

第五章 機械の釣合問題

90. 機関及び回轉機械の振動とその不衡力

機械の振動に種々の種類があり、機械そのものに振動の原因を有するものと他に原因があつてその結果として振動するものがある。機械それ自身に振動の原因がある場合にはその原因になるものさへ取去つてしまへば、多くの場合振動現象をいくらかでも減少させることができる。しかし時としてはその原因を保持しながら容易に取去ることのできぬものもないではない。機械それ自身に振動の原因を有してゐる著しい例は往復機関、タービン、電動機などに不衡力 (unbalance) がある場合であつて、之等では適當の方法を用ひさへすれば振動の原因を取除き得るものである。振動を軽減する爲にその振動物を他の振動物と聯成せしめ、彈性的及び摩擦的に振動勢力を適當に散逸せしめて目的の幾分かを達することもできるが、しかしそれは普通の場合に機宜を得た處置とは言へないのである。¹⁾

蒸氣機関の不衡力の問題は大分昔から論じられてゐるけれども、今でもその充分な解決が下されたとは思はれない。氣筒數が多ければ多い程釣合状態を保ち易いことは明かであるけれども、それは氣筒の大きさ、壓力の等しいものがならんでゐる場合であつて、蒸氣機関の如く次々の氣筒の大きさが等しくないときには問題が非常に複雑になつて来るものである。内燃機関ではすべての氣筒の大きさ及び壓力の状態が大體同じになつてゐる爲、壓力が非常に高いのにも拘らず釣合が理論通り相當によくやれるものである。之等の往復機関では氣筒一つだけを取つた場合にはその不衡力が非常に大きなものである。機關車の機関のやうに不衡力を平衡させる爲の質量を適當に配置して不衡力をできるだけ減殺することもできぬ譯ではないけれども、機關それ自身に不衡力がないやうにするにはむしろ氣筒數を適宜の數まで増加し、そのクランク角の分布を適當に配置するに越した事はない。近來の航空

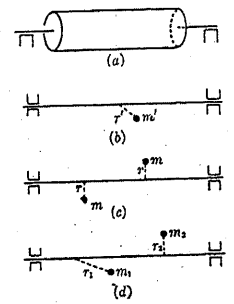
¹⁾ 末廣恭二、周期的振動を軽減する新裝置、機械學會誌、19 (1916)、第 42 號。

機関のやうに氣筒の配置を思ひ切つて變化させるときは著しい釣合の状態が保たれるものである。しかしそれまででなくても普通の重油機関の如く同じ大きさの氣筒を適當の數だけ竝列し、そのクランク角に或る分布を與へればかなりの釣合が得られるものである。

次にタービン機関や電動機、發電機、車輛の如き回轉機械ではそれ自身には不衡力がないやうに見えるけれども、一般にその速度が非常に速かである爲に、僅かの遠心力的不衡力でも著しく振動するものである。殊に回轉體の僅かの不衡力は極く輕微な幾何學的の非對稱や質量分布の異同などが主要原因となる爲に、その製作上で調整することが殆ど不可能であるといつてもよい位である。従て機械が出来上つてから嚴密な試験を行ひ、適當な補正質量などを加へて釣合 (balancing) を圖るより他に仕方がないやうに思ふ。このやうな考方に於て回轉機械の釣合問題は以前からよく注意されて來たやうであるが、實際の機械について完全な釣合試験が行はれ出したのは比較的近年の事である。

91. 回轉機械の不衡力に就て

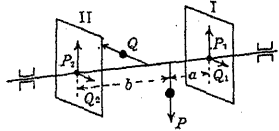
不釣合にある回轉機械の状態を説明するために二つの事柄を考へることができ。その一つは右圖の (b) にあるやうに回轉軸に對して明かに不釣合部 m' があつた場合である。第二の場合は (c) に示すやうに不釣合部 m が回轉軸を含む面内にあつて軸から等距離にあるために、軸を極端に短縮させた場合を考へれば、釣合へる如く見えるけれども、 m, m が軸の方向に於て同じ断面中にならぬ爲に、回轉中に軸に偶力を與へ、従て振動を起す原因となるものである。(b) の場合と (c) の場合とを組合せて見ると (d) のやうに軸に含む二つの面の中に各 m が存在する不釣合の部分が出る譯であつて、之が不釣合の問題の一般の場合である。但し何れの場合にも重力の影響は勿論見逃してある。(b) の場合が單に質量分布によつて、かゝる回轉子の軸を (a) の如く同平面上にある二つの水平の臺の上に載せて靜かに回轉させて見ると、不平衡部が軸の眞下へ來る譯で



第 50 圖

ある。この検査は全く静力学的に行ふことができるから、斯る方法で見出される不釣合の部分があるときに之を static unbalance といふ。(c) の場合には上述の検査を行つても不釣合部を見出すことができぬものであつて、適当な回転速度を以て回転させるときにのみ偶力を受けて振動を起すものであるから之を dynamic unbalance と名づける。static unbalance と dynamic unbalance とに関する事實は大分以前から認められてをつたものであつて、Rankine や Dalby¹⁾ の書物などにも見えてゐる。近來は種々の場合を綜合統一できるまでに達してをるのである。²⁾ balancing の機械も種々のものが考案されるに到つた。³⁾

回転せる機械を釣合せるには Brauchitsch⁴⁾ が研究した如く次のやうな考慮



第 51 圖

のもとに行へばよい譯である。即ち左圖に於て P と Q が不釣合にある力であるとすれば、二つの垂直断面 I, II に夫々適當な力を配置する事によつて釣合せることができるのである。回転體の場合に P, Q は勿論遠心力であるが、先づ P を釣合せる

爲には I, II の面に P₁, P₂ を次の如き割合となるやうに置けばよい:

$$\left. \begin{aligned} P_1 + P_2 &= P, \\ P_1 a &= P_2 b. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

斯様にして P による不衡力と不衡偶力とを除くことができる。同様にして Q₁, Q₂ を考へれば Q による不衡力と不衡偶力とを取去ることができる。然るに P₁ と Q₁ と組合せて一つの力とすることができ、P₂ と Q₂ とでも同様に一つの力に組合せることができるから、結局 I, II の各断面に各、適當な質量を適當な圆弧の所に置

1) W. E. Dalby, *The Balancing of Engines*, 3rd ed. (London, 1924).

2) W. K. Wilson, *The Balancing of Oil Engines* (London, 1929).

3) A. L. Kimball, *Vibration Prevention in Engineering* (New York, 1932).

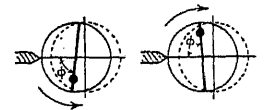
4) C. N. Fletcher, *The Balancing of Machinery* (London, 1931).

5) E. v. Brauchitsch, "Zur Theorie und experimentellen Prüfung des Auswuchtens," *ZAMM*, 3 (1923), 81-92.

けば、回転機械の釣合が保たれるのである。この原則は一見簡単なやうであるけれども實際にはあまり容易くは行はれないものである。従てそのやり方として種々の方法が工夫考案されて來たのである。

92. 回転機械の釣合試験機(其一) ("high spot"の方法を用ひる Balancing Machine)

不釣合の状態にある回転機械を釣合せる方法に種々あるが、その中で最も簡單であり、同時に多少不正確なやり方に "high spot" の方法と稱するものがある。この方法は次節に述べる記象の上から不衡力を見出す方法と大して變りがない。單にその取扱ひ方が粗雑なだけである。種々の豫備的實驗裝置の事は省略して不衡力の見出し方の大體を記して見ようと思ふ。それは回転體の軸承がばね臺(spring bed)の上に支持され、そのばね臺は一つの方向にのみ振動できるやうになつてゐる。而してその振動の自由のある方向から鉛筆又は白墨を出しておいて、最大振幅近所で回転子に接觸するやうにすれば、回転子(rotor)の最大振幅になる位相の所へ鉛筆又は白墨が記されることになる。しかし回転體は振動をなるべく大きくして見る爲に共振を生ずる近所で廻すべきものであり、且つ一般に強制振動に於ける強制力の位相と振動の極大振幅の位相とは回転數によつて夫々異なつてゐるから、上述の如く記された位相は不衡力のある位相でないことが明かである。そこで回転體を逆向きに回転せしめて同様に鉛筆や白墨のしるしをつけ、この點と初めに記した點との丁度中央の點を取れば、この中央點が不衡力と回転體の中心を結ぶ線上にあることがわかる。右圖に於て φ は最大振幅の不衡力からの位相の遅れを示してゐるが、この圖から上述の如くして不衡力のある位相を出し得ることが了解されるであらう。



第 52 圖

以上のやうにして不衡力の位相がわかれば、その反對の位相の所へ種々の釣合重量(balancing weight)をあてはめて見て、遂に釣合に到るまで試みればよい。

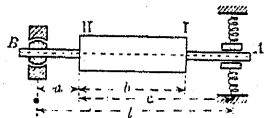
本節では static balance, dynamic balance の區別をつけなかつた。上述の不衡力は恰も static balance の場合のやうに見えるかも知れぬけれども、實際の場合

