

## 第六章 車體の振動

### 102. 車體の振動及び動搖性に就て

車體は鐵道車輛や電車の如く軌條の上を車輪が回轉するものもあれば、自動車や飛行機の車輪の如く地表上に直接車輪が接するものもある。自動車や飛行機ではタイヤが衝撃を緩和し殊にゴムタイヤはその効果が著しいけれども、汽車や電車の場合には何等そのやうな作用をなさないのである。それで之等には車體と車輪との間に適當なばねを附加して衝撃を緩和するやうになつてゐる。自動車や飛行機ではその緩和が一層大切であるから、タイヤの他に自動車ではばねを、飛行機では緩衝器 (shock absorber) を附加してある。而して之等のばねや緩衝器は汽車や電車のばね以上に有効な作用をなすやうに注意がしてあるものである。衝撃を緩和するといつても種々の意味があり、鋭い性質の衝撃即ち高い振動數のものを打消して鈍いもの即ち遅い週期の振動を残すやうにするものもあれば、鋭い鈍いに關係なく全體の振幅を減少させるものもある。振幅から言へば初めに述べたものは必しも振動を少くするものではなく、乗客に不愉快なる加速度、換言すれば慣性力を少くする事に歸するものである。自動車の如きは特にこの方面に力が注いであるやうに思はれる。しかるに汽車殊に貨車の如きは寧ろ全體の振幅のみを減少させるやうになつてをり、鋭い加速度は必しも少くなつてをらぬやうに見える。

力學的に考へると、鋭い性質を緩和するといふことに二つの意味がある。即ち、一つは固體の粘性作用によつて振幅を少くすることであるし、一つは強制力の週期が固有振動週期よりも短く、且つ振動體のばねの所のみに外力が働くときは、振動體の振幅が空間に對して非常に少くなるといふことである。

車體に働く外力には多くの種類がある。鐵道線路に於ては軌條の接ぎ目、軌條の高低、ポイント、線路が曲線を描くときの曲率等がよく知られてゐる。又、極めて重要な事は車輪と軌條との間に左右的の隙間があり、車輛の進行中、車輪が蛇行狀をな

して左右の往復運動をなし、之が車體動搖の原因となることである。自動車に於ては道路の凹凸によつて車體が上下に動搖することが誰にも知られてゐる。車體が左右に方向を變更する場合の問題は殊に重要な性質のものである。

以上のほか車體の振動問題として電気機関車の機構から来る振動や自動車の前車輪のフラッターなどは大切な問題である。之等をすべて包含する振動問題に對してPanetti<sup>1)</sup>の研究はかなり有益なものといはねばならぬ。

車體の振動の中に全體が一つの剛體として揺れる型が最も多いから、その場合には船の場合に倣つて車體が“動搖する”といふことがある。しかし根本的に考へるときは振動といつても大して差支はないのである。車體の動搖は船の動搖の一般の場合の如く六個の自由度を持つてゐる。車體の進む方向に $x$ 軸、鉛直の方向に $z$ 軸、進行方向に直角に水平な軸を $y$ 軸に取る。さうして $x$ 軸の周圍に回轉角を $\varphi$ 、又 $y$ 軸の周圍に $\theta$ 、 $z$ 軸の周圍に $\chi$ だけ回轉するものとする。然るに $x, y, z$ 軸は車體に固定して取るときは所謂移動座標となり、 $\varphi, \theta, \chi$ の取り方にも適當な注意を必要とするものである。しかし車體の動搖の場合に、各變位量は實際問題として非常に小さく、又小なりと假定しても差支のないものであるから、 $x, y, z$ は普通固定せる座標と見て差支ないのである。但し $x$ 軸の方向に車體が進行する爲に、座標の原點がこの進行速度を以て $x$ の方向に移動することは當然である。

車體の動搖に於て特に重要な變位は $z$ の方向の直線的振動變位と、 $x$ 軸の周圍の横搖(rolling)  $\varphi$ 、及び $y$ 軸の周圍の縦搖(pitching)  $\theta$ とである。 $x$ 軸の方向には殆ど振動性がなく、 $z$ 軸の周圍には、ポイントや線路の曲率の大なるときのほかは大して動搖しないものである。又 $y$ 軸の方向にも車體の構造上の或る缺陷がない以上は、これも動搖の可能性が非常に少いものである。

### 103. 鐵道車輛の動搖

鐵道車輛にはボギー車(bogie)もあれば、貨車の如き四輪車もあり、一まとめにして論ずることは多少困難である。しかし何れの場合でも、その構造が大體に於て

<sup>1)</sup> di Modesto Panetti, "Notizie generati sulle oscillazioni dei veicoli," Verh. 2-int. Kongr. f. tech. Mech. (Stockholm, 1930), 3, 16-27.

左右及び前後の方向に夫々對稱形をなしてをり、機關車や自動車の場合に比較してその動搖が割合に簡單に取扱はれるものである。そのばねの本來の性質からいへば動搖の最も可能的な成分は $z$ 方向の上下動(das Wogen)、横水平軸の周圍の縦搖(pitching, das Nicken)、縦水平軸の周圍の横搖(rolling, das Wanken)とである。しかしばねはその構造上の本來の働のみでなく、振動的又は逆振子的作用をもなして横向きの振れをもなし得るものであり、從て車體は全體として左右動及び $z$ 軸の周圍のヨウキング(yawing)をもなし得るものである。之等は初めの三種に比較するとそれ程大きなものではない。

さて、鐵道車輛の場合にばねは如何なる取付方になつてゐるかをいへば、種々の方法があつて各、に就ては言はれぬけれども、貨車の如き短四輪車の場合には各車輪の所に枕ばね(bolster spring)、即ち重鈹彈機がついてゐる。之によつて車輪から来る振動が軽減されるものである。この場合は比較的簡單であるけれども、ボギー車の場合には多少複雑である。前後の各、の車輪群の上にボギー臺車(bogie truck)があり、この上に車體が載せられてゐるのである。ボギー臺車の場合の一例を少しく説明すると車輪の軸承の上には平衡梁の下片があり、この平衡梁の中間に普通二箇所の蔓巻ばね(helical spring)がある。これ等のばねの上端には平衡梁の上片が付き、上片から下片の方へばねの壓縮力を媒として車體の荷重が加へられるのである。次に上片に働く荷重は如何にして現はれるかといへば、それは、この上片の中央點から棒がぶら下り、この棒の下端に枕ばねの下端が連絡してゐる。車體とボギー臺車の大部分の重量が上述の枕ばねの上端に働いてをるので、この枕ばねも壓縮力を受けてその下端の棒を下方に引張る譯である。このやうに二段のばねの方法によつて車體の重量が車輪に支へられ、又逆に車輪に働く衝擊力がこの二段のばねによつて緩和されながら車體の方へ傳へられる譯である。而して蔓巻ばねによつて衝擊の中の高い振動數の振動成分が減衰され、從て衝擊が緩和される。又枕ばねによつては振動成分に大して關係なく減衰されるものであるから、全體として振動が少くなるものである。之等の性質は福島博士<sup>1)</sup>の論文に委しく出てゐる。

<sup>1)</sup> 福島鐵次郎, "鐵道車輛の動搖に就て," 機械學會誌, 22 (1919), 第56號, 1-32.

次に福島博士や大森博士<sup>1)</sup>の研究によるときは、車輛の振動を起す外力は軌條の接ぎ目、曲率、ポイント等のほか、車輛の左右蛇行運動などである。四輪車では軌條の接ぎ目による上下動が割合に大であるけれどもボギー車ではそれ程でない。それはボギー車がある爲に車輪一つ一つに起る上下の變位は平衡梁の横杆の作用によつて各ボギー臺車の中央に働く變位が少くなる爲である。又、蛇行動は著しく横揺を起すものである。汽車の車輪はその形の上から、車輪と軌條との間に多少の隙間のできるは止むを得ぬ譯である。その爲に車輪の進行中週期的の左右往復運動が起り、之が蛇行動の生ずる所以である。之等の説明も大森、福島兩博士によつて與へられ、殊に蛇行動については朝倉博士<sup>3)</sup>の論文がある。鐵道車輛動揺の力學的理論は部分的には武藏技師<sup>4)</sup>などによつて與へられた。

車輛の自由動揺問題の解法(其一) 車輛の横揺角を $\varphi$ 、縦揺角を $\theta$ 、上下動を $z$ と書き、上下動、縦揺、横揺の自由振動の運動方程式を示せば次の如くなる。但し四輪車では各ばねを單位長さだけ縮める力を $s_1$ とし、ボギー車で一つのボギー臺車の左右何れかの側のばね系統を單位長さだけ縮める力を $s_1$ とする。

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} + 4s_1 z &= 0, \\ Mk_1^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 4s_1 a^2 \theta &= 0, \\ Mk_2^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 4s_1 b^2 \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

茲に  $M$  は車體の質量、 $a$  は車體の中央にある重心から前後の各車輪群の中心まで

1) 大森房吉, “汽車振動の驗測第一回報告,” “汽車振動の驗測第二回報告,” 震災豫防調査會報告, 第40號 (1906), 5-17; 第42號 (1906), 3-50; “Application of Seismographs to the Measurement of the Vibrations of Railway Carriages. 1st and 2nd Papers,” 震災豫防調査會歐文報告, 第15號 (1904), 第20號 (1905).

2) 大森房吉, “御料汽車振動の驗測,” 震災豫防調査會報告, 第74號 (1911), 1-24; “Application of Seismographs to the Measurement of the Vibrations of Railway Carriages. 3rd paper (Vibrations of Bogie Carriages),” 震災豫防調査會歐文紀要, 4, 第3號, (1912), 95-125.

3) 朝倉一, “鐵道車輛の蛇行運動に就て,” 機械學會誌, 22 (1919), 第56號, 33-45.

4) 武藏倉治, “車輛上下動揺と軌道との關係,” 鐵道業務資料, 15 (1927), 44-48.

の水平距離、 $b$  は車體の重心から左右各側のばねまでの平均水平距離である。又、 $k_1, k_2$  は車體の重心  $G$  からばね面中への投射點  $O$  を通過する横と縦の水平軸即ち  $y$  軸及び  $x$  軸の周圍の車體の慣性半徑である。 $\theta, \varphi$  はいふまでもなく  $O$  の周圍の縦揺角と横揺角となる。(1) を解けば

$$\left. \begin{aligned} z &= A \cos \left( 2 \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \alpha \right), \\ \theta &= B \cos \left( 2 \frac{a}{k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \beta \right), \\ \varphi &= C \cos \left( 2 \frac{b}{k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \gamma \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

茲に  $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$  は任意常數とする。上下動、縦揺、横揺の各動揺週期は

$$\pi \sqrt{\frac{M}{s_1}}, \quad \pi \frac{k_1}{a} \sqrt{\frac{M}{s_1}}, \quad \pi \frac{k_2}{b} \sqrt{\frac{M}{s_1}}$$

となる。即ち各週期の比が  $1 : k_1/a : k_2/b$  となる譯である。之等は何れも同じ order であるとはいへ、 $k_2/b$  が比較的に大であることが明かである。即ち車體の横揺の週期が大である譯である。

車輛の自由動揺問題の解法(其二) 次に  $z, \theta, \varphi$  を用ひずに各車輪群の上下動を  $z_1, z_2, z_3, z_4$  とする。但し  $z_1, z_2$  は  $x=a$  及  $y=\pm b$  の所にあり、 $z_3, z_4$  は  $x=-a, y=\pm b$  の所にある。然るときは(1)と同様な式を次の如く書き得る:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{4} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + s_1 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) &= 0, \\ \frac{Mk_1^2}{4a} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} (z_1 + z_2) - \frac{d^2}{dt^2} (z_3 + z_4) \right\} + s_1 a (z_1 + z_2 - z_3 - z_4) &= 0, \\ \frac{Mk_2^2}{4b} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} (z_1 + z_3) - \frac{d^2}{dt^2} (z_2 + z_4) \right\} + s_1 b (z_1 + z_3 - z_2 - z_4) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

尙、 $z_1, z_2, z_3, z_4$  が一つの平面内に存在する條件を立體解析幾何の關係から書いて見ると

$$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = 0. \quad (4)$$

(4) を (3) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{4} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 + z_4) + s_1 (z_1 + z_4) &= 0, \\ \frac{Mk_1^2}{4a} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 - z_2) + s_1 a (z_1 - z_2) &= 0, \\ \frac{Mk_2^2}{4a} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 - z_3) + s_1 b (z_1 - z_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

この解を作れば

$$\left. \begin{aligned} z_1 + z_4 &= A_1 \cos \left( 2 \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \alpha_1 \right), \\ z_1 - z_2 &= B_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \beta_1 \right), \\ z_1 - z_3 &= C_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \gamma_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

之等は夫々  $z, \theta, \varphi$  方向の固有振動と同型である。この式と (4) とから

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} \left\{ A_1 \cos \left( 2 \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \alpha_1 \right) + B_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \beta_1 \right) + C_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t - \gamma_1 \right) \right\}, \\ z_2 &= \frac{1}{2} \left\{ A_1 \cos \left( 2 \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \alpha_1 \right) + B_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \beta_1 \right) - C_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t - \gamma_1 \right) \right\}, \\ z_3 &= \frac{1}{2} \left\{ A_1 \cos \left( 2 \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \alpha_1 \right) - B_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \beta_1 \right) + C_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t - \gamma_1 \right) \right\}, \\ z_4 &= \frac{1}{2} \left\{ A_1 \cos \left( 2 \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \alpha_1 \right) - B_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \beta_1 \right) - C_1 \cos \left( 2 \frac{a}{k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t - \gamma_1 \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

即ち各車輪群は三種の独立せる固有振動の結合せる運動をなすことがわかる。しかしながら (6) の結果は形が異なるだけで力學的には (2) の結果と全く同じものである。あつて任意常數も同じ數だけ存在してゐるものである。

