4) + d_3. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

この四式から  $d_1, d_2, d_3, d_4$  を消去すれば  $p^2$  を決定すべき方程式が得られ、之から  $p^2$  の四組の根が出る。即ち各自由度の振動週期を得るのである。特別に  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$  の如き簡単な場合を取り、 $p^2$  の方程式を作ると

$$(p^2 cm)^4 - 7(p^2 cm)^3 + 15(p^2 cm)^2 - 10p^2 cm + 1 = 0$$

となる。 $p^2 cm$  なる根を出して見ると、0.12, 1.0, 2.36, 3.52 の四組の解が見出せるのである。尙、之等に相當する各床の水平變位の割合を示して見ると下の如くなる：

$p^2 cm$	$d_2/d_4$	$d_3/d_4$	$d_1/d_4$
0.12	0.88	0.655	0.35
1.00	0.00	-1.000	1.00
2.36	-1.36	-0.51	1.54
3.52	-2.53	2.89	-1.89

主要振動に對しては各階の傾斜の位相が何れも同じになることがわかる。

強制振動 強制振動の場合について考へると、 $T_1 = \frac{2\pi}{p_1}$  を強制振動週期、 $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  を地面及び第二階、第三階、第四階及び屋上の水平變位とし、且つ  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$  と假定すれば、各階に働く水平慣性力は  $F = mp^2 A$  の如き形を取るから、

$$\left. \begin{aligned} A_1 - A_0 &= p_1^2 cm (A_1 + A_2 + A_3 + A_4), \\ A_2 - A_1 &= p_1^2 cm (A_2 + A_3 + A_4), \\ A_3 - A_2 &= p_1^2 cm (A_3 + A_4), \\ A_4 - A_3 &= p_1^2 cm A_4 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

なる方程式が得られる。之等を解き、 $A_4$  と  $A_0$  との間の關係を出して見るときは、

$$\frac{A_4}{A_0} = \frac{1}{(p_1^2 cm - 0.12)(p_1^2 cm - 1.0)(p_1^2 cm - 2.36)(p_1^2 cm - 3.52)}$$

となる。即ちこの式の分母を見れば明かに共振の現象も起り得ることを記載してある。 $A_3, A_2, A_1$  は前の關係から直ちに

$$A_3 = -(p_1^2 cm - 1)A_4, \quad A_2 = \{(p_1^2 cm)^2 - 3p_1^2 cm + 1\}A_4,$$

$$A_1 = -\{(p_1^2 cm)^3 - 5(p_1^2 cm)^2 + 6p_1^2 cm - 1\}A_4$$

の如く書くことができる。一つの例として  $T = 2.5$  秒,  $T_1 = 1$  秒,  $A_0 = 1.5$  吋に取れば  $T/T_1 = 2.5$  であり、振幅は下の如き値となる：

階	床	極大の $A/A_0$	極大振幅 (吋)
1	0	1.0	1.50
2	1	1.5	2.25
3	2	1.0	1.50
4	3	-0.3	-0.45
	4	-1.3	-1.95

接手の條件 上述の方法は極く近似的なものであつて、床と柱との接手の條件などは餘り考慮してないやうに思はれる。之等の點を深く考慮してもつと進歩せる計算を行つた人には既に述べてあるやうに佐野博士<sup>1)</sup>、眞島博士<sup>2)</sup>、水原技師<sup>3)</sup>、

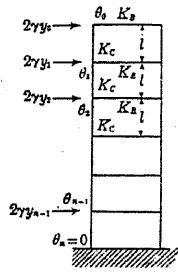
1) 佐野利器, "家屋耐震構造論 上下編," 前掲。

2) 眞島健三郎, "重層架構造建築耐震構造論," 土木學會誌, 42 (1926), 229-304; 地震と建築 (1930); "On Earthquake and Building Construction," 萬國工業會議論文 (1929), 第 163 論文。

3) 水原旭, 後出。

谷口博士などであらうと思ふ。殊に佐野博士が Castigliano の考や Wilson の撓角撓度法 (slope-deflection method) を振動問題に新に導入せるが如き、眞島博士が別の路から同様に静力學の不定靜理論に持つて行つたことなどは特筆すべきことであらう。

撓角撓度法及び Differenzgleichungen 架構の振動問題を取扱ふには Wilson<sup>1)</sup> が考へた撓角撓度法を動力學的問題に應用するのが便利であり、且つ安全な方法であることは多くの人によつて認められてゐる所であるが、その方程式を解くには Differenzgleichungen<sup>2)</sup> の方法を適用することも亦一法であらう。水原技師<sup>3)</sup>はこの Differenzgleichungen を巧に應用して架構の振動問題を解いたのである。さて、撓角撓度法によれば、A 點及 B 點間にある棒の兩端の屈曲モーメント  $M_A, M_B$  及び剪斷力  $V_A, V_B$  は次式に示される。但し AB 間に荷重が存在せぬものと見做す。



第 137 圖

$$\left. \begin{aligned} M_A &= 2EK \left( 2\theta_A + \theta_B + \frac{3}{l}y_A - \frac{3}{l}y_B \right), \\ M_B &= 2EK \left( \theta_A + 2\theta_B + \frac{3}{l}y_A - \frac{3}{l}y_B \right), \\ V_A &= -V_B = -\frac{6EK}{l} \left( \theta_A + \theta_B + \frac{2}{l}y_A - \frac{2}{l}y_B \right), \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

茲に  $y_A, y_B$  は夫々 A, B に於ける撓み、 $\theta_A, \theta_B$  は兩點の傾斜を示す。又、 $l$  は AB 間の長さ、 $E$  は Young 率、 $K=I_m/l$  である。この  $I_m$  は AB 間の柱の斷面の慣性モーメントである。次に左圖の如き  $n$  階の高層架構を取り、 $T_1$  なる週期の震動が働くとす

1) Wilson & Morley, *Wind Stresses in the Steel Frames of Office Buildings* (1915); "Analysis of Statically Indeterminate Structures by the Slope Deflection Method," *Bull. Ill. Univ.* (1918).

2) Funk, *Die Linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen*, (1920); Bleich Melan, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzen der Baustatik* (1927).

3) 水原旭, "高層架構の振動に関する演習," 其他, *建築雑誌*, 41 (1927), 第 493 號, 第 497 號, 第 501 號; 43 (1929), 第 522 號; 44 (1930), 第 534 號; 萬國工業會議論文 (1929).

れば、撓角撓度法の考によつて

$$\left. \begin{aligned} \text{各節點に於て} & \quad \sum M = 0, \\ \text{各床面に於て} & \quad V_m - V_{m-1} = \frac{4\pi^2 M}{T_1^2} y_m. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

$M$  はその床面の全質量、 $y_m$  は床面の水平變位である。そこで (97) の助けにより屋上面から次々の床面について (98) の如き式を書けば、

$$\left. \begin{aligned} 2EK_c \left\{ 2\theta_0 + \theta_1 - \frac{3}{l}(y_0 - y_1) \right\} + 6EK_B \theta_0 &= 0, \\ -\frac{12EK_c}{l} \left\{ \theta_0 + \theta_1 - \frac{2}{l}(y_0 - y_1) \right\} &= 2\gamma y_0, \end{aligned} \right\} \quad [m=0] \quad (99)$$

茲に  $K_c, K_B$  は柱及び梁材の  $K$  に相當し、又  $\gamma = \frac{4\pi^2 M}{T_1^2} \frac{1}{2}$  とする。同様に

$$\left. \begin{aligned} 2EK_c \left\{ 2\theta_m + \theta_{m-1} - \frac{3}{l}(y_{m-1} - y_m) \right\} \\ + 2EK_c \left\{ 2\theta_m + \theta_{m+1} - \frac{3}{l}(y_m - y_{m+1}) \right\} + 6EK_B \theta_m &= 0, \\ -\frac{12EK_c}{l} \left\{ \theta_m + \theta_{m+1} - \frac{2}{l}(y_m - y_{m+1}) \right\} \\ + \frac{12EK_c}{l} \left\{ \theta_{m-1} + \theta_m - \frac{2}{l}(y_{m-1} - y_m) \right\} &= 2\gamma y_m. \end{aligned} \right\} \quad [m=1, 2, \dots, n-1] \quad (100)$$

$$\theta_n = 0, \quad y_n = a. \quad [m=n] \quad (101)$$

以上の式に於て  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  は夫々屋上面から次々の床面の水平變位を示し、 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  は夫々の床面のある所の柱の傾斜である。又、 $a$  は地面の水平振幅を表す。之等の式に於て

$$K_B/K_c = k, \quad \gamma l^2/6EK_c = \beta \quad \left[ \gamma = \frac{4\pi^2 M}{T_1^2} \frac{1}{2} \right] \quad (102)$$

と書けば、

$$\left. \begin{aligned} (2+3k)\theta_0 + \theta_1 - \frac{3}{l}y_0 + \frac{3}{l}y_1 &= 0, \\ \theta_0 + \theta_1 - \left( \frac{2}{l} - \frac{\beta}{l} \right) y_0 + \frac{2}{l}y_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [m=0] \quad (99')$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_{m-1} + (4+3k)\theta_m + \theta_{m+1} - \frac{3}{l}y_{m-1} + \frac{3}{l}y_{m+1} &= 0. \\ \theta_{m-1} - \theta_{m+1} - \frac{2}{l}y_{m-1} + \left(\frac{4}{l} - \frac{\beta}{l}\right)y_m - \frac{2}{l}y_{m+1} &= 0. \end{aligned} \right\} [m=1, 2, \dots, n-1] \quad (100')$$

$$\theta_n = 0, \quad y_n = a \quad [m=n] \quad (101')$$

今 (99'), (100'), (101') を解く爲に Differenzgleichung の方法を適用すると之等は  $y$  の系統のみの方程式となる。即ち (100') の如き式の中で連続せる三節點に關する六個の方程式から  $\theta$  を消去すれば

$$y_{m-2} - (4+6k+\beta)y_{m-1} + \{6+12k-\beta(4+3k)\}y_m - (4+6k+\beta)y_{m+1} + y_{m+2} = 0. \quad (103)$$