には適當の考慮のもとに一般的の釣合試験に之を用ひ得るのである。この委しい説明と“high spot”の方法の缺點については末廣博士¹⁾の講義に出てゐる。

“high spot”の方法は大分以前から多くの人に考へられて來たやうに見える Norton の釣合試験機, Schuchardt 及 Schutte の節動輪を釣合せる機械²⁾, Sylvester³⁾ が交流發電機に用ひた特別の方法, Schein⁴⁾ が Sperry のジャイロ安定機の釣合に用ひた普通の方法などがある。近頃 Weaver⁵⁾ などが新に同様な事をやり直してゐる。又“high spot”と多少違つてはゐるけれども考方に於ては全く同一である King-Salter⁶⁾の方法がある。彼は回轉子と共に回轉する環の中の所々に半径の方向に幾何學的に振動するピンを附加し、このピンの内側の端が環と同じ中心を有する固定圓板の周圍に接するやうにしたのである。環が回轉するとき回轉子に不釣合部があれば、一定の方向のピンが固定圓板によつて外側へ押出され、從て不衡力の位相が決定されるのである。

93. 回轉子の釣合試験機(其二) (振動記象による方法)

この方法は前の“high spot”の方法に多少似てゐる所もあるが、それよりも遙に正確なものである。“high spot”の場合でも同様である所の試験装置の大體を説明して見よう。之等の方法は回轉子を態と振動させて見て不釣合の箇所を見出すのであるから、どうしても次のやうな機構を必要とする。左圖に於て I, II なる二つの面に各、適當な釣合の質量を附加すればよい事から、先づ回轉軸の B なる點を傾斜運動のみを許すやうに支持し、A なる點は自由にして一方向即ちばねの方向にのみ振動でき



第 53 圖

- 1) 末廣博士講義の一部, “機械の振動に就て,” 機械學會誌, 35 (1932), 718-730.
- 2) “Flywheel Balancing Machine,” *Engineering*, 97 (1914), 349.
- 3) C. Sylvester, “Balancing and Alignment of the Alternator Generator,” *Electrical Review*, 85 (1919), 260-261.
- 4) A. Schein, “Balancing High-Speed Rotors,” *American Machinist*, 55 (1921), 121-125.
- 5) S. H. Weaver, *G. E. Review* (1928), 542-545.
- 6) J. J. King-Salter, “The Balancing of Rotors and Determining the Position and Amount of the Balancing Weights,” *TINA*, 62 (1920), 156-174.

るやうにするのである。實際にはばねといつても支持臺自身が左右に振動するやうなものでよいし、支持端はこの臺を更に固定すればよい譯である。そこで共振振動の起るやうな回轉數にしておいて振動の記象を取りつゝ、I なる面の何れかの點に試験的の質量を加へる。而してその質量と附加點を種々變更して遂に振幅が極く小さくなる迄繰返すのである。次に A なる點を支持し B をばねに連結して前の如く試験して、II なる断面の適當な點に釣合質量を附加するのである。尙モートルの影響を除く爲に或る適當な回轉數の所でモートルを切離し、後は自身の慣性によつて回轉させるのが普通である。

斯様にして試験を行へば、回轉子が釣合ふかのやうに見えるかも知れぬ。しかし之は I, II なる面の一方が A, B なる點の一方に正確に一致してゐる場合であつて、I, II の一方が A, B の一方から離れてをればを程釣合からの違ひが生ずるものである。何となれば、B 點を支持する場合に、I なる面だけで釣合をはかつたのは B なる面中に不衡力が残つてをることを意味するのであつて、次の實驗でこの不衡力を除く爲に直ちに II なる面に質量を置いて釣合はしめることは初め I の面中に置いた釣合質量の状態を再び亂すことになるからである。斯る困難を除く爲に、II なる面だけでなく、I, II に夫々適當な質量を加へて II だけに質量を置いたのと同効果となし、而もそれが初めの B を支持した實驗に影響を與へぬやうに工夫することが必要である。その爲には B 點に置くべき釣合の力を Q' とし、II に置いて適當したと思はれた力を G と書けば、

$$Gc = Q'l \quad (2)$$

となるべきである。しかし G の代りに I, II へそれぞれ G_1, G_2 を置き、且つ B を支持せる場合に影響を與へぬやうにするには

$$G_2 - G_1 = Q', \quad (3)$$

$$G_1(b+a) = G_2a \quad (4)$$

の如くすればよい。(2), (3) を (4) に入れて次の關係が出る:

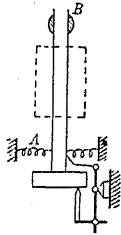
$$G_1 = Q'a/b = Gac/bl. \quad (5)$$

又 (3) から

$$G_2 = Q' + G_1 = Ged/bl, \quad (6)$$

但し $d = a + b$. このやうにして G を G_1, G_2 で置き換へれば完全な釣合が出来上る譯である。

さて上の説明では單に trial and error によつて質量を適當に置く方法を述



第 54 圖

べたのであるが、實際には非常な時間と手数がかゝる。従て之に何か記録法を利用して速かに不衡力のある面を決定する事が望ましい。此目的に向つて極めて適當な方法を考案したのが Lawaczeck¹⁾ である。Lawaczeck は本節の振動的釣合試験法の原則も研究したのである。Lawaczeck と同様な方向への研究を發展せしめた人に Heidebroek²⁾, Heymann³⁾, Lehr⁴⁾ がある。Lawaczeck の方法によつて記録する器械の方針だけは左圖に示しておいた。回轉機械

の軸の變位によつて針を押しつける結果、軸の端に接する筆によつて軸の端の面に曲線圖が描かれる。回轉子を逆の向きに尙一度回轉せしめて同様な曲線圖を作り、之等の二曲線圖から不衡力のある面が決定されるのである。Lawaczeck の極く初めの器械及び他の人によつて多少改良されたものなどは稍型が違つてゐるけれども説明を省いておく。

次に同じく振動の記録法から釣合を考へる方法に Wheeler 及 Southwell⁵⁾ の考へたものがある、即ち主として stroboscopic の方法を利用して振動を見るやり方であるが、このまゝの方法は一二の人に應用されたのみで、其後餘り注意されぬやうである。

1) Fr. Lawaczeck, "Das Auswuchten schnell umlaufender Massen," *ZS. f. gesamte Turbinenwesen*, 8 (1911), 433-437, 454-457, 469-473, 481-485, 500-504, 516-520.

2) E. Heidebroek, "Das Auswuchten umlaufender Maschinenteile," *ZVDI*, 60 (1916), 11-15, 32-35.

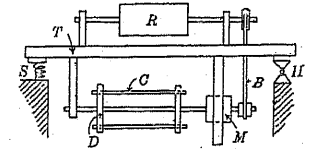
3) H. Heymann, "Über dynamische Auswuchtung von rasch umlaufenden Maschinenteile," *Electrotechnische ZS.*, 40 (1919), 234-237, 263-265.

4) E. Lehr, "Der heutige Stand der Auswuchttechnik," *Maschinenbau*, 16 (1922), 62.

5) H. D. Wheeler & R. V. Southwell, "The Balancing of High-speed Machinery," *Engineering*, 99 (1915), 64-66.

94. 回轉子の釣合試験機(其三)(補正法による方法)

この方法は主として Akimoff¹⁾ によつて創始されたものであつて、回轉子と補正装置の乗つてゐる臺の一端が支持され他端がばねに聯結され支持點の周圍に振動できるやうになつてゐるものである。尤もこの試験機は餘り大きくない回轉子の試験に適してゐる。その極く初めに考案された組立は右圖の如きものであつて、T がテーブル、H が支持點、S がばね、R が回轉子、M がモートル、D 及 C が補正装置である。static balance を終へてから R をテーブル系統と共振をなす速さになるやうにモートル M によつて回轉させ、二つの圓板を貫いてゐる送り棒 C を適當に動かして、不釣合の爲に生ずる振動が無くなるまで調整する。勿論 C は何本もあるから dynamic balance を充分に行ふことができるのである。



第 55 圖

その後、Akimoff は振動臺の骨組それ自身が回轉子の軸に平行な別の軸の周圍にも回轉振動ができるやうに考案し static balance をもたためすやうにした。即ちこの試験をやる場合には dynamic balance の方のばねを固定しておいて、回轉子の速度を上述の自由度の方の振動と共振をなすやうにすればよい譯である。この釣合試験が終つてから初めて dynamic balance に取りかゝるのである。この兩方の釣合試験をやる装置は Vibration Speciality Company の機械に應用されてゐる。尙、之等の事柄や類似の釣合試験機に就ては Hechler²⁾ や Söderberg³⁾ の論文がある。Söderberg のは二箇所のばねの中間に移動する支持點があつて、之によつて static と dynamic の兩釣合を同時に試みる方法である。

95. 回轉子の釣合試験機(其四)(末廣博士⁴⁾其他の諸方法)

1) N. W. Akimoff, "Dynamic Balance," *Journ. Amer. Soc. Mech. Eng.*, 38 (1916), 607-618.

2) F. G. Hechler, "Balancing Machines," *Journ. Amer. Soc. Nav. Eng.*, 31 (1919), 405-419.

3) C. R. Soderberg, "Recent Developments in Balancing Machines," *Engineering*, 116 (1923), 159-161.