縦揺及び上下動の強制動揺 次に強制振動を取扱つて見たいと思ふ。それにはどれかのばねに外部からの強制變位が加はるとか、或は速度乃至加速度が

加はるとして問題を取扱へばよいのであるが、今は便宜上、外部からの強制的變位、例へば軌條の凹凸があつてそれによつて強制動揺が起るものと假定する。

先づ極めて簡単な場合、即ち軌條が左右對稱的であつて車體の進行方向に波長  $l$ 、二倍振幅  $2c$  なる凹凸があるものとする。車輛の速度を  $V$  とすれば、ばねの上下方向の變位及び  $\theta$  の方向の傾斜變化は

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= c \cos \frac{2\pi V}{l} t, \\ \theta_0 &= -\frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi V}{l} t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。(1) 式に於て、ばねの伸縮が上の値だけを變更されると見てよから、振動方程式は次の如く書き得る：

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} + 4s_1 z - c \cos \frac{2\pi V}{l} t &= 0, \\ Mk_1^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 4s_1 a^2 \theta + \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi V}{l} t &= 0, \\ Mk_2^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 4s_1 b^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

今

$$z = A' \cos \frac{2\pi V}{l} t, \quad \theta = B' \sin \frac{2\pi V}{l} t \quad (10)$$

と書き、(9) に代入する時は

$$A' = \frac{c}{4s_1 - \left(\frac{2\pi V}{l}\right)^2 M}, \quad B' = \frac{\frac{2\pi c}{l}}{\left(\frac{2\pi V}{l}\right)^2 Mk_1^2 - 4s_1 a^2}$$

となり、(10) によつて

$$z = \frac{c \cos \frac{2\pi V}{l} t}{4s_1 - \left(\frac{2\pi V}{l}\right)^2 M}, \quad \theta = \frac{\frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi V}{l} t}{\left(\frac{2\pi V}{l}\right)^2 Mk_1^2 - 4s_1 a^2}, \quad \varphi = 0. \quad (11)$$

定常強制振動の場合に、 $V = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{s_1}{M}}$  で上下動の共振が起り、 $V = \frac{ka}{\pi k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}}$  のとき縦揺の共振が起るものである。又、上式によつて強制動揺週期が固有動揺週期よりも短かければ短い程振幅が少くなることがわかる。ばねはこの點から見ても有效なものである。

定常強制動揺でなく、線路の不規則なる高低の場合や振動の初動が與へられる場合には (11) なる解に (2) の如き自由動揺の解を加へておかねばならぬ。即ち

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{c \cos \frac{2\pi V}{l} t}{4s_1 - \left(\frac{2\pi V}{l}\right)^2 M} + A \cos \left(2\sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \alpha\right), \\ \theta &= \frac{2\pi c \sin \frac{2\pi V}{l} t}{\left(\frac{2\pi V}{l}\right)^2 M k_1^2 - 4s_1 \alpha^2} + B \cos \left(2\frac{a}{k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \beta\right), \\ \varphi &= C \cos \left(2\frac{b}{k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \gamma\right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となり、 $A, B, \alpha, \beta$  は初動の條件によつて決定すべきものである。

横揺的強制動揺問題 強制動揺が軌條の左右交替的高低によつて起る場合を考へて見る。即ち波長を  $l$ 、軌條の幅を  $2d$ 、速度を  $V$ 、二倍振幅を  $2c$  と書けば

$$\varphi_0 = \frac{c}{d} \cos \frac{2\pi V}{l} t, \quad (13)$$

但し波長が長く縦揺の方へは影響がきかぬものとする。従て動揺の方程式は

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} + 4s_1 z &= 0, \\ M k_1^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 4s_1 \alpha^2 \theta &= 0, \\ M k_2^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 4s_1 b^2 \varphi &= \frac{c}{d} \cos \frac{2\pi V}{l} t. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

之を解き自由動揺を含む一般解式を作れば

$$\left. \begin{aligned} z &= A \cos \left(2\sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \alpha\right), \\ \theta &= B \cos \left(2\frac{a}{k_1} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \beta\right), \\ \varphi &= \frac{c}{d} \frac{\cos \frac{2\pi V}{l} t}{4s_1 b^2 - \left(\frac{2\pi V}{l}\right)^2 M k_2^2} + C \cos \left(2\frac{b}{k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}} t + \gamma\right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$V = \frac{lb}{\pi k_2} \sqrt{\frac{s_1}{M}}$  のときに共振が起るものである。横揺の共振は同じ  $l$  に對し割合に低い速度で誘起されることがわかるであらう。

局部的の力の爲の強制動揺 車輪群の一つ、即ち  $x=a, y=b$  に強制變位の起る場合を考へる。線路に沿うての波長を  $l$ 、二倍振幅を  $2c$ 、速度を  $V$  とすれば、この車輪群のみによる強制變位は

$$z_{10} = c \cos \frac{2\pi V}{l} t. \quad (16)$$

然るに一方の軌條に斯る凹凸のあるときは  $z_3$  の方にも異常が起る。即ち

$$z_{30} = c \cos \left(\frac{2\pi V}{l} t - \frac{4\pi a}{l}\right). \quad (17)$$

従て、(3) に類似の強制動揺の方程式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{4} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + s_1 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \\ - s_1 \left\{ c \cos \frac{2\pi V}{l} t + c \cos \left(\frac{2\pi V}{l} t - \frac{4\pi a}{l}\right) \right\} &= 0, \\ \frac{M k_1^2}{4a} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 + z_2 - z_3 - z_4) + s_1 a (z_1 + z_2 - z_3 - z_4) \\ - s_1 a \left\{ c \cos \frac{2\pi V}{l} t - c \cos \left(\frac{2\pi V}{l} t - \frac{4\pi a}{l}\right) \right\} &= 0, \\ \frac{M k_2^2}{4b} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 + z_3 - z_2 - z_4) + s_1 b (z_1 + z_3 - z_2 - z_4) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$-s_1 b \left\{ c \cos \frac{2\pi V}{l} t + c \cos \left( \frac{2\pi V}{l} t - \frac{4\pi a}{l} \right) \right\} = 0. \quad ]$$

(4) の関係によつて次式が作られる。

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 + z_4) + 2s_1 (z_1 + z_4) - s_1 c \left\{ \left( 1 + \cos \frac{4\pi a}{l} \right) \cos \frac{2\pi V}{l} t + \sin \frac{4\pi a}{l} \sin \frac{2\pi V}{l} t \right\} &= 0, \\ \frac{Mk_1^2}{2a} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 - z_3) + 2s_1 a (z_1 - z_3) - s_1 a c \left\{ \left( 1 - \cos \frac{4\pi a}{l} \right) \cos \frac{2\pi V}{l} t - \sin \frac{4\pi a}{l} \sin \frac{2\pi V}{l} t \right\} &= 0, \\ \frac{Mk_2^2}{2b} \frac{d^2}{dt^2} (z_1 - z_2) + 2s_1 b (z_1 - z_2) - s_2 b c \left\{ \left( 1 + \cos \frac{4\pi a}{l} \right) \cos \frac{2\pi V}{l} t + \sin \frac{4\pi a}{l} \sin \frac{2\pi V}{l} t \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

この式の解として

$$\left. \begin{aligned} (z_1 + z_4) &= A_1' \cos \frac{2\pi V}{l} t + A_1'' \sin \frac{2\pi V}{l} t, \\ (z_1 - z_3) &= B_1' \cos \frac{2\pi V}{l} t + B_1'' \sin \frac{2\pi V}{l} t, \\ (z_1 - z_2) &= C_1' \cos \frac{2\pi V}{l} t + C_1'' \sin \frac{2\pi V}{l} t \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

と書き、(19) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} A_1' &= \frac{s_1 c \left( 1 + \cos \frac{4\pi a}{l} \right)}{2s_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 \frac{M}{2}}, & A_1'' &= \frac{s_1 c \sin \frac{4\pi a}{l}}{2s_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 \frac{M}{2}}, \\ B_1' &= \frac{s_1 a c \left( 1 - \cos \frac{4\pi a}{l} \right)}{2s_1 a - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 \frac{Mk_1^2}{2a}}, & B_1'' &= \frac{-s_1 a c \sin \frac{4\pi a}{l}}{2s_1 a - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 \frac{Mk_1^2}{2a}}, \\ C_1' &= \frac{s_1 b c \left( 1 + \cos \frac{4\pi a}{l} \right)}{2s_1 b - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 \frac{Mk_2^2}{2b}}, & C_1'' &= \frac{s_1 b c \sin \frac{4\pi a}{l}}{2s_1 b - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 \frac{Mk_2^2}{2b}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(4) と (20) とによつて

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} \left\{ (A_1' + B_1' + C_1') \cos \frac{2\pi V}{l} t + (A_1'' + B_1'' + C_1'') \sin \frac{2\pi V}{l} t \right\}, \\ z_2 &= \frac{1}{2} \left\{ (A_1' + B_1' - C_1') \cos \frac{2\pi V}{l} t + (A_1'' + B_1'' - C_1'') \sin \frac{2\pi V}{l} t \right\}, \\ z_3 &= \frac{1}{2} \left\{ (A_1' - B_1' + C_1') \cos \frac{2\pi V}{l} t + (A_1'' - B_1'' + C_1'') \sin \frac{2\pi V}{l} t \right\}, \\ z_4 &= \frac{1}{2} \left\{ (A_1' - B_1' - C_1') \cos \frac{2\pi V}{l} t + (A_1'' - B_1'' - C_1'') \sin \frac{2\pi V}{l} t \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

茲に  $A_1', B_1', C_1', A_1'', B_1'', C_1''$  は (21) によつて與へられてゐる。(22), (21) をしらべるときは一方の軌條の凹凸のみによつても定常強制振動が常に三種の振動型から成り、且つ三種の速度に於て共振の起ることがわかるのである。 $A_1', A_1''$  は上下動に相當し、 $B_1', B_1''$  は縦揺、 $C_1', C_1''$  は横揺の場合に相當する。而して縦揺の振動方向は大體に於て上下動であり、横揺は主として左右動であるから、上下動に於て二つの共振があり、左右動に於ては一個の共振のあることがわかるのである。尙、實際問題では (22) の解に (7) の如き自由動搖の項を加へてその和を一般解としておき、種々の時間的條件に適合させるのである。從て外力によつて絶えず誘起される固有動搖も三種あることがわかる。而して上下動には二種の固有動搖、左右には一個の固有動搖のあることが了解されるのである。

一般動搖問題 車輛の動搖に於て觀測される動搖週期は強制動搖の週期と固有動搖の週期とであると思ふ。結局、上下に於ては三種の週期があり、左右では二種の週期があつてよい譯である。然るに上下の方についていふと、車輛全體としての上下の固有動搖と縦揺の強制動搖とは車體の構造上から餘り出ないのであらう。それで上下には單に縦揺の固有動搖のみが誘起されるものと思はれる。

ボギー車に於て蔓巻ばねと枕ばねがある爲に、左右の横揺は二組のものから聯成されることになるものであり、又動搖の自由度の関係から車體が軸を有する角横揺と左右に平行に動く動搖との二種の動き方のあるものである。初めの聯成動搖の週期は明かに二組出る譯であるし、又後の二つの動き方については之を分離する

ことはできぬけれども實際の結果から見るとかなり重要な事柄である。之等については筆者<sup>1)</sup>の委しい研究がある。

ボギー車が曲線路出入口に於てその速度と車體の受遊間の關係から種々の動搖をなすものである。之については武藏技師<sup>2)</sup>の分析的研究がある。

共振は面白くないけれども、車體のばねを弱くするか車體を重くして固有動搖週期を強制週期よりもできるだけ長くしておけば、車體は空間に對して割合によく静止の状態を保つことは前に述べた通りである。

#### 104. 鐵道車輛振動の驗測

鐵道車輛の動搖の驗測は我國では大森博士<sup>3)4)5)</sup>の他に武藏技師<sup>2)</sup>の報告がある。大森博士の研究は多少古いけれども非常に委しいものであるから、主として同博士の研究結果を述べたいと思ふ。特別な事については勿論武藏氏の分も擧げる積りである。

大森博士は四輪車、一等ボギー車、御料車、省線電車などの進行中に於ける上下動と左右動とを數度に涉つて觀測した。振動計として左右動には Ewing 型の簡単な水平振子微動計を用ひ、上下動は Gray-Ewing 式上下動地震計を用いたのである。倍率は 1/2 乃至 2 倍であつた。それは振幅がかなり大なるがためである。

四輪車の第一次研究は明治三十五年三月新橋金谷間に於て列車最後の局用車、

1) 筆者, “鐵道車輛に於けるローリング及左右の聯成動搖,” 應用力學聯合大會論文 (1931).

2) 武藏倉治, “ボギー車受遊間が曲線路出入口に於て車體動搖に及ぼす影響に就て,” 應用力學聯合大會論文 (1931).

3) 大森房吉, “汽車振動の驗測第一回報告,” “汽車振動の驗測第二回報告,” 震災豫防調査會報告, 第 4 號 (1906), 5-17; 第 42 號 (1906), 3-50; “Application of Seismographs to the Measurement of the Vibrations of Railway Carriages. 1st and 2nd papers,” 震災豫防調査會歐文報告, 第 15 號 (1904); 第 20 號, (1905).

4) 大森房吉, “御料汽車振動の驗測,” 震災豫防調査會報告, 第 74 號 (1911), 1-24; “Application of Seismographs to the Measurement of the Vibrations of Railway Carriages. 3rd paper, (Vibrations of Bogie Carriages),” 震災豫防調査會歐文紀要, 4 (1912), 第 3 號, 95-125.

5) 大森房吉, “鐵道院京濱電車振動の驗測,” 鐵道業務資料, 8 (1920), 1157-1174.

6) 武藏倉治, “列車振動驗測第一回報告,” “第二回報告,” 鐵道業務資料, 11 (1924), 471-482; 12 (1925), 949-954.