この式を (zugehörige) homogene Differenzgleichung と名づけ右邊が零でない場合を inhomogene Differenzgleichung といふ。さて Differenzgleichung の方法によるときは (103) の系統の解として

$$y_m = C_1 U_1^m + C_2 U_2^m + C_3 U_3^m + C_4 U_4^m \quad (104)$$

が得られる。但し  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は任意常數であり、又四個の  $U$  即ち  $U_1, U_2, U_3, U_4$  は一般に

$$U^4 - (4+6k+\beta)U^3 + \{6+12k-\beta(4+3k)\}U^2 - (4+6k+\beta)U + 1 = 0 \quad (105)$$

の解である。(104) を (100') に代入すれば

$$\theta_m = C_1 S_1 U_1^m + C_2 S_2 U_2^m + C_3 S_3 U_3^m + C_4 S_4 U_4^m \quad (106)$$

を得 但し

$$S_{1,2,3,4} = \left[ \frac{\frac{2}{l} - \frac{3}{l}U_i^2}{1 + (4+k)U_i + U_i^2} \right]_{i=1,2,3,4} = \left[ \frac{\frac{2}{l} - \left(\frac{4}{l} - \frac{\beta}{l}\right)U_i + \frac{2}{l}U_i^2}{1 - U_i^2} \right]_{i=1,2,3,4} \quad (107)$$

尙、(105) なる代數式の解を出すことはあまり簡單ではないけれども、ともかくも同式に於て  $U + \frac{1}{U} = X$  と書けば

$$-X^2 + (4+6k+\beta)X + \{-4(1+3k) + \beta(4+3k)\} = 0 \quad (108)$$

が出る。この式を解けば

$$\left. \begin{aligned} X_1 \\ X_2 \end{aligned} \right\} = 2 + \left(3k + \frac{\beta}{2}\right) \pm \sqrt{\left(3k + \frac{\beta}{2}\right)^2 + 3\beta(2+k)} = \frac{2+\xi}{2-\eta}$$

となる。 $X_1$  の方から

$$\left. \begin{aligned} U_1 \\ U_2 \end{aligned} \right\} = 1 + \frac{\xi}{2} \pm \sqrt{\xi + \frac{\xi^2}{4}} = \begin{cases} e^\phi \\ e^{-\phi} \end{cases} \quad (109)$$

が出る。但し  $1 + \frac{\xi}{2} = \cosh \phi$ 。

$X_2$  の方から

$$\left. \begin{aligned} U_3 \\ U_4 \end{aligned} \right\} = 1 - \frac{\eta}{2} \pm \sqrt{-\eta + \frac{\eta^2}{4}} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad (110)$$

が出る。但し  $1 - \frac{\eta}{2} = \cos \theta$  とする。(109), (110) を用ひて

$$y_m = C_1 e^{m\phi} + C_2 e^{-m\phi} + C_3 \sin m\theta + C_4 \cos m\theta. \quad (111)$$

同様にして  $\theta_m$  を出すことができる。

任意常數  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を決定する爲に境界条件を用ひる。即ち (99'), (100') (101') から次式を作る。

$$(2+3k)\theta_0 + \theta_1 - \frac{3}{l}y_0 + \frac{3}{l}y_1 = 0, \quad [m=0 \text{ の場合}] \quad (112a)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 + (4+3k)\theta_1 + \theta_2 - \frac{3}{l}y_0 + \frac{3}{l}y_1 &= 0, \\ \theta_0 - \theta_2 - \frac{2}{l}y_0 + \left(\frac{4}{l} - \frac{\beta}{l}\right)y_1 - \frac{2}{l}y_2 &= 0, \end{aligned} \right\} [m=1 \text{ の場合}] \quad (112b)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 + (4+3k)\theta_2 + \theta_3 - \frac{3}{l}y_1 + \frac{3}{l}y_2 &= 0, \\ \theta_1 - \theta_3 - \frac{2}{l}y_1 + \left(\frac{4}{l} - \frac{\beta}{l}\right)y_2 - \frac{2}{l}y_3 &= 0. \end{aligned} \right\} [m=2 \text{ の場合}] \quad (112c)$$

之等から  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  を消去すれば

$$(I) \quad \begin{aligned} &-(4+31k+51k^2+18k^3)y_0 + [(10+62k+96k^2+36k^3) \\ &\quad -\beta(8+29k+30k^2+9k^3)]y_1 - [(8+37k+48k^2+18k^3) \\ &\quad +\beta(2+6k+3k^2)]y_2 + (2+6k+3k^2)y_3 = 0. \end{aligned} \quad (113)$$

同様に

$$\theta_0 + \theta_1 - \left(\frac{2}{l} - \frac{\beta}{l}\right)y_0 + \frac{2}{l}y_1 = 0 \quad (114)$$

及び (112b), (112c) から

$$(II) [1 + \beta(6 + 3k)]y_0 - [(3 + 6k) - \beta(5 + 3k)]y_1 + [(3 + 6k) + \beta]y_2 - y_3 = 0. \quad (115)$$

又

$$\left. \begin{aligned} \theta_{n-3} + (4 + 3k)\theta_{n-2} + \theta_{n-1} - \frac{3}{l}y_{n-3} + \frac{3}{l}y_{n-1} &= 0, \\ \theta_{n-3} - \theta_{n-1} - \frac{2}{l}y_{n-3} + \left(\frac{4}{l} - \frac{\beta}{l}\right)y_{n-2} - \frac{2}{l}y_{n-1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (116a)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_{n-2} + (4 + 3k)\theta_{n-2} - \frac{3}{l}y_{n-2} + \frac{3}{l}a &= 0, \\ \theta_{n-2} - \frac{2}{l}y_{n-2} + \left(\frac{4}{l} - \frac{\beta}{l}\right)y_{n-2} - \frac{2}{l}a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (116b)$$

から

$$(III) (4 + 3k)y_{n-3} - [(18 + 36k + 18k^2) + \beta(4 + 3k)]y_{n-2} + [36 + 81k + 36k^2] - \beta(14 + 24k + 9k^2)]y_{n-1} - (22 + 48k + 18k^2)a = 0. \quad (117)$$

最後に

$$(IV) \quad y_n = a. \quad (118)$$

之等 (I), (II), (III), (IV) が境界条件を與へる。之等の式に (111) を入れて任意常数の一部分を決定し、その結果を (100) 其他に代入して順々にすべての常数を定めることができるのである。

一例として、 $I=60000 \text{ 吋}^4$ ,  $l=150 \text{ 吋}$  と取れば、 $K_c = \frac{60000}{150} = 400 \text{ 吋}^3$ ,  $K_B = 80 \text{ 吋}^3$ ,  $E=2000000 \text{ 磅每平方吋}$ ,  $T_0=1 \text{ 秒}$ , 建物層数九階,  $M=30000 \text{ 磅}$ ,  $g=385 \text{ 吋/秒}^2$  とすれば

$$\beta = \frac{150^2}{6 \times 2000000 \times 385 \times 400} \times \frac{4\pi^2 \times 30000}{2} = 0.003605,$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 \\ X_2 \end{aligned} \right\} = \begin{cases} 2 + 1.223 \\ 2 - 0.0195. \end{cases}$$

従て

$$\phi = 1.056, \quad \theta = 0.1398,$$

$$y_m = C_1 e^{\frac{10.08}{9.5} m} + C_2 e^{-\frac{10.08}{9.5} m} + C_3 \sin 1.328 \frac{m}{9.5} + C_4 \cos 1.328 \frac{m}{9.5}.$$

境界条件 (I), (II), (III), (IV) から

$$C_1 = 0.000001986\alpha, \quad C_2 = 0.34887\alpha,$$

$$C_3 = 2.6563\alpha, \quad C_4 = 0.65113\alpha.$$

斯の如くして水原技師は Differenzgleichungen の方法を振動問題に實用化せしめたのである。上述の問題は強制振動の場合であるが、自由振動にも同様に應用できることは勿論である。水原技師はこの方法のみに限らず、尙進んで種々の方法を利用して架構の振動を研究中であるから、その全般が具體化した際には吾人に非常な利便を與へるものと思ふ。

### 175. 構造物の振動減衰性及びその實驗

建築構造物に於ては振動を與へる弾性に比較して振動を減衰させる固體粘性のごとき抵抗が非常に大である。従てその固有振動週期や振動位相等にかなり影響を與へるものである。構造物の場合には素材についての屈曲的振動が多いのでどうしても棒の屈曲減衰振動を研究しなければならぬ。筆者<sup>1)</sup>は他の目的上から斯る場合の正確なる振動方程式を作つて見たのであるが、又、末廣博士<sup>2)</sup>ももつと正確な分析を以て同じ式を導出し、然る後之を塔狀構造物の振動週期の變化と比較されたのである。

今、棒の密度を  $\rho$ , Young 率を  $E$ , 直接粘性係数を  $\xi$ , 断面慣性モーメントを  $Al^2$ ,  $x$  に於ける撓みを  $y$  と書き、棒の極く短い單位長さの横撓みの振動方程式を出すと

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \partial F'}{\partial x \partial t} \quad (119)$$

となる。茲に  $F$  はこの場所の断面に働く弾性的剪断力とし、 $\frac{\partial F'}{\partial t}$  は同じ断面に働く

<sup>1)</sup> 筆者, "On the Decay of Waves in Visco-Elastic Solid Bodies," 東京帝國大學地震研究所彙報, 3 (1927), 48-53.

