

第四章 タービン機械其他の振動

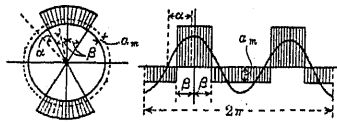
69. タービン翼車振動の強制力に就て

タービン翼車に起る損傷がその材質上の缺陷でもなく、又は遠心力による應力が大なる爲でもないやうな場合にその屈曲振動が屢、原因となつてゐる事はよく知られてゐる。それで態々そのやうな實驗をやつて見ると或る回轉速度に於て非常に振動が起り、その結果材料の疲勞を起したり、又はタービン板にある steam balance hole や其他の不連続箇所から起つた割れ目がどんどん成長して行くやうなことがあるのである。

タービン翼車の振動を起す原因として種々のものが考へられる。i) しかし最も重要なものは蒸氣力が圓周上に部分的に強く働くことである。即ち翼車の周圍にある翼列は週期的に蒸氣の吹出(jet)に吹きつけられるために振動力の起ることと、guide と回轉 bucket とが同心圓上にない爲にやはり週期的の擾亂があることを擧げ得る。ii) 次に同じく蒸氣壓の影響であるけれども、導き翼車(案内車)から出た jet が圓板と隔壁(diaphragm)との間を通つて僅かの吸引力を生じ、そのために圓板は隔壁の方へ屈曲する。その結果蒸氣の通路が狭くなつて一部分への蒸氣の流動量が拘束され、従て圓板はもとの位置にはねかへされるものである。然るに再び前の如く蒸氣の吸引力が働くから次の振動に移るのである。この作用は共振の場合には相當の影響を與へるものと考へられる。iii) 車軸の振動は必ず存在するものであつて、その結果翼車が sympathetic に振動を起すこともある。iv) 撓み接手(flexible couplings)はそれが多少摩擦してゐるときには、Hooke の linkage の如く、車軸に一様でない回轉モーメントと屈曲モーメント(何れも車軸回轉數の二倍の振動數を以て)とを與へるものである。v) 蒸氣タービンは船舶用に用ひられる事が非常に多い。それで船體のピッチングやヨウキングによつてタービン翼車にジャイロ作用を與へることになり、その結果種々の抵抗力と組合つて振動を起すも

のである。

蒸気力がタービンの回轉中均一に働かぬ場合の説明を尙委しく説明して見たいと考へる。下圖に於て影線を施せる扇形の部分は案内羽根のある部分を示す。換言すればこの部分に全蒸気力が働くのである。若し圓弧を展開して左圖の右の



第 38 圖

圖の如くしたとすれば一回轉中の平均の力は a_m となる。従て働く力を二つに分け、一つはこの平均の力とし、他の一つは右の圖の影を施せる正號の力と負號の力とに分けて考へるのである。この兩種の力を組合せれば效果的の力

となる。平均力の方は振動せざる一定の屈曲力を翼に與へる。週期的力の方は翼に振動を與へることは勿論である。この週期的力の方は

$$P = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots$$

の如く、Fourier の級數に展開することができる。¹⁾ その何れかの項が翼の固有振動と共振になるときに振幅が大きくなる事も當然である。

70. タービン翼車振動型の分類

翼車振動の型については、種々のものに分類する事ができる。即ち中心に對して對稱的なもの、換言すれば種々の節圓 (nodal circle) を持つものや、非對稱的なもの、換言すれば種々の節直徑 (nodal diameter) を持つもの及び之等兩種のものとの組合せとなるのである。之等の中で節直徑を持たぬものは實際問題上に餘り起らない。殊にその中で最も簡單なる傘形即ち中心部以外に節圓さへないものは起り易いやうに見えて實際にはやはり起らないものである。それで之等の對稱的な振動はタービン翼車の破損といふことにとつて何等問題とならぬものであつて、節直徑を有するもののみがそれに関與してゐるのである。又回轉せざる場合の實驗によると稍弱い翼車では節直徑が 2 本乃至 4 本位の振動が多く出る。然るにもつと

¹⁾ W. Hort, "Die Schwingungen der Räder und Schaufeln in Dampfturbinen," ZVDI, 70 (1926), 1419-1424.

弱い翼車では多くの場合更に多數の節直徑が現はれる。節直徑の數を横軸に取りその固有振動數を縦軸に取つた場合の曲線を我々は static characteristic of the disc と呼ぶ。而して種々の節圓數のものに對して夫々この曲線がある譯であるけれども、前にも述べたやうに實際には之等節圓が一個以上ある場合は餘り起らないから考慮に入れておかなくてもよい譯である。節圓數が多くなるに従て振動數が急激に増加し、従て減衰力がよく働き、その爲に節圓數が多くなり得ないものと考へられる。

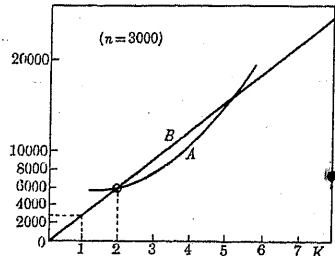
翼車の周圍に翼があるとその質量の爲に振動數は減するものである。而して翼が長いとき程その影響を看過することができなくなる。

タービンが實際に働いてゐる状態では翼車の縁の方が熱くなり、その結果翼車面に應力を生じて縁では壓縮が働き中央の方は張力を生ずる。従て固有振動數がかなり變化するものである。節直徑がないものや 1 本ある場合にはその振動數が普通の状態よりも高くなり、節直徑が數多くあるものでは低くなるものである。而して或る極端な場合には翼車の buckling さへも起ると考へられる。之等の數量的研究は未だ充分に行はれてはをらぬけれどもその傾向だけは充分にあるやうに思はれる。¹⁾

上述の説明は翼車が回轉せぬ場合についてのものであるが、次に翼車が回轉する場合を取つて見る。翼車が回轉せるときは遠心力が働いて振動數が著しく増加するものである。而して各回轉速度に對して夫々別の characteristic が得られる。之を dynamic characteristic と呼んでゐる。今、蒸気が部分的に強く吹出す場合を考へ、回轉せる圓板に對して空間の一定の位置に於て或る定まつた外力が働くものとすれば、それが共振を起す爲には翼車上の一定の點は翼車の 1 回轉の終り毎に外力に對して定まつた位置を占めるべきである。換言すれば、單位時間の回轉數 n なる翼車が共振を起す爲には、節直徑 1 本のときに其固有振動數が n であればよく、又節直徑が 2 本のときに固有振動數が $2n$ となればよいのである。一般に K 本の節直徑があるときの固有振動數は Kn となる筈である。即ち、 K 本の節直徑がで

¹⁾ A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, § 187.

きる場合の固有振動数が Kn であるときに、翼車の同轉数が n となれば共振が起り得ることを示すものである。下圖中 A は characteristic 曲線を表してゐるのであつて、横線上に示された各節直徑數に相當せる固有振動數(同轉數 $n=3000$ 毎分の



第 34 圖

とき)を示す。而して B 直線は $N=Kn$ (同轉數 $n=3000$ 毎分として)を表す。この B 直線を the straight line of the excitation と稱し、characteristic A 曲線を K が整数の所で切りさへすれば共振の起ることがわかる。何となれば前述の説明によつて、 K 節直徑のある高次振動の固有振動数が Kn であれば、翼車が n 同轉となつたとき振動外力の働が共振的の位相を取ること

なるからである。

節直徑のある振動を論ずる場合に、翼車の撓みを表す爲に次の如き形を以てするのが普通である：

$$w = w_0 \sin n\theta \cos pt,$$

但し w_0 は r のみの函數とし、 θ は同轉子上の或る點の角位置を表す。同様に

$$w = w_0 \cos n\theta \sin pt$$

と書いてもよい。兩方を結合すれば

$$w = w_0 \sin(n\theta \pm pt)$$

となり、翼車上で θ の方向に進む波動を表す。この \pm は互に逆の方向への波動である。斯様な波動現象は實驗的にも認められ、且つ翼車の同轉方向とは逆の向きのもの波動振幅の方が大であるといふことになつてゐる。この逆の向きの波動速度が翼車の速度と全く同じ大きさであれば、この波動は空間に静止せるが如く見えるものである。前に述べた所の強制振動に於ける振動外力は、或る部分の筒口 (nozzles) からの蒸氣力が大なるときに起るから空間的には静止せるが如く取扱つておいたけれども、翼車上の定まつた點を考へて見るときは、翼車の同轉速度と同じ大きさの波動速度があるといひ得る譯である。

次に前にも述べたやうに、翼車がその面内に於て或る分布をなせる熱の影響を受けるときは、その固有振動数が變化するものであるから、characteristic も亦變化するものである。その結果、characteristic と straight line of the excitation との交叉點が移動する。例へば或る整数の節直徑から整数ならざる場合に、又は逆に整数ならざる場合から整数の場合に變るものである。従て我々はタービンが或る荷重に於てのみ激しく振動し、他の荷重ではあまり振動しないことが了解できる譯である。何故ならば或る荷重に於て翼車上の温度の分布が或る定まつた形を取ることとなり、その分布に於て丁度 characteristic と straight line of the excitation との交叉點が節直徑の整数に當る所に来るからである。この理論は nozzles が一群以上あつても成立するのであつて、その結果として翼車の振動を完全にとめるには、nozzles の變更を行ふよりも、翼車の設計を變更する方が有利であることがわかる。

何れにしても翼車の振動型の或る種が強く誘起され且つそれが翼車の破損の原因となることは事實のやうである。しかしそれを委しく考へて見ると、強制外力の週期と翼車の或る型の振動週期とが同期性を持つて共振を起すからであることは否み難い。従て強制力に Fourier 分析を考へてその低次の方の各週期と分力を出す外に、翼車の各振動型に相當する週期を決定しておくことが極めて大切と考へられる。

71. 中心が固定され同轉せぬ圓板の固有振動¹⁾

タービン翼車の如き同轉圓板の振動を解くに當つて先づ同轉しない圓板の振動を解くことは、タービン翼車の種々の基本的性質を研究する上に非常に大切なことである。rotary inertia を看過しておいて同轉しない圓板の撓み w に関する振動方程式を極座標を用ひて書いて見ると次の如くなる：

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] w = 0, \quad (1)$$

この式に於て ρ は材料の密度、 E は Young 率、 σ は Poisson 比、 h は板の厚さの半

1) R. V. Southwell, "On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc clamped at its Centre, and on the Effects of Rotation," Proc. Roy. Soc., London, 101 (1922), 133-153.

分を表す。

今、 $r=a$ なる圓周は自由であり、中央は $r=b$ に於て固定されてゐる問題を取扱ふことにする。さて $r=a$ なる自由縁では

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1-\sigma}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

なる条件があり、中心の固定圓 $r=b$ の周圍では

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0 \quad (3)$$

なる条件が存在する。運動の微分方程式の解として

$$w = W \sin n(\theta - \theta_0) \sin p(t - t_0) \quad (4)$$

と置き、方程式に入れて見ると

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right] W - k^4 W = 0 \quad (5)$$

となる、但し

$$k^4 = \frac{3(1-\sigma^2)pp^2}{Eh^2} \quad (6)$$

W の完全なる解は次の二組の方程式の解の集まりとなる：

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} + k^2 \right] W &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - k^2 \right] W &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

即ち之等の解の集まりは

$$W = AJ_n(kr) + BY_n(kr) + CI_n(kr) + DK_n(kr) \quad (8)$$

となる、但し A, B, C, D は任意係数である。

今、Bessel 函数の関係即ち

$$J_n'(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z),$$

$$I_n'(z) = \frac{n}{z} I_n(z) + I_{n+1}(z)$$

なる関係を用ひるときは、 $r=a$ に於ける条件は

$$\left. \begin{aligned} k^2 \left\{ A \left[J_n(ka) - (1-\sigma) \left\{ \frac{n(n-1)}{k^2 a^2} J_n(ka) + \frac{1}{ka} J_{n+1}(ka) \right\} \right] \right. \\ + B \left[Y_n(ka) - (1-\sigma) \left\{ \frac{n(n-1)}{k^2 a^2} Y_n(ka) + \frac{1}{ka} Y_{n+1}(ka) \right\} \right] \\ - C \left[I_n(ka) + (1-\sigma) \left\{ \frac{n(n-1)}{k^2 a^2} I_n(ka) - \frac{1}{ka} I_{n+1}(ka) \right\} \right] \\ \left. - D \left[K_n(ka) + (1-\sigma) \left\{ \frac{n(n-1)}{k^2 a^2} K_n(ka) - \frac{1}{ka} K_{n+1}(ka) \right\} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} k^2 \left\{ A \left[nJ_n(ka) - kaJ_{n+1}(ka) + \frac{(1-\sigma)n^2}{k^2 a^2} \{ (n-1)J_n(ka) - kaJ_{n+1}(ka) \} \right] \right. \\ + B \left[nY_n(ka) - kaY_{n+1}(ka) + \frac{(1-\sigma)n^2}{k^2 a^2} \{ (n-1)Y_n(ka) - kaY_{n+1}(ka) \} \right] \\ - C \left[nI_n(ka) + kaI_{n+1}(ka) - \frac{(1-\sigma)n^2}{k^2 a^2} \{ (n-1)I_n(ka) + kaI_{n+1}(ka) \} \right] \\ \left. - D \left[nK_n(ka) + kaK_{n+1}(ka) - \frac{(1-\sigma)n^2}{k^2 a^2} \{ (n-1)K_n(ka) + kaK_{n+1}(ka) \} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。然るに中心の固定圓の周圍の条件からは

$$AJ_n(kb) + BY_n(kb) + CI_n(kb) + DK_n(kb) = 0, \quad (11)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} k \left\{ A \left[\frac{n}{kb} J_n(kb) - J_{n+1}(kb) \right] + B \left[\frac{n}{kb} Y_n(kb) - Y_{n+1}(kb) \right] \right. \\ \left. + C \left[\frac{n}{kb} I_n(kb) + I_{n+1}(kb) \right] + D \left[\frac{n}{kb} K_n(kb) + K_{n+1}(kb) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

が出る。以上の四つの条件式 (9), (10), (11), (12) から A, B, C, D を消去すると一行の行列方程式が作られる。この式から trial によつて b/a と ka との間の関係が定められるのである。 $\sigma=0.3$ と假定し、 $n=0, 1, 2, 3$ の場合の最低の振動数に對する関係を出して見ると次の如くなる：

n=0		n=1		n=2		n=3	
b/a	ka	b/a	ka	b/a	ka	b/a	ka
0.276	2.50	0.060	1.68	0.186	2.50	0.43	4.0
0.642	5.00	0.397	3.00	0.349	3.00	0.59	5.0
0.840	9.00	0.603	4.60	0.522	4.00	0.71	7.0
		0.634	5.00	0.769	8.00	0.82	10.0
		0.771	8.00	0.81	10.00		
		0.827	11.00				

極限の場合、即ち固定円の半径が無限に小である場合には計算が極めて容易である。何故なれば、若し n が 1 より大であるとすれば $b=0$ のときには $r=b$ に於ける条件式の α, β が零になり、従てこの関係は C, D を零と置くことによつて満足される。振動数の式は $r=a$ に於ける条件式から A, B を消去すればよいのであつて、これは Kirchhoff¹⁾ の free disc の問題となるのである。