第二次のものは同年五月新橋大垣間につき機關車の次の局用車又は普通客車の試験であつた。上下動はポイントや曲線路の爲には殆ど影響がなく、而して速度が増加すると共に振幅を増大し、一時間 30 哩位の速度で極大となり二倍振幅  $2a=31$  耗位となつた。振動週期は速度と共に漸次短くなり最短のものは 0.22 秒であつた。之等の週期は主として接手 (joint) と接手との間に相當する週期らしく思はれる。次に左右動の方は軌條の接手に無關係な振動週期のものが起つた。その振幅は速度と共に増大し、大體次の如き傾向を取つた:

速度 (哩/時)	5	10	15	20	25	30	35	39	40
振幅 ( $2a$ 耗)	5.0	8.5	8.0	9.0	13.5	21.5	33.0	35.0	20.0

即ち、22 哩~23 哩の近所から急に増加し始めるのである。振動週期は接手に關係なく 0.7 秒乃至 0.8 秒位と 1.5 秒位との二組があつた。尙、局用車でなく、普通客車では 0.70 秒位から 0.99 秒位とがあつた。而してその振幅は最大  $2a=40\sim 47$  耗 (その時の  $T=0.66$  秒) 位、又上下動は振動週期 0.32 秒、最大振幅 12 耗位であつた。局用車と多少趣を異にするものはばねの性質が違ふ爲であらう。

四輪車が曲線路を通過するときの左右振幅はかなり大きく、そのときの最大振幅は實驗の結果

$$2a_{耗} = \frac{64V_{哩/時}}{R_{チェーン}}$$

となつた。R は曲線路の半徑を示す。

橋梁を通過するときの上下動は殆ど影響がなく、左右振幅は 30% 位増加するのが普通であつた。又、ポイント通過のときは曲線路のときの如く大なる左右動を伴つたのである。又、接手 (joint) の所を通過するときの振動は接手の所の補強法によつて著しく異なることも確められたのである。

ボギー車の振動研究は明治四十三年十月大森博士によつて初めて行はれた。機關車の次に二輛の一等車を置き、次に御料車を挟んで又二輛の一等車を續けるのである。御料車は長さ 66 呎 7 吋で 36 噸前後のボギー臺車の各側には夫々三輪を備へてゐる。一等車も同様な車輪數であるけれども長さは 64 呎 6 吋、重量 27.3

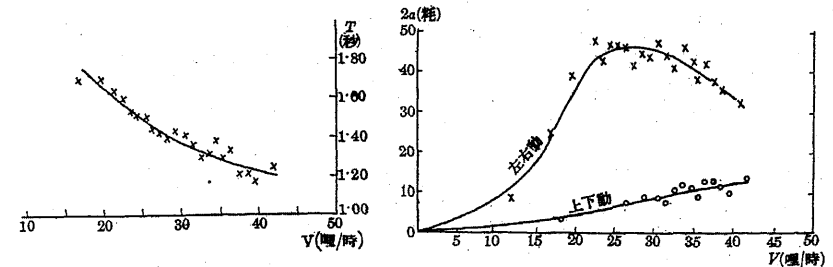
順である。上下及び左右の振動計の種類は四輪車の場合と同じであるがその置場所は中央に置かず車體の一端から車長の約三分の一の所に置いて測定をしたのである。一體、ボギー車でさへも左右動と共に横揺の傾斜運動をもなすものである。又、左右動にしても横揺の爲に起るものと純粹の左右動とがのるが、主として横揺が測定されるものと思はれる。この場合の水平振子の固有振動週期は3.6秒にしてあつたから、大體充分と考へられる。振動の上下動及び左右動が種々の場所で測定された。その結果は非常に多く、ここに一々列擧するに追がないけれども、御料車についての一つの例を示して見ると次の如くなる：

	速度 (V哩/時)	振幅 (2a 耗)	週期 (T秒)		速度 (V哩/時)	振幅 (2a 耗)	週期 (T秒)
左 右 動	16.6	25.0	1.70	上 下 動	17.2	2.9	0.43
	24.4	48.1	1.52		25.1	6.2	0.57
	29.3	44.5	1.44		29.1	6.2	0.52
	41.8	28.5	1.25		42.2	15.9	0.48

このやうな数字が非常に多く出てゐるが結局その振動週期を見ると上下動の方は平均0.50秒であり、この範圍から大して出てをらぬ。即ち速度に無關係になつてゐる。之は恐らく縦揺の固有動揺が誘起された爲であらうと思はれる。然るに左右動の方は速度によつて非常に影響される。それであるからこれは軌條の接手のやうなものによつて起されるものであると思ふ。

振幅の方は上下動が速度と共に少しづつ増大する。左右動も速度と共に増大するけれども或る速度で極大値を取るのである。即ち左右動は強制動揺である事から、この極大値は恐らく共振に當る所であると考へられる。

多くの實驗結果を圖示して見ると次の如くなる。この中で左圖の方は進行速度と左右動揺週期との關係を示し、右圖の方は進行速度と上下及び左右動の振幅との關係を表す。Vが25哩乃至30哩の所で左右の共振動揺が現はれてゐる。そのとき振動週期は1.4秒位である。



第69圖 御料車左右動の振動週期(T)と速度(V)との關係。

第70圖 御料車の振幅(2a)と速度(V)との關係。

左右動(下り)新橋一登井、ポイント及び曲線路によるものを除く；上下動(下り)新橋一國府津、ポイント及び曲線路によるものを含む。

武藏氏<sup>1)</sup>の研究によれば、大森博士が四輪車について見出したるが如くボギー車に於ても左右の振動に二種の振動固有振動週期のあることがわかつた。而してその振動週期は1.32秒~1.40秒のものと0.74秒~0.70秒のものと二種である。この初めの分は大森博士の振動實驗で横揺共振として現はれたものに近く、後分のは大森博士のものでは振動計の關係から態と出さなかつた方であり、これは恐らくばね其他のものから起る單純なる左右動の振動週期であるとも想像されるのである。しかし之は餘り明瞭ではない。武藏氏の上述の實驗に於て、長週期の左右動は振幅9.9耗位のものに對し短週期の方は4.5耗位であり、長週期の方が大なる振幅を持つこともわかるのである。

大森博士の結果からも、強制動揺週期が短くなると振動振幅が少くなる事がわかる。これからも車體はばねを弱くして重量を重くした方がよい事が知られる。

大森博士はその多くの實驗結果から御料車の左右動揺の週期の實驗公式を出したのである。即ち

$$T \text{ 秒} = \frac{91.08}{35.25 + V \text{ 哩/時}}$$

<sup>1)</sup> 武藏倉治, "列車振動驗測第一回報告," "同第二回報告," 鐵道業務資料, 11 (1924), 471-482; 12 (1923), 949-954.



であり、この公式は同型のボギー車には適用してよいのである。

大森博士は又ボギー車が曲線路を通過するときの振幅を實驗結果から次の如き公式として出した：

$$2\alpha \text{ 耗} = \frac{167 \times V \text{ 哩/時}}{39.7 + R \text{ チェーン}}$$

茲に  $R$  は曲線路の半径をチェーンを以て表したものである。

大森博士は土地の柔軟なる所を汽車が通過するときは車輛の上下動が非常に増加することを見出した。この事に對しては軌條と土地とが汽車の通過によつて振動する事の研究である所の田邊博士及び日比博士<sup>1)</sup>の論文が非常に参考になると思はれる。

軌條から來る衝撃の性質に關しての福島博士<sup>2)</sup>の研究結果によれば i) 車體の重心が高い程 ii) 左右ばねの幅狭き程 iii) ばねの撓み性大なる程衝撃が小であるといふ事である。大森博士の研究と共に車輛の計畫上に大いに参考になると思ふ。

### 105. 機關車の振動

機關車の車輛としての動搖は普通の客車と大體似てゐるけれども、その前後の方向に形状が違ふこととクランク運動のある爲にそれだけ違つた所がある。この研究は Mises<sup>3)</sup>, Radaković<sup>4)</sup>, Closterhalfen<sup>5)</sup>, Jahn<sup>6)</sup> 其他によつて行はれてゐるが、先づその自由振動を簡単に述べることにしよう。

自由振動 今、車體の重心から各車輪のばねまでの前後の水平距離(代數的)を  $x_m$  で表し、 $y$  の方向の水平距離(代數的)を  $y_m$  で表す。然るときは(1)の場合と同

1) 田邊朔耶, 日比忠彦, “鐵道軌條振動驗測報告,” 震災豫防調査會報告, 第55號 (1906), 1-34.

2) 福島達次郎, “鐵道車輛の動搖に就て,” 機械學會誌, 22 (1919), 第56號 1-32.

3) R. v. Mises, “Schienenfahrzeuge,” *Encyk. d. math. Wissens.* 4, 2 Teil, 10 (1911), 315-331.

4) M. Radaković, “Über die theoretische Behandlung des störenden Lokomotivbewegungen,” *ZS. f. Math. u. Phys.*, 53 (1906), 225-244.

5) A. Closterhalfen, “Die Bewegungsstörungen der Dampflokomotiven,” *ZS. f. tech. Phys.*, 4 (1923), 419-426.

6) J. Jahn, “Das Wanken der Lokomotiven unter Berücksichtigung des Federspieles,” *ZVDI*, 53 (1909), 521-526, 573-578, 621-625.

様な表し方によつて  $z, \theta, \varphi$  の方向の振動方程式が次の如く書き得る。

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} + z \sum_m s_m - \theta \sum_m s_m x_m &= 0, \\ M k_1^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \theta \sum_m s_m x_m^2 - z \sum_m s_m x_m &= 0, \\ M k_2^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \varphi \sum_m s_m y_m^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

茲に  $s_m$  は  $m$  番目のばねを単位長さだけ伸ばす爲の力である。又  $\theta, \varphi$  の軸はばねと車體と聯結する平面上への車體重心點の投射點を通過するものとする。さて上式を解く爲に

$$\left. \begin{aligned} \sum_m s_m &= 2F_1, \quad \sum_m s_m x_m = 2F_2, \\ M k_1^2 &= B, \quad M k_2^2 = A, \quad \sum_m s_m x_m^2 = 2F_3, \quad \sum_m s_m y_m^2 = 2F_1 \epsilon^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

と書けば、(23) は次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} + 2F_1 z - 2F_2 \theta &= 0, \\ B \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2F_3 \theta - 2F_2 z &= 0, \\ A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2F_1 \epsilon^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

の式の第三式は横搖の式であつて、その動搖週期は

$$\frac{2\pi}{2F_1} \sqrt{\frac{A}{2F_1}} \quad (26)$$

となる。第一式と第二式に於て

$$z = C \cos(pt + \alpha), \quad \theta = D \cos(pt + \alpha) \quad (27)$$

と置くと、

$$\begin{vmatrix} 2F_1 - Mp^2 & -2F_2 \\ -2F_2 & 2F_3 - Bp^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

となる。之から

$$\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_2}{B}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_2}{B}\right)^2 + 4 \frac{F_2^2}{MB}}} \quad (29)$$

が得られる。之を (27) に入れて

$$\left. \begin{matrix} z = C_1 \cos(p_1 t + \alpha_1), \\ \theta = 2 \frac{F_1 - M p_1^2}{2 F_2} C_1 \cos(p_1 t + \alpha_1), \end{matrix} \right\} \quad (30a)$$

及び

$$\left. \begin{matrix} z = 2 C_2 \cos(p_2 t + \alpha_2), \\ \theta = \frac{2 F_1 - M p_2^2}{2 F_2 A} C_2 \cos(p_2 t + \alpha_2) \end{matrix} \right\} \quad (30b)$$

の二組の解が出る。C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, α<sub>1</sub>, α<sub>2</sub> は任意常數である。又、上下動と縦揺とは組合つて二つの聯成振動をなすことがわかる。之等の中で第二の振動が安定となるには

$$\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_2}{B}\right) > \sqrt{\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_2}{B}\right)^2 + 4 \frac{F_2^2}{MB}} \quad (31)$$

となるべきである。之を書き直せば

$$F_1 F_2 > F_2^2 \quad (31')$$

即ち (24) によつて

$$\sum_m \sum_n \delta_m \delta_n x_m^2 > (\sum_m \delta_m x_m)^2 \quad (31'')$$

といふことになる。

クランク運動による強制動揺 機関車動揺の強制力は客車の如く軌條が車輪を通して車體に働くものと、クランク運動から來るものと二種類ある。

クランクから來るものは主としてクロスヘッドの所で常に鉛直の方向に且つ上方に働く週期的の力である。このクロスヘッドに働く力は、クランクが一回轉する間に二つの死點 (dead point) があつて、而もその何れの死點の間を考へてもクロスヘッドに上向きに押す壓力を與へるといふ性質を持つものである。それで機関車の一方の側のクロスヘッドから車臺に下向きに

$$P |\sin p_1 t|$$

なる週期的の力を與へるものである。而して他の側のクランク運動は  $\frac{\pi}{2}$  だけ位相差のあるのが普通であるから、そのクロスヘッドから働く下向きの力として

$$P |\cos p_1 t|$$

を置くことができる。それで (23) の第一式に相當する強制振動の方程式として

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + z \sum_m \delta_m - \theta \sum_m \delta_m x_m = P \{ |\cos p_1 t| + |\sin p_1 t| \} \quad (32)$$

を作る事ができる。同様にしてクロスヘッドに働く力によるモーメントの式を考へると、それは二種類から成立つてゐる。その一種は上向きの力と同様な變化のものであり、他は二倍の回轉速度に相當するものである。之等の兩方を書いて見ると

$$\left. \begin{matrix} M_1 \{ |\cos p_1 t| + |\sin p_1 t| \}, \\ M_2 \{ |\sin p_1 t| \cos p_1 t + |\cos p_1 t| \sin p_1 t \} \end{matrix} \right\}$$

となる。それで (23) の第二式に相當して次の強制振動方程式が作られる：

$$\left. \begin{matrix} M k_1^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \theta \sum_m \delta_m x_m^2 - z \sum_m \delta_m x_m = M_1 \{ |\cos p_1 t| + |\sin p_1 t| \} \\ + M_2 \{ |\sin p_1 t| \cos p_1 t + |\cos p_1 t| \sin p_1 t \}. \end{matrix} \right\} \quad (33)$$