<sup>2)</sup> 末廣恭二, "On the Upper Limit of the Frequency of Transverse Vibration of Prismatic Bars," 帝國學士院紀事, 4 (1928), 286; "On the Damped Transversal Vibration of Prismatic Bars," 東京帝國大學地震研究所彙報, 6 (1929), 63-70.



粘性的剪断力を表す。次に同じ場合の単位長さの部分の回転運動をなす方程式は

$$\rho Ak^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2 \partial x} = E Ak^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi Ak^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} + F + \frac{\partial F'}{\partial t} = 0. \quad (120)$$

(119), (120) から  $F + \partial F'/\partial t$  を消去して

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ek^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} = \rho k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2 \partial x^2}. \quad (121)$$

普通の棒で振動、波長が棒の深さより稍大なるか又はそれ以上のものではこの式の右邊は看過して差支ない。故に次式が出る：

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ek^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} = 0. \quad (122)$$

この式は筆者が初め證明なくして出し、又、末廣博士が別の證明を用ひて導かれたものである。末廣博士は尙進んで (122) の解を

$$y = u_r \phi_r \quad [u_r \text{ はノーマル函数}] \quad (123)$$

と書き、 $\phi_r$  なる解を求めて次式の如く置いた：

$$\phi_r = a e^{-\frac{1}{2} m_r^2 \frac{\xi}{\rho} k^2 t} \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{4 m_r^2 \frac{E}{\rho} k^2 - m_r^2 \frac{\xi^2}{\rho^2} k^4} t - \alpha \right), \quad (124)$$

但し  $m_r = n_r/l$ ,  $n_r$  は  $r$  次の振動に特有な数、 $l$  は棒の長さである。この週期的の振動は上式の平方根の中が零になるとき、即ち

$$\frac{\pi \xi}{E} > \frac{2\pi}{m_r^2 k} \sqrt{\frac{\rho}{E}} (= T_r) \quad (125)$$

のときに無週期的となつて無くなる。 $T_r$  はその型に相當する不減衰振動の週期である。末廣博士によれば、斯る意味から實際の減衰振動の週期の極限は大體に於て

$$T_m \approx \frac{2\pi \xi}{E} \quad (126)$$

位までが存在するものと思はれる。即ちこれ以上短い週期の振動は不可能である。

末廣博士はこの理論を二三の人が行つた塙状構造物の振動實驗の結果と比較

した。大森博士<sup>1)</sup> の一つの實驗は煉瓦柱 4.95米×0.455米×0.225米 について主要振動週期 0.26秒、對數減衰率 0.148 を與へてゐる。この場合に

$$\frac{\xi}{E} = 1.95 \times 10^{-3} (\text{C.G.S.}), \quad T_r < \frac{1}{160} \text{秒}, \quad T_m \approx \frac{1}{80} \text{秒}$$

となる。又、大森博士<sup>2)</sup> の別の實驗によれば煉瓦煙突 15.45米×1.32米×1.32米 に於て週期=1.03秒、減衰率=0.06 であるから

$$\xi/E = 8.13 \times 10^{-3} (\text{C.G.S.}),$$

谷口博士<sup>3)</sup> は高さ2米、幅2米の鐵筋コンクリート架構(部分省略)に於て週期=0.14秒、減衰率=0.26 を出した。之から計算して

$$\xi/E = 1.85 \times 10^{-3} (\text{C.G.S.}),$$

又、田中館、眞野兩博士の行つた實驗、即ち煉瓦煙突 5.9米×1.06米×1.06米 ではその抵抗度の少い向きの週期=0.333秒、減衰率=0.253。之から

$$\xi/E = 4.28 \times 10^{-3} (\text{C.G.S.}),$$

上の場合とは直角だけ違つた向きでは週期=0.450秒、減衰率=0.210 であつて

$$\xi/E = 4.78 \times 10^{-3} (\text{C.G.S.})$$

となる。即ち  $\xi/E$  の値が大體に於て一定の値を示すのである。

筆者は塙状體に軸方向の壓力が加はる場合に振動の週期、及び振動極限の變ること、その他關聯せる種々の事項を研究した。<sup>4)</sup> 武藤博士<sup>5)</sup> は固體粘性と空氣抵抗とがある場合の棒の減衰振動問題の計算を試みた。

<sup>1)</sup> 大森房吉, "Experiments on the Vibration of Brick Columns," 震災豫防調査會歐文紀要, 2 (1908), 223-228.

<sup>2)</sup> 大森房吉, "Note on the Vibration of Chimneys," 震災豫防調査會歐文報告, 第12號 (1903), 29-37.

<sup>3)</sup> 谷口忠, "鐵筋コンクリート架構の振動實驗," 建築雜誌, 42 (1923), 第506號, 151-169.

<sup>4)</sup> 筆者, "Some Problems of Shocks transmitted in Bars and in Plates," 東京帝國大學航空研究所報告, 第45號 (1928); 83-147; "固體粘性が抗壓材の振動に及ぼす影響," 東京帝國大學航空研究所報, 第67號 (1930), 156-161.

<sup>5)</sup> 武藤清, "Biegungsschwingungen mit Berücksichtigung der Stabmasse und der äusseren und inneren Dämpfung," Z.A.M.M., 10 (1930), 346-353.

176. 實際の建物の振動測定

實際の建物の振動週期は大森博士、齋田理學士、今村博士、堀越博士、末廣博士その他によつて測定された。大森博士の振動測定は既によく知られてゐるが、末廣博士<sup>1)</sup>は振動測定の結果から建物を一つの剛體としてそれ全體が泥の上で動揺するものと考へた方が實際に近い事を發見された。實際、建物が架構式のものであつても之に壁其他のものが附着すると性質が著しく變るものであつて、振動性が固體の動揺乃至剪斷振動の性質をもつやうになるものである。この剪斷振動の事も末廣博士によつて提唱されたことは既に述べた。石本博士<sup>2)</sup>はこれに多少似た考方によつて平屋造コンクリート建物の振動を測定した。今村博士<sup>3)</sup>は岸上理學士と共に議院建築の骨組中の種々の階梯に於ける振動を測定して貴重な参考材料を提供した。以上の外、内田博士<sup>4)</sup>が齋田、武藤兩氏と共に東大文法經の鐵骨架構の振動を測定したことや、福富理學士<sup>5)</sup>が武田ビルディングの振動を觀測したことなどは注意に値する。

次表は高層建築の振動週期の測定結果を末廣博士<sup>5)</sup>や谷口博士<sup>7)</sup>が集めたものの再録であつて、参考の爲に掲げておいた。之を見れば建築の工事中や骨組組立後とその完成後とでは週期に甚しい相違のあることが判明するであらう。又、序でに述べておきたいことは大地震前と後とによつて週期が著しく變化してゐることである。鐵骨に附加せる壁の状態などによつて週期を變化することがわかる。しかし建物の振動週期はその測定者によつて多少異なる値が出るものである。

1) 末廣恭二、石本巳四雄、"On the Vibration of Low Monolithic Buildings," 第三回汎太平洋會議紀事 (1926), 1482-1485.

2) 石本巳四雄、"コンクリート造平屋の振動測定," 地震研究所彙報, 1 (1926), 4-6.

3) 今村明恒、"地震觀測整備の一般," 地震研究所彙報, 1 (1926), 7-26; 今村明恒、岸上冬彦、"新築中の議院建築物の震動觀測," 地震研究所彙報, 5 (1928), 148-162.

4) 内田祥三、齋田時太郎、武藤清、"東京帝國大學法學部、文學部及經濟學部講義室鐵骨架構の振動觀測に就いて," 地震研究所彙報, 6 (1929), 345-353.

5) 福富孝治、"武田ビルディング振動觀測結果報告," 地震研究所彙報, 9 (1931), 485-507.

6) 末廣恭二、"Engineering Seismology," Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 58 (1932), No. 4.

7) 谷口忠、"耐震構造學の發達," 建築學會パンフレット, 2 (1929), 第3號.