$n=1$ 又は $=0$ のときには、 $r=b$ に於ける条件式に次の級数、即ち

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{4} + \dots, \quad J_1 = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + \dots,$$

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{4} + \dots, \quad I_1 = \frac{z}{2} + \frac{z^3}{16} + \dots,$$

$$Y_0(z) = J_0(z) \log z + \frac{z^2}{4} + \dots,$$

$$Y_1(z) = J_1(z) \log z - \frac{1}{z} - \frac{z}{4} + z^3 - \dots,$$

$$K_0(z) = -I_0(z) \{ \log z - E \} + \frac{z^2}{4} + \dots,$$

$$K_1(z) = -I_1(z) \{ \log z - E \} - \frac{1}{z} + \frac{z}{4} + \dots,$$

但し

$$E = \log 2 - \gamma \quad [\gamma = \text{Euler の常数}]$$

1) G. Kirchhoff, "Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe," Ges. Abh., 279-285.

$$= 0.11593 \dots$$

を代入する。而して $z \rightarrow 0$ のときに $z \log z$ の極限値は零に傾く事を注目して、 $n=1$ のときに於ける $r=b$ の条件を書き直して見ると

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{kb}(B+D) &= 0, \\ \frac{A-C}{2} + B \left(\frac{\log kb}{2} + \frac{1}{k^2 b^2} + \frac{1}{4} \right) - D \left(\frac{\log kb - E}{2} - \frac{1}{k^2 b^2} + \frac{1}{4} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

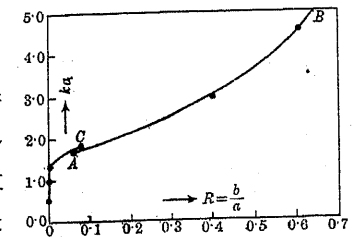
となるのである。即ち $B+D=0$ となり、且つ B 及 D は A 及 C に比して無限小となる。しかし B 及 D は中心に於ける傾斜には影響するものである。従て ka が有限数とすれば B と D とは $r=a$ に於ける条件に對しては影響のないことがわかる。即ち一直徑を節線とする振動は全く自由な圓板の振動と同じになるのである。即ち中心の固定といふことは斯る振動に對しては影響のないことがわかる。

さて、一直徑を節線とする振動の最低の振動数は零であり、換言すれば一直徑の周囲の剛體的運動になるものである。次に中心に於ける傾斜を拘束するときには振動数が與へられるものである。しかしながら $r=a$ と $r=b$ との条件から $n=1$ のときには

$$ka=0, \quad kb=0$$

となり、 $b=0$ といふ極限の場合にはやはり振動数が零となる。

しかしながら前に掲げた数の表 ($\frac{b}{a}$ = 有限数) から右圖の AB の如き線を描いておき、これを $b/a \rightarrow 0$ の方へ延長するときはある有限の値に向ふものである。而して $b/a=0$ の近所では b/a の極めて僅かの差によつて ka が非常に變



第 35 圖

化することが知られるのである。それで $r=a$ と $r=b$ との条件から A, B, C, D を消去して作られる行列式を kb が極めて小であるといふ条件のもとに計算してもよい。即ち $n=1$ の場合にはこの行列式は次の様な形を取る：

$$\alpha^4 \begin{vmatrix} \alpha J_1(\alpha) - \eta J_2(\alpha), & \alpha Y_1(\alpha) - \eta Y_2(\alpha), & \alpha I_1(\alpha) - \eta I_2(\alpha), & \alpha K_1(\alpha) - \eta K_2(\alpha) \\ J_2(\alpha), & Y_2(\alpha), & -I_2(\alpha), & -K_2(\alpha) \\ \beta J_1(\beta), & \beta Y_1(\beta), & -\beta I_1(\beta), & -\beta K_1(\beta) \\ J_0(\beta), & Y_0(\beta), & -I_0(\beta), & -K_0(\beta) \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

茲に $\alpha=ka, \beta=kb, \eta=(1-\sigma)$ とする。この式を展開し、 β なる變數を有する Bessel 函數を前掲の級數で置き換へる。而して $\beta \rightarrow 0$ のときに重要な項を取つて行列式を書き直せば次の如くなるのである：

$$\alpha^4 \begin{vmatrix} \alpha J_1(\alpha) - \eta J_2(\alpha), & \alpha Y_1(\alpha) - \eta Y_2(\alpha), & \alpha I_1(\alpha) - \eta I_2(\alpha), & \alpha K_1(\alpha) - \eta K_2(\alpha) \\ J_2(\alpha), & Y_2(\alpha), & -I_2(\alpha), & -K_2(\alpha) \\ 0, & -1, & 0, & 1 \\ 1, & \log \beta, & -1, & (\log \beta - E) \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

この行列式から計算を行ふときには前頁の圖の C 曲線の如くなる。而して之等は $n=1$ の場合の結果である。

次に $n=0$ の場合の計算を行つて見る爲に、 $r=b$ に於ける一般條件式から $b \rightarrow 0$ のときの重要な項目を取つて見ると

$$\left. \begin{aligned} A+B+(B-D)\log kb+DE &= 0, \\ \frac{B-D}{kb} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

この二條件は

$$B=D=-\frac{1}{E}(A+C) \quad (17)$$

とすれば満足する。即ち $r=a$ に於ける一般條件は A, C のみの函數となり、之等から A, C を消去し、且つ $\sigma=0.3$ として振動數の式を出して見ると

$$ka=1.937, 4.573, 7.79, 10.94, \dots$$

の如き根が順次に出る。一層わかり易く書けば、振動數 $\frac{p}{2\pi}$ が

$$p^2 = \frac{Eh^3}{\rho a^4} \times (5.156, 160.2, 1349, 5250, \dots)$$

を以て表される。E は Young 率である。最低の二振動型を示せば右圖の如くなる。

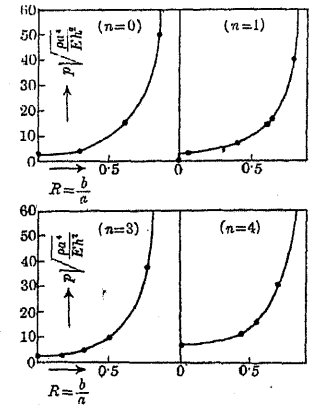


又固定圓の半徑の大きさによつて振動數が如何に變化するかを計算して出して

見ると右圖の如くなる。茲に $\sigma=0.3$ と假定してある。又、 $n=1$ のときのほかは $b/a \rightarrow 0$ 附近の急激な變化は存在しないのである。

尙、中心が固定されたり又は然らざる場合の振動數 $\frac{p_1}{2\pi}$ を出す爲に、節圓を示す所の種々の m を取つて計算した結果を次に示す。 $n=1, 2, 3, \dots$ 等の場合には中心の固定如何によつて振動數に變化が無い。然るに $n=0$ の場合は非常に違つてゐる。

第 36 圖



$$\mu \text{ の表 } \left[p_1^2 = \mu \frac{Eh^3}{\rho a^4} \right]$$

第 37 圖

m	n=0		n=1	n=2	n=3
	中心固定	中心自由			
0	5.16	—	—	10.61	56.87
1	160.2	29.67	154.3	443.9	1040
2	1349	577	1222	2624	4285
3	5250	2983	5266	8574	13287

$n=1, m=0$ の場合に中心の固定圓が有限になるとかなり變化し、 $\mu=1.05$ 位に取ればよい。尙次に示す問題と區別する爲に本節の p を p_1 としておく。

72. 中心を固定せる同轉圓板の固有振動 屈曲抵抗が看過できる場合^{1) 2)}

1) R. V. Southwell, "On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc clamped at its Centre, and on the Effects of Rotation," *Proc. Roy. Soc., London*, 101 (1922), 133-153.

2) H. Lamb & R. V. Southwell, "The Vibrations of a Spinning Disc," *Proc. Roy. Soc., London*, 99 (1921), 272-280.

次の問題として圓板が翼車のごとく同轉する場合を研究して見る。而して圓板が非常に薄く且つ同轉速度が非常に大なる場合を考へると、屈曲に對する彈性抵抗を看過しても差支ない。この條件のもとに先づ撓みの振動方程式を書いて見よう。

今、 ω を同轉速度とすれば、半徑 r に於ける半徑の方向及び圓周方向の張力は單位面積について次の如く書ける：¹⁾

$$P = A(a^2 - r^2)\rho\omega^2, \quad Q = (Aa^2 - Br^2)\rho\omega^2, \quad (18)$$

但し

$$A = \frac{1}{8}(3 + \sigma), \quad B = \frac{1}{8}(1 + 3\sigma). \quad (19)$$

之等の値は圓板に直角なる小變位 w によつて殆ど變化しない。 (r, θ) なる場所の振動方程式は次の如く書き得る：

$$\rho r \delta \theta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(Pr \delta \theta \frac{\partial w}{\partial r} \right) \delta r + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(Q \delta r \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \delta \theta.$$

之を書き直して

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Pr \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{Q}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \quad (20)$$

w が $\cos n\theta \cos pt$ に比例して變化するものとして置けば、

$$A(a^2 - r^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - 2Ar \frac{\partial w}{\partial r} + \left(\frac{p^2}{\omega^2} + n^2 B - \frac{n^2 A a^2}{r^2} \right) w = 0 \quad (21)$$

が得られ、之が振動の微分方程式となる。この式を解く爲に

$$\frac{p^2}{\omega^2} + n^2 B = s(s+2)A, \quad x = \frac{r^2}{a^2} \quad (22)$$

と置いて見ると、上の方程式は次の如くなる：

$$4 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x(1-x) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + \left\{ s(s+2) - \frac{n^2}{x} \right\} w = 0. \quad (23)$$

又、上式に於て

$$w = yx^{n/2} \quad (24)$$

と置けば、

$$4x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \{ 1 + n - (n+2)x \} \frac{dy}{dx} + \{ s(s+2) - n(n+2) \} y = 0 \quad (25)$$

¹⁾ A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, § 102, Case (b).

となる。之は又次の形に書き直される：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0, \quad (26)$$

但し $\alpha = \frac{1}{2}(n-s), \quad \beta = \frac{1}{2}(n+s+2), \quad \gamma = n+1.$

上の方程式は hypergeometric の型であり、 $x=0$ で有限になる解式は

$$y_1 = C \left\{ 1 + \frac{\alpha\beta}{1.1\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.2\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots \right\} \quad (27)$$

である、茲に C は任意常數である。上式は又 Gauss の表し方により

$$y_1 = CF(\alpha, \beta, \gamma, x) \quad (27')$$

と書き得る。これが振動形を表す式である。こゝに於て r, θ を用ひて w の式を書いて見ると次の如くなる：

$$\begin{aligned} w &= C \left(\frac{r}{a} \right)^n F \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{r^2}{a^2} \right) \cos n\theta \cos pt \\ &= C \left(\frac{r}{a} \right)^n \left\{ 1 + \frac{(n-s)(n+s+2)}{2(2n+2)} \frac{r^2}{a^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-s)(n-s+2)(n+s+2)(n+s+4)}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right\} \cos n\theta \cos pt. \end{aligned} \quad (28)$$

この級数は $r < a$ に於て收斂するけれども、 $\gamma = \alpha + \beta$ なる關係から $r = a$ なる縁の點では次の條件¹⁾が満足するに非ざれば對數的に無限大となる：

$$s = n + 2m. \quad (29)$$

この關係を用ひる時は

$$\begin{aligned} w &= C \left(\frac{r}{a} \right)^n \left\{ 1 - \frac{m(m+n+1)r^2}{1.(n+1)a^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1)m(m+n+1)(m+n+2)r^4}{1.2(n+1)(n+2)a^4} + \dots \right\} \cos n\theta \cos pt. \end{aligned} \quad (30)$$

之等の振動は m 節圓と n 節徑のあることを意味する。而して振動數は次式から出し得る：

¹⁾ Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 2, Chap. 18.

$$\frac{p_2^2}{\omega^2} = (n+2m)(n+2m+2)A - n^2B, \quad (31)$$

但し A, B は前に示した値を持つてゐる。この p_2^2/ω^2 が板の直径と厚さに無関係であることは dimension の理論からもわかるのである。

$n=0$ といふ型は圓板の中心が動くからタービン翼車のやうな場合に不都合である。しかしそれには一般に次の如き第二の解を加へれば用ひることができる。

$(\frac{r}{a})^s = x$ が一定の所で w に拘束を與へるには前の微分方程式の第二の解、即ち

$$y_2 = C' x^{s-\gamma} F(\alpha', \beta', \gamma', x) \quad [s \neq 0] \quad (32)$$

を考へる、但し

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + 1 - \gamma = -\frac{1}{2}(s+n), \\ \beta' &= \beta + 1 - \gamma = \frac{1}{2}(s+2-n), \\ \gamma' &= 2 - \gamma = 1 - n. \end{aligned} \right\}$$

又 $n=0$ のときには

$$y_2 = C' \left[F(\alpha, \beta, 1, x) \log x + \left\{ \frac{\alpha\beta}{1^2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{2}{1} \right) x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1^2 2^2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \right) x^2 + \dots \right\} \right]$$

を考へればよい。之等の式の収斂についての議論は省略しておく。斯様にして

$$y = y_1 + y_2 \quad (33)$$

を作れば境界の條件を満足させることができるものである。

タービン翼車の實際問題として面白い場合は前にも示してある様に $m=0$ 即ち節圓のないときである。即ち y_1 の方のみを取り

$$w = C \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n\theta \cos p_2 t, \quad (34)$$

但し

$$\frac{p_2^2}{\omega^2} = \frac{1}{4}(1-\sigma)n^2 + \frac{1}{4}(3+\sigma)n. \quad (35)$$

$n=2$ のとき、即ち二節直径のときには

$$\frac{p_2^2}{\omega^2} = \frac{1}{2}(5-\sigma).$$

$\sigma = \frac{1}{2}$ に取れば $p_2/\omega = 1.5$ となる。

尙 $(p_2/\omega)^2$ の種々の場合の値を計算して見ると次の如くなる。但し $\sigma=0.3$ に取つてあり、又 $n=0$ は中心が動くけれども振動數の方は中心固定のときと同じと見て附加へておいた。

$p_2^2/\omega^2 = \lambda$ の表

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$m=0$	0	1	2.35	4.05
$m=1$	3.3	5.95	8.95	12.3
$m=2$	9.9	14.2	18.85	23.85
$m=3$	19.8	25.75	32.05	38.7

73. 中心を固定せる同轉圓板の固有振動 遠心力と屈曲抵抗とを考慮に入れる場合

同轉圓板の一般方程式は次の如く書くべきである：

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(P r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{Q}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{E h^2}{3(1-\sigma^2)} \nabla^4 w. \quad (36)$$

しかしこの式を解いて境界條件を満足させることは非常に困難である。それで求心力のみの働く場合と、屈曲抵抗のみの働く場合とに分けて考へ、その兩者を如何に組合せればこの一般の振動の解に近いものが出るかを研究して見るのである。それには Rayleigh¹⁾ の假定せる振動型から勢力式を出して勢力保持の法則を用ひれば容易にしらべることができる。

遠心力によるポテンシャル勢力は

$$V_2 = h \iint \left\{ P \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} r d\theta dr, \quad (37)$$

屈曲によるポテンシャル勢力は

$$V_1 = \frac{E h^3}{3(1-\sigma^2)} \iint \left\{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\sigma)(w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy}) \right\} dx dy. \quad (38)$$

¹⁾ Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, §§ 88, 89.