同様に横揺の強制振動の方程式、即ち (23) の第三式に當る強制振動の式を作れば

$$\left. \begin{matrix} M k_2^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \varphi \sum_m \delta_m y_m^2 = M_1 \{ |\cos p_1 t| + |\sin p_1 t| \} \\ + M_2 \{ |\sin p_1 t| \cos p_1 t + |\cos p_1 t| \sin p_1 t \} \end{matrix} \right\} \quad (34)$$

となる。之等を同時に解く事は必しも容易でない。それで之以上の説明は省略する事にすが、しかし (32), (33), (34) によつてクランク運動の爲に振動の起る機構の概念だけが得られる事と思ふ。機関車の場合のクランクによる強制力は車自身に働くから、車體の固有週期を長くしても役に立たぬばかりでなく寧ろ有害である

軌條の性質による強制動揺 軌條の高低による車體の振動を出すには (25) にばねの伸縮の効果を入れて

$$\left. \begin{matrix} M \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 F_1 (z - z_0) - 2 F_2 (\theta - \theta_0) = 0, \\ B \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 F_2 (\theta - \theta_0) - 2 F_1 (z - z_0) = 0, \\ A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 F_1 e^2 \varphi = 0. \end{matrix} \right\} \quad (35)$$

$\varphi$  の方には変化がないとする。今

$$z_0 = c \cos \frac{2\pi V t}{l}, \quad \theta_0 = -\frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi V t}{l} \quad (36)$$

と書く。茲に  $V$  は機關車の進行速度、 $l$  は軌條高低の波長とする。

(35) を解く爲に

$$z = A' \cos \frac{2\pi V}{l} t + A'' \sin \frac{2\pi V}{l} t, \quad \theta = C' \cos \frac{2\pi V}{l} t + C'' \sin \frac{2\pi V}{l} t \quad (37)$$

と置き、(35) の第一、第二式に代入すれば次の関係が出る：

$$\left. \begin{aligned} \left\{ 2F_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 M \right\} A' - 2F_2 C' &= 2F_1 c, \\ -2F_2 A' + \left\{ 2F_3 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 B \right\} C' &= -2F_2 c, \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

$$\left. \begin{aligned} \left\{ 2F_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 M \right\} A'' - 2F_2 C'' &= \frac{4\pi F_2 c}{l}, \\ -2F_2 A'' + \left\{ 2F_3 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 B \right\} C'' &= -\frac{4\pi F_2 c}{l} \end{aligned} \right\} \quad (38b)$$

之等から

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{2c \left[ F_1 \left\{ 2F_3 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 B \right\} - 2F_2^2 \right]}{\left\{ 2F_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 M \right\} \left\{ 2F_3 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 B \right\} - 4F_2^2}, \\ C' &= \frac{-2c \left[ F_2 \left\{ 2F_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 M \right\} - 2F_1 F_2 \right]}{\left\{ 2F_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 M \right\} \left\{ 2F_3 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 B \right\} - 4F_2^2}, \\ A'' &= \frac{\frac{4\pi c}{l} \left[ F_2 \left\{ 2F_3 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 B \right\} - 2F_2 F_3 \right]}{\left\{ 2F_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 M \right\} \left\{ 2F_3 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 B \right\} - 4F_2^2}, \\ C'' &= \frac{-\frac{4\pi c}{l} \left[ F_3 \left\{ 2F_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 M \right\} - 2F_2^2 \right]}{\left\{ 2F_1 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 M \right\} \left\{ 2F_3 - \left( \frac{2\pi V}{l} \right)^2 B \right\} - 4F_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

之等を (37) に代入すれば定常強制振動が得られる。而して  $\frac{2\pi V}{l}$  が固有振動に相当する  $p$  に等しいとき、換言すれば強制振動の週期が固有振動の週期に等しいときは (28) によつて  $A', A'', C', C''$  の分母が零となり、共振の現象が起るものである。一般の解としては (37) に (30) の如き自由振動の項を附加すべきである。尚ばねの強さと位置が車體の重心に對して前後對稱の場合には  $F_2=0$  となり、(39) に於て  $A''=0, C''=0$  となり、車體の上下の振動は軌條の高低のみの影響を受け、縦揺の振動は軌條の傾斜のみの影響を受けることになるものである。この場合にはクランク運動と異なり、車體の固有週期の長い方がよいのである。しかしクランクの方の勢力が大であるから、その爲には今の問題は犠牲に供すべきものである。

機關車の振動實驗は餘りやつてない。大森博士<sup>1)</sup>の實驗が比較的に委しいものである。大森博士の研究によれば機關車の上下動にはボギー車の如く 1.5 秒週期のものが殆ど出て來ない。それよりも軌條の接手やポイントによるもの、又はブレーキをかけるときの振動がよく出てゐるのである。勿論クロスヘッドに働く偶力等による振動も出てをつたのに違ひないけれども、餘り複雑な爲にその分析のでき難かつたことは已むを得ないと思ふ。

### 106. 電氣機關車の側桿推進組織の振動

連結棒組織の機構 この問題は車體其物の振動でなくして明かに機械組織の振動であるけれども、電氣機關車の車體にのみ關係を有する爲に、こゝに持出した次第である。問題が振動の問題として非常に面白いために多くの人によつて研究された。例へば Meissner<sup>2)</sup>, Kummer<sup>3)</sup>, Müller<sup>4)</sup>, Couwenhoven, Schwerin<sup>5)</sup>,

<sup>1)</sup> 大森房吉, “機關車振動驗測第一回報告,” 鐵道業務資料, 8 (1920), 103-120.

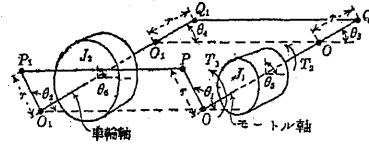
<sup>2)</sup> E. Meissner, “Ueber Schüttlerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität,” *Schweiz. Bauz.*, 72 (1918), 95-98.

<sup>3)</sup> W. Kummer, “Ueber zusätzliche Triebwerkbeanspruchung durch Lagerspiel bei Kurbelgetrieben elektrischer Lokomotiven,” *Schweiz. Bauz.*, 64 (1914), 129-131, 135-137.

<sup>4)</sup> Karl E. Müller, “Ueber die Schüttelschwingungen des Kuppelgetriebes,” *Schweiz. Bauz.*, 74 (1919), 141-144.

<sup>5)</sup> E. Schwerin, “Ueber Schüttelschwingungen gekoppelter Systeme,” *ZS. f. tech. Phys.*, 10 (1929), 37-46.

Parodi<sup>1)</sup> などが有名である。電気機関車の推進車軸は下圖に示す如くであつて、先づ電動機から半径  $r$  なるクランクが出で、之に連結棒 (side rod) が聯結し、この棒の他端には車輪軸のクランクの端が結ばれてゐる。これと全く同様な機構が他の車側にもあり、而してクランクは初めの車側のものと  $90^\circ$  だけ位相角が異なつてゐるのである。尙、この圖は極めて簡單なる模型を示したのであり、實際にはその機構だけでももつと複雑である。



第 71 圖

トルク  $T_1, T_2$  はモートル軸  $OO$  から連結棒  $PP_1$  及  $QQ_1$  によつて車輪軸  $O_1O_1$  に傳へられる。モートルが與へる全體のトルクを  $T$  とすれば、

$$T = T_1 + T_2. \tag{40}$$

又、 $PP_1, QQ_1$  なる連結棒を押す力を夫々  $S_1, S_2$  とし、その縮みが壓力に比例するものとしてその比例量を  $f_1, f_2$  とするとき、 $PP_1, QQ_1$  の長さの縮み  $\Delta l_1, \Delta l_2$  は

$$\Delta l_1 = f_1 S_1, \quad \Delta l_2 = f_2 S_2 \tag{41}$$

となる。又、クランク半径を  $r$  とすれば、

$$T_1 = S_1 r \sin \theta_1, \quad T_2 = S_2 r \sin \theta_2. \tag{42}$$

幾何學的の關係から、 $\theta_1 - \theta_2$  及  $\theta_3 - \theta_4$  に相當する圓弧の  $PP_1$  及  $QQ_1$  上への投射を考へると、次の如き關係がある：

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\Delta l_1}{r \sin \theta_1}, \quad \theta_3 - \theta_4 = \frac{\Delta l_2}{r \sin \theta_2}. \tag{43}$$

(41), (42) を用ひ、且つ  $f_1/r^2 = \gamma_1, f_2/r^2 = \gamma_2$  と書き次式が出る：

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{T_1 \gamma_1}{r^2 \sin^2 \theta_1} = \frac{T_1 \gamma_1}{\sin^2 \theta_1}, \quad \theta_3 - \theta_4 = \frac{T_2 \gamma_2}{r^2 \sin^2 \theta_2} = \frac{T_2 \gamma_2}{\sin^2 \theta_2}. \tag{43}$$

次にモートル自身の回轉角を  $\theta_5$ 、車輪の回轉角を  $\theta_6$  とすれば、

$$\theta_5 - \theta_1 = T_1 \beta_1, \quad \theta_5 - \theta_3 = \frac{\pi}{2} + T_2 \beta_2, \quad \theta_2 - \theta_6 = T_1 \beta_1', \quad \theta_4 - \theta_6 = -\frac{\pi}{2} + T_2 \beta_2', \tag{44}$$

<sup>1)</sup> M. H. Parodi, "Étude sur les oscillations des systèmes de transmission par bielles des locomotives électriques," Verh. 3-int. Kongr. f. tech. Mech. (Stockholm, 1931), 3, 234-250.

茲に  $\beta_1, \beta_2$  及  $\beta_1', \beta_2'$  は夫々モートル及び車輪の兩側に於ける各車軸が  $T_1$  及  $T_2$  によつて振れる爲の彈性的常數である。

(43), (44) から

$$\theta_5 - \theta_6 = T_1(\beta_1 + \beta_1') + \frac{T_1 \gamma_1}{\sin^2 \theta_1}, \quad \theta_5 - \theta_6 = T_2(\beta_2 + \beta_2') + \frac{T_2 \gamma_2}{\sin^2 \theta_2}. \tag{45}$$

之から

$$T_1 = \frac{\theta_5 - \theta_6}{(\beta_1 + \beta_1') + \gamma_1 / \sin^2 \theta_1}, \quad T_2 = \frac{\theta_5 - \theta_6}{(\beta_2 + \beta_2') + \gamma_2 / \sin^2 \theta_2}. \tag{46}$$

振動方程式  $OO$  の周圍のモートルの質量慣性モーメントを  $J_1, O_1O_1$  の周圍の車輪の質量慣性モーメントを  $J_2$  とし、又  $OO$  及  $O_1O_1$  の周圍のトルクを夫々  $T$  及  $W$  と書けば、 $OO$  及  $O_1O_1$  の周圍のモーメントの運動方程式は次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} T - (T_1 + T_2) &= J_1 \frac{d^2 \theta_5}{dt^2}, \\ (T_1 + T_2) - W &= J_2 \frac{d^2 \theta_6}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \tag{47}$$

今

$$\frac{(T_1 + T_2)(J_1 + J_2)}{(\theta_5 - \theta_6) J_1 J_2} = \psi \tag{48}$$

と書けば (47) は次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \theta_5}{dt^2} &= \frac{T}{J_1} - \frac{1}{J_1} (\theta_5 - \theta_6) \psi \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}, \\ \frac{d^2 \theta_6}{dt^2} &= -\frac{W}{J_2} + \frac{1}{J_2} (\theta_5 - \theta_6) \psi \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}. \end{aligned} \right\} \tag{47'}$$

$\theta_5 - \theta_6 = y$  と書けば上式は次の如き一つの式にまとまる：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \psi y = \frac{T}{J_1} + \frac{W}{J_2}. \tag{49}$$

モートルの回轉速度を  $\omega$  と書けば連結棒 (side rods) の機構から

$$\sin \theta_1 = \sin \omega t, \quad \sin \theta_2 = \cos \omega t$$

であり、又 (48), (46) から

$$\psi(t) = \left\{ \frac{\sin^2 \omega t}{(\beta_1 + \beta_1') \sin^2 \omega t + \gamma_1} + \frac{\cos^2 \omega t}{(\beta_2 + \beta_2') \cos^2 \omega t + \gamma_2} \right\} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \tag{48}$$

となる。振りの弾性率及び連結棒の弾性率が夫々の左右で同じ値を有するときは、

$$\beta_1 + \beta'_1 = \beta_2 + \beta'_2 \equiv \beta, \quad \gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma \quad (50)$$

となるから、

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{2\beta \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t + \gamma}{(\beta \sin^2 \omega t + \gamma)(\beta \cos^2 \omega t + \gamma)} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \\ &= \frac{2\beta + 8\gamma - 2\beta \cos 4\omega t}{8\gamma^2 + 8\beta\gamma + \beta^2 - \beta^2 \cos 4\omega t} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \\ &= \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}, \end{aligned} \quad (51)$$

茲に

$$2\beta + 8\gamma = a, \quad 2\beta = b, \quad 8\gamma^2 + 8\beta\gamma + \beta^2 = c, \quad \beta^2 = d \quad (52)$$

とする。\$\beta\_1 + \beta'\_1 \neq \beta\_2 + \beta'\_2\$, \$\gamma\_1 \neq \gamma\_2\$ のときは \$\psi(t)\$ が

$$\psi(t) = \frac{a + b \cos 2\omega t + c \cos 4\omega t}{p + q \cos 2\omega t + r \cos 4\omega t} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \quad (53)$$

の如き形を取る。\$a, b, c, p, q, r\$ は決定される常數である。

さて \$\psi(t)\$ が (51) の如き形である場合に (49) の運動方程式は

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} y = \frac{T}{J_1} + \frac{W}{J_2} \quad (54)$$