建築物固有震動週期

名 稱	層數	觀 測 年 月 日	略 東 西 略 南 北		觀 測 者
			振動週期	振動週期	
丸ノ内ビルディング	9	大正10 12 11 2 工事 中	1:11	1:14	大 森 同 上 同 上 堀 越 齋 田
		11 5 殆完成地震前	0:89	0:94	
		11 10 地震直後	1:01	1:09	
		12 12 補強完成後	0:67	0:71	
		15 5 大震直後	1:11	1:18	
		15 5 補強後	0:50	0:48	
郵船ビルディング	8	12 3 大震前	0:69	0:77	大 森 齋 田
		13 11 大震後	0:90	0:80	
海上ビルディング	7	11 6 大震前		0:45	大 森
日本興業銀行	8	12 3 大震前	0:65	0:61	同 上
		11 6 大震前	0:60	0:61	
有 樂 館	8	昭和2 6 大震後	0:89	0:90	今 村 谷 口
		大 修 理 後	0:45	0:55	
東 京 會 館	6	大正11 6 大震前	0:72	0:54	大 森 堀 越
		12 9 大震直後	1:30	1:20	
丸ノ内ホテル	9	13 12 完 成 後	0:50	0:60	齋 田
大阪商船神戸支店	8	12 4	0:53	0:57	大 森
國 光 生 命	8	12 7	0:65		同 上
		12 7 鐵骨打終	0:52	0:52	
銀座ビルディング	8	13 12 完 成 後	0:70	0:70	齋 田
		12 4 鐵骨打終	1:19	1:09	
正 金 銀 行	4	14 2 完 成	0:25	0:25	大 森
帝大物理學教室	3	14 8或9 鐵骨組立終	0:66	0:66	今 村
地震研究所	2		0:30	0:30	石 本
内外ビルディング	9	12 7 大震前	0:65	0:65	永 田
		12 5 大震前	0:48	0:43	
日本銀行北別館	8	8	0:50		大 森
明 治 海 運	2	13 10		0:15	末 廣 石 本
三 菱 研 究 所	2	13 10		0:35	
越中島航空研究所	2	13 10		0:17	末 廣 石 本
	2	13 10		0:50	

鐵骨構造 但し鐵骨架構のものを含む

鐵筋コンクリート

尙、谷口博士<sup>1)</sup>が鉄×鉄筋コンクリート単層架構のかなり大なる模型を作つて振動試験を行つた結果、荷重や基礎などの条件によつて週期が計算の結果と著しく異なることを発見した。尤もなことであると思ふ。

建物の構造を剛にすればする程固有振動週期が小さくなり、同時に耐震的にも抵抗が多くなる。之等に関連して實際の建物を分析せる理論的研究は末廣博士<sup>2)</sup>が1931年米國に於てされた講演の記録に委しく出てゐる。末廣博士が米國へ赴かれた頃から、同地に於ける耐震研究はかなり熱心に行はれ出したといふことである。Byerly<sup>3)</sup>はHester, Marshallと共に、Hallの三成分振動計を用ひて桑港に於ける多くの高層建築の振動を測定した。その主なる結果を示して見ると次の如くである。建物はL型、E型、T型等の平面形が何段もの塊になつてをり、單に高さといふだけではあまいであるけれども委しいことはその論文に載つてゐる。

建 物	層 高 (level 上の)	週 期		
		NS方向	EW方向	上下方向
1 450 Sutter Str. の建物	26 340 (仄)歩道上)	1.2±0.1 (秒)	1.4±0.1 (秒)	
2 Shell Bdg.	29 339 (歩道上)	Battery Str. に平行の方向 1.80±0.05 Bush Str. .... 1.85±0.05		
3 Russ Bdg.	33 435	1.71±0.07 0.78±0.02 (塔下の部分)	1.89±0.09 0.85±0.03 (塔下の部分) 0.17±0.02(高次)	0.28±0.02 0.05
4 Hunter-Dulin Bdg.	24 309 (ground floor 上) 333 (sub-base-ment 上)	1.48±0.06 0.49±0.07 0.05	1.33±0.03 0.15±0.02 0.09±0.02	
5 Mark Hopkins Hotel	19 257.5	NE-SW NW-SE	0.95±0.03 1.27±0.04 1.14±0.02	0.21±0.02 0.05
6 William Taylor Hotel	28 325 (歩道上)	1.34±0.02	1.32±0.02 0.57±0.02	0.04

1) 谷口忠, "架構の固有振動週期に就て," 建築雑誌, 39 (1925), 49-52, 91-99, 177-206, 487-498.

2) 末廣恭二, "Engineering Seismology," Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 58 (1932), No. 4.

3) P. Byerly, J. Hester, & K. Marshall, "The Natural Periods of Vibration of Some Tall Buildings in San Francisco," Bull. Seism. Soc., America, 21 (1931), 263-276.

建 物	層 高 (level 上の)	週 期		
		NS方向	EW方向	上下方向
7 Alexander Bdg.	15 204.5 (歩道上からの主要部)	1.23±0.02 0.39±0.02	1.32±0.02 0.41±0.02	
8 Sir Francis Drake Hotel	23 282	1.49±0.02	1.82±0.02 1.29±0.02	0.51±0.02
9 Bank of America	15 181	NE-SW NW-SE	{1.41±0.02 0.90±0.02 0.43±0.02 1.64±0.04 0.90±0.01 0.50±0.01 0.076 (交通機関)}	0.52±0.02 0.07 (交通機関)
10 Pacific Gas and Electric Co.	17 262	NW-SE NE-SW	{1.50±0.03 0.90 1.28±0.04	0.55±0.02
11 Matson Bdg.	17 218 (主要部) 320 (塔頂まで)	NE-SW NW-SE	1.26±0.02 1.44±0.02 1.21±0.02 (?)	0.53±0.02
12 Insurance Centre Bdg.	16 206	1.41±0.03 0.20±0.01	1.07±0.03	0.48±0.05
13 De Young Bdg.	16 —	1.53±0.03 0.59±0.02 0.17±0.01	1.36±0.03 0.90±0.02 0.15±0.01	0.55±0.01 0.08 (交通)
14 Western States Life Bdg.	15 207	NE-SW NW-SE	{1.33±0.03 0.16±0.02 1.03±0.02 0.18±0.01	不明瞭
15 City Hall		Van Ness に直角方向 0.65±0.02		

これ等の建物は何れも高い爲に實際は一端自由なる棒の振動と見ても差支ない。それでこの研究と同時に LeConte 及 Younger<sup>1)</sup>が計算によつて一端自由なる棒の固定端に週期的の振動を與へる場合の研究を試みたが、その結果が前述の高層建築の分析にかなり参考になつたのである。尙、LeConte 及 Younger の研究の一層完全なるものはこれよりも十二三年前に物部博士によつて既に完成されたものであることを附加へておく。

1) J. N. LeConte & J. E. Younger, "Stresses in a Vertical Elastic Rod When subjected to a Harmonic Motion of One End," Bull. Seism. Soc., America, 22 (1932), 1-37.

## 177. 構造物破壊の力學的模型試験

建物のやうな複雑なものの研究をどこまでも正式の力學を以て進めて行くとは甚だ困難であるばかりでなく、時として却て不確實性を伴ふ。末廣博士<sup>1)</sup>及び佐藤小太郎氏はパラフィン蠟に適當の混合物を加へて家屋構造の模型を作り、之を振動臺に載せて遂に破壊に到るまで振動せしめた。何故に斯る蠟の材料が適當であるかは下の比較法則論に照らして明かである。

破壊を起すときの應力を  $\sigma$  と書き、構造物の一次元的大きさを示す長さを  $l$  とし、材料の密度を  $\rho$ 、Young 率を  $E$ 、 $2\pi/p$  を振動週期、 $g$  を重力加速度、 $s$  を振動振幅、 $M$  を構造物の附加質量とすれば、一般に

$$\sigma = \varphi(l, \rho, E, p, g, s, M) \quad (127)$$

の如き関係が存在するであらう。この式の兩側に dimensional analysis を施すときは

$$\sigma = Ef \left( \frac{l\rho g}{E}, \frac{lp^2}{g}, \frac{s}{l}, \frac{Mg}{El^2} \right) \quad (128)$$

の如き関係が得られる。尙少し力學的の考察をなすときは、構造物及び附隨物等の幾何學的関係(即ち構造物の形や振幅の分布等)が全く相似にあるとき、 $f$  なる函數形は常に同じであることが證明できる。斯る場合に、構造物の  $(l, \rho, E, M)$  と模型に相當する其等の値即ち  $(l', \rho', E', M')$  との間に

$$\left. \begin{aligned} \frac{l'\rho'}{E'} &= \frac{l\rho}{E}, & (\alpha) & \quad \frac{M'}{E'l'} &= \frac{M}{El}, & (\beta) \\ \frac{s'}{l'} &= \frac{s}{l}, & (\gamma) & \quad l'p'^2 &= lp^2, & (\delta) \end{aligned} \right\} \quad (129a)$$

なる聯立的條件があるときは、模型と構造物との間に

$$\frac{\sigma'}{E'} = \frac{\sigma}{E} \quad (129b)$$

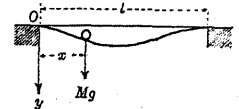
<sup>1)</sup> 末廣恭二, 佐藤小太郎, "On a Dynamical Model for Investigating the Collapse of Wooden Houses in an Earthquake," 帝國學士院紀事, 6 (1930), 289-292.

<sup>2)</sup> 末廣恭二 "Engineering Seismology," Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 58 (1932), No. 4.