之を極座標に直すには

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$w_{xx}^2 - w_{xx} w_{yy} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

を用ひればよい。次に運動勢力は

$$T' = \rho h \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta. \quad (39)$$

今

$$w = \phi(r, \theta) \cos pt \quad (40)$$

と假定すれば、勢力保持の関係から

$$p^2 = \frac{V_1(\phi) + V_2(\phi)}{T(\phi)} \quad (41)$$

となる。但し $T(\phi)$ は T に於て $\frac{\partial w}{\partial t}$ の代りに ϕ と置いたものに等しい。これに極小勢力の原理を適用しても勿論差支がない。

さて遠心力のみの働く場合に上述のやうな関係を出して見ると

$$p_1^2 = \frac{V_2(\phi)}{T(\phi)} \quad (42)$$

となり、屈曲力のみの働く場合には

$$p_2^2 = \frac{V_1(\phi)}{T(\phi)} \quad (43)$$

となる。従て次の関係が得られる:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad (44)$$

この関係に前節に出した p_1^2 及 p_2^2 を適用すれば一般の場合の振動数を容易に得ることができる次第である。

こゝに注意すべきことは、 p_1^2 及 p_2^2 は前に述べた如く、遠心力のみが復原力として働く場合に於ける振動型についてのものと、弾性力のみが働く場合に於ける振動型についてのものとから引用するのであるから、この $p_1^2 + p_2^2$ を取つても遠心力と弾性力との両方が同時に働く場合の振動型についての p^2 を表すことにならな

いのである。但し式 (40) の ϕ が両方の影響を結合せる場合のものであれば (44) は勿論正確である。しかしそのやうな w は容易に出し難い爲に現在の方法を用ひるのであるから、具體的問題の上では (44) が正確には成立せぬものと見てよいのである。今、 ϕ を両方の結合せる正確な場合の振動型に相當するもの、 ϕ_1 を弾性力の影響のみ受けるときの振動型に相當するもの、 ϕ_2 を遠心力の影響のみ受けるときの振動型に相當するものとし、又 $V_1(\phi)$, $V_2(\phi)$, $T(\phi)$, $V_1(\phi_1)$, $T(\phi_1)$, $V_2(\phi_2)$, $T(\phi_2)$ を夫々之等に相當せるポテンシャル勢力及び運動勢力とすれば、拘束のある運動に對する Rayleigh の勢力の原理によつて

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_1(\phi_1)}{T(\phi_1)} < \frac{V_1(\phi)}{T(\phi)}, \\ \frac{V_2(\phi_2)}{T(\phi_2)} < \frac{V_2(\phi)}{T(\phi)} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

なる關係を生ずる。然るに現在の具體の場合には

$$p_1^2 = \frac{V_1(\phi_1)}{T(\phi_1)}, \quad p_2^2 = \frac{V_2(\phi_2)}{T(\phi_2)} \quad (46)$$

であり、又 (41) の抽象的理論上からは

$$p^2 = \frac{V_1(\phi) + V_2(\phi)}{T(\phi)} \quad (41')$$

従て、(45), (46), (41') から

$$p_1^2 + p_2^2 < p^2 \quad (47)$$

なる條件が出る。即ち特別な場合を別々に正確に計算して出した夫々の振動数を加へ合せたものは正確なる振動数よりも小なる事が知られるのである。

尙、我々は初めから圓板の振動型 ϕ_3 を假定して、これから回転によるポテンシャル勢力と弾性によるポテンシャル勢力及び運動勢力を算出することもできる。これを夫々 $V_1(\phi_3)$, $V_2(\phi_3)$, $T(\phi_3)$ と書き、且つその振動数を $p_3/2\pi$ とすれば、再び Rayleigh の拘束のある運動の勢力の關係から

$$p^2 < p_3^2 \quad \left(p^2 < p_3^2 = \frac{V_1(\phi_3) + V_2(\phi_3)}{T(\phi_3)} \right) \quad (48)$$

となる。故に一般に

$$p_1^2 + p_2^2 < p^2 < p_3^2 \tag{49}$$

なる関係が得られるのである。茲に p_1^2, p_2^2, p_3^2, p^2 は前に述べたやうな意味を持つてゐる。

今一例として $E=2 \times 10^{10}$, $\rho=7.8$, 板の厚さ=2, 外の半径=60, $w=100\pi$ (何れも C.G.S. 単位) と取れば

$$\frac{p_3^2}{\pi^2} = 2.37500 \times 10^4, \quad \frac{p_1^2}{\pi^2} = 2.16485 \times 10^4.$$

従て

$$\frac{p}{\pi} > \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{\pi^2}} \quad \text{即ち} \quad > 213.07.$$

又別に

$$w = \left(1 + f \frac{r^2}{a^2}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta} \sin 2\theta \sin p_3 t$$

と假定し, (48) の括弧の中の右側が極小となるやうに取つて計算して見ると

$$\frac{p_3}{\pi} = 213.74,$$

即ち

$$\frac{p}{\pi} < 213.74$$

となる。従て振動数は 0.3% だけ異なる兩極限の範囲内にあることが認められる。これによつて實際の目的に對しては

$$p^2 = p^2 + p_3^2 \quad \left[\begin{array}{l} p_1, p_2 \text{ は各, 正確なもので} \\ \text{も近似的のものでもよい} \end{array} \right]$$

を用ひても大して誤のないことがわかるであらう。

74. 厚さの變化する圓板の固有振動

均一の厚さを有する回轉圓板の固有振動を出すことさへかなり困難であつた。それでタービン翼車の如く厚さがその半径の方向に向つて變るものでは一層複雑になるのは當然のことといはねばならぬ。しかしその研究方法は均一厚さの圓板

の場合と大して變りがない。即ち圓板が弾性のみの影響を受けるときと遠心力の影響のみを受けるときとに分けて考へ、後に之を組合せるか又は初めから振動型を假定して近似的に解くかある。先づ二つのものに分ける方から考へようと思ふ。¹⁾

弾性のみに支配される場合の振動方程式が次の如くなることは説明を俟たぬ。

$$\frac{E}{1-\sigma^2} \nabla^2 (I \nabla^2 w) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{50}$$

茲に ρ は密度, E は Young 率, σ は Poisson 比, w は圓板の撓み變位, $2h$ は半径 r なる點の板の厚さ, $I = \frac{2}{3} h^3$, 又

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

とする。今の場合には

$$h = c \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta} \tag{51}$$

と取つて見る。 c と β は厚さの變化の有様によつて變化し得るものである。(51) を (50) に入れると

$$\nabla^2 \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{-3\beta} \nabla^2 w \right\} + \frac{3\rho(1-\sigma^2)}{Ec^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{52}$$

となる。又振動型として

$$w = W \sin(n\theta + \alpha) \sin p_1 t \tag{53}$$

と書き, (52) に入れれば

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{-3\beta} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) W \right\} - \frac{k^2}{a^4} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta} W = 0, \tag{54}$$

但し

$$k^2 = \frac{3\rho p_1^2 a^4 (1-\sigma^2)}{Ec^2} \tag{55}$$

$r = a\eta$ と書けば (54) は次の如くなる:

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} - \frac{n^2}{\eta^2} \right) \left\{ \eta^{-3\beta} \left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} - \frac{n^2}{\eta^2} \right) W \right\} - k^2 \eta^{-\beta} W = 0. \tag{56}$$

この式の解を

¹⁾ J. Prescott, *Applied Elasticity* (1924), Chap 18.

$$W = \sum_k C_k y^k \quad (57)$$

の如く假定し、且つ $2+3\beta=l$, $4+2\beta=m$ と書けば、中心固定板の場合の(56)の解として

$$W = A\eta^{l+m} F(m, n, l) + B\eta^n F(m, n, -l) \quad (58)$$

が作られる、但し

$$F(m, n, l) = 1 + \frac{k^2 \eta^m}{m(m+2n)(m+l)(m+l+2n)} + \frac{k^4 \eta^{2m}}{m(m+2n)2m(2m+2n)(m+l)(m+l+2n)(2m+l)(2m+2l+2n)} + \dots$$

この結果を $r=a$ に於ける自由の条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ h^3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} + (1-\sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ h^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

に入れて A/B の比を消去し振動数を求めることができる。しかしあまり複雑であるからこの方法だけを説明するに止めておく。

次に遠心力のみに支配される場合を考へて見るに、その振動の運動方程式は次の如く置かれる：

$$\frac{1}{hr} \frac{\partial}{\partial r} \left(hrP \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{Q}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (60)$$

茲に P, Q は遠心力によつて定まる所の半径方向及び直角方向の應力を示すものであつて、

$$h = c \left(\frac{r}{a} \right)^{-\beta} \quad (61)$$

の場合には¹⁾

$$\left. \begin{aligned} P &= \rho \omega^2 a^2 \frac{(3+\sigma)}{8-(3+\sigma)\beta} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+\beta-1} - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\}, \\ Q &= \frac{\rho \omega^2 a^2 (3+\sigma)}{8-(3+\sigma)\beta} \left\{ q \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+\beta-1} - \frac{1+3\sigma}{3+\sigma} \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

¹⁾ A. Stodola, *Dampf- und Gasturbinen*, § 78; 其他.

但し q は

$$q^2 + \beta q - 1 - \sigma \beta = 0 \quad (63)$$

の大なる方の根である。即ち $q = \sqrt{\left(1 + \sigma \beta + \frac{1}{4}\beta^2\right) - \frac{1}{2}\beta}$ である。今

$$w = W \sin(n\theta - \alpha) \sin p_1 t \quad (64)$$

と書いて(60)に入れ、且つ $\eta = r/a$ と置けば、

$$\frac{1}{\eta h a^2} \frac{d}{d\eta} \left(h \eta P \frac{dW}{d\eta} \right) - \frac{n^2 Q}{a^2 \eta^2} W + \rho p_1^2 W = 0 \quad (65)$$

となる。この式を解く爲に

$$W = \sum_k C_k \eta^k \quad (66)$$

と書いて代入すれば、

$$W = \eta^{k_1} \{ C_{k_1} + \eta^\gamma C_{k_1+\gamma} + \eta^{2\gamma} C_{k_1+2\gamma} + \dots \}, \quad (67)$$

但し一般に

$$\frac{C_{k_1+\gamma}}{C_{k_1}} = \frac{(\kappa - \gamma)(\kappa + 2 - \gamma - \beta) - n^2 b - \frac{p_1^2}{H \omega^2}}{\kappa(\kappa + \gamma - 1) - n^2 q}, \quad (68)$$

且つ k_1 は

$$k_1 = \frac{\sqrt{4n^2 q + (1-q)^2} + (1-q)}{2} \quad (69)$$

であり、又 $\gamma = 3 - q - \beta$, $b = \frac{1+3\sigma}{3+\sigma}$, $H = \frac{3+\sigma}{8-(3+\sigma)\beta}$ とする。

(67)の級数は $C_{k_1+m\gamma+\gamma} = 0$ のときに $(m+1)$ 項だけあり、又 $C_{k_1+m\gamma+\gamma}$ が零となる爲には(68)の κ の代りに $k_1+m\gamma+\gamma$ と置いた場合の分子が零になりさへすればよいことがわかる。このやうにして零に置いた分子から次式が出る：

$$\frac{p_1^2}{\omega^2} = \frac{3+\sigma}{8-(3+\sigma)\beta} \left\{ (k_1+m\gamma)(k_1+m\gamma+2-\beta) - \frac{1+3\sigma}{3+\sigma} n^2 \right\}, \quad (70)$$

茲に $\gamma = 3 - q - \beta$ であり、 q と k_1 は(63)と(69)とから與へられる。(67)の級数が $(m+1)$ 項あることとその式の形の研究から、 W が η の 0 と 1 との間に於て m 回 ($\eta=0$ に於て $W=0$ となることの外に) 零となることがわかる。この関係と(64)

とから w は m 節圓 n 節直徑のある振動變位を表してゐることが了解されるのである。而して $r=a$ が自由縁であることは (62) に示された静力學的問題の關係から近似的に満足されるものである。(70) は斯る問題に於ける振動週期を與へるものである。

微分方程式を用ひて上の如く二種類の問題を解いてから厚さの變化する同轉翼車の振動を決定することは Dr. Fr. Dubois¹⁾ も試みてゐる。Dubois は厚さの變化が半徑の或る乗算に比例するやうな場合を論じてゐるが餘り具體的な結果は出てゐない。其他 König²⁾ のやつたやうに Lagrange の式と變分法とを用ひて、均一の厚さの圓板の正確なる解から厚さの變化する場合の圓板の固有振動を稍近似的に出す方法もある。

以上の如くして二つに分けた問題の夫々の振動週期を作つておき、之を均一の厚さの板の場合に論ぜる如くその結合された問題の振動週期を出すことができるのである。圓板の振動方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(2hrP \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{2hQ}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{2E}{3(1-\sigma^2)} \nabla^2 (h^3 \nabla^2 w) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (71)$$

であるから、勢力式から運動の微分方程式を作る場合の逆の方法を取つてこの式に $\frac{\partial w}{\partial t} drrd\theta dt$ を乘じ、之を $dr, d\theta, dt$ に就て積分する。 r は圓板の面積を掩ふやうに t は任意の低い極限から t までの積分を行ふものとする。斯くして運動勢力の項

$$T = \iint \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta, \quad (72)$$

遠心力に支配されるポテンシャル勢力の項

$$V_2 = \iint \left\{ hP \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + hQ \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta, \quad (73)$$

弾性力に支配されるポテンシャルの勢力の項

¹⁾ Fr. Dubois, "Ueber Transversalschwingungen der Dampfturbinen-Laufradscheiben," *Schweiz. Bauz.*, 89 (1927), 149-153.