この方程式の自由振動の部分の考へると一種の擬調和振動(quasiharmonic vibrations)を表してゐるのである。車軸の弾性率が側桿のそれと比して非常に高いときは上式に於て \$b\$ と \$d\$ とを零に置いてよい。そのときの固有振動の週期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma J_1 J_2}{J_1 + J_2}}$$

となる。

\$T\$ なるトルクが振動的のものであり、その振動週期が上述の固有振動週期の倍數に等しいときは共振の現象が起るのである。即ちそのやうな意味に於て固有振動を尙少しく考へて見たいと思ふのである。

擬調和振動の解法 車軸の弾性率がそれ程大きくないと考へると (54) の

振動の解が複雑になつて來る。而して共振の一つの限界速度がある代りに斯る速度の或る一定の範圍が出て來るものである。今

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \psi(t)y = 0 \quad (55)$$

を考へる。但し \$\psi(t)\$ は (51) の如き \$t\$ の週期的函數とする。Meissner<sup>1)</sup> が示してゐる如く、振動が限界に入る境は \$\psi(t)\$ の週期であるときに次の條件の一つが満足する所である：

$$\left. \begin{aligned} y(t + \vartheta) &= y(t), \\ y(t + \vartheta) &= -y(t). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

而して、上式の初めの方を第一種の週期的解と名づけ、後の方を第二種の週期的解といふ。

今、(56) の如き性質を有する解を持つべき方程式を求みる爲に、(55) の吟味を試みたいと思ふ。(55) なる方程式は

$$y = A_1 \chi_1(t) + A_2 \chi_2(t) \quad (57)$$

の如き二つの particular solutions の和と見てもよい。\$\chi\_1(t)\$ 及 \$\chi\_2(t)\$ は \$\vartheta\$ なる週期を持つものであるから、\$\chi\_1(t + \vartheta)\$, \$\chi\_2(t + \vartheta)\$ も亦 (55) の解となる。それで

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(t + \vartheta) &= A \chi_1(t) + B \chi_2(t), \\ \chi_2(t + \vartheta) &= C \chi_1(t) + D \chi_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

なる關係がなければならぬ。

次に (55) の解が \$\vartheta\$ なる週期を持つ爲に、\$\vartheta\$ 時間の後にその解が \$\sigma\$ 倍の大きさになるとしてその解を \$N(t)\$ と書けば、

$$N(t + \vartheta) = \sigma N(t) \quad (59)$$

となる。然るに (57) から

$$\left. \begin{aligned} N(t) &= A_1 \chi_1(t) + A_2 \chi_2(t), \\ N(t + \vartheta) &= A_1 \chi_1(t + \vartheta) + A_2 \chi_2(t + \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

(58) を用ひて

<sup>1)</sup> E. Meissner, "Ueber Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität." *Schwed. Bauz.*, 72 (1918), 95-98.

$$N(t+\vartheta) = A_1\{A\chi_1(t) + B\chi_2(t)\} + A_2\{C\chi_1(t) + D\chi_2(t)\}. \quad (61)$$

(60), (61), (59) から

$$A_1\{A\chi_1(t) + B\chi_2(t)\} + A_2\{C\chi_1(t) + D\chi_2(t)\} = \sigma\{A_1\chi_1(t) + A_2\chi_2(t)\}.$$

この式がすべての  $t$  について満足するには

$$AA_1 + CA_2 = \sigma A_1,$$

$$BA_1 + DA_2 = \sigma A_2$$

なる関係を生じ,  $A_1, A_2$  を消去して

$$(A - \sigma)(D - \sigma) = BC,$$

即ち

$$\sigma^2 - (A + D)\sigma + AD - BC = 0. \quad (62)$$

今, (57) なる解を有する問題が  $t=0$  に於て

$$\chi_1(0) = 1, \quad \dot{\chi}_1(0) = 0, \quad \chi_2(0) = 0, \quad \dot{\chi}_2(0) = 1 \quad (63)$$

なる条件をもつとすれば, (58) によつて

$$A = \chi_1(\vartheta), \quad B = \dot{\chi}_1(\vartheta), \quad C = \chi_2(\vartheta), \quad D = \dot{\chi}_2(\vartheta). \quad (64)$$

又, (55) から

$$\ddot{\chi}_1(t) + \psi(t)\chi_1(t) = 0, \quad \ddot{\chi}_2(t) - \psi(t)\chi_2(t) = 0$$

となり, 従て  $\psi(t)$  を消去して

$$\ddot{\chi}_1(t)\chi_2(t) - \ddot{\chi}_2(t)\chi_1(t) = 0.$$

之を積分して

$$\dot{\chi}_1(t)\chi_2(t) - \dot{\chi}_2(t)\chi_1(t) = \text{常数}. \quad (65)$$

この式に於て  $t=0$  及  $t=\vartheta$  と置き, (63), (64) の関係を用ひれば

$$AD - BC = 1.$$

従て (62) は

$$\sigma^2 - (A + D)\sigma + 1 = 0. \quad (66)$$

この式を解いて

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{A + D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1}. \quad (67)$$

これを用ひると (59) は

$$N_1(t + \vartheta) = \sigma_1 N_1(t), \quad N_2(t + \vartheta) = \sigma_2 N_2(t)$$

となすべきである。さて

$$\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 > 1 \quad (68)$$

のときは  $\sigma_1$  も  $\sigma_2$  も真数である。又,  $\sigma_1\sigma_2 = 1$  といふことからこの一方の  $\sigma$  の絶対値が 1 よりも大となり, その結果一方の  $N$  が時間と共にどこまでも増大するものである。一例として  $|\sigma_1| > 1$  とすれば次の如く變化する譯である:

$$N_1(t + n\vartheta) = \sigma_1^n N_1(t).$$

(68) の條件は振動が不安定になる條件である。然るに

$$\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 < 1 \quad (69)$$

のときは (67) の两根が虚数となり, 振動が安定である。

$$\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 = 1 \quad (70)$$

が極限の條件であり, それには

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \pm 1 \quad (71)$$

となればよい。若し  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  のときは

$$N(t + \vartheta) = N(t)$$

となるし,  $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$  のときは

$$N(t + \vartheta) = -N(t)$$

となり, ことに (56) の如き関係が證明できた次第である。

以上の如き説明は Meissner<sup>1)</sup> や其他初めに擧げた人々の論文に委しく出てゐるし, 又 Timoshenko<sup>2)</sup> の教科書にもそれ等の論文の要點を述べてある。

<sup>1)</sup> E. Meissner, 前掲。

<sup>2)</sup> S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering* (New York, 1928); *Schwingungsprobleme der Technik* (Berlin, 1932), übertr. v. I. Malkin u. E. Helly.



$$\dot{\theta}_n \cong \frac{n\pi}{\sqrt{\psi(t)}} \quad (81')$$

といふことと、(82), (83) で與へられてゐるやうな不安定の境とから $\psi(t)$ に限界の領域があり、その領域では振動が不安定となり、大なる振幅を與へることである。

尙、(75)の如き式を圖上で解く事は Müller<sup>1)</sup>の第二の論文に出てゐる。又、本問題に對する實驗的研究については Wiechert<sup>2)</sup>の研究が参考になると思はれる。

107. 自動車の上下動と縦揺との聯成自由動搖

自動車の車體をばねで支持しておく事は、汽車の客車と同じく乗客に不快を與へたり貨物に損害を與へたりせぬばかりでなく、車輪に大きな應力が起らぬ様にし、且つ道路とタイヤとの接觸を滑かにするにある。この最後の事項は殊に大切であつて、之がうまく行けばタイヤそれ自身の問題は勿論のこと、道路や塵埃の事項にも利益を與へ、且つモートルの働にも効果を及ぼすものである。

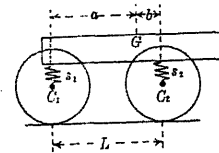
さて車體受装置 (suspension) の問題が全く力學的の事柄であるのは勿論であるけれども、客用の場合には心理上の問題が入るからさう簡単ではない。又、力學上の問題にした所が自動車の場合には種々の異同がある。即ちばねに働く外力にしてもその性質、加はる位置、大きさ等が異なり、ばねの摩擦力も時やその製造者によつて違ひがある。タイヤは空気タイヤ (pneumatic tyre) と無垢タイヤ (solid tyre) の區別は勿論、その大きさ、性質などに差があり、車體の速度は非常に變化があり、其他種々雑多の條件がある。しかし何といつても車體受装置の問題は乗客の愉快といふ事が第一の問題であるから、斯る客用車について振動問題をよく研究することが大切と思はれる。空気タイヤもばねの助けとなつてゐるのは勿論である。

汽車の場合には、兩側にレールがあり、従て車輛の蛇行動を伴ひ其上げねも多少左右に振動的振動をなし得るやうになつてゐるので、車體の左右の動搖がかなり問題となるのである。然るに自動車ではその高さが低い割合に車輪の幅が廣く置か

1) Karl E. Müller, "Die kritische Geschwindigkeit der Lötschberg-Lokomotive, Typ 1E1, analytisch und graphisch berechnet," *Schweiz. Bauz.* 75 (1920), 107-110.

2) A. Wiechert, "Schüttelschwingungen an Schiffen und elektrischen Lokomotiven," *ZVVL*, 65 (1921), 971-972.

れ、又軌條がない爲に蛇行動もなく、且つばねも多くは車體の前と後とで各一體をなして振動し得る場合が多いので、大體は車體の横揺の方は看過して、上下動と縦揺のみを考へればよいのである。前後別々のばねで車體を結ぶ事は Obadiah Elliot



第 72 圖

(1801) の發明であつて、その時は確かに面白い考案であつたのであつて、之によつてかなりの速度までも衝撃が少くなつたのであつた。

自動車固有動搖の理論 ばねが左圖に示されたやうな方式のものであつて車體はその重心から a, b なる距離に於て夫々 s1, s2 なる強さのばねによつて別々の軸の上に乗つてゐるのである。すべての變位は釣合の位置から測ればよい。それで各軸から車體が x, y だけ上下に

動いたとするか、又は車體の重心が垂直に z だけ動き、且つ車體が theta だけ縦揺をなしたとしてもよい。この兩方の考方は共に便利な所がある。それでこゝでは兩方の座標について問題を取扱ふことにする。

初めに x, y を用ひることとし、車體が前後各 x, y だけ下つたとする。M を車體の質量、k を重心のまはりの回轉半徑、L を車輪の軸間距離とする。然るときは Rowell<sup>1)</sup> が與へたやうに運動方程式が次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} (b\ddot{x} + a\ddot{y})\frac{M}{L} + s_1x + s_2y &= 0, \\ (\ddot{x} - \ddot{y})\frac{Mk^2}{L} + s_1ax - s_2by &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

茲に x は y に無關係でないことがわかる。

同様に z, theta を用ひるときは (z は下る方に取る)

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{z} + z(s_1 + s_2) - \theta(s_1a - s_2b) &= 0, \\ Mk^2\ddot{\theta} - z(s_1a - s_2b) + \theta(s_1a^2 + s_2b^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

1) H. S. Rowell, "Principle of Vehicle Suspension," *Proc. Inst. Autom. Eng.*, 17 (Part 2) (1923), 455-541; *The Automobile Engineers*, 13 (1923), 118-122.



之によつて上下動  $z$  は  $\theta$  に無関係でないことがわかる。即ち何れも聯成振動<sup>1)</sup> であることが知られるのである。

今

$$\left. \begin{aligned} z &= A \cos(pt + \epsilon), & \theta &= B \cos(pt + \epsilon), \\ x &= C \cos(pt + \epsilon), & y &= D \cos(pt + \epsilon), \\ \alpha &= \frac{(s_1 + s_2)}{M}, & \beta &= -\frac{(s_1 a - s_2 b)}{M}, \\ \gamma &= \frac{(s_1 a^2 + s_2 b^2)}{M}, \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

と書けば、前述の二組の方程式は次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} C(s_1 - p^2 b M/L) + D(s_2 - p^2 a M/L) &= 0, \\ C(s_1 a - p^2 k^2 M/L) + D(-s_2 b + p^2 k^2 M/L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha - p^2) + B\beta &= 0, \\ A\beta + B(\gamma - p^2 k^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

之等から  $C$  と  $D$ 、及  $A$  と  $B$  を消去すれば、

$$p^4 - p^2 \left\{ \frac{s_1 + s_2}{M} + \frac{s_1 a^2 + s_2 b^2}{M k^2} \right\} + s_1 s_2 \frac{L^2}{M^2 k^2} = 0, \quad (89)$$

$$p^4 - p^2 \left( \alpha + \frac{\gamma}{k^2} \right) + \frac{(\alpha \gamma - \beta^2)}{k^2} = 0 \quad (90)$$

となる。即ち (89) と (90) とは (86) によつて全く同じものであることがわかるのである。

今

$$\beta = 0 \quad (\text{即ち } s_1 a = s_2 b) \quad (91)$$

のときは、(85) によつて

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{z} + z(s_1 + s_2) &= 0, \\ M k^2 \ddot{\theta} + \theta(s_1 a^2 + s_2 b^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

<sup>1)</sup> J. J. Guest, "The Main Free Vibrations of an Autocar," *Proc. Inst. Autom. Eng.*, 20 (1929), 505-547; *The Automobile Engineers*, 16 (1926), 190-198.