なる關係が成立つ。(129a), (129b) が振動比較の法則である。實際の家屋の木材では  $\sigma/E = 3.3 \times 10^{-3}$ ,  $\rho/E = 5.9 \times 10^{-6}$  (珎, 珎) であるが、或る蠟材 ( $\rho' = 0.90$ ,  $\sigma' = 43$  珎/珎<sup>2</sup>,  $E' = 1.45 \times 10^4$  珎/珎<sup>2</sup>) を用ひると  $\sigma'/E' = 3.0 \times 10^{-3}$ ,  $\rho'/E' = 6.2 \times 10^{-5}$  となる。従て  $l'/l = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{E'}{\rho'} = 1/10.5$  に取れば (129a) の ( $\alpha$ ) と (129b) が同時に満足する。さて (129a) の ( $\beta$ ) が成立するやうに模型の附加質量を調整して見ると、使用模型の固有振動週期が 0.202 秒に對して家屋のそれが 0.639 秒(珎)のみのときは模型 0.067 秒、家屋 0.212 秒となり、同時に (129a) の ( $\delta$ ) も満足させるのである。次に強制振動に對しては (129a) の ( $\gamma$ ) 及 ( $\delta$ ) が成立するやうに模型の強制振動週期とその振幅とを加減して振動臺を振らせた。家屋の震動を關東大地震の例に取り、全振幅 8.9 珎、週期 1.35 秒としてその割合のものを模型に取ると、週期が 0.43 秒となるから、振幅が 0.85 珎であれば關東地震の場合に相當する筈である。實驗では振幅をこれ以上に増大して 1.6 珎にした所で龜裂が入り、2.2 珎で模型が瓦解したのである。即ち關東地震の場合に、その振幅が若し約二倍になつたとすると家屋がすべて壞れたことを想像させるのである。

## 178. 走行車體による橋梁の静力學的振動

橋梁の上を質點と見做し得る車體が移動する場合に、橋梁の静力學的抵抗を受けて車體が移動し、その結果橋梁そのものが主として振動するが如く見えるものである。この問題をよく吟味したのは有名な G. G. Stokes<sup>1)</sup> である。今、長さ  $l$  なる橋梁が兩端で支持され、 $x$  なる點に  $M$  なる質量があるときに橋梁のその點の静力的の撓み  $y$  は



第 138 圖

$$y = \frac{R(lx-x^2)^2}{3lEI} \quad (130)$$

で表される。但し  $E, I$  は橋梁の Young 率及び断面の慣性モーメントであり、 $R$  は質量がある爲の抗力である。車體に相當する質點の運動方程式を作つて見ると

<sup>1)</sup> G. G. Stokes, "Discussion of a Differential Equation relating to the Breaking of Railway Bridges," Trans. Camb. Phil. Soc., 8 (1843), 707; Math. Phys. Papers, 2 (1883), 178-220.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{3lEIy}{M(lx-x^2)^2} \quad (131)$$

$\frac{dx}{dt} = V$  (車體走行速度) の如き  $x$  を考へると,  $M$  が移動する爲の関係が次の如くなる:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g}{V^2} - \frac{3lEIy}{V^2 M(lx-x^2)^2} \quad (131')$$

$x = l\xi$ ,  $y = \frac{l^3 Mg}{3EI} \eta$ ,  $\frac{3EI}{V^2 M l} = \beta$  と書けば

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \beta - \frac{\beta\eta}{(\xi-\xi^2)^2} \quad (132)$$

この式を解く爲に Stokes は種々數學的の工夫をした。極めて簡単な一つの場合、即ち  $\xi$  が小なる時を取つて見ると

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \beta - \frac{\beta\eta}{\xi^2}$$

と書けるから、この解は

$$\eta = \frac{\beta\xi^2}{2+\beta} + A\xi^{2+\sqrt{4-\beta}} + B\xi^{2-\sqrt{4-\beta}} \quad (133)$$

の如くなる。但し  $A, B$  は任意常數とする。

(132) を一般に解くことは實際問題としてかなり困難である。それで(131')から

$$y = Mg \left( 1 - \frac{V^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2} \right) \frac{(lx-x^2)^2}{3lEI} \quad (131'')$$

と書き、又  $V^2$  が小なるときの  $y$  即ち

$$y = Mg \frac{(lx-x^2)^2}{3lEI} \quad (134)$$

を(131'')の  $\frac{d^2y}{dx^2}$  の中へ代入すれば

$$y = Mg \left\{ 1 - \frac{2MV^2(lx-x^2)(l-2x)}{3lEI} \right\} \frac{(lx-x^2)^2}{3lEI} \quad (135)$$

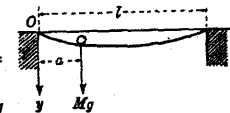
が質點が動く點の軌跡を近似的に表すことになる。括弧の中の第二項は慣性力によつて起る撓みの割合を示してゐる。しかし普通の鐵橋などではこの慣性力の方は全體の十分の一にも過ぎぬ位しかまいてをらぬ。

(132) の形をその儘にして積分することは、Stokes よりも遙か後に Zimmermann<sup>1)</sup> によつて試みられた。勿論、積分記號等を含んでをるけれどもかなりの處まで成功したのである。

### 179. 走行車體による橋梁の動力學的振動

橋梁のやうに長いもの自身が慣性力を持つて振動する場合の研究は Radaković<sup>2)</sup> によつてかなり手をつけられてゐる。その方法は Lagrange 方程式や Fourier 級数を適當に應用することであるけれども餘り實用的な結果を與へてをらぬ。又、Timoshenko<sup>3)</sup> や武藏氏<sup>4)</sup> は勢力式を用ひて問題を解いてゐる。比較的完全な計算法は最近 Inglis<sup>5)</sup> によつて與へられてゐるから、その大要を示さうと思ふ。

集中荷重の Fourier 分析 先づ後の必要上静止荷重による橋桁の撓み分布を考へて見る。  $x=a$  にある  $Mg$  なる荷重は下記の如く展開することができる:



第 139 圖

$$\frac{2Mg}{l} \left[ \sin \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi a}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right] \quad (136)$$

之を桁材の平衡方程式へあてはめるときは

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{2Mg}{l} \left[ \sin \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi a}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right] \quad (137)$$

この式を積分して桁の兩端支持といふ條件を置けば

$$y = \frac{2Mgl^3}{\pi^4 EI} \left[ \sin \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^4} \sin \frac{2\pi a}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right] \quad (138)$$

<sup>1)</sup> H. Zimmermann, *Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last* (Berlin, 1896).

<sup>2)</sup> M. Radaković, "Über die Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkt," *Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien*, 108, IIa (1899), 577-612.

<sup>3)</sup> S. Timoshenko, 後出.

<sup>4)</sup> 武藏倉治, "橋梁の強制振動に就て," *鐵道業務資料*, 11 (1924), 499-504.

<sup>5)</sup> C. E. Inglis, "Theory of Transverse Oscillations in Girders and its Relation to Live-Load and Impact Allowance," *Proc. Inst. Civil Eng.*, 218 (1924), 225-272; "Oscillations in a Bridge caused by the Passage of a Locomotive," *Proc. Roy. Soc., London*, 118 (1928), 60-96.

固有振動週期 次に桁材に荷重が附加はらぬ場合の振動方程式を書くと

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (139)$$

となる。  $m$  は桁の単位長さの質量である。  $x=0$  及  $x=l$  で  $y=0$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$  なる条件を用ひ、

$$y = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin 2\pi n_0 t + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin 8\pi n_0 t + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \sin 18\pi n_0 t + \dots \quad (140)$$

の如き解が得られる。但し

$$2\pi n_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI l}{M_0}}, \quad (141)$$

茲に  $I$  は橋桁の断面慣性モーメント,  $M_0$  は橋桁全体の質量を表す。

集中荷重のある時の週期 次に  $x=a$  なる點に  $M$  なる静止質量がある桁材の自由振動を考へて、その方程式を書けば次の如くなる:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{2M}{l} \left( \sin \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi a}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (142)$$

この式の解を次式

$$y = A \sin 2\pi n t \left[ \frac{\sin \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \frac{n^2}{n_0^2}} + \frac{\sin \frac{2\pi a}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2 - \frac{n^2}{n_0^2}} + \dots \right] \quad (143)$$

の如く假定し、然る後 (142) に代入すれば次の關係が出る:

$$1 = \frac{2M n^2}{M_0 n_0^2} \left[ \frac{\sin^2 \frac{\pi a}{l}}{1 - \frac{n^2}{n_0^2}} + \frac{\sin^2 \frac{2\pi a}{l}}{2^2 - \frac{n^2}{n_0^2}} + \dots \right]. \quad (144)$$

従てその主要振動に對しては近似的に次の關係がある:

$$1 = \frac{2M n_1^2}{M_0 n_0^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi a}{l}}{1 - \frac{n_1^2}{n_0^2}}. \quad (145)$$

即ち

$$\frac{n_1^2}{n_0^2} = \frac{M_0}{M_0 + 2M \sin^2 \frac{\pi a}{l}} \quad (145')$$

で示される。こゝにその振動週期は  $1/n_1$  で與へられる。斯る場合に振動型は

$$y = A_1 \sin 2\pi n_1 t \sin \frac{\pi x}{l} \quad (146)$$

である。同様にして第二次の振動に就てはその振動が

$$\left. \begin{aligned} 2\pi n_2 &= \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI l}{M_0 + 2M \sin^2 \frac{2\pi a}{l}}}, \\ y &= A_2 \sin 2\pi n_2 t \sin \frac{2\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

で與へられる。之以上の高次のものもあるけれども、實際の橋梁では餘り誘起されぬ。普通の蒸氣機關車では毎秒六回位の衝撃が働くが、極めて短い橋梁の外は大抵之等の週期がその第一次又は第二次の固有振動週期の附近にある。即ち共振を起すといふ點で決して侮ることができぬものである。以上の問題に關聯せる理論的研究は最近 Schmidt<sup>1)</sup> や Jeffcott<sup>2)</sup> によつて示され、又近似的には Timoshenko<sup>3)</sup> が勢力式を用ひて問題を解いた。

移行する週期的強制力 次に橋梁上を週期的振動力を與へる機關車が一定の速度  $V$  をもつて進行する場合を考へて見よう。この場合、與へた移動外力は (136) と同じ考から

$$\frac{2P}{l} \sin 2\pi N t \left[ \sin \frac{\pi V t}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi V t}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right], \quad (148)$$

即ち

$$\frac{2P}{l} \sin 2\pi N t \left[ \sin 2\pi n t \sin \frac{\pi x}{l} + \sin 4\pi n t \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right] \quad (148')$$

<sup>1)</sup> Harry Schmidt, "Zur Berechnung von Schwingungen elastischer Systeme unter dem Einfluss Beweglicher Belastungen," *Verh. 3-int. Kongr. f. tech. Mech.* (1930), 3, 138-142.