²⁾ M. König, "Ueber ein neues Verfahren zur Ermittlung von Schwingungsperioden von Turbinenscheiben," *Verh. 2-int. Kongr. tech. Mech.* (Zürich, 1926), 173-177.

$$V_1 = \frac{1}{3} \frac{E}{(1-\sigma^2)} \iint h^3 \left[(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] r dr d\theta \quad (74)$$

の和が下の如く定數となるものである:

$$T + V_1 + V_2 = \text{定數}. \quad (75)$$

(74) に於て極座標を用ひるには

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

のやうにすればよいことを注意しておく。今

$$w = \phi(r, \theta) \cos pt \quad (76)$$

として、

$$p^2 = \frac{V_1(\phi) + V_2(\phi)}{T(\phi)} \quad \left[p_1^2 = \frac{V_1(\phi)}{T(\phi)}, p_2^2 = \frac{V_2(\phi)}{T(\phi)} \right] \quad (77)$$

を出す事は均一の厚さの板の場合と同じであり、結局

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad (78)$$

となるものである。茲に p_2 は遠心力の影響のみを考へたときの正確なる p_2 であり、 p_1 は弾性力のみを考へたときの p_1 である。均一の厚さの板のときと同じく、この $p = (p_1^2 + p_2^2)^{1/2}$ はたとひ p_1, p_2 が微分方程式から出した正確なものであつても、決して正しいものでなく、眞實のものよりは小さくなるものである。即ち p_1, p_2 が兩方の影響を結合せるやうな振動型から算定できる場合のみに $p^2 = p_1^2 + p_2^2$ といふことがあり得るものである。

振動型を初めから假定して p_1^2 と p_2^2 とを (77) によつて出すことも勿論差支ない。しかしその場合には全體の振動型を假定する結果算出せる $p^2 = (p_1^2 + p_2^2)$ が眞實のものよりも大きくなることは勿論である。普通の計算法では簡單の爲にこの最後の方法を採用することが多い。

75. タービン翼車固有振動の近似的算定法

これまで述べた所の固有振動の算定法は割合に正確であるけれども、主としてその微分方程式を解く上に大なる困難があつたのである。それでもつと簡単に複雑な場合を解く方法はないものであらうか。それには多少の不確實さへ問題にし

なければ種々の道があることに誰しも気がつくであらう。その中でも Rayleigh の方法を用ひるのが最も簡単である。或は Ritz の方法や又はこれ等に類似の方針を用ひて圖式に解くことなど種々のものがある。

Rayleigh の方法を應用するには, (37), (38), (39) 又は (73), (74), (72) から板の遠心力の爲のポテンシャル勢力 V_2 , 弾性抵抗の爲のポテンシャル勢力 V_1 , 運動勢力 T の式を出しておき, 撓み w に境界の條件を満足するやうな形を假定して前記 V_1, V_2, T の中に代入する。而して時間的に見て夫々の極大値 V_1 極大, V_2 極大, T 極大を作れば勢力保持の法則によつて明かに

$$V_1 \text{ 極大} + V_2 \text{ 極大} = T \text{ 極大} \quad (79)$$

今假定せる w が

$$w = \phi(r, \theta) \cos pt \quad (80)$$

の如き形をなすとすれば

$$p^2 = \frac{V_1(\phi) + V_2(\phi)}{T(\phi)} \quad (81)$$

となるものである, 但し $T(\phi)$ は T 極大に於て $\frac{\partial w}{\partial t}$ の代りに $\phi(r, \theta) \cos pt$ と置いたものに等しい。 $\phi(r, \theta)$ は勝手に假定せるものであるから (81) の p^2 は眞實の p^2 に比して必ず大となるものである。それで $\phi(r, \theta)$ 中に何か適當に變化し得る parameter α があるとすれば, この α を種々に變へて見て (81) の p^2 が極小になるやうにすれば多少なりとも眞實の p^2 に近づけることができるのである。それで我々は次の如く

$$\frac{dp^2}{d\alpha} = 0 \quad (82)$$

によつて α を決定し, この α を (81) 中に用ひておけばよいのである。この方法は, 振動形の假定さへよければ, その振動的の誤差を 1% か 2% に近づけることができるものである。Stodola¹⁾ はこの方法を用ひて翼車の固有振動数を算出することに成

¹⁾ A. Stodola, "Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern," *Schweiz. Bauz.*, 63 (1914), 251-255, 271-275, 318-319.

功した。しかしこの假定を作る前に比較的單純な場合の正確なる振動の形を出しておくことはこの假定を一層正しいものに近づけるものである。この意味に於て既に述べた圓板の計算法はかなり大切なものである。

次に Ritz の方法を翼車の振動に應用したのも Stodola¹⁾ である。この方法によれば Rayleigh の方法よりも一層正確なる結果が出ることはいふまでもない。

又, Rayleigh の方針を用ひて問題を圖式に解くことも Stodola²⁾ によつて試みられた。即ち圖上に於て w の曲線を假定して作り, 之から圖式に $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \frac{\partial w}{r \partial \theta}$ 其他を導き出し, それを (37), (38), (39) や (73), (74), (72) にあてはめて V_1 極大, V_2 極大, T 極大を作り, 之を (81) の如き公式によつて p^2 を決定するのである。而して假定せる w を少しづつ變更して p^2 が極小になる所を取ればよい。委しい事は Stodola の教科書³⁾ や論文にあり, 且つこゝで一々説明することは煩瑣に堪へぬから省略しておきたいと思ふ。Oehler⁴⁾ はこの方法を厚さの變化する圓板に應用し, 且つその結果を實驗と比較した所が非常によく一致したといふことである。しかし筆者は Stodola の方法にある所の $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ の如き微分係数を圖上からそれ程よく出し得るものかどうかを疑ふものである。

終りに附加へたい事は, Hahn⁵⁾ が回轉圓板の振動問題を積分方程式を用ひて解決したことである。その應用はかなり不便であるけれども理論上の事柄としては價值あるものと考へられる。

76. 翼車上の熱の分布がその固有振動週期及び安定度に及ぼす影響

翼車上の熱が均一であれば固有振動に殆ど影響がない。しかし前にもいひ及ぼしてあるやうに翼車上に於ける熱の分布が均一でないときには振動週期に著し

¹⁾ A. Stodola, 前掲

²⁾ A. Stodola, *Dampf- und Gasturbinen*, § 187.

³⁾ E. Oehler, "Biegungsschwingungen von Dampfturbinenlaufrädern," *ZVDI*, 69 (1925), 335-340.

⁵⁾ E. Hahn, "Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique," *Schweiz. Bauz.*, 88 (1926), 1-4.

く影響を及ぼすものである。実際の翼車はどうしても縁の方が熱く中央に近い所が温度が低いから、この影響は是非とも考慮に入れるべきであると思ふ。縁が熱く内側が熱くないときには縁の方が押す力を受け、中央が張力を受けることになる。極端な場合には縁が安定を失つて buckle することさへもあり得るのである。¹⁾ しかしこの buckling が起る前に固有振動数の方は著しく減じて行くものである。この問題に關して Stodola²⁾ が試みた近似計算法を茲に示したいと考へる。

熱によつて板面方向に直接の應力を生ずることは、恰も遠心力によつて板面内に應力を生ずることと相似てをり、従てその爲に屈曲に對する弾性抵抗に影響を與へることも殆ど同様であると見做してよい。但しその大きさや割合は勿論違つてゐる。それでポテンシャル勢力に對する表し方も同様に考へることが出来る譯である。(73)に於て遠心力即ち板面内に r 及 θ の方向に單位斷面積につき P, Q なる力が働く場合の勢力式

$$V_2 = \iint \left\{ hP \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + hQ \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (73)$$

が出してあつた。茲に $2h$ は板の厚さを示す。この P, Q は熱の爲に生ずる熱應力と見てもよい譯である。即ち熱應力に對しては

$$P = -\beta T, \quad Q = -\beta T \quad \left[\beta = \frac{E\alpha}{1-2\sigma} \right] \quad (83)$$

なる關係がある。茲に β は膨脹係數と弾性率とに關係する一定の係數 (α は膨脹係數), T は平温に比較しての温度を示す。従て熱應力の爲のポテンシャル勢力は

$$V_3 = - \iint \beta h T \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (84)$$

で表される。又遠心力に支配される勢力は前の如く

$$V_2 = \iint \left\{ hP \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + hQ \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (85)$$

となり、弾性抵抗による勢力は

¹⁾ A. Nadai, "Ueber das Ausbeulen von kreisförmigen Platten," ZVDI, 59 (1915), 173-174.

²⁾ A. Stodola, "Dampf- und Gasturbinen," §§ 187a, 187b.

$$V_1 = \frac{1}{3} \frac{E}{(1-\sigma^2)} \iint h^3 \left[(V^2 w)^2 - 2(1-\sigma) \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w^2}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \right] r dr d\theta \quad (86)$$

となる。運動勢力は

$$T = \iint \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta \quad (87)$$

で示される。時間に就ての之等の極大値を取り

$$T_{\text{極大}} = V_1 \text{極大} + V_2 \text{極大} + V_3 \text{極大} \quad (88)$$

なる關係が成立する。従て

$$w = \phi(r, \theta) \cos pt$$

なる變形を假定すれば、前と同じく

$$p^2 = \frac{V_1(\phi) + V_2(\phi) + V_3(\phi)}{T(\phi)} \quad (89)$$

の如くして振動数を求めることができるものである。茲に $T(\phi)$ は T に於て $\frac{\partial w}{\partial t}$ の代りに $\phi(r, \theta) \cos pt$ と置いたものを取ればよい。 V_3 は buckling に近い方の状態では V_1 や V_2 とは反對の符號を持つものであるから、この大きさによつて p^2 はいくらでも小さくなり得るものである。

buckling の極限では普通振動数が零となる、即ち $p^2=0$ 。従て

$$-V_3(\phi) = V_1(\phi) + V_2(\phi). \quad (90)$$

この V_3 の中にある温度 T が適當の大きになりさへすれば buckling が起る筈である。しかし $V_2(\phi)$ の如く遠心力による勢力はかなり大なるものであるから、實際には buckling が餘り起らぬものである。寧ろ回轉しない圓板に於て斯る現象が起り易いものであつて、回轉中の翼車では單に振動数が多少變化するのみである。

77. タービン翼車振動の試験

タービン翼車の固有振動の週期や又は蒸氣壓分布の部分的異同による強制振動の型を研究する爲種々の方法が考へられてゐるやうである。こゝには極めて簡

單なる試験法の一例として Freudenreich¹⁾ がその報告中に掲げてゐる方法を示して見たいと思ふ。その方法は回轉しない翼車の振動を見ることと同轉中に於ける振動の型を見ることとに分けることができる。何れも強制振動の種類に屬するものであるけれども、その振動振幅が異常に大きくなつた所が共振であるから、このやうな週期がその振動型の固有振動週期であると考へることができる。

先づ回轉しない場合を述べて見ると、それには垂直な軸上に水平に置かれた翼車の一部に交流マグネットを置き、その交流の周波数を種々に變化して強制振動の型を見るのである。この型をしらべるには、翼車の上面に砂を撒き振動と共に砂が節線の附近に集まることによつてその振動型を見ればよいのである。交流の周波数に應じて節線の数が違つて來ることもわかる。これは強制振動の振動数に近い振動数の固有振動の節線が現はれるからである。而して丁度共振になつた所では振動振幅も大きくなるものである。普通の翼車に就て試験をして見ると、節圓は無く節直徑は三四本位迄もあるものがよく見出される。勿論節線のないものもあるのである。しかし極めて薄い翼車では二節圓と一節直徑を有するものも現はれることがあるが、これは普通の厚さのものでは殆ど得られないやうである。節直徑がなく節圓のみある強制振動は特別に圓板の中心のみに強制力の働く場合に限られてゐるやうである。その理論も近頃研究された。²⁾

次に回轉中の強制振動を見る爲には水平車軸の一端に翼車をつけ、之を齒車装置からのモートルを以て回轉せしめる。而して直流マグネットを翼車の周囲の適當な點數箇所に置き、翼車の回轉中に空間に固定された外力を以て振動を誘起させるのである。之が恰も吹出し口からの蒸氣壓の分布の異同に相當するものと考へることができる譯である。マグネットの置き方の一例を擧げて見ると、圓周上四點にマグネットを置き、一つのマグネットに對して他の三つを夫々 $120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ の

¹⁾ J. von Freudenreich, "Vibration of Steam Turbine Discs," *Engineering*, 119 (1925), 2-4, 31-34.

²⁾ W. Flüge, "Die erzwungenen Schwingungen der Kreisplatten," *ZS. f. tech. Phys.*, 13 (1932), 199-204.

圓周上に置いて見るのである。然るときは一節直徑の振動を誘起させるには一つのマグネットを働かせればよく、二節直徑のものを誘起させるには $0^\circ, 180^\circ$ の二つのマグネットを働かし、三節直徑のものを誘起させるには $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ の三つのマグネットを働かせればよいのである。斯様にして翼車の振動形は空間に對して固定された位置にあり、この形を見るには撓みを記録するやうな機構を用ひて之を圓筒上其他に記録すればよい筈である。この場合にも共振に相當する所では常に大なる振幅が観測されるものである。

General Electric Co. では振動振幅を測定する爲に翼車上に翼車と共に回轉するか又は翼車に接近して置いてある magnetic coil を用ひ、翼車の振動と共にその magnetic flux に變化を與へ、從てコイルの電流が變化するから、この電流變化を oscillograph に書かせる方法を採用して好結果を収めたといふことである。この方法によると翼車の振動が定常的でなく極めて複雑な場合をも記録させることができる。

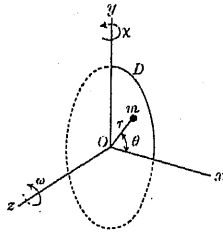
振動の生成や減衰を見るには、回轉を除々に上げて共振の附近になつた所でマグネットのスキッチを急に入れたり、抜いたりすればよい。急に入れると時間と共に振幅がどんどん増加し、急に抜くと振動が數秒乃至數十秒内に減衰するものである。この試験をやつておけば實際のタービンの回轉中の性質を調べる上にかなり役立つものである。

終りに翼車と隔壁間の吸引力の増減によつて起る強制振動の試験は別の方法を以て行ふべきことを注意したいと思ふ。この試験の爲にはそれに適した模型装置即ち間隙のある平行な二つの壁の一方が撓み得るやうにしておきその間隙に瓦斯體を送つて、壁の振動を研究すればよいのである。

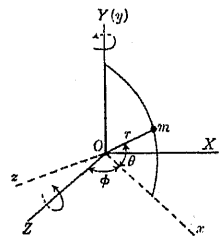
78. 船用タービン翼車のジャイロ作用によつて起る振動

種々の原因によるタービン翼車の振動の研究は餘り正確でないといへ、數多の人によつて手をつけられてゐるが、そのジャイロ作用による振動の研究は殆ど試みられてをらなかつた。而してタービン機關の強力なるものは主として船用のものであり、而もその翼車が船舶の yawing や pitching 等の動搖によつて著しい

ジャイロ作用を受けるものであるから、非常に重要な問題を看過してつた譯である。末廣博士¹⁾はこの點に着眼してその振動問題を主として理論的及び模型實驗的に研究されたのである。その大要を次に示したいと思ふ。



第 38 圖



第 39 圖

計算を便利にする爲に均一の厚さで而も翼のない圓板を考へる。左圖に於てDをタービン翼車とし、その回轉速度を ω とする。又、その回轉軸を z としておく。翼車の中心Oから y なる上下の軸を作り、この y 及 z に垂直なる軸を x とする。この翼車が y 軸の周圍に χ なる角速度を以てprecessionをなすとすれば、翼車中の (r, θ) なる點にある質量 m はこの翼の平面に垂直の方向に $2r\omega\chi \sin \theta$ なる加速度を受けるものである。これに m なる質量を乗すればジャイロ力となるものである。

上述の加速度のあることの説明は末廣博士も言及してをられるやうに力學の専門家にはわかり切つた事であるけれども、問題の混亂を防ぐ爲に一應その成り立ちを説明しておくことにする。左圖に於て、 x, y, z は上述のものと同じく、又 X, Y, Z は空間に固定された軸であつて Y は

原點Oを共通として y と一致せるもの取る。而して m のある點の X, Y, Z 軸に關しての座標を X, Y, Z 及 r, ϕ, θ としておく。然るときは

$$X=r \cos \theta \sin \phi, \quad Y=r \sin \theta, \quad Z=r \cos \theta \cos \phi,$$

茲に $\theta=\omega t, \phi=\chi t$ としてよい譯である。従て m の X, Z の方向の加速度は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= -2r\omega\chi \sin \theta \cos \phi - r(\omega^2 + \chi^2) \cos \theta \sin \phi, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= 2r\omega\chi \sin \theta \sin \phi - r(\omega^2 + \chi^2) \cos \theta \cos \phi. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

¹⁾ 末廣恭二, "On the Gyroscopic Vibration of Marine Steam Turbine Discs," 造船協會會報, 39 (1926), 121-123.