となり、上下動と縦揺とが聯成振動をなさず、各、獨立の振動であることがわかる。<sup>1)</sup> 之は  $s_1/s_2 = b/a$  といふことであり、汽車の車體などでは可能であるけれども自動車などでは餘りのないことである。

さて一般の場合を考へ、(90) から根を出して見ると

$$p^2 = \frac{\{(k^2 \alpha + \gamma) \pm \sqrt{(k^2 \alpha + \gamma)^2 - 4k^2(\alpha \gamma - \beta^2)}\}}{2k^2} \quad (93)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{k^2} + \alpha \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\gamma}{k^2} - \alpha \right)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}} \quad (93')$$

(86) から

$$\alpha \gamma - \beta^2 = \frac{1}{M^2} s_1 s_2 (a + b)^2 > 0. \quad (94)$$

従て (93), (93') からその兩根は共に眞數であり、且つ正號を有することがわかる。

次に車體の振動様式を出すには (88) 及 (87) から

$$\frac{A}{B} = \frac{\beta}{p^2 - \alpha} = \frac{\beta}{\frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{k^2} - \alpha \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\gamma}{k^2} - \alpha \right)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}} \quad (95)$$

$$\frac{C}{D} = \left( s_2 - \frac{p^2 a M}{L} \right) / \left( \frac{p^2 b M}{L} - s_1 \right), \quad (96)$$

こゝに  $p^2$  は式 (94) から代入してある。

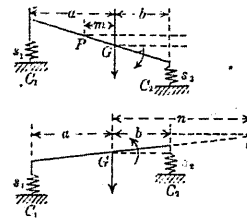
(95) に於て正號のものは高振動數のものに當り、負號の方は低振動數のものを示す。

(95) に於て

$$\beta > 0 \quad (s_1 a < s_2 b) \quad (97)$$

とすれば、(95) の分母の正の符號のある方を取ることとは  $A$  と  $B$  とが同符號になることであり、且つ高い振動數を與へる。然るに同じ  $\beta$  に對し (95) の分母の負

の符號のある方を取ると  $A$  と  $B$  とが反對の符號になり、且つ低い振動數を與へるも



第 73 圖

<sup>1)</sup> "Pitching," *The Automobile Engineers*, 15 (1925), 401-405.

のである。之等の状態を圖示すれば上圖の如くなる。

特別に  $\beta=0$  即ち  $s_1a=s_2b$  と置けば  $m=0, n=\infty$  となる。即ち一つの振動は重心の周囲の回轉振動となり、他の振動は單に上下の直線的運動となるのである。

又、式(95)は二種類の振動に於ける  $A/B$  なる振動比の相乗積を表すにも應用できる。即ち

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = -k^2 \tag{98}$$

で與へられ、二つの場合の振動比の相乗積が慣性半径の二乗の負號を取つたものに等しいことを示す。さうして車體の重さや車輪軸の位置に無關係となるのである。

次に同様なことを  $x, y$  なる自由度に就て考へて見ると、(96)から

$$\frac{C_1C_2}{D_1D_2} = \frac{(s_2 - p_1^2 a M/L)(s_2 - p_2^2 a M/L)}{(p_1^2 b M/L - s_1)(p_2^2 b M/L - s_1)}$$

前の頁にある圖の上の方は  $A$  と  $B$  とが同符號の場合であり、下の方は反對の符號を持つ場合を示す。即ち初めの場合には  $C_1$  と  $C_2$  の中間に於て重心から  $m$  なる距離にある  $P$  點を不動點として振動し、後の場合には  $C_2$  點の外方にあつて重心から  $n$  なる距離にある  $Q$  點を不動點として振動する。それで (95) の方程式を考へ、且つ  $\theta$  が小なるときに次の關係：

$$\begin{aligned} z &\equiv m\theta, & (z, \theta \text{ 同符號}) \\ z &\equiv -n\theta & (z, \theta \text{ 逆符號}) \end{aligned}$$

があるものとすれば、(95) の右邊が夫々  $m$  及  $n$  を表すものである。而して  $m$  と  $n$  との相乗積を作れば

$$mn = -\frac{\beta}{\frac{1}{2}(\frac{\gamma}{k^2} - \alpha) + \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\gamma}{k^2} - \alpha)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}} \cdot \frac{\beta}{\frac{1}{2}(\frac{\gamma}{k^2} - \alpha) - \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\gamma}{k^2} - \alpha)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}} = k^2 \tag{99}$$

となる。  $C, D$  については  $A, B$  のときと同様にして

$$\frac{C_1C_2}{D_1D_2} = -\frac{s_2}{s_1} \tag{100}$$

この場合には振動比の相乗積がばねの強さの比の負號を取つたものになり、車輪軸

の位置や車體の重さに無關係となつたのである。

計算例  $L=9$  呎,  $M=966$  磅 (=30 slugs),  $G$  の位置は後部車輪軸から4呎の前方にあり、 $k=\sqrt{13}$  とする。即ち  $a=5$  呎,  $b=4$  呎である。又  $s_1=2400$  磅每呎,  $s_2=1600$  磅每呎として計算すると次の如くなる：

$$\begin{aligned} \alpha &= 133.3 & \alpha k^2 &= 1733.3 \\ \beta &= -186.67 & \alpha k^2 + \gamma &= 4586.6 \\ \gamma &= 2853.3 & \alpha k^2 - \gamma &= -1120.0 \\ 4k^2\beta^2 &= 1811909. \end{aligned}$$

(93) により

$$\begin{aligned} p^2 &= 10^2 (1.764 \pm 0.673) \\ &= 10^2 (2.437 \text{ 又は } 1.091). \end{aligned}$$

即ち  $p=15.6$  及  $=10.45$  ラディヤン毎秒となる。即ち毎分につき  $N_1=150, N_2=100$  となる。

又、振動比は (95) から

$$A/B = \beta/(p^2 - \alpha) = -1.689 \text{ 及 } 7.714.$$

相乗積は  $-13$  となり、之が  $-k^2$  に丁度等しくなつたのである。

同様に  $x, y$  座標の比を出して見ると、(96) によつて

$$C_1/D_1 = -2.896, \quad C_2/D_2 = 0.231.$$

相乗積は  $-\frac{1}{13}$  となり、之が前述の  $-s_2/s_1$  に等しくなるのである。

聯成固有動揺の誘起 一般の問題に立歸り、(93') の二つの  $p$  を  $p_1, p_2$  と書けば一般解即ち (86) は次の形を取る：

$$\left. \begin{aligned} z &= A_1 \cos(p_1 t + \epsilon_1) + A_2 \cos(p_2 t + \epsilon_2), \\ \theta &= B_1 \cos(p_1 t + \epsilon_1) + B_2 \cos(p_2 t + \epsilon_2) \end{aligned} \right\} \tag{101}$$

茲に (95) から

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{\beta}{p_1^2 - \alpha}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{\beta}{p_2^2 - \alpha} \tag{102}$$

(101) は  $A_1, B_1, \epsilon_1, \epsilon_2$  なる定數を含み初期條件を満足させることができる。今

$$t=0; z=\lambda, \dot{z}=0, \theta=0, \dot{\theta}=0$$

とすれば,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= 0, \quad \epsilon_2 = 0 \\ A_1 &= \lambda \frac{\alpha - p_2^2}{p_1^2 - p_2^2}, \quad A_2 = \lambda \frac{p_1^2 - \alpha}{p_1^2 - p_2^2}, \\ B_1 &= A_1 \frac{p_1^2 - \alpha}{\beta}, \quad B_2 = A_2 \frac{p_2^2 - \alpha}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

となり、初期には全く水平の位置に置かれてをるのにも拘らず、二種類の振動方法及び各種につき別々の振動週期を有する振動が誘起されることがわかる。

二つの振動週期が非常に近いときは喰りの現象が起るものである。それには

$$A_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad A_2 = \frac{\lambda}{2}, \quad B_1 = -\frac{\lambda}{2k}, \quad B_2 = \frac{\lambda}{2k}$$

とし、 $p_1 \cong p_2$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\lambda}{2} (\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \lambda \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t, \\ \theta &= \frac{\lambda}{2k} (-\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \frac{\lambda}{k} \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t \sin \frac{p_1 - p_2}{2} t, \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

茲に  $p_1 - p_2$  は非常に小であるから  $\frac{2\pi}{p_1 - p_2}$  なる週期を有する喰りが起るのである。

上下動や縦揺の問題を圖上で解く事に就ては Marquard<sup>1)</sup> の研究があるし、又、振動を極めて簡単化せる場合の聯成振動は上記の人<sup>2)</sup> その他の論文がある。次に振動に關聯して實際の自動車のばねの作用を取扱つた人には Healey<sup>3)</sup>、Schieferstein<sup>4)</sup>、Spiegel<sup>5)</sup>、隈部博士<sup>6)</sup> などがあつた、又單にばねの靜力學的的研究をなした人に

<sup>1)</sup> E. Marquard, "Federungsprobleme bei starren und schwingenden Hinterachsen," *Der Motorwagen*, 30 (1927), 739-741.

<sup>2)</sup> E. Marquard, "Grundlagen zur Ermittlung der dynamischen Beanspruchung von Kraftfahrzeugen bei Stößen," *Der Motorwagen*, 29 (1926), 737-742.

<sup>3)</sup> A. Healey, "The Type as Part of the Suspension Systems," *Proc. Inst. Autom. Eng.*, 19 (1924), 26-128; *The Automobile Engineers*, 14 (1924), 406-414.

<sup>4)</sup> H. Schieferstein, "Die Abfederung der Fahrzeuge," *Der Motorwagen*, 32 (1929), 49-56.

<sup>5)</sup> Spiegel, "Schwingachsen und Vorderradantrieb," *Der Motorwagen*, 32 (1929), 129-131.

<sup>6)</sup> 隈部一雄, 東京帝大工學部輪講會; 其他.

は Schlachter<sup>1)</sup>、Günther<sup>2)</sup>、Heffer<sup>3)</sup> などがある。振動に關聯せる事であるが自動車車體の車輪に關係して生ずる振動の安定問題は Weissenberg<sup>4)</sup>、其他<sup>5)</sup> の重要な結果がある。又ボギー車のトラックに似た車輪として六輪自動車<sup>6)</sup> の研究もある。之等の一つ一つの説明は紙面を非常に要することであり、又、理論的振動問題とは多少意味を異にしてゐるからこゝにはその説明を省きたいと思ふ。

### 108. 自動車の上下動及び縦揺の強制動揺

自動車に働く外力はタイヤ及びばねを經由して車體に加はるのであるが、前にも示した通り、その自由動揺が二つの不動點の周圍の回轉運動であるから、從て強制動揺の主要なものもこの二つの型に相當するものである。即ち道路の凹凸などによる振動もこの二つの型を誘起するものである。この強制動揺の研究は Rowell<sup>7)</sup>、Napier<sup>8)</sup>、其他<sup>9)</sup>、によつて試みられた。初めに前の車輪が道路の凹凸にぶつかり、その爲に前のばねが上下の振動をなし、從て車體に一つの型の動揺が起るのは當然である。次に後の車輪が同じ凹凸にあたるときも亦同じやうな動揺を車體に與へることになるのである。即ち結果として車體の動揺は上述の兩方の効果を加へ合せたものになる。而してその加へ合せ方は車體の速度によつて非常に異なる。即ち車體の水平速度を  $V$ 、車輪間の距離を  $l$  とすれば、兩衝擊の働く時間的の位相差は當然  $l/V$  で與へられる。この  $l/V$  が或る値の所では兩衝擊の加へ合せたものが極

<sup>1)</sup> W. Schlachter, "Automobilwagenfedern," *Der Motorwagen*, 25 (1922), 395-398, 481-484; 29 (1926), 637-642.

<sup>2)</sup> O. Günther, "Über Blattfederreibung und Schmierung," *Der Motorwagen*, 29 (1926), 642-644.

<sup>3)</sup> P. Heffer, "Die Berechnung von zusammengesetzten Blattfedern," *Organ f. Fortschritte*, 63 (1926), 134-137.

<sup>4)</sup> Gustav J. Weissenberg, "Über die Stabilität von Motorfahrzeugen," *Der Motorwagen*, 29 (1926), 791-798, 869-870.

<sup>5)</sup> "The Stability of a Braked Car," *The Automobile Engineers*, 19 (1929), 64-65.

<sup>6)</sup> "The Suspension of Six Wheelers," *The Automobile Engineers*, 17 (1927), 299.

<sup>7)</sup> H. S. Rowell, "Principle of Vehicle Suspension," *Proc. Inst. Autom. Eng.*, 17 (Part 2) (1923), 455-541; *The Automobile Engineers*, 13 (1923), 118-122.

<sup>8)</sup> J. L. Napier, "Holding the Road," *The Automobile Engineers*, 11 (1921), 266-272.

<sup>9)</sup> "Road Shocks," *The Automobile Engineers*, 15 (1925), 329-333.