<sup>2)</sup> H. H. Jeffcott, "On the Vibration of Beams under the Action of Moving Loads," *Phil. Mag.*, 8 (1929), 66-97.

<sup>3)</sup> P. Timoshenko, "On the Forced Vibrations of Bridges," *Phil. Mag.*, 43 (1922), 1018-1019.

となる。但し  $P$  は週期的外力の極大値であり、又  $n=V/2l$  とする。この振動力の中で第一次のもののみ取れば、橋梁の強制振動の方程式が次の如く表せる：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2P}{l} \sin 2\pi Nt \sin 2\pi nt \sin \frac{\pi x}{l},$$

又は 
$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{l} \left[ \cos 2\pi(N-n)t - \cos 2\pi(N+n)t \right] \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (149)$$

今、 $2\pi n_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$ 、 $D = \frac{P}{2\pi^2 n_0^2 M_0}$  と書けば、(149) の particular integral として

$$y = \frac{D}{2} \left[ \frac{\cos 2\pi(N-n)t - \cos 2\pi(N+n)t}{1 - \left(\frac{N-n}{n_0}\right)^2} - \frac{\cos 2\pi(N+n)t - \cos 2\pi(N-n)t}{1 - \left(\frac{N+n}{n_0}\right)^2} \right] \sin \frac{\pi x}{l} \quad (150)$$

が得られる。今、初動の条件即ち

$$t=0; \quad y=0, \quad \frac{dy}{dt}=0 \quad (151)$$

を満足する爲に、式 (149) の右邊を零に置くやうな微分方程式の解、即ち橋梁の自由振動の式  $y=B_0 \cos 2\pi n_0 t \sin \frac{\pi x}{l}$  を (150) に附加へ、(151) によつて調整するときは

$$y = \frac{D}{2} \left[ \frac{\cos 2\pi(N-n)t - \cos 2\pi n_0 t}{1 - \left(\frac{N-n}{n_0}\right)^2} - \frac{\cos 2\pi(N+n)t - \cos 2\pi n_0 t}{1 - \left(\frac{N+n}{n_0}\right)^2} \right] \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (152)$$

同様にして高次の振動即ち  $p$  次の振動は次の如く書き得る：

$$y = \frac{D}{2p^4} \left[ \frac{\cos 2\pi(N-pn)t - \cos 2p^2 \pi n_0 t}{1 - \left(\frac{N-pn}{p^2 n_0}\right)^2} - \frac{\cos 2\pi(N+pn)t - \cos 2p^2 \pi n_0 t}{1 - \left(\frac{N+pn}{p^2 n_0}\right)^2} \right] \sin \frac{p\pi x}{l}. \quad (153)$$

(152) に於て橋梁自身と車體の振動の共振を考へると  $N=n_0$  となり、又  $Vt=l$ 、 $nt=\frac{1}{2}$  と置き、且つ自由振動の頂は減衰したものとすれば

$$y = D \cos 2\pi Nt \left[ \frac{1}{1 - \left(1 + \frac{n}{N}\right)^2} - \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)^2} \right] \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (154)$$

$\frac{n}{N}$  は driving wheel の周囲の長さを橋長の二倍で除したものに等しい。従て  $\frac{n}{N}$

は非常に小さく、 $l=250$  呎に取ると  $\frac{n}{N}=1/25$  位である。即ち之を 1 に比して看過すれば

$$y = 2NTD \cos 2\pi Nt \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (155)$$

こゝに  $T$  は機關車が橋梁を渡るに要する時間である。

移行する無週期強制力。上式には機關車自身の質量を考へてなかつたけれども、今度はその質量が橋梁上を移動するものと考へ、又週期的外力は働かぬとすれば、

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2M}{l} \left[ \sin \frac{\pi Vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi Vt}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right]. \quad (156)$$

その particular solution として

$$y = \frac{2Mt^3}{\pi^4 EI} \left[ \frac{\sin \frac{\pi Vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \left(\frac{V}{2ln_0}\right)^2} + \frac{\sin \frac{2\pi Vt}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^4 \left\{1 - \left(\frac{V}{4ln_0}\right)^2\right\}} + \frac{\sin \frac{3\pi Vt}{l} \sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 \left\{1 - \left(\frac{V}{6ln_0}\right)^2\right\}} + \dots \right]. \quad (157)$$

この式で  $\left(\frac{V}{2ln_0}\right)^2 < \frac{1}{100}$  位が普通であるから之を看過し、又 (156) の右を零にするときの解、即ち自由振動の解を附加し、初期条件として撓み變位は零であるけれども變位速度は少しあるものとすれば、

$$y = \delta \left[ \left( \sin \frac{\pi Vt}{l} - \frac{V}{2ln_0} \sin 2\pi n_0 t \right) \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^4} \left( \sin \frac{2\pi Vt}{l} - \frac{V}{4ln_0} \sin 8\pi n_0 t \right) \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right]. \quad (158)$$

この中で  $\delta$  は機關車が橋の中央へ來たときの橋梁の撓みを表すものである。

### 180. 橋梁振動の測定

Ingliš<sup>1)</sup> はその論文に出した計算を實驗と比較する爲に Newark Dyke Bridge の單線橋の例を取つた。その場合に  $l=262.5$  呎、 $M_0=460$  噸、機關車について  $P=0.576$  噸位、その重量  $M=107.65$  噸であつた。而して實驗によれば  $\delta=0.55$  吋、又  $V=$

<sup>1)</sup> C. E. Ingliš, "Oscillations in a Bridge caused by the Passage of a Locomotive," Proc. Roy. Soc., London, 118 (1929), 60-96.

23 哩毎時であるから、一秒 2.5 回轉となる。之を計算にあてはめて見ると共振に非常に近いことがわかる。Inglis は尙模型實驗を行つて計算や實際の測定結果と比較した。

橋梁の撓みは機關車の重量による静力學的の撓みと振動による撓みの兩方から成立つてゐるものである。共振附近では振動の振幅が静力學的の撓みと同じ位になる。又非常に長い橋では振動の方は第一次の共振が殆どなく、概して第二次の共振が現はれる。この第二次の共振は振幅が餘り大きくない。之に反して長い橋の静力學的の屈曲は非常に大きいから、従て振動的振幅は普通あまり目立たぬものである。しかしながら短い橋では共振が大して起らぬとはいへ、静力學的の撓みが少い爲に振動振幅の方が主要な撓みを與へることになる。

大森博士<sup>1)</sup> は種々の橋梁に deflectometer と強震計 (Gray, Ewing 等) とを備付けてその撓み變位、振動の振幅及び週期を測定したのである。其等の橋梁は何れも鐵道の鐵橋であつて、支持兩端間の span は 20 呎から 200 呎の間のものであり、特に 100 呎と 200 呎のものが多かつた。主なる橋梁の名を擧げて見ると、六郷川橋、忠別川橋、第三石狩川橋、第一石狩川橋、第二石狩川橋、をさらべ川橋、金杉川橋、揖斐川橋、木津川橋、利根川橋(取手)、同(前橋)、久慈川橋、酒匂川橋、相澤川橋、上碓井川橋、大井川橋等であつて、夫々の適當な徑間 (span) が選ばれた。之等は大抵 truss 型となつてをるけれども、中には例外もある。汽車が通過する場合の振動試験の結果によれば、静力學的撓みは少い場合で 5 耗位、多い場合は 20 耗位もある。即ち振動の振幅に比して概して大きかつたのである。振動は撓みの方向の振動即ち上下動、橋梁の左右の振動即ち横振動、及び橋梁の長さの方向の縦振動から成立つてゐる。縦振動は割

1) 大森房吉, “鐵道橋梁の曲り及振動の驗測,” 震災豫防調査會報告, 第 37 號 (1901), 1-54; “鐵道橋梁の曲り及振動に關する調査第二回報告,” 同, 第 45 號 (1903), 1-16; “On the Deflection and Vibration of Railway Bridges,” 震災豫防調査會歐文報告, 第 9 號 (1902); “Note on the Vibration of Railway Bridge Piers,” 同, 第 12 號 (1903), 39-55; “Vibration of a Railway Bridge Pier,” 震災豫防調査會歐文紀要, 1, 第 3 號 (1907), 155-157; “The Deflection and Vibration of Railway Bridges (2nd Paper),” 同, 1, 第 4 號 (1907), 172-190; “Application of Seismographs to the Measurement of the Vibrations of Railway Piers (3rd Paper),” 同, 4, 第 2 號 (1910), 33-93.