然るに m の點の Oz といふ移動軸の正の方向の加速度は

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} \sin \phi - \frac{d^2 X}{dt^2} \cos \phi$$

であるから、この中に(91)を入れれば

$$2r\omega\chi \sin \theta \quad (92)$$

といふ加速度が得られる。即ち前述の意味が明瞭となつた次第である。

さて本問題に立ち歸つて考へるに、圓板中の m なる點は ω なる回轉速度を有してゐるから、 m なる定まつた一點についてのジャイロ力を考へて見ると

$$2mr\omega\chi \sin(\theta + \omega t)$$

となる譯である。即ち翼車の回轉方向と逆の方向に 2π なる角波長の波動が ω なる角速度を以て傳播することがわかる。前に吹出し口が空間に定まつた位置にあるときに波動のあつたのと同じ譯である。

翼車の弾性振動の微分方程式を考へて見ると遠心力の影響が看過できる場合には

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - nr \rho \sin(\theta + \omega t) + \frac{Eh^2}{3(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w = 0 \quad (93)$$

となる、但し w は板の z の方向への撓み、 r, θ が質點の座標、 ρ が材質の密度、 E がYoung率、 σ がPoisson比、 $2h$ が板の厚さ、 $n=2\omega\chi$ である。今

$$w = W \sin(\theta + \omega t) \quad (94)$$

と置く。 W は r のみの函數とする。然るときは(93)は次の如くなる:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) W - k^4 W = s^2 r, \quad (95)$$

但し $k^4 = \frac{3(1-\sigma^2)\omega^2 \rho}{Eh^2}, \quad s^2 = \frac{3(1-\sigma^2)n\rho}{Eh^2}$ (95)の解は

$$W = AJ_1(kr) + BY_1(kr) + CI_1(kr) + DK_1(kr) - \frac{n}{\omega^2} r \quad (96)$$

となる、但し A, B, C, D は任意常數である。即ち強制振動の解式が

$$w = \left\{ AJ_1(kr) + BY_1(kr) + CI_1(kr) + DK_1(kr) - \frac{n}{\omega^2} r \right\} \sin(\theta + \omega t) \quad (97)$$

で表される。

境界条件として圓板の縁 $r=a$ では

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{(1-\sigma)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

があり、中央の固定圓 $r=b$ では

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0 \quad (99)$$

がある。之等の条件に(97)を入れるときは A, B, C, D が次の如く定まるのである：

$$A = \frac{\frac{n}{\omega^2} \begin{vmatrix} 0, & Y_1(ka) - \alpha Y_2(ka), & -I_1(ka) + \alpha I_2(ka), & -K_1(ka) - \alpha K_2(ka) \\ 0, & Y_2(ka), & I_2(ka), & -K_2(ka) \\ b, & Y_1(kb), & I_1(kb), & K_1(kb) \\ \frac{2}{k}, & Y_0(kb), & I_0(kb), & -K_0(kb) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$B = \frac{\frac{n}{\omega^2} \begin{vmatrix} J_1(ka) - \alpha J_2(ka), & 0, & -I_1(ka) + \alpha I_2(ka), & -K_1(ka) - \alpha K_2(ka) \\ J_2(ka), & 0, & I_2(ka), & -K_2(ka) \\ J_1(kb), & b, & I_1(kb), & K_1(kb) \\ J_0(kb), & \frac{2}{k}, & I_0(kb), & -K_0(kb) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$C = \frac{\frac{n}{\omega^2} \begin{vmatrix} J_1(ka) - \alpha J_2(ka), & Y_1(ka) - \alpha Y_2(ka), & 0, & -K_1(ka) - \alpha K_2(ka) \\ J_2(ka), & Y_2(ka), & 0, & -K_2(ka) \\ J_1(kb), & Y_1(kb), & b, & K_1(kb) \\ J_0(kb), & Y_0(kb), & \frac{2}{k}, & -K_0(kb) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$D = \frac{\frac{n}{\omega^2} \begin{vmatrix} J_1(ka) - \alpha J_2(ka), & Y_1(ka) - \alpha Y_2(ka), & -I_1(ka) + \alpha I_2(ka), & 0 \\ J_2(ka), & Y_2(ka), & I_2(ka), & 0 \\ J_1(kb), & Y_1(kb), & I_1(kb), & b \\ J_0(kb), & Y_0(kb), & I_0(kb), & \frac{2}{k} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

但し $\alpha = (1-\sigma)/(ak)$ であり、又 Δ は次の形をもつ：

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_1(ka) - \alpha J_2(ka), & Y_1(ka) - \alpha Y_2(ka), & -I_1(ka) + \alpha I_2(ka), & -K_1(ka) - \alpha K_2(ka) \\ J_2(ka), & Y_2(ka), & I_2(ka), & -K_2(ka) \\ J_1(kb), & Y_1(kb), & I_1(kb), & K_1(kb) \\ J_0(kb), & Y_0(kb), & I_0(kb), & -K_0(kb) \end{vmatrix} \quad (100)$$

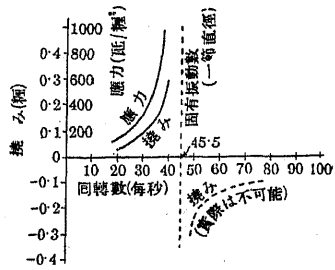
かやうにして見出した係数を(97)に代入すれば圓板の周圍に沿うて回轉移動する波動形がわかるのである。しかし實際に波動のあるのは材質の點についてであつて力が回轉するのではないから、この變形は precession と共に動く枠即ち engine frame に対しては静止せる變形であり、定常の形を示すものである。

この振動によつて生ずる圓板の半徑方向の屈曲モーメントを出して見ると

$$\begin{aligned} M &= \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ &= \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \left[A \left\{ -k^2 J_1(kr) + \frac{(1-\sigma)k}{r} J_2(kr) \right\} \right. \\ &\quad \left. + B \left\{ -k^2 Y_1(kr) + \frac{(1-\sigma)k}{r} Y_2(kr) \right\} \right. \\ &\quad \left. + C \left\{ k^2 I_1(kr) - \frac{(1-\sigma)k}{r} I_2(kr) \right\} \right. \\ &\quad \left. + D \left\{ k^2 K_1(kr) - \frac{(1-\sigma)k}{r} K_2(kr) \right\} \right] \quad (101) \end{aligned}$$

となる。今一例として鋼製回轉翼車 ($E=2.18 \times 10^9$ 珎/珎², $\sigma=0.3$, $\rho=7.85$) の外の半徑が100珎、内部の固定半徑40珎、厚さ2珎のものがその軸を船の長さの方向に而も船の中央點にあり、船は6°の振幅と6秒の週期を以て縦揺をなす場合を取る。そ

のときの自由線の撓みと固定圆周上の半径方向の最大屈曲応力とを計算して出して見ると下圖の如くなる。precession の速度として縦揺の間の極大速度を取つて



第 40 圖

おいた。

これまでは遠心力の影響が考へてなかつた。しかし $\frac{p_1}{2\pi}$ を静止せる圓板の固有振動数、 $\frac{\omega}{2\pi}$ を回転数とすれば、回転せる場合の固有振動数 $\frac{p}{2\pi}$ は大體

$$p^2 = p_1^2 + \alpha\omega^2$$

となる。節直径一本のときには $\alpha=1$ である。即ち $\alpha\omega^2$ の修正を施せば p^2 が出る。このやう

な考方を以て末廣博士は種々の場合の固有振動数や撓みを算出されたのである。

末廣博士はこの理論的結果を確める爲に更に直径 50 糎、固定圓の半径 20 糎、厚さ 0.07 糎、precession の角速度 1.895 ラディヤン/秒になるやうな鋼製の模型を作つて試験を行ひ、理論と比較したのである。而して模型圓板面は鉛直面内にあり、小モートルで回転させ、又、回転臺によつて precession を與へる。圓板の撓みを測定して遠心力の働かぬ場合の計算結果と比較した。その結果圓板の回転数が毎分 400 乃至 700 位では兩方がかなり一致したけれども、それより速くなると次第に違つて來て、計算の方が實驗の二倍又はそれ以上にもなつた。これは確かに遠心力の影響によつて撓みを少くしたことが明かであつたから、それに対する適當なる調整、即ち振動数に対する前記修正法を擴張して撓みの修正にまで持つて行き、それによつてかなり廣範圍に於ける實驗の結果が理論と一致したのである。

以上は末廣博士の研究の大體であるが、この結果は船用タービンの振動並にそれに起因する損傷の問題に對して有益な參考材料を提供したものと考へられる。

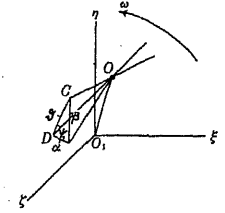
79. 翼車及び車軸組織の不衡力によつて起る翼車の振動

小野博士¹⁾は翼車の釣合が完全でないことその他の原因のために回転體の重

¹⁾ 小野鑑正, "タービン翼車の或る強制振動," 應用力學聯合大會論文 (1931); 機械學會誌, 35 (1932), 255-259.

心及び回転軸の方向の主軸が振動を起し、その結果翼車は如何なる性質の振動を強制されるかと云ふ問題を研究された。その大要を下に示したいと思ふ。而して同博士の論文は極めて簡潔であつたので同博士に敬意を表して、敢て註釋を加へず、殆ど原文に近いものをここに紹介することにした。

右圖に於て $O_1\xi$ は機械の中心線の方向を示し O は回転體の重心である。座標軸 $O_1\xi, O_1\eta, O_1\zeta$ は固定軸と見做し、之に對して重心 O は一回轉を週期としてある形の軌道を描く。又、 O 點を通り静止状態に於て $O_1\xi$ に平行なるべき翼車の一主軸 OC の水平面内の傾を α とし垂直面内の傾を β とする。而して角 COD を ϑ とし之は α, β とともに小なる角とする。然るときは $\xi = \xi_1 \cos \omega t, \eta = \eta_1 \sin \omega t, \alpha = \alpha_1 \cos \omega t, \beta = \beta_1 \sin \omega t$ と取る。此時は OC 上の點が楕圓形の軌道を描く。さて



第 41 圖

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \beta. \tag{102}$$

從て

$$\dot{\vartheta} = (\alpha \sin \alpha \cos \beta + \beta \cos \alpha \sin \beta) / \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}. \tag{103}$$

又、上圖に於て平面 COD の水平面となす角 ψ は α, β に對して次の關係がある：

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \sin \beta / \sin \vartheta \\ &= \sin \beta / \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}. \end{aligned} \tag{104}$$

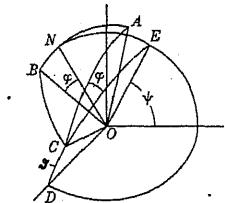
この式を t に就て微分したものに、同じ式から出て來る所の

$$\cos \psi = \sin \alpha \cos \beta / \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

なる關係を代入するとき

$$\dot{\psi} = (\beta \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta) / (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta). \tag{105}$$

次に右圖に於て COA なる平面と COD なる平面との間の角を φ とし、且つ COA 面は $t=0$ に於て水平面と一致するものとする。 OC 軸の周囲の回転速度 ω は $\cos \vartheta \approx 1$ の如き場合には



第 42 圖

$$\omega = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \tag{106}$$

としてよい。従て $t=0$ の条件を用ひて

$$\varphi = \omega t - \psi \tag{107}$$

となる。而して α, β が小なるときには $\tan \psi = \beta/\alpha$ であるから、上式から

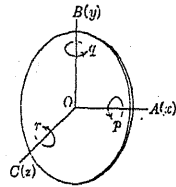
$$\tan \varphi = \left(\tan \omega t - \frac{\beta}{\alpha} \right) / \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \tan \omega t \right) \tag{108}$$

従て之から同じ割合の近似を以て

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \sin \varphi &= (\alpha \sin \omega t - \beta \cos \omega t) / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned} \right\} \tag{109}$$

が得られる。

次に下圖に於て O 點を原點として既述の OC の外に OA, OB なる直角座標軸を回轉體に作り、且つ OA, OB, OC の周圍の固體の角速度を p, q, r とすれば、明かに



第 43 圖

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ q &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \tag{110}$$

この式に (102), (103), (105), (109) を代入し、且つ α, β が小であるといふ条件及び與へられたる $\alpha = \alpha_1 \cos \omega t, \beta = \beta_1 \sin \omega t$ なる關係を更に用ひて

$$\left. \begin{aligned} p &= -\omega(\alpha_1 \sin^2 \omega t + \beta_1 \cos^2 \omega t) \\ &= -\frac{\omega}{2} \{ \alpha_1 + \beta_1 - (\alpha_1 - \beta_1) \cos 2\omega t \}, \\ q &= -\omega(\alpha_1 - \beta_1) \sin \omega t \cos \omega t \\ &= -\frac{\omega}{2} (\alpha_1 - \beta_1) \sin 2\omega t, \\ r &= \omega. \end{aligned} \right\} \tag{111}$$

従て

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= -\omega^2(\alpha_1 - \beta_1) \sin 2\omega t, \\ \dot{q} &= -\omega^2(\alpha_1 - \beta_1) \cos 2\omega t, \\ \dot{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{112}$$

なる關係が出る。

OA, OB, OC なる動座標軸を x, y, z とし、この座標軸に對して之等の軸の方向の加速度 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ を作れば次式で示される：

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \ddot{x} + \gamma_x + 2q\dot{z} - 2r\dot{y} + \dot{q}z - \dot{r}y + p(qy + rz) - (q^2 + r^2)x, \\ \alpha_y &= \ddot{y} + \gamma_y + 2r\dot{x} - 2p\dot{z} + \dot{r}x - \dot{p}z + q(rz + px) - (r^2 + p^2)y, \\ \alpha_z &= \ddot{z} + \gamma_z + 2p\dot{y} - 2q\dot{x} + \dot{p}y - \dot{q}x + r(px + qy) - (p^2 + q^2)z, \end{aligned} \right\} \tag{113}$$

但し $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ は動く座標軸の原點の其軸の方向の加速度である。上式に (111), (112) を代入するときは