大の値を取る。二つの型の振動の夫々の週期を  $\tau_1, \tau_2$  とし、 $q_1, q_2$  を任意の整数とすると、

$$l/V = q_1\tau_1 = q_2\tau_2$$

の如き関係になると、自動車の両方の振動型が共に共振の如き状態に陥るものである。しかし何度も繰返すものではないからそれ程恐れるには當らぬけれども、大なる振動を引起すことは確かである。普通の自動車は屢、斯る状態にあるのであるが、摩擦<sup>1)</sup>が働いてゐる爲に振幅が大して大きくならぬものである。そこで一方のばねに働いた衝撃が他のばねには何等の作用を與へぬやうにできれば非常に好都合である。それには  $M$  なる質量が前後のばねに  $M_1, M_2$  の割合に受持たれ、その割合が

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M \frac{l_2}{l}, & M_2 &= M \frac{l_1}{l}, \\ M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2 &= M k^2 \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

となつてをればよい。茲に  $l$  は前後の車輪間の距離であつて  $l_1 + l_2 = l$ 、 $Mk^2$  は  $l$  を  $l_1, l_2$  に分つ點の周圍の質量の慣性モーメントである。(105) から直ちに

$$l_1 l_2 = k^2 \quad (106)$$

となり、(97) と比較するとき、上述のばねの位置が恰も上下及び縦揺運動の二つの不動點と一致することを示す。その結果、一方のばねに働く衝撃が二つの振動型中の單に一方のみに働いて他の型の動揺には影響を與へぬことになり、従て共振的の動揺が無くなるものである。又このやうに考へると、各ばね毎の衝撃を互に獨立なものとして取扱ふことができる。

一般の強制振動の問題を解くことはかなり厄介であるから、こゝに態と上に述べた機構になつてゐるものと假定し、一つのばねのみに衝撃の働く場合を考へて見る。今、 $m_1$  は車輪其他の質量、 $m_2$  はばねの上にある質量としておく。即ち車體の質量である。自動車の水平速度を  $V$  としておく。道路に凹凸がなければ振動が起らぬ筈であり、車輪と道路との間には單に静力學的の力しか働かないのである。

<sup>1)</sup> O. Holm, "Reibungsdämpfung der Kraftwagenfedern," *Der Motorwagen*, 30 (1927), 467-473

振動の解法 振動の式を書いて見ると

$$m_2 \ddot{x}_2 + s(x_2 - x_1) = 0 \quad (107)$$

となる。但し  $x_1$  は  $m_1$  の變位であり、 $x_2$  は  $m_2$  のそれである。今、車體が調和函数的の hump を走り越すものと考へ、その調和函数的の波長を  $\lambda$ 、全振幅を  $h$ 、車體の速度を  $V$  であるとすれば、

$$x_1 = (h/2) \{1 - \cos(2\pi Vt/\lambda)\} \quad (108)$$

となるべきである、但し水平座標の原點を波形の一番低い所を取る事にする。

(108) を (107) に代入すれば、

$$\ddot{x}_2 + \frac{8s_2}{m_2} = \frac{sh}{2m_2} \left(1 - \cos \frac{2\pi Vt}{\lambda}\right) \quad (109)$$

簡單の爲に  $2\pi V/\lambda = p_1$ 、 $\sqrt{s/m_2} = p$  と書けば、(109) の解として次式が得られる。

$$x_2 = A \cos pt + B \sin pt + \frac{h}{2} \left[1 - \frac{p^2}{p^2 - p_1^2} \cos p_1 t\right] \quad (110)$$

$A, B$  を決する爲に  $t=0$  で  $x_2 = \dot{x}_2 = 0$  とすれば、

$$x_2 = \left\{1 + \frac{p_1^2 \cos pt - p^2 \cos p_1 t}{p^2 - p_1^2}\right\} \frac{h}{2} \quad (111)$$

となる。之から

$$\dot{x}_2 = (p \sin p_1 t - p_1 \sin pt) \frac{hp_1 p}{2(p^2 - p_1^2)}, \quad (111')$$

$$\ddot{x}_2 = (\cos p_1 t - \cos pt) \frac{hp_1^2 p^2}{2(p^2 - p_1^2)}. \quad (111'')$$

之等の式が  $m_2$  が hump を越す間の變位、その速度及び加速度を與へるのである。hump を越した所で  $p_1 t_0 = 2\pi$  である。そこで又  $2\pi/p$  なる週期の自由動揺が誘起される。即ち (111) から

$$(\cos p_1 t_0 - 1) \frac{hp_1^2}{2(p^2 - p_1^2)} = C \cos pt_0 + D \sin pt_0.$$

又 (111') から

$$\frac{hp_1^2}{2(p^2 - p_1^2)} \sin pt_0 = C \sin pt_0 - D \cos pt_0,$$

但し  $pt_0 = \frac{2\pi p}{p_1}$  とする。

之等を  $C, D$  について解き且つ適當に代入すれば hump から後の解として次式が得られる。

$$x_2 = -\frac{hp_1^2}{2(p^2 - p_1^2)} 2 \sin \frac{\pi p}{p_1} \sin \left( pt - \frac{\pi p}{p_1} \right) \quad (112)$$

(111), (112) が hump の間及びそれから後の解式を與へる。尙、之をしらべる前に  $p = p_1$  のとき、即ち resonance の場合を考へると、(111) から

$$x_2 = \left[ 1 - \cos pt - \frac{pt}{2} \sin pt \right] \frac{h}{2} \quad (113)$$

之は hump を越すまでであつて其後に又自由振動が誘起されるから、それを

$$x_2 = E \cos pt + F \sin pt$$

とする。  $E, F$  を前の如く決定すると hump から後の振動が次の如くなる。

$$x_2 = -\frac{\pi h}{2} \sin pt. \quad (114)$$

(111), (112) から、車體の固有週期が強制振動の週期よりも遙かに長いときは、自動車の空間に對する振幅が小さい。この意味からばねは弱い程よく、車體は重い程よい事がわかる。<sup>1)</sup> 車體の速度を速くするのも此點から見て有意義なものである。

動搖の爲の慣性力 道路に働く壓力は自重の外に

$$S = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2$$

が働くわけである。そこで (111'') を應用して

$$S = \frac{p_1^2 h}{2} \left( m_1 + \frac{m_2 p^2}{p^2 - p_1^2} \cos p_1 t - \frac{m_2 p^2}{p^2 - p_1^2} \cos pt \right) \quad (115)$$

が hump を越す間の應力である。hump の後は同様にして

$$S = \left\{ \frac{m_2 p_1^2 p^2 h}{2(p^2 - p_1^2)} \right\} 2 \sin \frac{\pi p}{p_1} \sin \left( pt - \frac{\pi p}{p_1} \right) \quad (116)$$

即ち自重の外に働く壓力は車體進行の速度の二乗及び hump の高さの一乗に比例

<sup>1)</sup> 筆者、"強度に直接關係なき機械的振動の防止に就て," 科學, 2 (1932), 452.

し hump の波長の二乗に反比例することがわかるのである。  $p_1/p$  が非常に大なるときは  $m_1$  の方が  $S$  中の大なる部分をなすのである。従て道路に働く振動的壓力は、車體の固有週期が極端に長い方又は短い方がよいことがわかる。この點から見て重い自動車は速く走るとも大して悪くないものである。共振のときは

$$S = \frac{p_1^2 h}{2} \left\{ m_1 \cos p_1 t + \frac{m_2 p_1 t}{2} \sin p_1 t \right\} \quad (117)$$

となり、  $m_2$  の方が  $m_1$  より重要であるが、hump の後では次の如くなる：

$$S = \frac{m_2 p_1^2 h \pi}{2} \sin p_1 t \quad (118)$$

尙、車體が共振をなしたときに、ばねの應力の爲にばねが破損するかも知れぬ。そのときに速度を速くした方がよいか、遅くした方がよいかといふことが屢々問題になるのである。それは (117), (118) の式から見て共振の近所だけでは遅くした方がよいやうである。

ばねの應力は  $P = s(x_1 - x_2)$  の關係から

$$P = \frac{sh}{2} \frac{p_1^2}{p^2 - p_1^2} (\cos p_1 t - \cos pt) \quad (119)$$

となる。従て  $p = p_1$  のときは

$$P = \frac{sh}{2} p_1 t \sin p_1 t \quad (119')$$

となり、  $t$  と共に  $P$  が大きくなり、極めて悪い状態を示すものである。ばねの應力から考へると一般に固有週期を短くしておいた方がよい。しかし週期を極端に長くしても應力が一定以上にならぬ事が (119) から明かである。

車輪と道路との間の作用については Fromm<sup>1)</sup> の研究がある事を注意しておく。

### 109. 自動車車體の種々の振動

自動車の普通の振動が上下動と縦揺とであることは既に述べてある。こゝでは横揺も結合せる場合の振動に就て注意するとともに、タイヤをも振動のばねと見る場合や、車體の前後、左右及び旋回的振動等をも簡単に附加へておきたいと思ふ。

<sup>1)</sup> H. Fromm, "Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben," ZAMM, 7 (1927), 27-58.

横揺を含む動揺 先づ車體の動揺が横揺(rolling)をも結合せる場合を考へて見る。<sup>1)</sup> 自動車の四隅に夫々  $s_1, s_2, s_3, s_4$  なる強さのばねを有し、其等の點の上下の變位を  $x_1, x_2, x_3, x_4$  とする。又、 $M$  なる質量の車體の重心點の上下の變位を  $z$  と置く。車體は重心  $G$  を通る或る水平軸  $OO'$  を主要軸として傾斜振動を行ふものとする。この軸から各ばねまでの距離を夫々  $a_1, a_2, a_3, a_4$  とし、同じ軸の周圍の車體の質量の慣性モーメントを  $Mk^2$ 、又、車體の同軸の周圍の回轉角を  $\theta$  とする。然るときは上下及び回轉の運動方程式は次の如く書き得る：

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} + (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4) &= 0, \\ Mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + c_1 a_1 x_1 - c_2 a_2 x_2 - c_3 a_3 x_3 + c_4 a_4 x_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

重心  $G$  を通過してばねの位置を以て圍む平行四邊形(長さ  $L$ 、幅  $T$ )の各邊に平行線  $XX, YY$  を引き、周邊を右圖の如き割合に切る。 $OO'$  線と  $YY$  線とのなす角を  $\phi$  とし、又  $G$  點と四つの角點を結ぶ線が長邊と夫々  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  なる角をなすものとする。然るときは

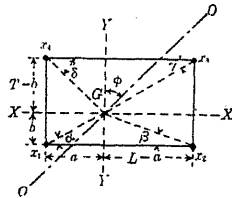
$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \phi), & a_2 &= \sqrt{(L-a)^2 + b^2} \cos(\phi - \beta), \\ a_3 &= \sqrt{(L-a)^2 + (T-b)^2} \cos(\gamma + \phi), & a_4 &= \sqrt{a^2 + (T-b)^2} \cos(\delta - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

となる。次に四つのばねに對して車體が一つの固體として運動する爲には重心の上下動  $z$  が次の關係に置かれる：

$$z = x_2 + \frac{L-a}{L}(x_1 - x_2) + \left\{ (x_3 - x_2) + \frac{L-a}{L}(x_4 - x_3) - \frac{L-a}{L}(x_1 - x_2) \right\} \frac{b}{T}. \quad (122)$$

$k^2$  も  $XX, YY$  軸に相當するそれ等から計算することができる。特別に  $c_1 = c_3, c_2 = c_4, x_1 = x_3, x_2 = x_4$  と置くときは  $OO'$  が  $YY$  と一致して(84)の場合と同様な式が出るのである。さうして横揺に對しては全く獨立した方程式を作り得るものである。一般の場合の計算は非常に厄介であるから、こゝでは單に(120)や(121)の關係の

<sup>1)</sup> E. A. Wedemeyer, "Die Federung der Fahrzeuge," *Der Motorwagen*, 30 (1927), 367-372.



第 74 圖

みを示し、それによつて縦揺横揺、上下動が結合すべき概念を示すに止めておいた。

タイヤの影響 次に(85)の如き上下動と縦揺との聯成振動をなす場合にタイヤ殊に空気タイヤによつて新に振動の自由度が増加することをも考慮に入れて方程式を作つて見ると次の如くなるのである：<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} + z(s_1 + s_2) - (z_1 S_1 + z_2 S_2) - \theta(s_1 a + s_2 b) &= 0, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + z_1 S_1 - s_1(z - \theta a - z_1) &= 0, \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + z_2 S_2 - s_2(z + \theta b - z_2) &= 0, \\ Mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - z(s_1 a - s_2 b) + \theta(s_1 a^2 + s_2 b^2) + (S_1 z_1 a - S_2 z_2 b) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

茲に  $m_1, m_2$  は前後の車輪系の質量、 $z$  は重心の變位、 $z_1, z_2$  は各車輪系の車軸の上下の變位、 $S_1, S_2$  は前後の各タイヤの弾力を示す。この式は自由度の増加せる場合の自由振動と見てもよいけれども、車輪の上下動を外から與へた變位と見れば強制振動の一種としてもよい譯である。全體を聯成自由振動と見るときに、若し  $z_1, z_2$  が小であれば(123)の第一式、第四式中の  $z_1, z_2$  を含む項は小となり、残りの式は(85)と同じになり、(85)の場合に見出した解を以て今の場合の解と見做しても差支がない。

車軸の振動式は(123)の第二式及び第三式で與へられる。しかしして車體が大なる質量である爲に殆ど静止の位置にあり、且つその傾斜も零と置き得る場合には、 $z=0, \theta=0$  としてよい。従て、振動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + (S_1 + s_1) z_1 = 0 \quad (124)$$

の如き形を取り、その上下の自由動揺の週期は

$$2\pi \sqrt{\frac{m_1}{S_1 + s_1}}$$

を以て與へられる。

<sup>1)</sup> E. A. Wedemeyer, *Automobilschwingslehre*, Sammlung Vieweg, Heft 103/104 (Braunschweig, 1930).