4) 末廣恭二, "On the Balancing of Turbine Rotors," *機械學會誌*, 25 (1922), 第 75 號, 1-10; 末廣恭二, 久野五十男, "新らしきバランシング・マシーン," *造船協會會報*, 36 (1925), 17-22.

外國で一般に採用されてゐる釣合試験機には種々不完全な點があつた。前に既に述べた“high spot”の方法や振動記録から出す方法では、位相を確める爲に逆向きの回轉をやらせたり、重量の大きさは目見當で定めるといふ不確實性、其他部分的に多くの缺點があつた。共振振動の所で逆向きに回轉させる爲に僅かの回轉數の相違で位相が著しく變るのは最も困ることである。又補正重量の方法でもやはり目見當といふ様な不都合が含まれてゐる。之等の缺點を殆ど含まず、而も諸外國の釣合試験機の發展期と殆ど同時期に末廣博士は久野技師と共に極めて巧妙な試験法を考案し、且つ實際に應用されたのである。末廣博士の方法は逆回轉の方法を用ひず、又 trial and error のやうな手数を要せず、而も速かに且つ同時に static と dynamic の不衡力を見出して釣合せるといふ特徴がある。この機械で軸の兩端を交互に自由にすること、従て振動型を記録すること位は Lawaczeck のものに似てゐるけれども、それ以外の遙かに大切で而も厄介な事柄はすべて獨特の設計によつて容易に取扱ひ得るやうになつてゐる。

車軸の支持法は前々節で述べた方法と同じく、一端を支持し他端を自由にして振動させるのである。この場合回轉數を自由振動週期に相當するものよりも遙かに高くしておく、振動の振幅が回轉數に餘り關係がなく略一定となるものである。ばねの方向の角變位 θ についての振動の方程式を作ると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + p^2\theta = C\omega^2 \cos \omega t \quad (7)$$

の如き形をなしてゐる。ここに k は摩擦抵抗の係數、 $p/2\pi$ は自由振動數、 $\omega/2\pi$ は回轉數、 C は回轉子の大き及び不衡力に關係する値である。この式の解は

$$\theta = \frac{C\omega^2}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2}} \quad (8)$$

となり、 $\omega \gg p$ のとき

$$\theta \sim C \quad (9)$$

となる。従て斯る高い回轉數では振幅が回轉數に關係なく略一定となるのである。この理由から或る速度で回轉子とモートルとを切り離し、其後の振動を計測すれば、

モートルの影響から完全に逃れることができる。又共振から離れてゐる爲に角位相の不確實さから免れることもできる譯である。

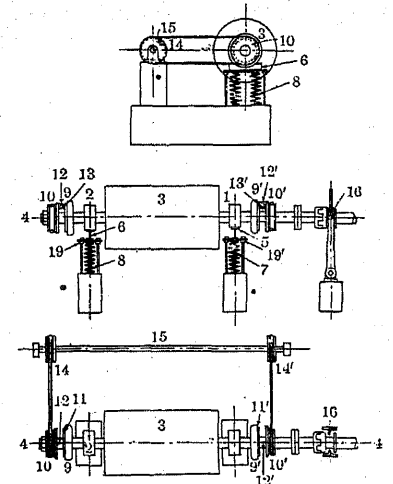
下圖に示すやうに車軸の兩端に (10) 及 (10') なる間車 (idle wheel) を取付けておき、Lawaczeck の如く車軸の一點 (1) を支持して振動させるときは (10) に少許の不衡質量を取付ける。そしてこの idle wheel を後に述べる方法で車軸と僅かに異なる速度で回轉させるときは、回轉子に於ける不衡力の位相と (10) の所の不衡質量の位置の關係によつて、この振動組織に加へられる外力が増減し、従て振動に増減が起る。この振動を別に回轉筒などに自記せしめれば振幅の最大と最小とができる。之等の場合は附加質量が丁度不衡力と車軸を結ぶ一つの直徑上に來る所である。このやうにして不衡力の位相が見出される。試験は原動機から切離してやる。不衡力の大きさを見るには附加質量が不衡力を打消すやうな角位置で間車を固着し、且つ回轉中に附加質量を増減できるやうな方法で前と同じ試験を繰返し、振幅が最小になるやうな所を出せばよいのである。

同様にして (2) を固定し (1) を自由にした場合の試験を行ひ、釣合試験が進行するのである。尙ビボット軸 (pivoting point) の位置による修正も適當な方法で行ふことができる。

圖に示す構造に就て多少委しい説明を試みて見る。(1) を支持するには (19) にあるボルトを締め、(8) なるばねの所にある (19) を緩める。而して振動を記録するには (6) の所の運動を適當に擴大して回轉筒に描けば宜しい。

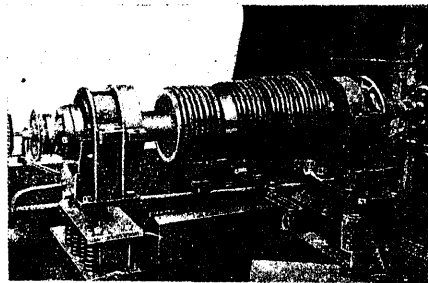
次に間車の (10') を車軸に固着させ、

(10) の方は自由にして置いて適當なる回轉數を與へる。しかしもつと具體的には (10) それ自身を傘車 (bevel wheels) や電磁石を用ひて勝手な回轉數を與へるので



第 56 圖

ある。車軸と間車との相対的位相を回轉中に直ちに爲る爲に末廣式扭計測器と同原理による装置が取付けてある。又位相を確めてから不衡力の大きさを定める爲に次の設備がしてある。間車の一組、例へば(10)は實際は三枚の圓板から成立ち、一つは軸に固定、他の二つは逆向きに等速度で回轉するやうにしてある。この二つの圓板中で不衡力のある半径上に釣合質量を各、附しておいて回轉させると、釣合質量の効果的位相だけは常に不衡力の方向にあるけれども、釣合質量はその大きさの二倍から零までの間變化するのである。こゝに於て前と同じ考方によつて直ちに適當なる釣合質量が見出せるのである。



第 57 圖

尙、上記の釣合試験機を實際に取付けた状態を左圖に示しておいた。久野技師¹⁾は其後末廣博士と同様に共振以上の速度で行ふ釣合試験を光學的に進める方法を考案した。

末廣博士や其他の既述の方法以外に種々の特別な試験機がある。根本的には既述の諸法と殆ど同じであるとも言はれるが、しかし、不衡力の見方や補正の方法などに於て少しづつ異なつてゐる。それで其等の名前だけでも列挙して見ると、Krupp-Losenhausen の static-dynamic の釣合試験機、同じく universal 試験機、Olsen-Carwen の static-dynamic、Gisholt の static-dynamic、Hofmann-Kunze の universal; Olsen-Lundgren の電氣スパーク式などがそれであつて、Krupp-Losenhausen の如きは電磁石に種々の強さと位相差を與へて補正力を變化させ、Olsen-Lundgren の或る種の如きは不衡力の爲の振動を電氣スパークで見て、不衡力のある面を定めるのである。

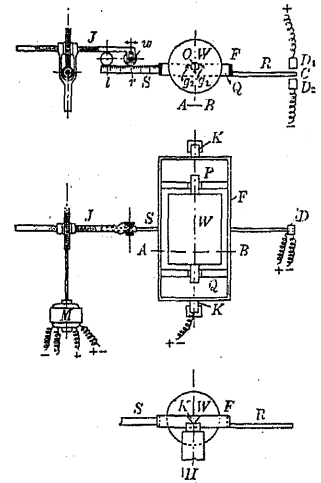
96. 靜釣合の試験機に就て

扇風機用モートルの如く、比較的小型で而もその軸の方向の長さが割合に短いものでは、一々一般的の釣合法を行つてゐたのでは到底數多くの試験を行ふことが

¹⁾ 久野五十男, "久野式光學的釣合試験機," 機械 (1932 十月), 1-5.

困難であるのみならず、dynamic balance をなす事は餘計な手數である。斯る目的に對してその static balance のみを取つて簡單な試験を行へればその方が望ましい次第である。末廣博士¹⁾の考案されたものは下圖に示す如く、その主要な部分は何轉子 W を載せる振搖棒 F である。この棒に二本の直角な梁材があり、これに V 型の切込みをつけて回轉子の軸を載せるのである。

又、棒の両端には支へ刃 (knife edges) K があり、之が臺 H の上に乗つてゐる。棒の一方には細い棒 R が突き出で、他方には物差の刻んである棒 S が出てゐる。 R は D_1, D_2 なる電極間に自由に置かれてあり、その各、 $\sim R$ が接する毎にモートル M は逆向きに回轉できるやうになつてゐる。この回轉により重量 w が右左に移動されるから、回轉子 W の重心の位置によつて R に傾斜が起り、從て w が左右に移動する譯である。今、 W を種々の角位置に置いて w が取る左右兩極端の位置の距離を l とすれば、其間に回轉子の重心は g_1g_2 の水平距離 L だけ動く譯であるから



第 58 圖

$$wl = WL$$

なる關係が得られる。それで不衡力として $WL/2$ だけ調整すればよい。尙、不衡力の位相は上述の關係が生ずる角位置の直径上にあることが明かである。

static balance の方法には末廣博士のもの以外に昔から非常に澤山の種類がある。即ち Martin²⁾, Avery, Hofmann-Kunze, 洋傘型, Gisholt, Krupp-Losenhausen, Olsen-Lundgren, Avery の航空プロペラ用等がそれである。之等は大概不衡力を天秤式によつて釣合しめるか、或は支へ刃 (knife edge) で支へられてゐるときに不衡力によつて自分自身で釣合の位置まで回轉する事を利用せるものであつて、

¹⁾ 末廣泰二, "A Machine for Balancing Small Rotors," 帝國學士院紀事, 2 (1926), 492-493.