合に少く、振幅は 1 耗乃至 3 耗位であつて橋の徑間が極く短い場合でも長い場合でも大して區別がなく極めて不規則なものである。然るに上下振動と横振動とは橋梁の徑間の長さについての函數と見做すことができ、上下振動の振幅は徑間が 50 呎乃至 200 呎に對して最大振幅(二倍振幅)が 2 耗乃至 6 耗位の範圍内に連続的に増加するものである。而も橋の徑間の大なる所では拋物線的に増加率が大となつた。振動の週期(全週期)は徑間の短いものから長いものにわたつて 0.2 秒位から 0.55 秒位迄の間に連続的に増大してゐる。但し徑間の長い所では増加率が稍衰へる。次に横振動の週期はやはり規則的に變り、0.2 秒から 1.0 秒位まで増加してゐる。然しその振幅は徑間に無關係に不規則であり、大體に於て 0.5 耗乃至 2.0 耗位の程度であつた。之等のことから振動の振幅は上下の方が一般に大なることがわかるであらう。しかし静力學的の撓みに比較すれば遙かに少い。これは前に説明したやうに橋梁の徑間が比較的長い場合に屬する爲であらう。

橋梁の共振や撓みの研究をなすには、どうしても橋梁の自由振動週期を出さなければならぬ。而も一つの徑間を簡単な梁と假定しても材料の配置が橋の長さに沿うて變化してゐる。物部博士<sup>2)</sup> は之等を考慮に入れて實際上の撓みの計算を試みた。物部博士はそれに附加して汽車が橋梁を通過する場合の振動をも研究した。物部博士の研究に直接參考となつた實驗試料は同博士も斷つてゐるやうに米國鐵道協會<sup>3)</sup> の出した廣範圍にわたつた報告である。

### 181. 吊橋の振動

普通の吊橋は剛性を有せざる鋼索を主體としてをり、非常に振動し易い性質を持つてゐる。本邦では之までは寧ろ吊橋の簡粗なものが多くあり、その研究の必要が充分あつた。物部博士<sup>3)</sup> はこのことに注目して吊橋の自由振動や強制振動の計算をなし、實際の吊橋の振動の驗測結果と比較したのである。

1) 物部長徳, “橋桁の振動並に其衝擊作用との關係に就て,” 土木學會誌, 10 (1924), 79-122

2) *Proceeding of the American Railway Engineering and Maintenance of Way Association*, 12 (1911), Part 3, 13.

3) 物部長徳, “吊橋の振動並に其衝擊作用に對する關係,” 土木學會誌, 7 (1921), 561-604.



補剛構 (stiffening truss) のない場合の吊橋の上下の自由振動を考へて見ると、その振動方程式が近似的に次の如く書ける：

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{m}{H} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}, \quad (159)$$

但し  $m$  は吊橋の単位長さの質量、 $H$  は張力の水平成分を表す。  $x$  は一端からの水平の距離であつて、 $y_2$  は  $x$  点の動力學的の撓みを表す。而して静力學的にも  $y_1$  なる撓みがあるから、全體の撓みは  $y_1 + y_2$  となるものである。(159) から主要振動週期が  $2l\sqrt{\frac{m}{H}}$  となる。但し  $l$  は橋の長さである。この計算は張力が一定であると假定した場合であるけれども、實際は橋の長さの方向に變化がある。又、補剛構があるときや斜吊線を有する場合には夫々特別の補正計算法を行ふべきである。

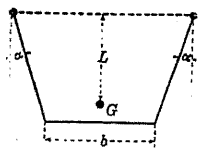
次に吊橋には横振動をなす可能性もある。兩主索面が鉛直で平行な場合には週期が單一振子と同様であつて、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (160)$$

で表される。但し  $L$  は索の兩端を通き水平面から橋の重心までの鉛直距離である。若し兩索面が傾斜するときには適當な近似計算を行ひ、振動週期が

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\cos\alpha + \frac{4\alpha^2 g^2}{b^2}} \quad (161)$$

となる。ここに  $L$  は索の兩端を通る水平面から橋の重心までの鉛直距離、 $\alpha$  は索面が鉛直面となす角、 $Mg^2$  は橋全體の横振動に對する質量慣性モーメント(兩支點の通る水平面に關する)、 $M$  は質量、 $b$  は橋の幅を表す。この場合にも水平補剛構があれば適當の補正計算が必要になる。



第 140 圖

物部博士は大正七年十月二十七日軍隊の通過によつて墜落した静岡縣釜口橋徑間 195 尺の吊木橋について計算を行ひ、上下自由振動の週期 0.49 秒、横自由振動の週期 1.09 秒を算出した。そのとき通り合せた將校兵士の數は 66 名であり、之が歩調を合せると強制振動週期 0.51 秒であつて共振の状態に非常に近かつたことがわかるのである。物部博士は同様に大森博士が振動の測定を

した静岡縣富士川橋(徑間 541 尺の吊鋼橋)や物部博士の測定した群馬縣神田橋(中央徑間 420 尺のもの)、群馬縣多胡橋(中央徑間 360 尺)等についても計算を行ひ、實驗の結果と委しく比較した。何れの場合でも共振の所で大なる振幅を示したことは勿論である。

### 182. 風力による構造物の振動

構造物特に煙突や無線塔などが風力によつて振動することは非常なものである。既に述べてあるやうに、大森博士<sup>1)</sup>が他の三教授と共に行つた原ノ町 660 尺の無線塔の振動測定の例はかなり有名である。この塔は頂部の直径が 4 尺 6 吋、底部のそれが 57 尺 9 吋であり、壁の厚さは底部で 2 尺 9 吋、頂部で 6 吋であつた。塔の重さとしてコンクリート 7160 噸、鋼材 79 噸を要したといふことである。振動實驗の結果は下の如くであつた：

高さ (尺)	週期 (秒)	最大二倍振幅 (耗)	極大風速 (米)
290	0.72	0.03	10.5
414	1.25	0.11	4.0
522	1.67	3.43	20.0
660	2.07	6.90	15.0
660	2.12	10.30	15.4

塔の頂部に 2.5 噸の鐵棒を置いて、その塔の自由振動週期は 2.12 秒であるから、上に掲げた週期は大體に於て風に依て惹起されたものに相違ない。而もその振動方向は風の向きに直角のものが主要なものであつた。之等は流體力學的問題、即ち風に依て塔の近所に渦が週期的に出来る爲である。佐賀關 550 尺煙突についてもやはり同様なことがあつた<sup>2)</sup>。單に風壓によつて構造物が振動することも多くの人に注意されてゐる。Chicago の Monadnock block の建物では十六階以上のものがあるが風速毎時 60 乃至 70 哩位するときには N-W 隅では二倍振幅 12.8 耗、S-W

<sup>1)</sup> 大森房吉, "Measurement of Vibration of the 660-Feet Wireless Telegraph Station Tower at Haranomachi," 震災豫防調査會歐文紀要, 3, 第 3 號 (1921), 78-99; 大森房吉, Engineering, 112 (1921), 196.

<sup>2)</sup> 大森房吉, "On the Vibration of Reinforced Concrete Chimneys," 震災豫防調査會歐文紀要, 9, 第 1 號 (1918), 1-29.

隅では25.4耗もあつたといふことである。

### 183. 走行車體及び運轉機械による構造物の振動

車體が走る爲に建物が振動を受けることは以前から多くの人に注意されて來た。Mallockは1902年Central London Railwayの列車によつてそれから60呎離れた建物が如何に振動するかを研究した。建物の壁體の振幅は僅か2.5から5ミクロン( $\mu$ )に過ぎなかつたが、その週期が1/15秒位であつた爲に重力の1/1000から1/2000位の加速力を受けることが判明した。地表面に沿うて振動が傳はる速度は8950轉毎秒位であるとMallockは言つてゐる。車體による振動は距離と共に割合に速かに減衰するとはいへ、週期そのものが短い爲に適當な距離の振動の影響は輕視することができない。しかし減衰性が多い爲に少し遠方では大して心配が要らぬやうに思はれる。Hallは米國の高層建築の振動測定をなした。その結果<sup>1)</sup>を挙げると下の如くなる：

建物の型	測定場所	水平振動		上下振動	
		週期(秒)	半振幅( $\mu$ )	週期(秒)	半振幅( $\mu$ )
三階煉瓦造	三階床	0.53	18	0.56	6
六階煉瓦造 (48呎×130呎)	{ 層根 基底	0.70	18	—	—
		0.37	7(直角方向)	—	—
225呎高塔 (650呎×150呎)	七階床 (87呎高)	0.86	15	0.70	—
		0.61	15(直角方向)	—	—

Hallはこの結果を附近を通る車體の週期や振幅と近所にある電動機械のそれ等と比較することにより、建物の振動は主として交通機關によることを確めた。

交通機關と同様に据付機械の運轉による振動も場合によつては著しい影響を與へるものである。Gerb<sup>2)</sup>によればDantzigにある兵器製作所の650~850馬力tandem型蒸氣機關からの振動が300米の距離までも傳はつたといふ事である。

<sup>1)</sup> A. B. Eason, *The Prevention of Vibrations & Noise* (London, 1923).

<sup>2)</sup> W. Gerb, "Die Fernübertragung von Bodenerschütterungen bei Maschinen mit hin- und hergehenden Massen," *ZVLH*, 64 (1920), 759-760.

而してその機關のある建物の二階では1200轉毎秒からの加速度があつたといふ程である。このやうな加速度は測定器械の誤差も大分含まれてゐるかも知れぬが、それにしても加速度が非常に大なることだけは事實であらう。

機械工場で屢、振動の原因となるものに紡績機械、milling cutter、カム軸などがある。しかし何といつても見逃すことのできぬものはturbo-generatorやディーゼル機關からの振動である。之等の研究に関してはHall<sup>1)</sup>、Hechler<sup>2)</sup>、Galitzin<sup>3)</sup>其他の人の論文がある。しかし機械それ自身の振動問題は別の章に於て既に論じてあるから、それを調べるときはその構造物に及ぼす影響も自ら明かになるであらう。

又、機關臺の振動問題殊にその固有振動週期の問題に就てはSteinbach<sup>4)</sup>、Prager<sup>5)</sup>等があることを注意しておく。機關臺の問題として大切なことは、共振振動が起らぬやうにすることは勿論、それ以外に臺の彈性を弱くして臺組織の固有週期を機關の強制週期よりも遙かに長くしておく事である。機械のやうな週期的強制力に對しては、この方法によつて土地や家屋に傳はる衝撃を少くすることができる。

### 184. 家屋新築及び修理に関する耐震上の注意

終りに昭和五年二月十四日の震災豫防評議會に於て決議された普通家屋殊に木造家屋についての耐震上の注意書を附加しておきたいと思ふ。その全文は下の如くである。但しこの新しい注意書に、家屋に應じての使用寸法のないことを惜むものである。

#### 1. 總説

(1) 敷地には平坦にして且つ堅硬なる土地を選ぶを可とす。

<sup>1)</sup> Hall, *Electrical World*, 66 (1915), 1356.