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \ddot{x} + \gamma_x - 2\omega\dot{y} - \omega\dot{z}(\alpha_1 - \beta_1) \sin 2\omega t \\ &\quad - \frac{\omega^2}{2} z \{ (\alpha_1 - \beta_1) \cos 2\omega t + \alpha_1 + \beta_1 \} \\ &\quad + \frac{\omega^2}{4} y(\alpha_1^2 - \beta_1^2) \sin 2\omega t - \omega^2 x \left\{ 1 + \frac{1}{8}(\alpha_1 - \beta_1)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{\omega^2}{8} (\alpha_1 - \beta_1)^2 \{ x \cos 4\omega t - y \sin 4\omega t \}, \\ \alpha_y &= \ddot{y} + \gamma_y + 2\omega\dot{x} + \omega\dot{z} \{ \alpha_1 + \beta_1 - (\alpha_1 - \beta_1) \cos 2\omega t \} \\ &\quad + \frac{\omega^2}{2} z(\alpha_1 - \beta_1) \sin 2\omega t + \frac{\omega^2}{4} x(\alpha_1^2 - \beta_1^2) \sin 2\omega t \\ &\quad + \frac{\omega^2}{2} y(\alpha_1^2 - \beta_1^2) \cos 2\omega t - \omega^2 y \left\{ 1 + \frac{1}{4}(\alpha_1 + \beta_1)^2 + \frac{1}{8}(\alpha_1 - \beta_1)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{\omega^2}{8} (\alpha_1 - \beta_1)^2 \{ x \sin 4\omega t + y \cos 4\omega t \}, \\ \alpha_z &= \ddot{z} + \gamma_z - \omega(\alpha_1 + \beta_1)\dot{y} \\ &\quad + \omega(\alpha_1 - \beta_1)(\dot{x} \sin 2\omega t + \dot{y} \cos 2\omega t) - \frac{\omega^2}{2} \{ (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_1^2 + \beta_1^2)z \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \omega^2 (\alpha_1 - \beta_1) \{ x \cos 2\omega t - y \sin 2\omega t \} \\
& + \frac{\omega^2}{2} (\alpha_1^2 - \beta_1^2) z \cos 2\omega t.
\end{aligned} \quad (114)$$

上式に於て γ_x, γ_y は

$$\ddot{\xi} = -\omega^2 \xi_1 \cos \omega t, \quad \ddot{\eta} = -\omega^2 \eta_1 \sin \omega t$$

を用ひて略

$$\begin{aligned}
\gamma_x &= \ddot{\xi} \cos \omega t + \ddot{\eta} \sin \omega t = -\frac{\omega^2}{2} \{ \xi_1 + \eta_1 + (\xi_1 - \eta_1) \cos 2\omega t \}, \\
\gamma_y &= \ddot{\eta} \cos \omega t - \ddot{\xi} \sin \omega t = \frac{\omega^2}{2} (\xi_1 - \eta_1) \sin 2\omega t
\end{aligned}$$

とすればよいのである。

尙、翼車の圓周及び半径の方向の加速度 α_x, α_r を出すには $r = r \cos \alpha, y = x \sin \alpha$ なる極座標 r, α を用ひて

$$\begin{aligned}
\alpha_x &= \alpha_y \cos \alpha - \alpha_z \sin \alpha, \\
\alpha_r &= \alpha_y \sin \alpha + \alpha_z \cos \alpha
\end{aligned}$$

となる。

翼車の撓みに入る強制振動の項は α_z であるが、その中でも最も著しい項は α_x, β_1 の一次を含む二項であつて、その中の一つは x のみを有して ωt を含まず、結局有力なる強制振動は次の項に歸せられる：

$$\frac{3}{2} \omega^2 (\alpha_1 - \beta_1) \{ x \cos 2\omega t - y \sin 2\omega t \} = \frac{3}{2} \omega^2 (\alpha_1 - \beta_1) r \cos (2\omega t + \alpha).$$

この式に於て簡単のために $H = \frac{3}{2} \omega^2 (\alpha_1 - \beta_1)$ と置き、 α_z の他の諸項を省略すれば

$$\alpha_z = \ddot{z} + Hr \cos (2\omega t + \alpha) \quad (115)$$

今圓板を均一の厚さ $2h$ を有するものとし、 z の代りに厚さを二等分する中央面の撓み w を用ひて遠心力の働かぬ場合の圓板の振動の方程式を書けば下の如くなる：

$$C \nabla^4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Hr \cos (2\omega t + \alpha) = 0, \quad (116)$$

但し

$$C = \frac{h^2 E}{3(1-\sigma^2)\rho}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

茲に ρ は密度、 E は Young 率、 σ は Poisson 比である。

式 (116) に於て $w = W(r) \cos (2\omega t + \alpha)$ とおき W を圓板周邊の條件を充すやうに決定すればよい。(116) と似た式は小野博士も述べてゐるやうに、末廣博士¹⁾の研究があるから計算は略す。こゝに重要な事は強制振動の項で見られるやうにもし、同轉速度の2倍即ち 2ω が節直徑1個の場合の固有振動數に一致すれば共振を起すといふことである。要するに翼車の振動の種々の様式の中で今の簡單なる假定に従へば、節直徑の數 $0, 1, 2, \dots$ の型の固有振動數の速さが 2ω に一致せぬやうにすれば安全である。この中1個の場合には當然のことではあるが (W. Campbell, *G. R. Review*, 1924)、普通この型の振動が靜止振動試験に現はれ難い爲にあまり重要でないやうに見做されてゐる。しかし相當の注意を必要とするやうに思はれる。

以上は翼車の圓板のみ考慮に入れた場合であるが、若し圓周の翼をも考に入れたときには (114) の α_x, α_y 中の z 及 α_z 中の x, y のために互に關係を及ぼし合つて、 2ω の種々の倍數の速さの項を生ずるのである。その中比較的著しいものを求めるために、先づ α_x, α_y 兩式に於て弱いと見られる項を省略して簡単にすれば

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_x &= \ddot{x} + \gamma_x - 2\omega \dot{y} - \frac{\omega^2}{2} z \{ (\alpha_1 - \beta_1) \cos 2\omega t + \alpha_1 + \beta_1 \} - \omega^2 x, \\
\alpha_y &= \ddot{y} + \gamma_y + 2\omega \dot{x} + \frac{\omega^2}{2} z (\alpha_1 - \beta_1) \sin 2\omega t - \omega^2 y.
\end{aligned} \right\} \quad (117)$$

v を翼車に相對的の圓周の方向の變位とすれば $\dot{y} \cos \alpha - \dot{x} \sin \alpha = \dot{v}$ 。又 $x \cos \alpha + \dot{y} \sin \alpha$ は翼車に相對的の半径の方向の速さであり、 z を零と置く。尙、 $y \cos \alpha - x \sin \alpha = 0$ 。それ故 $\gamma_y \cos \alpha - \gamma_x \sin \alpha = \frac{\omega^2}{2} \{ (\xi_1 + \eta_1) \sin \alpha + (\xi_1 - \eta_1) \sin (2\omega t + \alpha) \}$ を入れて

$$\alpha_x = \ddot{v} + \frac{\omega^2}{2} \left[\{ \xi_1 - \eta_1 + z (\alpha_1 - \beta_1) \} \sin (2\omega t + \alpha) + \{ \xi_1 + \eta_1 + z (\alpha_1 + \beta_1) \} \sin \alpha \right] \quad (118)$$

¹⁾ 末廣恭二, "On the Gyroscopic Vibration of Marine Steam Turbine Discs," 造船協會會報, 39 (1926), 121-128.

それ故に翼の各點は圓周の方向に於て $\sin(2\omega t + \alpha)$ なる強制振動を受け従て $v = X \sin(2\omega t + \alpha)$ なる變位を生ずる。 X は翼の長さの方向に沿うて變ずる函数である。故に $\dot{v} = 2\omega X \cos(2\omega t + \alpha)$ 。又半径の方向に於ける變位は零なる故

$$\dot{x} = -\dot{v} \sin \alpha = -2\omega X \cos(2\omega t + \alpha) \sin \alpha,$$

$$\dot{y} = \dot{v} \cos \alpha = 2\omega X \cos(2\omega t + \alpha) \cos \alpha.$$

上の結果を α_x に入れ、且つ γ_x 並に t に無關係の項を省略すれば

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \ddot{z} - 2\omega^2(\alpha_1 + \beta_1) X \cos(2\omega t + \alpha) \cos \alpha + 2\omega^2(\alpha_1 - \beta_1) X \cos^2(2\omega t + \alpha) \\ &\quad + \frac{3}{2} \omega^2 r (\alpha_1 - \beta_1) \cos(2\omega t + \alpha) + \frac{\omega^2}{2} z (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \cos 2\omega t \\ &= \ddot{z} - \omega^2(\alpha_1 + \beta_1) X \left\{ \cos(2\omega t + 2\alpha) + \cos 2\omega t \right\} + \omega^2(\alpha_1 - \beta_1) X \left\{ 1 + \cos(4\omega t + 2\alpha) \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2} \omega^2 r (\alpha_1 - \beta_1) \cos(2\omega t + \alpha) + \frac{\omega^2}{2} z (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \cos 2\omega t. \quad (119) \end{aligned}$$

故に X を含む項は $\cos 2\omega t$, $\cos(2\omega t + 2\alpha)$, $\cos(4\omega t + 2\alpha)$ 等よりなり、これ等の第一は α に無關係であるが、第二、第三共に 2α を有する故、互に角 π を距てる二點は同じ加速度を有し、又 $\frac{\pi}{2}$ を距てる二點は正負符號を異にする等大の加速度を有する。斯様にして翼は軸の方向に 2ω 並に 4ω の速さで振動を強制せられるから圓板の周邊に同様の週期的の力が作用する。斯様な條件を充す圓板の方程式の解はやはり前記の餘弦を含む故、最後の α_x の式の終りより第二項目即ち圓板の方程式に現はれた項と同形の項のために生ずる節直徑の數 1 の振動の外、0 及 2 の場合が起る。而して之等の凡ての場合を通じて 2ω が固有振動數に一致すれば同調の處れあるのみでなく、最後の 2 の場合には 4ω が固有振動數に合致すればやはり同調の處れがある。尤も X の項が小なるときは節直徑 1 の振動が依然最も有力である。

翼自身に関する事柄も自然上の説明で大體を盡してゐる。即ち前にも述べたやうに圓周と軸との兩方向の振動が互に關係を有する故翼の圓周の方向に於ける 2ω なる速さの振動は軸の方向に於て、同方向に固有なる 2ω なる速さの項以外に 2ω , 4ω なる速さの振動を起し、更に之等は圓周の方向に於て 2ω , 4ω , 6ω 等の速さの振動を引起す。但し倍數の進むに従て強制振動の項の係數は小となる故、或る程

度以上の項は實際上同調を心配せねばならぬ程重要ではないのであらう。それにしても尙翼の固有振動數が同轉數の 3.5 倍以上なるべしといふやうな設計上の習慣があるやうであるが、もし同轉状態で倍數が丁度 4 に等しくなるやうな設計は避けた方がよい。

以上是小野博士の論文の要旨であつて、この研究は不衡力によつて起る振動のみでなく、翼車や車軸の問題の一般的取扱法に對する貴重なる指針ともいふべきである。本節の初めにも筆者が注意しておいたやうに、同博士の論文は極めて簡明であつたので、それ以外筆者の意見は加へないことにしておいた。一層委しいことを知ることは原論文¹⁾を参照されたいと思ふ。

80. タービン翼の振動

前節に於てタービン翼車にタービン翼が加はつて振動する問題にも言及してあつた。實際、タービン圓板の周圍にタービン翼がある時には、この圓板の振動に於てその運動勢力にもポテンシャル勢力にも翼の影響が入るのが當然である。而して逆にタービン翼それ自身の振動に對しても圓板の振動が影響を及ぼすものである。しかし何といつてもタービン翼の致命的振動に對する強制力は蒸氣壓が獨立に翼に働くことである。而してこの蒸氣壓は二つの成分に分つことができ、その一つは圓板の圓周に切線をなすものであり、他は圓板面に垂直の方向を有するものである。之等はタービン翼を上述の夫々の方向への屈曲振動を起させる力である。之等の振動的外力は振動しつゝある翼と案内羽根との距離の函数であり、従て一度翼を振動し始めるときは蒸氣壓が週期的に變化し連続的振動が行はれるものである。若しこの蒸氣壓の變化の週期が翼の固有振動と一致するときは共振が起り結局は翼の断面の急激に變化するやうな所に材料疲勞の破損を起すに到るものである。而して又蒸氣壓の變化は、翼の固有振動が外力によつて誘起され、その結果として起されることが多いから、實際に於て共振の起る機會は非常に多いものである。タービン翼の共振が最も恐るべきは、その振動によつて相隣つてゐる翼同志が衝突しあつて破損を起す事である。一つの翼が折れると順次隣りのものに害を及ぼす

¹⁾ 小野鑑正、前掲。

に到るものである。この意味に於てタービン翼の振動問題は一層大切なことがわかる。

タービン翼の固有振動を出すことは、翼が回轉する圓板の周圍にあるために遠心力によつてその固有振動が著しく變化するものであるから、餘り簡單とは言はれない。普通、回轉中には固有振動週期が短くなるものである。又大體に於て翼の断面の慣性モーメントが圓板の切線方向と圓板面に垂直の方向とによつて異なる故、夫々の方向への屈曲振動の性質が異なる。従て之等は區別して考へるべきであらう。

實際の蒸氣の力は或る適當な斜の方向から之に吹きつけるのであり、従て之等の種々の方向の振動性を組合せたものを考へる方が適切かも知れぬ。しかし普通は翼の断面の二つの主要軸の方向の固有振動を夫々計算しておいて、その抵抗度の小なる方を取上げるといふことが振動の問題として大切であると思ふ。如何なる外力を受けても、容易に振動するのは翼が最も屈曲し易い方向である。

翼の断面は普通長さの方向に變化させてある。それでこのやうな場合を計算で出す事それ自身が大分困難である。又翼の頭部が shrouding を以て聯結されてゐる場合も非常に多い。¹⁾ この影響は固有振動週期にかなり影響を及ぼすものである。

81. タービン翼の車軸方向の固有振動(其一)

本節ではタービン翼の振動方向が大體に於て翼車の軸の方向に一致するやうな極端な場合を取つて考へて見る。つまり翼の幅だけが變化してその厚さは一定であるやうな方向の振動を考へるのである。従てこの場合に断面の慣性半徑が一定のものになり、問題が數學的に取扱ひ易くなるものである。斯る場合に就ての委しい研究は小野博士²⁾のものであらう。こゝにその大要を紹介して見よう。

弾性の影響 先づ翼が翼車と共に回轉する爲の遠心力の影響を看過して

¹⁾ W. Hort, "Die Schwingungen der Räder und Schaufeln in Dampfturbinen," ZVDI, 70 (1926), 1419-1424.

²⁾ 小野健正, "Vibrations of Turbine Blades," 機械學會誌, 27 (1924), 467-479.