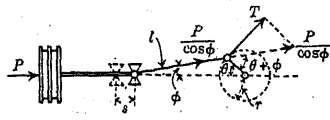
²⁾ W. H. Martin, "The Balancing of Rotors," Engineering, 110 (1920), 864-865.

原則としては何れも簡単である。支へ方にも洋傘型の如く圓板を水平に置いてその中央部を支へるやうな特別のものもある。

以上の外に特殊目的の static balancing machine としてはタイヤ、はすみ車などに用ひる種々の静釣合試験機が設計されてゐる。

97. 往復機関の不衡力¹⁾

昔からある往復蒸気機関や近來發達せる瓦斯機関でははすみ車其他によつてクランク軸は均一回轉速度を以て回轉するやうになつてゐるから、氣筒の中の壓力の狀態によつて運動狀態が著しく變化することは割合に少いのであるけれども、



第 59 圖

ピストンとクランク桿との間に連桿があり、その爲にピストン桿の往復部が特別の運動をなす。左圖に於てクロスヘッド (crosshead) が最左端の位置から任意の位置に來た所までの距離を s とし連桿の長を l 、クランク半径を r とすれば、

$$s = r(1 - \cos \theta) + l(1 - \cos \phi). \quad (10)$$

又 $l \sin \phi = r \sin \theta$ であり、且つ $r/l = \lambda$ と書けば、

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{\lambda^4}{8} \sin^4 \theta - \dots$$

従て

$$s = r(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} r \lambda \sin^2 \theta + \frac{1}{8} r \lambda^3 \sin^4 \theta + \dots \quad (11)$$

s なる變位に相當する速度は s を t に就て微分すればよいから、

$$\frac{ds}{dt} = r\omega \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\theta + \frac{1}{2} \lambda^3 \sin^3 \theta \cos \theta + \dots \right)$$

となる。 ω はクランクの角速度である。 s なる變位に相當する加速度は之を更に t につき微分して

$$\frac{d^2s}{dt^2} = r\omega^2 \left\{ \cos \theta + \lambda \cos 2\theta + \frac{1}{2} \lambda^3 \left(\frac{\sin^2 2\theta}{2} + \sin^2 \theta \cos 2\theta \right) + \dots \right\} \quad (12)$$

¹⁾ W. E. Dalby, *The Balancing of Engines*, 3rd ed. (London, 1924).

²⁾ W. K. Wilson, *The Balancing of Oil Engines* (London, 1929).

となる。このやうにクロスヘッド即ちピストン桿の運動の加速度はクランク角 θ に就て種々の次數のものから成立つてゐる。しかし r/l は一般に 1 よりも小さく、場合によつて非常に小なるものであるから、大抵の場合に $\cos \theta$ 及 $\cos 2\theta$ の兩方の項だけ位を取つておけば充分である。 l が r に比し非常に長いときには $\cos \theta$ の項のみを取つておいてもよい位である。この $\cos \theta$ についてのみ釣合せることを第一次の釣合 (primary balancing) といひ、 $\cos 2\theta$ の項について釣合せることを第二次の釣合 (secondary balancing) と名づける。 l が r に比してそれ程長くないときには往復部の不衡力の水平分力がある。又、クランクの如き回轉部には上下及び水平の分力がある。之等はその大きが何れも小さい。

ピストンに働く力を P とすれば之がクランク・ピンに働くピストン方向の力と見てもよい、従てクランクに直角に働く力は次の如くなる：

$$T = \frac{P}{\cos \phi} \sin(\theta + \phi). \quad (13)$$

(12) の兩邊に往復部の質量 m を乗じて慣性力 P を作り、之を上式に入れ、且つ $\sin \phi = (r/l) \sin \theta$ と書けば、 T なる圓周的の力の一つのクランクに就て

$$T \approx \frac{m\omega^2 r}{2} \left(\sin 2\theta - \frac{1}{2} \lambda \sin \theta \pm \frac{3}{2} \lambda \sin 3\theta \right) \quad (14)$$

となる。氣筒が數個あるときはその位相を考へて上の如き型の式を組合せばよい。

第一次の釣合問題 往復部の不衡力そのものを考へ、先づ最初に往復機関の連桿が非常に長い場合を想像して見る。しかるときは式 (12) の右邊の第一項によつて往復部にある質量のための慣性力はその質量がクランク・ピンに置かれてゐる場合の求心力の往復部線上への分力に等しいことが容易にわかる。従て往復部の不衡力を考へるには、クランク・ピンに置かれた質量による不衡力の問題を考へて、その往復線上の分力を取りさへすればよいことがわかる。氣筒が幾つもある場合のピストン桿の往復方向の不衡力とは、各ピストンの部分の不衡力の代數的和を表すものであるし、又不衡偶力とは上述の各不衡力に車軸線の方向の腕の長さを乗じたものの代數的和を以て示すのが普通である。それ故にたとひクランクの

不衡力を考へても結局は往復部の不衡力及びその偶力へ持つて行くのが普通の目的である。このやうに假りにクランクピン上にある質量が力の釣合及び偶力の釣合を保つてゐるかどうかを最も簡単に決定する方法は、Taylor¹⁾ が早く應用し、Inglis²⁾ が發展させたやうに、静力学に用ひられてゐる力の多角形を作つて見ることである。例へば等距離にある三気筒の場合に各クランクが120°の位相差を持ち、且つ各_iの質量が等しいときには力の多角形は正三角形をなして閉ぢるから力は釣合つてゐることがわかる。次に偶力の方も同様に多角形を作つて見ればよいか、この場合に中央の連桿の周囲の偶力の多角形を作つて見ると、その多角形が閉ぢることがわかる。即ち気筒間の距離を d 、各クランクピンに置いた質量を m 、クランク半径を r 、クランクの回轉速度を ω と書けば、多角形の開きである所の不衡偶力は $\sqrt{3}m\omega^2 r^2 d$ となることがわかる。クランクに置いた質量の釣合問題が定まるときは、之をそのまま往復部の釣合問題に持つて行くことができる。往復部の不衡力を出す爲に、クランク部の零の力の分力を作つてもやはり零となる。しかし不衡偶力の方は $\sqrt{3}m\omega^2 r^2 d$ なるクランクの偶力にその偶力をなす所のベクトルと往復部の直線との間の角の正弦を乗じたものでよい事がわかる。之がわかれば其後の釣合法はそれ程厄介ではない。又一般にクランクの数が n 個あるとき、釣合問題の變數となる自由度は $3(n-1)$ だけである。何となれば各クランクに就て質量、其角度 θ' 及びクランク間の距離 d' で三個の自由度がある。一つの基準のクランクに對してすべてを考へると全部の自由度は $3(n-1)$ となる。しかし實際には力の多角形を閉ぢさせる爲にその向きと大きさとで二個の自由度がなくなり、偶力の多角形でも二個の自由度がなくなる。従て全く自由な data として取つてよい部分は $3(n-1)-4=3n-7$ となるのである。この割合に變數を作つておいて各クランクの所へ假定して置くべき質量や位相を分析的に決定することができるのである。

1) D. W. Taylor, "The Cause of the Vibrations of Screw Steamers," *Journ. Amer. Soc. Nav. Eng.*, 3 (1891), 12-33.

2) C. E. Inglis, "General Propositions and Diagrams relating to the Balancing of the Four-Cylinder Marine Engine," *TINA*, 53 (1911), Part 1, 248-264.