しかしながら (123) に相當する一般の聯成自由動搖の解を求めるには、

$$z = A \cos(pt + e), \theta = B \cos(pt + e), z_1 = C \cos(pt + e), z_2 = D \cos(pt + e) \quad (125)$$

と置いて (123) に代入し、 $A, B, C, D$  を消去すれば次の如き行列式が作られる：

$$\begin{vmatrix} -Mp^2 + (s_1 + s_2), & (-s_1 a + s_2 b), & -S_1, & -S_2 \\ (-s_1 a + s_2 b), & -Mk^2 p^2 + (s_1 a^2 + s_2 b^2), & S_1 a, & -S_2 b \\ -s_1, & s_1 a, & -m_1 p^2 + S_1 + s_1, & 0 \\ -s_2, & -s_2 b, & 0, & -m_2 p^2 + S_2 + s_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (126)$$

この式から  $p$  を決定すればよいのである。この式は  $p^8$  までの式であり、四組の振動数を與へるものである。

**其他の振動性** 自動車は前後の方向にも多少振動し得るものである。この方向には自由度がないやうにはなつてゐるけれども、尚、機關その他種々のものによつて強制的振動性がある。

左右の方向にはばねとタイヤの抵抗を受けて横搖的の振動はするけれども、普通は自動車のばねは同じものが左右に通してあるから、このばねがその中に節點を持つて振動することは非常な抵抗を起すことになるので、左右の自由動搖性が少い。そのみでなく近時の自動車ではこのばねが車軸から吊られ、且つばねの中央に車體が支へられてゐる爲に恰も汽車のボギー臺車の前後に於けるが如く車體の左右傾斜がかなり減じられるものである。

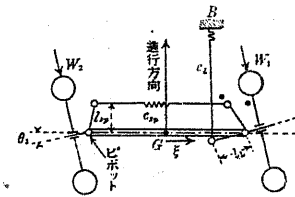
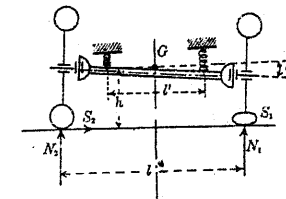
車の轉向性がある爲に鉛直軸の周圍の振動、即ち方向性振動もかなり重要である。しかし之は單純な振動でなく、種々の複雑な條件があり、問題がこみ入つて來るので、この振動式だけは次節で説明することにした。

この他モートルの不衡力によつて起る所の高ビッチの振動も存在することを附加しておく

### 110. 自動車前車輪のフラッター-其他の振動

自動車の前部の車輪はその構造上から、各車輪のピボットの周圍に左右の方向性の振動をなし得るものである。その極端に振動する場合はフラッター (flutter,

Flattern, shimmy) と稱せられるもので、Kaufmann<sup>1)</sup>, de Lavaud<sup>2)</sup>, Fromm<sup>3)</sup> 等によつて研究されてゐる。この振動の抵抗は前車輪と車體の間のばね作用、空気タイヤの弾性作用、操縱裝置の拘束作用等である。この外に前車輪と車軸とを一まとめとして自動車の前後を貫く中心軸の周圍の横搖 (Trampeln, dandinement) があり、これはばねとタイヤの弾性作用によつて抵抗されてゐる。而してフラッターと横搖とは車輪の回轉の爲のジャイロ作用を媒として聯成振動をなすが普通である。しかし車體の構造がよくなれば之等の振動も自然少くなるものである。



第 75 圖

道路の抵抗其他の事柄を考へると非常にむづ

かしくなるから、問題に大して影響せぬものは看過することとし、先づ記號の説明をして見る。 $I_0, I_1, I_0$  を夫々一つの車輪のその軸の周圍の慣性モーメント、ピボット (pivot) の周圍の慣性モーメント、前部車輪系全體の前後中心線の周圍の慣性モーメントとする。 $q, r$  をタイヤ及ばねの弾性的係數、 $l, l'$  を車輪間の距離及びピボット間の距離、 $\omega$  を車輪の回轉角速度、 $\alpha, \theta$  を横搖とフラッターの變位角とする。 $c_{sp} l_{sp}^2$  を兩車輪間にある引張棒 (tie rod, Spurgestänge) のばね力のモーメント係數、 $c_d l_d^2$  を第一の車のピボットと車架との間にある引リンク

(drag link) のばね力のモーメント係數とする。而してフラッター角は兩方の車輪について異なつても差支なく、これを  $\theta_1, \theta_2$  とする。かうして振動の方程式を作ると次の如くなる

<sup>1)</sup> A. Kaufmann, "Untersuchung über das Flattern der Lenkräder von Kraftfahrzeugen," *Der Motorwagen*, 30 (1927), 161-173, 192-201.

<sup>2)</sup> D. S. de Lavaud, "Les vitesses critiques fondamentales d'une voiture automobile," *C.R.*, 184 (1927), 1636; D. S. de Lavand 著書, 第5輯 (Paris).

<sup>3)</sup> H. Fromm, "Schwingungsvorgänge an der Lenkung von Kraftfahrzeugen," *Verh. 3-int. Kongr. f. tech. Mech.* (Stockholm, 1930), 3, 278-288.

$$\left. \begin{aligned} I \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - I_0 \omega \frac{d\alpha}{dt} + \mu \theta_1 + c_{sp} l_{sp}^2 (\theta_1 - \theta_2) + c_{Ll} l_L^2 \theta_1 &= 0, \\ I \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} - I_0 \omega \frac{d\alpha}{dt} + \mu \theta_2 + c_{sp} l_{sp}^2 (\theta_2 - \theta_1) &= 0, \\ I_e \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + I_0 \omega \left( \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} \right) + \lambda \alpha &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

但し  $\mu = h + k\omega^2, \quad \lambda = gl^2 + \gamma l'^2$

であつて、茲に  $h$  は前進速度に無関係な部分の係数、 $k$  は前進速度に關係する項のそれである。今、引張棒が非常に rigid にできてをり、引リンクはばねの作用をあまりなさぬときには  $\theta_1 = \theta_2 = \theta, c_{Ll} l_L^2 = 0$  としてもよい。その場合には次式が作られる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{I_0 \omega}{I} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\mu}{I} \theta &= 0, \\ \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{2I_0 \omega}{I_e} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\lambda}{I_e} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (127')$$

この式を解く爲に  $\theta = \theta_0 \cos pt, \alpha = \alpha_0 \sin pt$  と書いて代入すると、

$$p^4 I_e I - p^2 (\lambda I + \mu I_e + 2I_0^2 \omega^2) + \lambda \mu = 0 \quad (128)$$

が得られる。この根  $p^2$  は二つあつて常に實根であり、且つ常に正の値を取る。之等に相當する  $p$  を  $p, p'$  と書いておく。

車輪が回轉せぬときにはジャイロ作用がなく、フラッターと横搖の各固有週期  $T_r, T_e$  は夫々

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu}}, \quad T_e = 2\pi \sqrt{\frac{I_e}{\lambda}} \quad (129)$$

で表される。この場合に  $\mu = h$  である。しかし  $\omega$  があるときにはフラッターと横搖に相當して

$$T = 2\pi/p, \quad T' = 2\pi/p' \quad (130)$$

の週期が出る。今、 $\frac{\mu}{I} = p_r^2, \frac{\lambda}{I_e} = p_e^2$  と書けば、(128) は

$$p^4 - p^2 \left( p_r^2 + p_e^2 + \frac{2I_0^2}{I_e I} \omega^2 \right) + p_r^2 p_e^2 = 0. \quad (128')$$

この式の解は  $p_e$  の近所と  $p_r$  の近所にある。それでその假定のもとに  $p_e$  の附近及び  $p_r$  の附近の  $p$  の解を出して見ると、夫々次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= p_e^2 + \frac{2I_0}{I_e I} \frac{p_e^2 \omega^2}{p_e^2 - p_r^2}, \\ p'^2 &= p_r^2 - \frac{2I_0}{I_e I} \frac{p_r^2 \omega^2}{p_e^2 - p_r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

但し計算の近似法以外に  $\mu \cong h$  といふ假定もある。

$p_e$  は一般に  $p_r$  よりも大である。従て聯成の振動数は大なる方は車の廻らぬときの横搖の振動数よりも一層大きく、小なる方はフラッターの振動数よりも一層小さくなるものである。

次に振幅の割合を (127') 等から出して見ると次の如き値を近似値として取るものである：

$$\left. \begin{aligned} n = \frac{\alpha_0}{\theta_0} &= -\frac{I}{I_0} \frac{p_e^2 - p_r^2}{\omega p_e}, \\ n' = \frac{\alpha'_0}{\theta'_0} &= 2 \frac{I_0}{I_e} \frac{\omega p_r}{p_e^2 - p_r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

即ち  $n$  と  $n'$  とは異なる符號を取ることがわかる。

固有振動のことは之でわかつたが、強制振動の場合には (127) の右邊に強制力の項が附加されるのである。而してその解から、強制力の週期が上述の聯成固有振動の何れかの週期に等しくなつたときに共振の起ることは明かである。

今、特別な場合  $p_e = p_r$  のときを考へると、(128') から近似的に

$$p^2 - p_r^2 = \pm \omega p_r \sqrt{\frac{2I_0^2}{I_e I}} \quad (133)$$

となり、二つの聯成振動の週期はもとのものより大なるものと小なるものができる。又、振幅の比は

$$n' = -n = \sqrt{\frac{2I}{I_e}} \quad (134)$$

で與へられる。



車體が進行しつつあるときの強制外力は車の回轉の週期で來るものと見るのが最も適當である。それで二つの $\omega$ の値即ち $\omega=p$ ,  $\omega=p'$ になつたときに共振の起る事が考へられる。即ち

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= p_c^2 + \frac{2I_0}{I_c I} \frac{p_r^2 \omega^2}{p_c^2 - p_r^2}, \\ \omega'^2 &= p_r^2 - \frac{2I_0}{I_c I} \frac{p_r^2 \omega^2}{p_c^2 - p_r^2} \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

が共振の起るときの回轉速度を與へる譯である。之がフラッターの起る極限速度であると稱しても差支ないと思ふ。 $\omega$ の場合は主として前車輪部の横揺を起し $\omega'$ の場合はフラッターを起す。嚴密な意味でいふと、この様に聯成したものが共振を起す場合を夫々 dandinement 及 shimmy と稱した方がよいのである。

普通の場合には $\omega$ は $\omega'$ よりも小さい。しかし時には $\omega'$ の方が小なることがある。その場合には(123)の式から正確に解くか又は斯様な條件を以て近似的に解く必要がある。尙、 $\omega$ と $\omega'$ との大き如何に拘らず、その方向の剛度に應じて何れかの一方が優勢に出ることは論をまたない。

左右の車輪の角 $\theta_1$ ,  $\theta_2$ が引張棒の性質によつて多少異なるときの研究は D. S. de Lavaud<sup>1)</sup>の著書に比較的著しく出てゐるがこゝには説明を省いておく。フラッターの問題は車體の構造に缺陷のある間は考へる必要があるが現今のよく注意された高級の自動車では限界速度など殆ど考へなくてもよい程になつた。

### 111. 自動車車輪の安定問題<sup>2)</sup>

前節の問題と殆ど同様のことであるが、車體が方向轉換をなす場合にフラッター及び前車輪部の横揺振動と關聯して茲に安定性の注意を要する。自動車は方向を變へるときのその角速度を $\Omega$ と置き、前後の車輪間の距離を $L$ 、車輪の半径を $R$ と書けば、方向轉換の爲のジャイロ作用は $2I_0\omega\Omega$ であり、又 $\Omega = \omega \frac{R}{L}\theta$ である。この

<sup>1)</sup> D. S. de Lavaud, "Les vitesses critiques fondamentales d'une voiture automobile," C.R. 184 (1927), 1636; D. S. de Lavaud, 著書, 第5輯 (Paris).

<sup>2)</sup> D. S. de Lavaud, "Stabilité des vibrations du train avant d'une voiture automobile," C.R. 185 (1927), 254-256.

様にして振動の式を書けば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{2I_0\omega}{I_c} \left( \frac{d\theta}{dt} + \frac{\omega R}{L} \right) + p_c^2\alpha &= 0, \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{I_0\omega}{I} \frac{d\alpha}{dt} + p_r^2\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

となる。但し

$$p_c^2 = \frac{ql^2 + r'l'^2}{2I_c} = \frac{\lambda}{I_c}, \quad p_r^2 = \frac{1}{I} (h + k\omega^2) = \frac{\mu}{I}$$

である。

上式に $\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$ ,  $\theta = \beta_0 e^{i\omega t}$ と置いて代入し之を解けば次の如くなる:

$$(p^2 - p_c^2)(p^2 - p_r^2) - \frac{2I_0^2\omega^2}{I_c I} p^2 = -i \frac{2I_0^2\omega^3}{I_c I} p \frac{R}{L}, \quad (137)$$

但し $p_c^2 = \lambda/I_c$ ,  $p_r^2 = \mu/I$ である。この附加されたジャイロ偶力 $2I_0\omega^2 \frac{R}{L}\theta$ を考へぬときの $p$ の値を $p_0$ ,  $p_0'$ とすれば

$$(p^2 - p_0^2)(p^2 - p_0'^2) = -i \frac{2I_0^2\omega^3}{I_c I} p \frac{R}{L} \quad (138)$$

が得られる。今 $p_0 > p_0'$ とする。(138)の一つの近似的解は

$$p = p_0 \left( 1 - i \frac{2I_0^2 R}{I_c I L} \frac{\omega^3}{p_0(p_0^2 - p_0'^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (139)$$

となる。問題を簡単にする爲に次の正の實數

$$f = \frac{I_0^2 R}{I_c I L} \frac{\omega^3}{p_0^2 - p_0'^2} \quad (140)$$

を用ひて(139)を展開すれば

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \frac{f^2}{p_0} - \frac{5f^4}{8p_0^3} + \dots - i \left( f - \frac{1}{2} \frac{f^3}{p_0^2} + \frac{7f^5}{8p_0^4} - \dots \right). \quad (141)$$

これによつて振動週期が少し短くなる。今

$$p = p_0 - if$$

の如き極く近似的の解を作れば振動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 e^{i p_0 t} = \alpha_0 e^{i(p_0 - i\gamma)t} = \alpha_0 e^{\gamma t} e^{i p_0 t}, \\ \theta &= \theta_0 e^{i p_0 t} = \theta_0 e^{i(p_0 - i\gamma)t} = \theta_0 e^{\gamma t} e^{i p_0 t}. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

之を見ると  $e^{\gamma t}$  があるから、この高い振動数の方の振動は本質として不安定であることがわかる。

次に (138) の別の解を近似的に出すと

$$p' = p_0' \left( 1 + i \frac{2I_0^2 R}{I_c I L} \frac{\omega^3}{p_0'(p_0'^2 - p_0'^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (143)$$

となる。今

$$f = \frac{I_0^2 R}{I_c I L} \frac{\omega^3}{p_0'^2 - p_0'^2} \quad (144)$$

と書き、(143) を展開すれば

$$p' = p_0' + \frac{1}{2} \frac{f^2}{p_0'} - \frac{5}{8} \frac{f^4}{p_0'^3} + \dots + i \left( f - \frac{1}{2} \frac{f^3}{p_0'^2} + \frac{7}{8} \frac{f^5}{p_0'^4} + \dots \right). \quad (145)$$

再び

$$p = p_0' + i f$$

として解を作れば

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 e^{i p_0' t} = \alpha_0 e^{i(p_0' + i f)t} = \alpha_0 e^{-f t} e^{i p_0' t}, \\ \theta &= \theta_0 e^{i p_0' t} = \theta_0 e^{i(p_0' + i f)t} = \theta_0 e^{-f t} e^{i p_0' t}. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

これを見ると  $e^{-f t}$  があるので、振動数の低い方の振動が安定であることがわかる。