考へる。x軸を翼の長さの方向に取り、その原点を翼の自由端に置く。yをx點の撓みとし、EをYoung率、ρを密度、λ、μ、a、bをxに無關係なる常數とする。今翼の断面積及び断面の慣性モーメントがxについて夫々bx^μ、cx^λの如く變化するとすれば、翼の振動の微分方程式は明かに次の如くなる：

$$Ec \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho b x^\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (120)$$

Xをxの函數として y=X cos pit と置けば、上式は

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + \frac{2\lambda}{x} \frac{d^3 X}{dx^3} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{x^2} \frac{d^2 X}{dx^2} = B x^{\mu-\lambda} X \quad (121)$$

となる、但し $B = \rho b p_i^2 / Ec$ である。

特別に $\lambda = \mu$ のときは、断面の慣性半徑が一定となり、翼車の軸の方向への翼の撓みの問題に非常に近い場合を與へる。斯る場合には(121)の解を

$$X = \sum a_n x^n \quad (122)$$

と置けば、(121)から

$$a_n = \frac{B a_{n-4}}{n(n-1)(n-2+\lambda)(n-3+\lambda)} \quad (123)$$

翼の自由端 $x=0$ では屈曲力 $M=0$ 及び剪断力 $\partial M / \partial x = 0$ が満足すべきである。

初めの條件は $n=2$ を除き $n > 0$ の値で満足する。然るに第二の條件は

$$x^\lambda \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda x^{\lambda-1} \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad (124)$$

であつて、これは $n=2$ 又は $n=3$ を除き $n > 0$ の値で満足させることができる。従てXの級數の第一項は a_0 か a_{1x} ($n=0, 1$ に相當する) となる。 a_0 から始まるものは

$$a_n = \frac{B^{n/4} a_0}{n(n-1)(n-2+\lambda)(n-3+\lambda)(n-4)(n-5)(n-6+\lambda)(n-7+\lambda) \dots 4 \cdot 3(2+\lambda)(1+\lambda)} \quad (125)$$

であり、nは常に4の倍數となるべきである。次に a_{1x} から始まる級數では

$$a_n = \frac{B^{(n-1)/4} a_1}{n(n-1)(n-2+\lambda)(n-3+\lambda)(n-4)(n-5)(n-6+\lambda)(n-7+\lambda) \dots 5.4(3+\lambda)(2+\lambda)} \quad (126)$$

となり、 n は常に 4 の倍数に 1 を加へたものである。

斯様にしてすべての係数を定めれば、(122) 中には a_0 と a_1 の二つの未定係数が一次的關係を以て残つてをのみである。之を翼の固定端 $x=l$ に於ける條件 $X=0$ 及 $\partial X/\partial x=0$ の中へ入れるときは a_0/a_1 の比が消去されて Bl^4 の種々の乗算を含む方程式が残るのである。斯くして得られた式から種々の λ に対して Bl^4 の最小値を出し、これを $\xi_1 (=Bl^4)$ とすれば、 B の組立から

$$\frac{\rho b l^4 p_{10}^2}{Ec} = \xi \quad (127)$$

が得られる。茲に p_{10} は Bl^4 が最小のときの p_1 であり、従て p_{10} は p_1 の最小値となる譯である。又 c/b は慣性半径 i の二乗であるから、現在の場合に

$$p_{10} = \frac{\sqrt{\xi_1} i}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (128)$$

と書き得る。種々の場合の $\lambda (= \mu)$ に就ての $\sqrt{\xi_1}$ を計算し之に均一断面のものをも附加へて出しておくに次表の第二縦行の如くなる：

$\lambda (= \mu)$	$\sqrt{\xi_1}$	$\sqrt{\xi_1}$ (近似値)	誤差 (%)
0	3.516	3.47	1.3
1/4	4.36	4.37	-0.2
1/2	5.24	5.29	-1.0
3/4	6.18	6.20	-0.3
1	7.16	7.11	0.6

上の表の第二縦行にある $\sqrt{\xi_1}$ と λ との間には近似的に

$$\sqrt{\xi_1} = 3.47(1 + 1.05\lambda) \quad (129)$$

の如き直線的關係が存在してをり、正確なものとの間には上の表の第四縦行の誤差しかないのである。故に (129) の如き近似の値を上表の第三縦行に示しておいた。

一例として $l=13.8$ 種、 $\lambda=\mu=0.2$ 、 $E=1\,150\,000$ 珪/種²、 $g\rho=8.886 \times 10^{-3}$ 珪/種³ に取るときは、(129) によつて

$$\sqrt{\xi_1} = 3.47(1 + 1.05 \times 0.2) = 4.20.$$

従て (128) から
$$p_{01} = \frac{4.20 i}{13.8^2} \sqrt{\frac{1.15 \times 10^6 \times 980}{8.886 \times 10^{-3}}} = 78.535 i,$$

$$p_a/2\pi \approx 12,500 i.$$

この場合 i は一定でないけれども今 $i=0.39$ 種 (根)、 $=0.24$ 種 (尖端) に取れば、夫々 $p_{01}/2\pi=487$ 、 $=300$ となる。

遠心力の影響 次の問題として弾性抵抗を看過して遠心力のみ考へ入れるときは、自由端から x なる點の断面に加はる遠心力が

$$C = \rho b \omega^2 \left[(a+l) \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{x^{\mu+2}}{\mu+2} \right] \quad (130)$$

となる。茲に ω は回轉速度、 a は圓板の半径、 l は翼長である。振動の微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C \frac{\partial y}{\partial x} \right] = \rho b x^\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (131)$$

で示される。(130) を (131) に入れ、且つ

$$y = F \cos p_1 t \quad (132)$$

と置き、次式が得られる：

$$\left[(a+l) \frac{\mu+2}{\mu+1} x - x^2 \right] \frac{d^2 F}{dx^2} + (\mu+2)(a+l-x) \frac{dF}{dx} + (\mu+2) \frac{p_1^2}{\omega^2} F = 0. \quad (133)$$

この式を解く爲に

$$z = 1 + \frac{\mu+1}{\mu+2} \frac{x}{a+l} \quad \text{即ち} \quad x = (1-z)(a+l) \frac{\mu+2}{\mu+1} \quad (134)$$

と書けば、(133) は hypergeometric の方程式

$$z(1-z) \frac{d^2 F}{dz^2} + \{1 - (\mu+2)z\} \frac{dF}{dz} + (\mu+2) \frac{p_1^2}{\omega^2} F = 0 \quad (135)$$

となり、その解は

$$F = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

$$= 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} z^3 + \dots \quad (136)$$

となる、但し $\alpha + \beta = \mu + 1$, $\alpha\beta = -(\mu + 2)\frac{p_2^2}{\omega^2}$, $\gamma = 1$ である。即ち

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} \left[\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)^2 + 4(\mu + 2)\frac{p_2^2}{\omega^2}} \right] \quad (137)$$

(136) の級数は $z < 1$ ではすべて収斂するが、しかし $\gamma < (\alpha + \beta)$ であるから $z = 1$ では発散する。その爲にはこの級数が常に有限の項で終らなくては困るのである。

その有限値を $\beta = -s$ (s は正の整数) とする。故に

$$\mu + 1 - \sqrt{(\mu - 1)^2 + 4(\mu + 2)\frac{p_2^2}{\omega^2}} = -2s$$

と置けば、

$$\frac{p_2^2}{\omega^2} = \frac{s(s + \mu + 1)}{\mu + 2} \quad (\equiv \delta) \quad (138)$$

が得られる。上述の考から、(136) は

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} (s + \mu + 1)^m (-s)^m \frac{z^m}{(m!)^2} \quad (139)$$

となる。固定端即ち $z = 1 - (\mu + 1)l / (\mu + 2)(a + l)$ に於ける條件は $F = 0$ であるから、 μ と s とに種々の値を入れて見て結局 $F = 0$ になるやうな z を探し、その場合の a/l を算出して見ると次の如くなる：

s	μ=0		μ=1/4		μ=1/2		μ=3/4		μ=1	
	δ	a/l	δ	a/l	δ	a/l	δ	a/l	δ	a/l
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	3	1.86	2.889	1.19	2.8	1.07	2.727	0.964	2.667	0.878
3	6	3.44	5.667	3.00	5.4	2.64	5.182	2.367	5	2.145
4	10	6.19	9.333	5.38	8.8	4.71	8.364	4.174	8	3.762
5	15	9.65	13.889	8.26	13	7.22	12.273	6.400	11.667	5.734
6	21	13.78	19.333	11.92	18	10.32	16.909	9.101	16	8.132

この δ と a/l との間の関係をよくしらべて見ると、その間には大體次の如き直線的關係が存在する：

$$\delta = 1 + c(a/l), \quad (140)$$

但しこの c の値は μ によつて定まり、次の如き關係にある：

μ	0	1/4	1/2	3/4	1
c	1.45	1.55	1.65	1.75	1.85

即ち式を以て表せば

$$c = 1.45 + 0.4\mu \quad (141)$$

である。それ故 (140) は改めて

$$\delta = 1 + (1.45 + 0.4\mu)a/l \quad (142)$$

と書くことができる。これと (138) とによつて p_2 が算出されるのである。この公式は先端の尖つてゐる翼の振動週期の計算に應用できる。

一例として $a = 62$ 榧, $l = 13.8$ 榧, $\mu = 0.2$ のときを考へれば、

$$a/l = 4.49,$$

従て (142) から

$$\delta = 7.87,$$

即ち

$$p_2^2 = 7.87\omega^2.$$

それで $\omega = 3000$ 回転毎分にとると $\omega = 100\pi$ であり、 $p_2/2\pi = 140$ 毎秒となる。

さて一般に翼の弾性と遠心力との兩方が考慮に入る場合の振動週期を出すには、Lamb 及 Southwell¹⁾ が圓板の場合についてやつた公式がこの場合にも明かに適當するので、それを應用して見ると、その振動数の公式として

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (143)$$

と書けばよいのである。こゝに $\frac{p_1}{2\pi}$ は弾性のみ考慮に入れるときの振動数であり、 $\frac{p_2}{2\pi}$ は遠心力のみ考慮に入れるときの振動数である。

¹⁾ H. Lamb & R. V. Southwell, "The Vibrations of a Spinning Disk," Proc. Roy. Soc., London, 99 (1921), 272-280.

小野博士³⁾は以上の如くしてタービン翼の断面がタービン翼車の圓周に近い方向に変化するとき、それに直角の方向への振動問題を非常に深く研究されたのである。同博士のこの論文はタービン翼振動の問題の劃期的研究であつて、以上の結果は歐米の有名なる數種の教科書、例へば Timoshenko の著書や Geiger u. Scheel の書物其他にも引用してある。それでこゝにも博士の論文をなるべくその儘の形で示した積りである。尙、この圓周方向といふことは大體の場合を指すのであつて、翼によつては均一厚さの方向が車軸方向と大分喰ひ違つてゐるものもある。以上の場合には問題の性質上振動に對する翼断面の慣性半径が一定となるものであつた。然るに慣性半径が一定にならぬやうな場合に就ては Dorothy Wrinch²⁾が小野博士のこの論文と多少似た方法で研究してゐる。しかしこの場合には遠心力の影響さへも考へないのであるけれども問題が問題だけに小野博士の如く完全なる結果は得られてをらぬやうに思ふ。Wrinch 女史の計算は(120)の形の式その儘を變化して、結局

$$\vartheta(\vartheta+a_1)(\vartheta+a_2)(\vartheta+a_3)y=a_4x^2y \quad (144)$$

の形を作り、之を吟味するにある。茲に $\vartheta=x\frac{\partial}{\partial x}$ であり、 a_1, a_2, a_3, a_4 は定數である。上式を hypergeometric series を用ひて解くのであるけれども非常に複雑になる。

小野博士の場合でさへも問題はそれ程簡單でなかつた。遠心力のみが働く場合に翼の断面積が一定とすることが普通の研究者³⁾に漸くやれた位のものである。

82. タービン翼の車軸方向の固有振動(其二)

小野博士は更に進んで前節の問題を、大體同じ條件にはあるけれども唯、翼の形が拋物線状をなす場合を、積分方程式を用ひて解いた。⁴⁾ 積分方程式を應用するこ

¹⁾ 小野鑑正, 前掲.

²⁾ Dorothy M. Wrinch, "On the Lateral Vibrations of Rods of Variable Cross-section," *Phil. Mag.*, 46 (1923), 273-291.

³⁾ Horst v. Sanden, "Einfluss der Zentrifugalbeschleunigung auf die Frequenz der Eigenschwingungen von Turbinenschaufeln," *ZS. f. tech. Phys.*, 10 (1929), 443-445.

⁴⁾ 小野鑑正, "Lateral Vibrations of Tapered Bars," *機械學會誌*, 28 (1925), 429-441.

とも興味があり、その上結果も完全であるから、こゝにそれを紹介する。

座標の原点から $x=\xi$ なる點に單位荷重があるときに他の任意の點 x の撓みを $u(x, \xi)$ とする。さて同じ ξ なる點に於ける $\partial^2 y(\xi)/\partial t^2$ なる加速度は慣性による抵抗 $-\rho f(\xi)[\partial^2 y(\xi)/\partial t^2]dx$ を起す、但し $f(\xi)$ は断面積とする。それで x に於ける撓み $y(x)$ は次の如くなる:

$$y(x) = -\int_0^l \rho f(\xi) \frac{\partial^2 y(\xi)}{\partial t^2} u(x, \xi) d\xi. \quad (145)$$

今 $y = \varphi(x) \sin p_1 t$ と書けば、

$$\varphi(x) = p_1^2 \int_0^l \rho f(\xi) \varphi(\xi) u(x, \xi) d\xi \quad (146)$$

が得られる。

$$K(x, \xi) = \rho f(\xi) u(x, \xi), \quad \lambda = p_1^2 \quad (147)$$

と書けば、上の積分方程式が次の如くなる:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (148)$$

これは homogeneous な積分方程式であつて $D(\lambda) \neq 0$ のときには $\varphi(x) = 0$ なる解を有し、 $D(\lambda) = 0$ のときは無数の解が出来る。この後の方の場合が固有振動に相當し、そのときの p_1 はこの方程式を解けば出るものである。

今、一端固定、他端自由なる翼の断面とその慣性率とが

$$A = b(l-x)^n, \quad I = bi^2(l-x)^n \quad (149)$$

の如き形にあるものとすれば、 $\xi(>x)$ に單位荷重のある時の彈性曲線の方程式は

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{1}{Ebi^2} (\xi-x)/(l-x)^n \quad (150)$$

であることが靜力學からわかつてゐる。この式の積分をその兩端の條件を満足するやうに作れば、

$$u = \frac{1}{Ebi^2} \left\{ \frac{(l-\xi)^{2-\mu} [1 - (2-\mu)x/l - (1-x)/l^{2-\mu}]}{(1-\mu)(2-\mu)} \right\}$$

$$\frac{l^{3-\mu}[1-(3-\mu)x/l-(1-x/l)^{3-\mu}]}{(2-\mu)(3-\mu)} \quad (151)$$

となる。従て荷重のある場所の撓みは

$$u(\xi, \xi) = \frac{1}{Ebi^2} \frac{l^{3-\mu} 2 - 2(3-\mu)\xi/l + (2-\mu)(3-\mu)\xi^2/l^2 - 2(1-\xi/l)^{3-\mu}}{(1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)} \quad (152)$$

kernel を作れば

$$K(\xi, \xi) = \rho b(l-\xi)^\mu u(\xi, \xi) \quad (153)$$

であるから、之を積分して

$$\int_0^l K(\xi, \xi) d\xi = \frac{\rho l^4}{Ei^2} \frac{6(1+\mu^2) - \frac{1}{2}(1+\mu)(2+\mu)(3+\mu)}{(1-\mu^2)(2-\mu^2)(3-\mu^2)} \quad (154)$$

従て (147), (148), (154) から近似的に

$$p_1 = \frac{\alpha_i}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (155)$$

但し $\alpha = \sqrt{\{(1-\mu^2)(4-\mu^2)(9-\mu^2)\} / \{6(1+\mu^2) - \frac{1}{2}(1+\mu)(2+\mu)(3+\mu)\}}$.