第二次の釣合問題 $\lambda(=r/l)$ がそれ程小さくないときには、第二次的の釣合問題が必要となる。式(12)の右邊の第二項に相當する慣性力は $\frac{m\omega^2 r^2}{l} \cos 2\theta$ であつて、クロスヘッドの週期の1/2の週期を持つ高次の運動に相當してゐる。故に一つのクランクに就ての不衡力の振幅は第一次の場合には $m\omega^2 r$ であつたのに、この第二次の場合に就ては $\frac{m\omega^2 r^2}{l}$ であり、又このクランクの回轉する面が或る基準面から d なる距離にあるとすれば、その基準面に關しての不衡偶力の振幅は $\frac{m\omega^2 r^2}{l} d$ となる筈である。気筒が數多くあるときは、之等を前の如く組合せて行けばよい。力の多角形を用ひるとすれば、この場合でも力の多角形と偶力の多角形とを作つて見て、開きが残れば、これが釣合を要する部分を與へる譯である。尙、この第二次の釣合の問題でも二つの多角形が閉ぢた上で第一次の如く $3(n-1)$ の如き自由度の變數によつてクランクに假定する質量や位相の配置を定めることができる。しかしこれは勿論第一次的のものが亂されぬ範圍内に於て行ふべきものである。

不衡力の一般的研究 實際のクランクに bob weights をつけて主として第一次の不衡力を取除くことを最初に試みた人は恐らく Yarrow¹⁾ であらうと思ふ。又、不衡力を出すのに力の多角形を用ひず、 $x-y$ 座標によつて解析的方法を應用し始めた人は Taylor²⁾ であつたと思ふ。この方法も結局は多角形の方法と同じやうであるけれども實際には多角形のものよりも複雑になる虞れがある。同じ解析的方法でも複素平面を想像し、不衡力のベクトルを複素函數として取扱ふことは解析的方法としてかなり便利なるものであるが、Cormac³⁾ はこの考方によつて非常に複雑な發動機の問題をも比較的容易に取扱つた。

數個の氣筒が等距離に置かれてゐるやうな普通の代表的な往復機關に於てクランクの角位置によつて如何なる不衡力と不衡偶力とが現はれるかを表⁴⁾に示し

1) A. F. Yarrow, "On balancing Marine Engines, and the Vibration of Vessels," *TINA*, 33 (1892), 213-220.

2) D. W. Taylor, "The Theoretical and Practical Methods of Balancing Marine Engines," *Trans. Amer. Soc. Nav. Arch. & Marine Eng.*, 9 (1901), 39-87.

3) P. Cormac, *A Treatise on Engine Balance using Exponentials* (London, 1923)

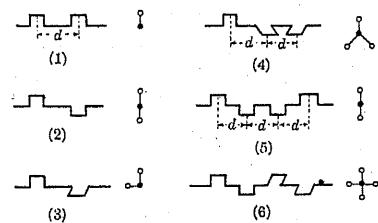
4) J. Geiger, *Mechanische Schwingungen und ihre Messung* (Berlin, 1927)

て見ると次の如くなる。但しクランクの角速度は ω であり、又、各クランクの不衡質量を m (一定)とし、各気筒間の距離を d 、クランク半径を r 、連桿の長さを l とする。

| 番 號 | 気筒の數 | クランク角の差 | 極大不衡力 | | 極大不衡偶力 | |
|-----|------|---------------------------------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------|
| | | | 第一 次 | 第二 次 | 第一 次 | 第二 次 |
| (1) | 2 | 0° | $2mr\omega^2$ | $\frac{2mr^2\omega^2}{l}$ | 0 | 0 |
| (2) | 2 | 180° | 0 | $\frac{2mr^2\omega^2}{l}$ | $mr\omega^2 d$ | 0 |
| (3) | 2 | 90° | $\sqrt{2}mr\omega^2$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{2}}mr\omega^2 d$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{mr^2\omega^2}{l}d$ |
| (4) | 3 | 120° | 0 | 0 | $\sqrt{3}mr\omega^2 d$ | $\sqrt{3}\frac{m^2\omega^2}{l}d$ |
| (5) | 4 | $\begin{cases} 180^\circ \\ 0^\circ \end{cases}$ | 0 | $\frac{4mr^2\omega^2}{l}$ | 0 | 0 |
| (6) | 4 | $\begin{cases} 180^\circ \\ 90^\circ \end{cases}$ | 0 | 0 | $\sqrt{2}mr\omega^2 d$ | $4\frac{mr^2\omega^2}{l}d$ |
| (7) | 6 | $\begin{cases} 120^\circ \\ 0^\circ \end{cases}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

五気筒の場合に72°のクランク角を持たせると不衡力はなくなるけれども、不衡偶力は第一、第二次共に残るものである。尙任意の基準クランク角 θ に於ける不衡力及び不衡偶力は上表の極大値に第一、第二次に相當して夫々 $\cos(\theta+\alpha)$ 、 $\cos(2\theta$

$+\beta)$ を乗じたものに等しい。但し α, β は夫々一定の位相角を示す。上表にあるクランク角の型を略圖で示せば左の如くなる。



第 60 圖

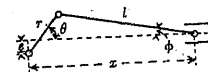
尙、本節に於ては主としてピストンの往復方向の面内に起る不衡力及び不衡偶力を考へたのであるけれども、これに直角の方向にも同様不衡力や不衡偶力があり得るのである。¹⁾ しかしこれは普通の往復機関では往復方向のものに比して非常に小さい。

上に述べたやうにクランクを適當に配置すれば、内燃機関ではその釣合を得ることは必しもむづかしくない。然るに蒸氣往復機関ではその釣合法が容易に完全

¹⁾ W. K. Wilson, *The Balancing of Oil Engines* (London, 1929).

に行はれない。何となれば之等の場合には気筒の大きさが順次變つてをるから不衡力と不衡偶力とが同時に釣合せ難い爲である。

又、普通の往復機関ではクランク軸が気筒軸線になるのが通例であるけれども、時にはピストンピン(wrist pin)が気筒軸から離れてゐたり、又はクランク軸そのものが気筒軸から離れてをることがある。Desaxé engine 即ち偏り機関(offset engine)ではピストンピンの往復線がクランクの中心を通過せぬやうになつてゐる。右圖の如き偏り機関に於てクランク軸の偏り(offset)が e で表されてをり、又、 $x=r\cos\theta+l\cos\phi$ 及 $l\sin\phi=r\sin\theta-e$ であるから、往復方向の慣性力は



第 61 圖

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mr\omega^2(\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \dots + b_1\sin\theta + \dots) \quad (15)$$

となる。但し $a_2 = \frac{r}{l} + \frac{3}{2}\frac{r^2}{l^2} + \dots$ $b_1 = \frac{e}{l} + \dots$ m は往復質量を表す。普通の場合に偏り e はクランク半径 r の1/5乃至1/6位である。

同轉子の釣合と同じ考を以て往復機関の釣合を行ふときは機關臺には不衡力が起らない。この意味から斯る釣合は external にはバランスされてゐる。しかし機關それ自身を考へると内部的には決してバランスされてゐない。故に internal には不衡力があると見てもよい譯である。尙、往復機関の釣合試験機としては Avery, Hofmann-Kunze, Olsen-Lundgen 其他のものがある。

98. 機関車其他の釣合試験に就て

機関車の機関は連桿の非常に長い場合であつて、気筒は兩外側に一個宛あるのが普通であるけれども、時として車輪の内側に並列して二個あることもある。又、非常に稀には釣合の目的から四気筒のものも作られてゐる。一般に動力は気筒からピストン、クロスヘッドを経て連桿に傳はり、之が連結棒(coupling rod)によつて車軸のクランクにトルク(torque)が與へられるのである。気筒が車輪の内側にあるときは連結棒などの置き具合がむづかしくなるものである。

一つの車軸の左右のクランクは90°の位相差がある。一つのクランクに置かれた不衡質量を m 、半径を r 、同轉速度を ω と置けば、一つの車軸についての不衡力

のピストン方向(即ち連桿の方向)の分力

$$\sqrt{2}m\omega^2r \cos(\theta+45^\circ) \quad (16)$$

となる。但し θ は遅れて廻る方のクランク角を示す。次に兩氣筒間の距離を d と書けば、車軸に加はる不衡偶力の水平成分は

$$\frac{m\omega^2rd \cos(\theta-45^\circ)}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

機関車はこの偶力によつて左右の方向的揺動をなす譯である。不衡力や不衡偶力を取除く爲には Yarrow¹⁾ の如く bob weights を用ひたり、又氣筒をふやして四氣筒機関にすることが考へられたりしてゐる。しかし普通用ひられてゐる釣合の方法は車輪に balance weights を付けることである。

連結棒や連桿が三組又は四組の車輪に跨つてゐるときは之等の質量を各の車輪に適當に分配すればよい。元來、車輪を couple することそれ自身は慣性質量を有する車輪とレールとの間の衝撃作用や五の間の離間作用を防ぐことに目的を持つものであるから、各の車輪に釣合の質量を付けるのにも非常な苦心を要する。即ち上述の諸作用に對しては普通の往復機関と異なり、同轉の不衡力が重要な役割を持つ爲に、この同轉の釣合を特別に考へてその balance weights と位置とを出し、次に連結棒や連桿往復運動の釣合に相當する balance weights とその位置を出す。この兩方の釣合が同時にできればよい。之等の要點は Dalby²⁾ も述べてゐる。

機関車の他に自動車や航空機関の全體の釣合も近來よく考へられるやうになり、其等の釣合試験機も設計されるに到つた。

99. 固定式發動機の不衡力^{3) 4) 5) 6)} (Unbalance of Fixed Engines)

¹⁾ A. F. Yarrow, "On balancing Marine Engines, and the Vibration of Vessels," *TINA*, 33 (1892), 213-220.

²⁾ W. E. Dalby, *The Balancing of Engines*, 3rd ed. (London, 1924).

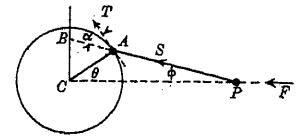
³⁾ P. Cormac, *A Treatise on Engine Balance using Exponentials* (London, 1923).