<sup>2)</sup> F. G. Hechler, "Balancing Machines," *Journ. Amer. Soc. Nav. Eng.*, 31 (1919), 405-419.

<sup>3)</sup> B. Galitzin, *C.R.*, 150 (1910), 901-904.

<sup>4)</sup> A. Steinbach, "Die Eigenschwingungszahlen eines auf elastischem Boden ruhenden Fundaments," *ZS. f. tech. Phys.*, 12 (1931), 289-292.

<sup>5)</sup> W. Prager, "Die Eigenschwingungen von Rahmenfundamenten," *ZS. f. tech. Phys.*, 9 (1928), 223-227; "Zur Berechnung der Eigenschwingungen ebener und räumlicher Stabwerke," *ZS. f. tech. Phys.*, 10 (1929), 275-280.

斜面・崖地・埋立地・砂地其他軟弱なる土地は好まじからず。此等の敷地に建築する場合には基礎及び軸部の構造を特に堅固にすべし。

- (2) 基礎は成る可く堅硬なる地盤迄掘り下ぐべく、土質軟弱なるときは堅固に掘き固めたる上に築造すべし。

土蔵造・コンクリート造其他重き建物の場合、深き所まで土質軟弱なるときは杭打地業を施すを可とす。

- (3) 硬軟異なる土地に跨りて家屋を築造する事は好まじからず。止を得ざる場合は不等沈下の起らざるやう、軟地に當る部分の基礎を特に堅固に築造すべし。

- (4) 木造家屋に於ては、其の屋根を軽くして震力の作用を小ならしむること、軸部に筋違其他の斜材を用ひて其の抵抗を大ならしむること最も重要なり。

- (5) 土蔵造の塗壁は地震によりて龜裂・剝落を生じ易し、震後の火炎に對して塗壁のみ信頼するは危険なり。

- (6) 石材のみを以て壁體を築造するは、其の規模極めて小なる者の外危険なり。

- (7) 煉瓦造は其の規模小ならざる限り之を耐震的ならしむること容易ならず。

- (8) 鐵筋コンクリート造は耐火耐久にして耐震的の構造方法なり。然れども設計並に施工を忽にするとき、又は震害に由る著しき龜裂に對し修理を怠るときは、其の効果を收め難きのみならず、却て危険なる場合なきを保し難し。故に十分信頼し得べき技術者に諮ることを必要とす。

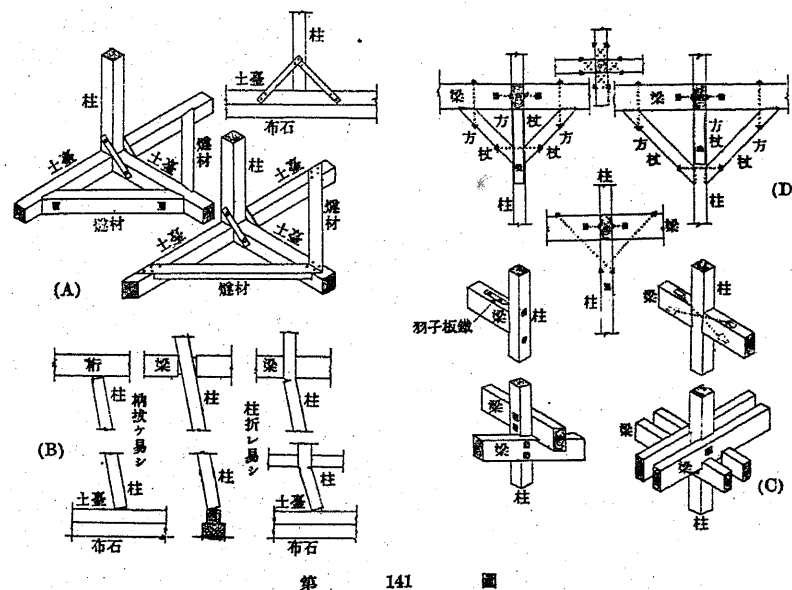
嚴正なる施工は何種の建築にも必要なれども、就中鐵筋コンクリート造に對して最も之を重要とす。

- (9) 鐵骨造は之を耐震的ならしむること最も容易なり。但し其の壁體には脆弱なる材料を用ふることを避くべし。

## 2. 木造家屋に関する詳説

- (10) 土臺は外部の柱下のみならず、内部の柱下にも之を用ひて、家屋全體に互り柱の脚部を連結すべし。

- (11) 土臺の隅々には煙材を用ふべし(A圖参照)。  
 (12) 柱と土臺との接合には鐵物を用ひて連結を鞏固にすべし(A圖参照)。  
 (13) 柱は成る可く家屋内に均等に之を配置すべし。  
 (14) 二階建にありては成る可く多數の通柱を用ひ、管柱を用ふる個所には帶鐵を以て上下を十分に連結すべし(E圖参照)。

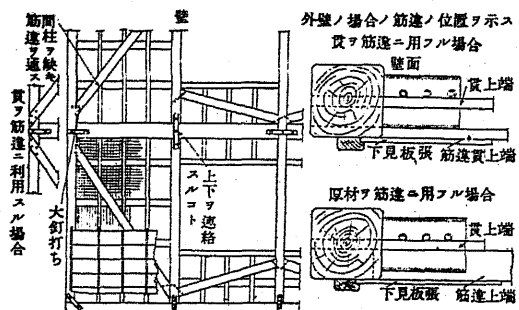


第 141 圖

- (15) 柱と梁類(足堅・差鴨居・胴差・二階梁・小屋梁・桁)との接合は柄差のみに依るべきにあらず、柄を折り又は難し、或は柱を折ること容易なればなり(B圖参照)。  
 接合には柱を甚だしく毀損する手法を避け、ボルト羽子板鐵・帶鐵等の鐵物を用ひて、之を堅く締め付くべし。更に餘地ある箇所には方杖を用ひて三角形を構成すべし(C圖D圖参照)。  
 (16) 壁體は家屋の外側のみならず、内部にも成る可く縦横に之を設くべし。

- (17) 壁體には必ず筋違を用ひて三角形を構成すべし(E圖参照).
- (18) 屋根葺材料には出来るだけ軽くして防火的のものを選ぶべし。石盤或は石綿板は瓦に比して遙に輕し。瓦葺の場合には成るべく引掛棧瓦を用ふべし。
- (19) 小屋組は合掌梁束貫又は方杖を以て堅固に組立て、小屋組間は棟木母屋又は筋違によりて牽固に連結すべし。
- (20) 家屋の各部に筋違方杖等の如き斜材を用ひ、出来るだけ多くの三角形を構成することは耐震構造上最も有效なる手法なり。

(普通の木造家屋を十分に耐震的ならしめんには其の費用百分の五を増す程度を以て足れりとす)



第 142 圖 (E a)

### 3. 木造小學校工場等

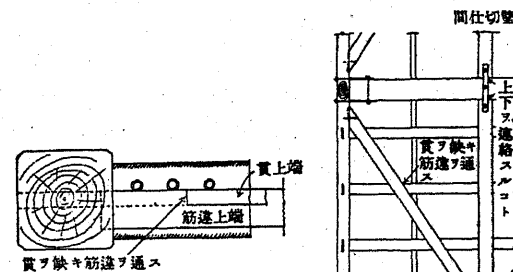
- (21) 木造小學校工場事務所集會場商店其他規模大なるものにありては震災豫防調査會編纂「木造小學校建築耐震上の注意」に準據すべし。

### 4. 木造家屋の保存及修理

- (22) 家屋の下部は成る可く濕氣を防ぎ、空氣の流通を計り、以て腐蝕蟲害を避くべし。
- (23) 軸部特に土臺等腐蝕し易き所には防腐劑を用ふべし。
- (24) 白蟻に犯されたる時は速に之を驅除し、甚だしく犯されたる部は新材と

取換へ新葺材共に防蟻劑を塗布すべし。

- (25) 家屋は時々之を検査し、用材の腐蝕接合の緩み等あるときは速に修理し、補強を怠らざる様力むべし。



(E b)

第 143 圖

- (26) 家屋傾斜し、仕口・權手等の破損せるときは、之を改築することとし、其儘引起し使用することを避くべし。家屋老朽に近づきたるとき、亦之に同じ。
- (27) 柱・梁等にして仕口・權手等の破損せるものは之を取換ふべし。
- (28) 修理の際には壁體に筋違方杖其の他の斜材を用ひて、成る可く多くの三角形を構成すべし。
- (29) 柱と梁との接合は方杖・鐵物等を用ひて之を補強すべし。
- (30) 柱・梁・土臺等の腐蝕せるものは之を新材と取換ふべし。
- (31) 鐵物を使用せる箇所は其の緩みを締め直すべし。
- (32) 附屬煙突は時々検査し、破損ある時は直ちに之を修理すべし。特に屋根裏の部分は破損し易く火災を起す虞あるを以て一段の注意を要す。