⁴⁾ R. Devillers, *Le moteur à explosions* (Paris, 1920), 1 chap. 9, 10.

⁵⁾ 中西不二夫, "On the Balancing of Two-Stroke 12-Cylinder Engines," 航空研究所報告, 第 86 號 (1932), 151-159.

⁶⁾ P. Riekert, "Beitrag zur Theorie des Massenausgleiches von Sternmotoren," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 16-21.

直立以外の固定式發動機では氣筒が一定の方向上になく、扇形に並んでゐる。その代表的なものは V 型發動機であらう。斯様な機関では往復部の慣性不衡力は勿論のことその他の不衡力や爆發瓦斯の壓力變化等に起因するクランクの不衡偶力が屢々問題となるのである。往復部の慣性不衡力の合力を求めることは後に述べるやうに極めて簡單である。次に、クランクの慣性偶力のことは未だ擧げてないからこゝに簡単に説明しておくことにする。



第 62 圖

上圖に於て F を往復部の慣性不衡力とし、 S を連桿に誘起される力、 T をクランク・ピン A に於ける S の圓周方向の分力とすれば、

$$S \cos \phi = F,$$

従て

$$T = S \cos \alpha = F \cos \alpha / \cos \phi.$$

然るに

$$\cos \alpha = \sin \text{CAB}, \quad \cos \phi = \sin \text{CBA}.$$

故に

$$T = F \sin \text{CAB} / \sin \text{CBA} = F \overline{\text{CB}} / \overline{\text{AC}}.$$

今、 M をクランク軸にかゝる慣性偶力とすれば、

$$M = T \cdot \overline{\text{AC}} = F \cdot \overline{\text{CB}} \cdot \overline{\text{AC}} / \overline{\text{AC}} = F \cdot \overline{\text{CB}}. \quad (18)$$

次にピストン P の往復速度を dx/dt とし、A 點の回轉速度を ω とすれば、 ω の $\overline{\text{AP}}$ 線上の分速度は $\omega \overline{\text{AC}} \cos \alpha$ である。この分速度は同時に dx/dt の $\overline{\text{AP}}$ 線上の分速度に等しいから、

$$\omega \overline{\text{AC}} \cos \alpha = \frac{dx}{dt} \cos \phi.$$

従て $\frac{dx}{dt} = \omega \overline{\text{AC}} \cos \alpha / \cos \phi = \omega \overline{\text{AC}} \sin \text{BAC} / \sin \text{CBA} = \omega \overline{\text{AC}} \cdot \overline{\text{BC}} / \overline{\text{AC}} = \omega \overline{\text{BC}}.$

故に

$$\frac{dx}{dt} / \omega = \overline{\text{BC}}.$$

この値を (18) に代入して

$$M = F \frac{dx}{dt} / \omega. \quad (19)$$

このモーメントは往復部の慣性不衡力によつて生ずるクランクの廻しモーメント

(turning moment) であつて、ときとしては之をピストンの質量による慣性トルク (inertia torque) と名づける。(19)の關係は仕事の法則でも出す事ができる。即ち $F dx/dt = Mw$ であるから、之から直ちに (19) が得られるのである。慣性トルクの外に連桿や爆發瓦斯の壓力變化によるクランクの廻しモーメントがあるけれども説明を略する。氣筒が星型に配列してゐる時は之等の torque をベクトル式に組合せればクランクの總體的廻しモーメントを計算する事ができるものである。

固定星型發動機 固定星型機關の氣筒數が c 個あつて、次々の氣筒間の角距離を λ 度とすれば $c\lambda = 360^\circ$ になる。各氣筒軸は勿論心向き形の中心にあるクランク軸の方向へ向つてをり、夫々にクランク桿が一本あつて、その一端は各氣筒のピストンに連る連桿に結ばれてゐるものとする。一定の氣筒線とクランクの任意の位置に於ける方向とのなす角を θ とする。然るときは p 番目の氣筒の方向の不衡力で n 番目の次數のものを取れば

$$mr\omega^2 A_n \cos n(\theta - p\lambda) \tag{20}$$

となる。この不衡力をベクトル式にすべての氣筒について集めて見ると、 $(n-1)$ 又は $(n+1)$ が氣筒數の整數値であるとき及び $n=1$ のときは不衡力が存在するけれども、然らざる次數のものはすべて釣合になつてをる事が證明できるのである。このことは $n = kc \pm 1$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のときに不衡力が残ることを意味してゐる。

V 型發動機 V 型發動機に於ては n 番目の次數の不衡力は兩氣筒について夫々の方向に於て

$$mr\omega^2 A_n \cos n\theta, \quad mr\omega^2 A_n \cos n(\theta - \lambda)$$

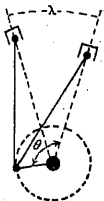
である。之をベクトル式に組合せればよい。 $n=1$ のときの不衡力の合力を出すに次の如くなる:

$$F = mr\omega^2 A_1 [e^{i\theta} + e^{i(\theta-\lambda)}] \cos \lambda \tag{21}$$

又それ等の並列せる機關について合結果を出すこともできる。今氣筒が二個で、 $\lambda = 180^\circ$ と取れば、不衡合力は $n=1$ に對して

$$2mr\omega^2 A_1 \cos \theta \tag{22}$$

となる。二氣筒で $\lambda = 90^\circ$ の V 型の場合には不衡合力が



第 63 圖

$$mr\omega^2 A_n [\cos n\theta + i \cos n(\theta - 90^\circ)] \tag{23}$$

で示され、その絶対値は n が 2 の倍數である限り、 $\sqrt{2} mr\omega^2 A_n \cos n\theta$ である。

八氣筒 V 型發動機に於て四個宛の氣筒が一組をなし、兩組が 90° の角を以て相對してゐるとき、各組のクランク角が右圖の下の圖の如く配置されてをる爲、第一次の不衡力と不衡偶力とは各組について取除かれてゐるものとする。然るに 1, 1', 4, 4' による第二次の不衡力は

$$f_2 = \frac{2mr^2\omega^2}{l} (\cos 2\theta - i \cos 2\theta)$$

の如きベクトル式で表され、2, 2', 3, 3' による不衡力は

$$\begin{aligned} f_2' &= \frac{2mr^2\omega^2}{l} \{ \cos 2(\theta + 180^\circ) - i \cos 2(\theta + 180^\circ) \} \\ &= \frac{2mr^2\omega^2}{l} \{ \cos 2\theta - i \cos 2\theta \} \end{aligned}$$

で示される。但し m は各氣筒の不衡質量に相當するもの、 r はクランク半径、 l は連結桿の長さ、 ω はクランクの回轉速度を意味する。 f_2 と f_2' の合結果は

$$F_2 = f_2 + f_2' = \frac{4mr^2\omega^2}{l} (\cos 2\theta - i \cos 2\theta) \tag{24}$$

である故、絶対値は $4\sqrt{2} \frac{mr^2\omega^2}{l} \cos 2\theta$ であり、その方向は V 型の水平基線上にある。

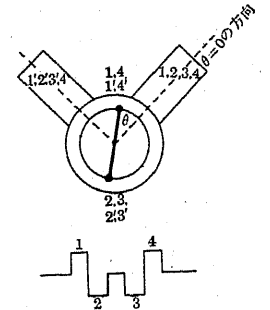
若し上圖に於て 2, 3 及 2', 3' のクランクが 1, 4 及 1', 4' のクランクと夫々 90° の角をなすときは

$$f_2 = \frac{2mr^2\omega^2}{l} \{ \cos 2(\theta + 90^\circ) - i \cos 2(\theta + 90^\circ) \} = -2(\cos 2\theta - i \cos 2\theta)$$

となるから、

$$F_2 = f_2 + f_2' = 0. \tag{25}$$

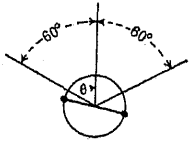
この場合には第一次の不衡力は釣合つてをらぬけれども、第一次の不衡力はクランク軸に適當の質量を取付けて容易に除くことができるので、このやうな配置にした



第 64 圖

方がよいことがある。しかし第一第二次の不衡力の釣合を同時に行ふには、1-クランクと4-クランクとを 180° の差にし、2-クランクと3-クランクとを 180° の角差にし、而して1と4の平面と2と3の平面との間が 90° になるやうにすればよい。

W型發動機 Napier 'Lion' 航空發動機は十二個の気筒が三列に分れてW型をなし各列が互に 60° の角をなして扇形を保つてゐる。中央の列が垂直に立ち他の二列はその左右にある。クランク軸は中央列の真下にあり、四つのクランク・ピンの各々に各列の気筒の一個宛の連桿が聯結してゐる。この場合に便宜上 p_n の如き係数を用ひて、一列四個の気筒の n 次の不衡力を



第 65 圖

$$4mr\omega^2 p_n \cos n\theta$$

と書けば、中央の列については不衡力が上述の式で表され、左側及び右側のものはそれぞれ $e^{\frac{in}{3}} 4mr\omega^2 p_n \cos(\theta - \frac{\pi}{3})$ 及 $e^{-\frac{in}{3}} 4mr\omega^2 p_n \cos(\theta + \frac{\pi}{3})$ で示される。以上三組の列の不衡力を加へ合せると

$$F_n = 2mr\omega^2 p_n \left[e^{in\theta} \left\{ 1 + 2 \cos(n-1)\frac{\pi}{3} \right\} + e^{-in\theta} \left\{ 1 + 2 \cos(n+1)\frac{\pi}{3} \right\} \right] \quad (26)$$

となる。 $n=2$ のときは

$$F_2 = 4mr\omega^2 p_2 e^{2i\theta} - 2mr\omega^2 p_2 e^{-2i\theta} \quad (27)$$

上式の右邊の第一項はクランクと同方向に二倍の速度で回轉する $4mr\omega^2 p_2$ なる不衡力を表し、第二項はその逆の方向にやはり二倍の速度で回轉する $2mr\omega^2 p_2$ なる不衡力を表してゐる。 F_2 を書き直して

$$F_2 = 2mr\omega^2 p_2 e^{2i\theta} + i 4mr\omega^2 p_2 \sin 2\theta \quad (27')$$

とすれば、第二次の不衡力はクランクの二倍の速度で回轉する質量による慣性力と水平に單弦振動をなす質量の慣性力の和に等しいことがわかる。尙、第一次の不衡力は各列に就て全く除かれるやうに配置されてゐることは勿論である。

クランクに働く慣性トルクを出すには、(19)の中にある dx/dt を θ の三角函

数の級数によつて展開する必要がある。然るときは一個の気筒について往復部の慣性不衡力による慣性トルク

$$M = mr^2 \omega^2 (t_1 \sin \theta + t_2 \sin 2\theta + t_3 \sin 3\theta + \dots) \quad (28)$$

の如き形を取る。但し t_1, t_2, \dots は微分及び展開のときに定まる常數項であつて、クランク半径や連桿の長さなどの函數である。今 c -クランクの發動機を考へ、 n 次の項を取つて見ると、各気筒によつて夫々次の如き慣性トルクを生ずる。即ち

$$mr^2 \omega^2 t_n \sin \theta, \quad mr^2 \omega^2 t_n \sin n(\theta - \lambda), \quad mr^2 \omega^2 t_n \sin n(\theta - 2\lambda), \\ \dots, \quad mr^2 \omega^2 t_n \sin n(\theta - (c-1)\lambda), \quad (29)$$

茲に λ は次々の気筒間のクランク角の位相差を示す。之等を代數的に加へ合せれば往復部の慣性不衡力によつて生ずるクランクの慣性トルクが算定できる譯である。この場合のトルクは直立型往復機に於て各気筒のクランク角の位相差が入宛の場合と丁度一致するものであることは注意すべきであらう。

結語 前にも説明してあるやうにクランクに働く不衡偶力は上述のトルクの外に、爆發瓦斯の壓力によるトルクや連桿に起因するトルクを加へたものである。

本節の研究は連桿が直ちにクランクに連る場合を研究したのであるけれども、この兩桿の間にピストン・ピンの半径 (wrist pin radius) の影響が入り、且つ連桿が二本 (main and auxiliary rods) ある場合は田中博士¹⁾によつて委しく研究されてゐることを附記しておく。又、本節と同じやうな問題をベクトルを用ひず、どこまでも座標解析法で解く方法は Devillers²⁾が採用してゐるけれども、結局は同一結果を出すものであり、又その考方もそれ程に相違がないやうに思はれる。

100. 回轉氣筒式發動機の不衡力³⁾ (Unbalance of Rotary Engine)

¹⁾ 田中敬吉, "On the Vibration and Balancing of Radial Aero-Engine," 機械學會誌, 26 (1923), 45-72; "The Inertia Force and Couples and their Balancing of the Star Type Engine," 東京帝國大學航空研究所報告, 1 (1925), 247-304.

²⁾ R. Devillers, *Le moteur a explosions* (Paris, 1920), 1, chap. 9, 10.

³⁾ P. Cormac, *A Treatise on Engine Balance using Exponentials* (London, 1923).

この種の發動機では氣筒がクランク軸の周圍に回轉するやうになつてをり、又クランクピン A もその位置が固定されてゐる。今、ピストン P のベクトル變位を書いて見ると

$$z - x e^{i\theta}, \tag{30}$$

但し θ は氣筒の方向とクランクとの間の角であり、 x はクランク軸からピストン迄の距離を表す。今、 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ と書けば、(30) から

$$m\ddot{z} = m e^{i\theta} (\ddot{x} + 2i\omega\dot{x} - x\omega^2), \tag{31}$$

但し m はピストンの不衡質量とする。次に

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta + l \cos \phi = r \left[\cos \theta + \frac{l}{r} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \theta \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= r (\cos \theta + q_0 + q_2 \cos 2\theta + q_4 \cos 4\theta + q_6 \cos 6\theta + \dots) \end{aligned}$$

の如き形を作つておいて (31) に代入すると、

$$\begin{aligned} F = -m\ddot{z} &= mr\omega^2 e^{i\theta} \{ q_0 + 2e^{i\theta} + 2 \cos \theta + 5q_2 \cos 2\theta + 17q_4 \cos 4\theta + \dots \\ &\quad + 2i \sin \theta + 2i(2q_2 \sin 2\theta + 4q_4 \sin 4\theta + \dots) \}. \end{aligned} \tag{32}$$

この F が θ を以て表した不衡力を示す。この式中

$$F_1 = mr\omega^2 e^{i\theta} \{ q_0 + 2(\cos \theta + i \sin \theta) \} = mr\omega^2 (q_0 + 2e^{i\theta}) \tag{33}$$

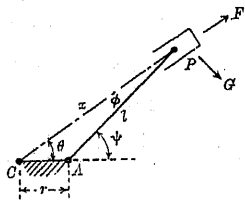
を主要不衡力と名づけることがある。

さて氣筒数が c 個あるものとし、その次々の氣筒間の角距離を λ とすれば、各氣筒の主要不衡力をベクトル式に加へ合せたものが次の如くなる：

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= mr\omega^2 \{ q_0 e^{i\theta} (1 + e^{i\lambda} + e^{2i\lambda} + \dots + e^{(c-1)i\lambda}) \\ &\quad + 2e^{2i\theta} (1 + e^{2i\lambda} + e^{4i\lambda} + \dots + e^{2(c-1)i\lambda}) \}. \end{aligned} \tag{34}$$

上式の第一の小括弧の中の級数は $\lambda = 0$ のときの外は

常に零となるし、又第二の小括弧は $\lambda = 0$ 及 $\lambda = 180^\circ$ の外は常に零となる。従て回轉式星型發動機では氣筒が三個以上ありさへすればピストンの主要不衡力だけは取除かれてゐる譯である。



第 66 圖

高次の不衡力が消去することができるかどうかは、(32) から n 次のものを出して見れば容易に判明する。それは次の如くなる：

$$\begin{aligned} mr\omega^2 e^{i\theta} \{ (n^2 + 1) q_n \cos n\theta + 2i n q_n \sin n\theta \} \\ = K e^{(n+1)i\theta} + L e^{-(n-1)i\theta}, \end{aligned} \tag{35}$$

但し $K = \frac{1}{2} q_n m r \omega^2 (n+1)^2$, $L = \frac{1}{2} q_n m r \omega^2 (n-1)^2$. (35) の如き不衡力を各氣筒についてその位相差を考へ、ベクトル式に加へ合せると

$$\begin{aligned} K e^{(n+1)i\theta} \{ 1 + e^{(n+1)i\lambda} + e^{(n+1)2i\lambda} + \dots + e^{(n+1)(c-1)i\lambda} \} \\ + L e^{-(n-1)i\theta} \{ 1 + e^{-(n-1)i\lambda} + e^{-(n-1)2i\lambda} + \dots + e^{-(n-1)(c-1)i\lambda} \}. \end{aligned} \tag{36}$$

この式は $(n+1)$ 又は $(n-1)$ が c の倍数でさへなければ零となる。例へば七氣筒の Gnome 發動機は $q_0, q_2, q_4, q_6, \dots$ なる係数を持つ項が不衡力となる。 q_0 や q_2 に相當する不衡力は $7(Ke^{7i\theta} + Le^{-7i\theta})$ で表され、この式の二つの項は夫々發動機の七倍の角速度で互に逆の方向に廻る不衡力を示すものである。

次に回轉式星形發動機の慣性トルク (inertia torque) を考へることとする。

(31) から

$$m\ddot{z} = m e^{i\theta} (\ddot{x} + 2i\omega\dot{x} - x\omega^2) \tag{31'}$$

であり、この第二項 $G = 2me^{i\theta}\omega\dot{x}$ が氣筒方向に直角に働く力である。従てこの項によつて Gx の如きクランク廻しモーメントを生ずる。又、(19) により、 F の爲に $F\dot{x}/\omega$ の如きモーメントが働くから、クランクに働く慣性トルクは結局

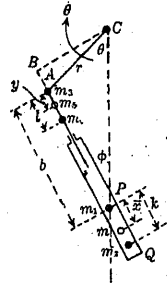
$$\begin{aligned} M &= F\dot{x}/\omega + Gx = m\dot{x}\dot{x}\omega - m\ddot{x}\dot{x}/\omega - 2m\dot{x}x\omega \\ &= -m\ddot{x}\dot{x}/\omega - m\dot{x}x\omega \end{aligned} \tag{37}$$

となる。この x, \dot{x}, \ddot{x} を r 及び θ で書き直せば圓函數の順序に並ぶ次第である。尙、(37) の外に連桿の質量による inertia torque があるけれども説明を省略しておく

以上は回轉式星型發動機の極く簡単な場合の説明をしたのであるが、それ以外に圓筒や連桿と共にクランクも回轉するものや、或は wrist の影響の非常にきくも

のなどがあり、之等の不衡力の計算は大分厄介である。田中博士¹⁾は wrist の影響をも考慮に入れて回轉式星型發動機の慣性力を正確に算出した。

101. 筒揺發動機²⁾の不衡力 (Unbalance of Oscillating-Cylinder Engine)



第 67 圖

固定式の場合 左圖に示すが如き筒揺式發動機に於て C をクランク軸, A をクランク・ピン, P を気筒の耳軸 (trunnion), m を気筒の質量, ms をピストンとピストン桿の總質量とする。

m の方の影響を最初に考へるのであるが, m を耳軸 (trunnion) にある質量 m1 と別の位置にある m2 とに分けて考へ, PQ の距離を k, m1m の距離を \bar{x} とすれば, $m_1k = m\bar{x}$ となる。又, 耳軸の周囲の回轉慣性モーメントを J と書けば $m_1k^2 = J$ である。さて P を原点として m2 のベクトル式變位 z2 を考へれば

$$z_2 = ke^{-i\phi}$$

この z2 の加速度を作り, Q 點に働く慣性不衡力を書けば

$$e^{-i\phi}m_2k\ddot{\phi}^2 + ie^{-i\phi}m_2k\ddot{\phi} \tag{38}$$

となる。この第一項は気筒線の方に働く力であつて、第二の項はそれに直角に働く力である。前者は trunnion-bearing にかゝる力であり、後者は次の二つの力によつて釣合を保たれてゐる:

$$ie^{-i\phi}m_2k\ddot{\phi}(k+b)/b, \quad -ie^{-i\phi}m_2k\ddot{\phi}k/b. \tag{39}$$

この左の項は P に於て気筒に直角に働く力であり、右の項はクランク・ピン A に於て気筒の方に直角に働く力である。之等の式はピストン桿と気筒とを一つの棒と見做し、その屈曲モーメントを考へて作つたものである。

次にピストン及びピストン桿に働く慣性不衡力を考へる。之等の質量 ms を

1) 田中敬吉, "On the Vibration and Balancing of Radial Aero-Engine," 機械學會誌, 26 (1923), 45-72; "The Inertia Force and Couples and their Balancing of the Star Type Engine," 東京帝國大學航空研究所報告, 1 (1925), 247-304.

2) P. Cormac, A Treatise on Engine Balance using Exponentials (London, 1923).

クランク・ピンにある m3 と他の點にある m4 とに分ければ、前頁の圖によつて $m_3 = m_5 - m_4$, $m_4l = m_5y$, $m_4l^2 = J_1$ となる。但し J1 はクランク・ピンの周囲のピストンとピストン桿の慣性モーメントである。m3 のベクトル式變位 z3 は

$$z_3 = re^{i\theta}$$

であるから, m3 による慣性不衡力は

$$e^{i\theta}m_3r\ddot{\theta}^2 \tag{40}$$

である。又, m4 のベクトル式變位 z4 は

$$z_4 = re^{i\theta} + le^{-i\phi}$$

であるから、その慣性不衡力は

$$e^{i\theta}m_4r\ddot{\theta}^2 + e^{-i\phi}m_4l\ddot{\phi}^2 + ie^{-i\phi}m_4l\ddot{\phi} \tag{41}$$

である。上式の第一項はクランクに平行に働く力であるけれども、これを分解して m4 を通りピストン桿に平行な力と直角な力とに分つことができる。而してその直角の方の力は (39) の場合と同様に trunnion-bearing に働く力とクランク・ピンに働く力とによつて釣合を保たれてゐる。其等の表式は態と省略しておいた。次に式 (41) の第三項は m4 を通過して気筒線に直角に働く力であるが、これも前述の場合と同様に trunnion-bearing とクランク・ピンに働く力によつて釣合を保たれてゐるのである。終りに (41) の第二の項は気筒に平行に働く力であつて、A 點の周囲にピストン及びピストン桿が回轉する爲に生ずる求心力を意味してゐる。

以上の如く異なる方向に分解したものをクランク・ピンに働く力と trunnion-bearing に働く力とに集めて考へて見ようと思ふ。クランク・ピンに働く力はベクトルの形で次の如く書くことができる:

$$e^{i\theta}m_3r\ddot{\theta}^2 + e^{-i\phi}m_4(\theta^2\overline{AB} + l\ddot{\phi}^2) + ie^{-i\phi}[m_4(\theta^2\overline{BC} + l\ddot{\phi})(b-l)/b - m_2k^2\ddot{\phi}/b], \tag{42}$$

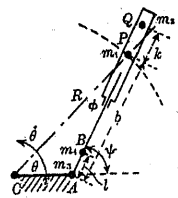
但し \overline{AB} , \overline{BC} は前圖参照) B は C 點より AP 線上への垂線の足を表す。同様に trunnion-bearing に働く力はベクトル式に次の如く書ける:

$$e^{-i\phi}m_2k\ddot{\phi}^2 + ie^{-i\phi}[m_2k\ddot{\phi}(k+b)/b + m_4l(\theta^2\overline{BC} + l\ddot{\phi})/b]. \tag{43}$$

かうして二つの點に働く力を出しておけば、クランク軸や發動機の枠に働く力が容易に算定できるのである。例へばクランク軸に働く inertia torque はクランク・ピンに働く力のクランク軸に關する偶力を出せばよいし、發動機の枠に働く力はクランク・ピンに働く力と trunnion-bearing に働く力とを適當に合計すればよい筈である。尙、瓦斯爆發によるトルクの影響も考へ入れるべきことは他の發動機の場合と同じである。

固定式星型の搖動發動機では多くのピストン桿に對して唯一個のクランクがあるだけであるから、その不衡力を見出すには上に説明せる各氣筒についての不衡力をベクトル式に加へ合せればよいのである。

同轉式の場合 同轉式星型の筒搖發動機の場合も本節の考方を同轉式星



第 68 圖

型發動機の計算にあてはめて行けばよい。この場合 \overline{OA} なるクランクは固定してをり、氣筒がクランク軸 C の周圍に同轉するものである。大體の記號を前の場合に倣つて左圖の如く取り、先づ C を原點としての m_1 の慣性力を出せば

$$m_1 e^{i\theta} R \dot{\theta}^2 \quad (\text{P 點に於て CP 方向に働く力に等しい}) \quad (44)$$

となり、同じく m_2 の慣性力を出すと

$$-m_2 (i^2 R e^{i\theta} \dot{\theta}^2 + i^2 k e^{i\psi} \dot{\psi}^2 + i k e^{i\psi} \ddot{\psi}) \quad (45)$$

となる。この (45) の第一項は氣筒に平行な力と直角な力とに分解でき、且つ氣筒に平行な力は更に trunnion-bearing に働く力と釣合ふものと考へられ、又、氣筒に直角な力は trunnion-bearing とクランク・ピンとに働く力によつて代表させることができる。(45) の第二項は trunnion-bearing に於て氣筒方向に働く力と釣合を保つ。(45) の第三項は trunnion-bearing とクランク・ピンの兩點に於て氣筒に直角に働く力によつて置き換へられる。續いて m_1 に働く慣性不衡力は容易に次の如く書き得る：

$$-m_1 (i^2 l e^{-i\psi} \dot{\psi}^2 + i l e^{-i\psi} \ddot{\psi}). \quad (46)$$

(46) の第一項はクランク・ピンに働く氣筒方向の力と釣合を保ち、(46) の第二項は trunnion-bearing とクランク・ピンに各、氣筒方向に直角に働く力で置き換へられ

る。以上の力中のクランク・ピンに働く力の合計をベクトル式に書表せば

$$i e^{i\psi} [(m_2 R k \dot{\theta}^2 \sin \phi + m_2 k^2 \ddot{\psi}) / b] - i e^{i\psi} m_1 l \ddot{\psi} (b-l) / b + e^{i\psi} m_1 l \dot{\psi}^2 \quad (47)$$

となり、trunnion-bearing に働く力を同様に書表せば

$$e^{i\theta} m_1 R \dot{\theta}^2 + e^{i\psi} (m_2 R \dot{\theta}^2 \cos \phi + m_2 k \ddot{\psi}) - i e^{i\psi} [m_2 (R \dot{\theta}^2 \sin \phi + k \ddot{\psi}) (b+k) / b + m_2 l^2 \ddot{\psi} / b] \quad (48)$$

となる。

之等の式から容易に trunnion-bearing, クランク軸, 發動機枠に働く不衡力, 慣性トルクを算出することができる。尙、瓦斯の爆發による torque の影響を考慮に入れるべきことは前回の通りである。