この近似的 α は次の如くなる:

μ	0	1/4	1/2	3/4	1
近似の α	3.469	4.28	5.12	6.01	6.928
前節の正確な α	3.516	4.36	5.24	6.18	7.16
誤差 (%)	1.5	1.8	2.3	2.8	3.2

同様にして

$$A = A_0 \left(1 - c \frac{x}{l}\right), \quad I = I_0 \left(1 - c \frac{x}{l}\right) \quad (156)$$

の如く取るときには、

$$p_1 = \frac{\alpha_i}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

に於ける α と c との間の関係が次の如くなる:

c	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
α	3.464	3.702	4.022	4.487	5.257	6.928

之等は何れも近似的の解であるが、初めから

$$E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (157)$$

に於て I と A とを (156) の如く假定し、無限級数の解を作つて正式に結果を出すときは、 c と α との間の関係が次の如くなる:

c	0	0.4	0.6	0.8	1.0
α	3.516	4.098	4.585	5.398	7.16

以上は小野博士¹⁾ が研究した面白い結果の要旨であるが、その大體を紹介した積りである。積分方程式は後に Schwerin²⁾ も應用したが、こゝには述べない。

83. 静止せるタービン翼の翼車圍周方向の固有振動

このやうな問題は結局断面が均一でない場合の二次元的の柱状體の振動を近似的に解くことに歸着する。それ故、態々タービン翼としなくても他の場合に斯る問題が屢、出るからそれを應用してもよい。しかし斯る問題に少しも觸れずにこの儘進むのも何となく物足らないので、茲に先づ Hort³⁾⁴⁾ が恐らくタービン翼の目的に向つてなしたと思はれる研究を紹介することにする。Hort の方法は普通行はれるやうに勢力式の方法を用ひるものであつて、固有振動の形を次の如く置く:

$$y = u(x) \sin p_1 t.$$

¹⁾ 小野鑑正, 前掲.

²⁾ E. Schwerin, "Über Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts," ZS. f. tech. Phys., 8 (1927), 264-271; Verh. 2-int. Congr. tech. Mech. (Zürich, 1926), 138-145.

³⁾ W. Hort "Analytische Ermittlung der Eigentöne verjüngter Stäbe," Proc. 1-int. Congr. for Appl. Mech. (Delft, 1924), 282-287.

⁴⁾ W. Hort, "Berechnung der Eigentöne nicht gleichförmiger, insbesondere verjüngter Stäbe," ZS. f. tech. Phys., 6 (1925), 181-185.

茲に $u(x)$ は断面均一なる塊状體の振動形と同じになると假定しておく。然るときはポテンシャル勢力と運動の勢力とが次の如くなる:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y''_{\text{最大}})^2 dx, \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho q (y_{\text{最大}})^2 p_i^2 dx, \quad (158)$$

茲に ρ は密度, E は Young 率, I は断面の慣性率, q は断面積, l は棒の長さを示す。これから

$$p_i^2 = \frac{E \int_0^l I u''^2 dx}{\rho \int_0^l q u^2 dx} \quad (159)$$

今

$$I = I_0 - \Delta I(x), \quad q = q_0 - \Delta q(x) \quad (160)$$

とし, 又

$$p_{i0}^2 = \frac{E \int_0^l I_0 u''^2 dx}{\rho \int_0^l q_0 u^2 dx} \quad (161)$$

とすれば,

$$p_i^2 = p_{i0}^2 \frac{1 - \int_0^l \Delta I(x) u''^2 dx : I_0 \int_0^l u''^2 dx}{1 - \int_0^l \Delta q(x) u^2 dx : q_0 \int_0^l u^2 dx} \quad (162)$$

となる, 但し p_{i0} は $I=I_0, q=q_0$ の如き塊状體の場合の p_i を表す。さて

$$\eta\sigma = \frac{\int_0^l \Delta I(x) u''^2 dx}{I_0 \int_0^l u''^2 dx}, \quad \zeta\tau = \frac{\int_0^l \Delta q(x) u^2 dx}{q_0 \int_0^l u^2 dx} \quad (163)$$

と書いて問題を取扱ふことにする。

翼の厚さが直線的に變化する場合 この問題に於ては

$$I(x) = I_0 - I_0 \eta \frac{x}{l}, \quad q(x) = q_0 - q_0 \zeta \frac{x}{l} \quad (164)$$

の如く棒の厚さは一定であつて幅のみが直線的に變化するものであつて, 即ちタービン翼の翼車圓周方向の振動の如き場合に當つてゐる。 η, ζ は勿論

$$\eta = \frac{I_0 - I(l)}{I_0}, \quad \zeta = \frac{q_0 - q(l)}{q_0} \quad (165)$$

の如き関係にあるものである。然るときは

$$\sigma = \int_0^l x u''^2 dx : l \int_0^l u''^2 dx, \quad \tau = \int_0^l x u^2 dx : l \int_0^l u^2 dx \quad (166)$$

の如き関係を生じ, 初めに與へた $u(x)$ が塊状體の振動形と同じであると假定すれば,

$$\sigma_j = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{m_j^2 k_j^2} \right), \quad \tau_j = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{m_j^2 k_j^2} \right) \quad [j=1, 2, 3, \dots] \quad (167)$$

となる。茲に m_j は $\cos m \cosh m + 1 = 0$ の順々の根であり, 又 k_j は次の形で與へられる:

$$k_j = \frac{\sinh m_j + \sin m_j}{\cosh m_j + \cos m_j}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} k_j = 1. \quad (168)$$

而して次の表に一端固定, 他端自由なる場合の第一次から第六次までの振動の σ_j と τ_j とが與へてある。その場合の p_{ij} は

$$p_{ij}^2 = p_{i0}^2 \frac{1 - \eta\sigma}{1 - \zeta\tau_j} \quad (169)$$

の如く表される。

尙, 自由なるべき一端が支持されてゐるときはその係数 $\bar{\sigma}_j, \bar{\tau}_j$ は

$$\bar{\sigma}_j = \frac{1}{2} - \frac{1 \cosh n_j - \cos n_j}{n_j^2 \cosh n_j + \cos n_j}, \quad \bar{\tau}_j = \frac{1}{2} + \frac{1 \cosh n_j - \cos n_j}{n_j^2 \cosh n_j - \cos n_j} \quad (170)$$

の如く書かれる。茲に n_j は $\tan n = \tanh n$ の根である。之等の σ_j と τ_j も次表に示してある:

j	σ_j	τ_j	$\bar{\sigma}_j$	$\bar{\tau}_j$
1	0.198	0.807	0.481	0.569
2	0.408	0.594	0.480	0.520
3	0.488	0.532	0.490	0.510
4	0.483	0.517	0.494	0.506
5	0.490	0.510	0.496	0.504
6	0.498	0.507	0.497	0.503
∞	0.500	0.500	0.500	0.500
一端固定, 他端自由		一端固定, 他端支持		

翼の厚さの變化が直線的でない場合 断面變化が直線的よりも多少變つてゐるときには次のやうに假定してもよい:

$$I = I_0 \left(1 - \eta \frac{x}{l} \pm \eta_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right), \quad q = q_0 \left(1 - \zeta \frac{x}{l} \pm \zeta_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right). \quad (171)$$

この場合には前掲の σ, τ の外に次の σ_1, τ_1 をも考へておかねばならぬ:

$$\sigma_1 = \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} u''^2 dx : \int_0^l u''^2 dx, \quad \tau_1 = \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} u^2 dx : \int_0^l u^2 dx. \quad (172)$$

之等を再び前のやうに表で示して見ると次の如くなる:

j	σ_{1j}	τ_{1j}	$\bar{\sigma}_{1j}$	$\bar{\tau}_{1j}$
1	0.493	0.493	0.626	0.857
2	0.703	0.703	0.612	0.724
3	0.661	0.661	0.623	0.680
4	0.649	0.649	0.628	0.662
5	0.645	0.645	0.631	0.654
6	0.642	0.642	0.633	0.649
∞	$\frac{2}{\pi} = 0.63662$	0.63662	0.63662	0.63662
一端固定, 他端自由		一端固定, 他端支持		

之等を用ひれば

$$p_{1j}^2 = p_{10}^2 \frac{1 - \eta \sigma_j \pm \eta_1 \sigma_{1j}}{1 - \zeta \tau_j \pm \zeta_1 \tau_{1j}} \quad (173)$$

となる。而して $\eta, \eta_1, \zeta, \zeta_1$ が 0.5 よりも小なるときには p_{1j} は一般に 1~2% 位しか誤がないものである。

この研究だけでは遠心力の影響が考へてないから、實際のタービン翼の状態を直接には表さない。しかし之に遠心力のある場合の結果を組合せて見ると實際の問題に近づけることができる。尙、勢力の關係を用ひる事は他の人も試みてゐる。⁷⁾

84. タービン翼群の車軸方向の固有振動

これまでの研究はタービン翼が大體に於て獨立のものとして働くものと假定した。従て翼の上端は翼が次第に細くなつたまゝで自由な状態にあるとしたのである。但し前節には多少違つた問題もやつてあつた。實際の翼ではその數十本又はそれ以上の翼が一群となつてその頭部を shrouding で結んであることが多い。この影響を考へる場合に、翼の車軸方向の振動だけでは帯の部分だけを單に慣性質量として取扱つても大して誤がない。しかし翼車の圓周の方向や翼の最も撓み易い方向の振動を考へる爲にはそれだけでなく、その帯部が弾性抵抗を與へることになるから問題が多少複雑になるものである。こゝでは先づ翼の車軸方向への固有振動を論じて見たいと思ふ。⁸⁾⁹⁾ 而して問題を簡單にする爲に翼の断面が常に均一であると假定しておく。このやうにしても振動の性質は大して變らないのである。

今、 ρ を翼の密度、 E を Young 率、 I を断面の慣性モーメント、 y を x 點に於ける撓みとすれば、翼について次の方程式が成立つ:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (174)$$

今翼の断面積を一定とし、且つ次式(175)から

- 1) E. Sörensen, "Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Dampfturbinenschaufeln." *Werft-Reederei-Hafen*, 9 (1928) 67-76.
- 2) E. Jaquet, "Berechnung der Eigenfrequenzen von Dampfturbinenschaufeln," *Schweiz. Bauz.*, 90 (1927), 1-3.
- 3) H. Holzer, *Z.A.M.M.*, 8 (1928), 272.
- 4) E. Schwerin, "Ueber die Eigenfrequenzen der Schaufelgruppen von Dampfturbinen." *Verh. 2-int. Congr. tech. Mech.* (Zürich, 1926), 207-212; *ZS. f. tech. Phys.*, 8 (1927), 312.

$$y = u \cos pt, \tag{175}$$

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = m^4 u \quad \left[m^4 = \frac{\rho A p^2}{EI} \right] \tag{176}$$

が出る。この解は

$$u = A \cos mx + B \sin mx + C \cosh mx + D \sinh mx \tag{177}$$

であり、茲に A, B, C, D は任意常數である。この式を翼の兩端の條件において振動數其他を決定することができるのである。 $x=0$ が固定端であり、 $x=l$ に於て一本の翼の受持つべき帯の質量 M があるものとするれば、境界條件は次の如くなる：

$$x=0; \quad u=0, \quad \frac{du}{dx}=0, \tag{178}$$

$$x=l; \quad \frac{d^2 u}{dx^2}=0, \quad EI \frac{d^3 u}{dx^3} = -M p^2 u, \tag{179}$$

但し $x=l$ にある M 及びその點の翼の振動が $y=u \cos pt$ の形をなすことは當然である。(179)の第二式は(176)によつて

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = -\frac{m^4 M}{\rho p} u \tag{179'}$$

とも書ける。さて(178)によつて

$$A + C = 0, \quad B + D = 0 \tag{180}$$

となる。故に(177)は

$$u = A(\cos mx - \cosh mx) + B(\sin mx - \sinh mx) \tag{181}$$

となる。之を(179), (179')に入れて

$$1 + \cosh ml \cos ml = \frac{mM}{\rho p} \{ \cosh ml \sin ml - \sinh ml \cos ml \} \tag{182}$$

即ち

$$\frac{1 + \cosh ml \cos ml}{\cosh ml \sin ml - \sinh ml \cos ml} = \left(\frac{M}{\rho p} \right) ml \tag{182'}$$

となる。之から ml を求めるには

$$y_1 = \frac{1 + \cosh ml \cos ml}{\cosh ml \sin ml - \sinh ml \cos ml}$$

$$= \frac{\cos ml + \operatorname{sech} ml}{\sin ml - \cos ml \tanh ml} \tag{183}$$

なる兩數を ml なる基線を用ひて描き、又別に

$$y_2 = \left(\frac{M}{\rho p} \right) ml \tag{184}$$

なる兩數を同じ基線のもとに描く。 y_1 と y_2 の交點が(182')を満足することになる。 $\frac{M}{\rho p}$ は翼の頂部にある集中質量と翼それ自身の質量との比であるから、その種々の場合は座標の原點を通過する種々の直線を以て表されるものである。

一例として $M/\rho p = 1$ の場合を考えると、右圖から直ちに

$$ml = 1.238, 4.045, 7.135, \dots$$

となる。従て T を週期とすれば、(176)から次の如くなる：

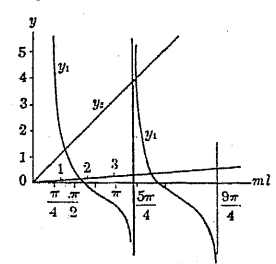
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{EI T}{\rho A l^2}} &= \frac{2\pi}{(ml)_1^2}, \quad \frac{2\pi}{(ml)_2^2}, \quad \frac{2\pi}{(ml)_3^2}, \dots \\ &= 4.101, \quad 0.3841, \quad 0.1234, \dots \end{aligned}$$

斯様にして種々の $M/\rho p$ についての計算ができる。而もそれ等の計算は上圖に於て單に y_2 なる直線の傾斜を變へ、 y_1 との交點を求める事によつて容易に得られるものである。¹⁾

本節に於ては翼の断面を一定として問題を解いた。しかし、この方法を發展させるか、又は物部博士(建築物の振動)の行つた近似法などを以て断面の變化する場合をも容易に取扱ふことができる。

85. 軸流タービン翼群の固有振動の正確なる解法

前節の計算では、帯によつて翼の振動が受ける影響は單に頭部の慣性質量のみ



第 44 圖

¹⁾ 物部長徳, 土木學會誌, “載荷せる構造物の震動並に其耐震性に就て,” 6 (1920), 581-600.

²⁾ J. Prescott, *Applied Elasticity* (London, 1924), 213-219.

が變る事にあつた。しかし翼の振動はその最も撓み易い方向に主として起るのであり、且つそれは普通の翼では翼車の圓周方向に近いのである。この問題の概念的な研究は Schwerin¹⁾ によつてなされたけれども、その問題の取扱上に幾多の難解の點があつて直ちに應用でき兼ねるものである。筆者²⁾ は斯る問題をできるだけ正確に且つ簡単に解いて見た。但し翼の形、排列についての假定は各翼の断面が長さについて一定であること、shrouding によつて結合された翼の數は無限にならんでゐることなどである。断面一定といふことも振動の性質を見るには充分と思はれるし、無數の翼が帯板で結ばれてゐることも大して問題にはならぬと思ふ。尚翼の振動の方向を最も撓み易い方向とする。問題を二つに分けて、翼車が回轉せぬときの翼群の弾性振動の振動數 $p'/2\pi$ と、翼車が回轉するときの翼群の遠心力による振動の振動數 $p''/2\pi$ を出し、實際の振動數 $p/2\pi$ は

$$p^2 = p'^2 + p''^2$$

なる關係によることにした。

遠心力を考慮に入れぬ場合 最初に次の符號を設ける：

- ρ_1, ρ_2 = 夫々翼と帯板の密度,
- E_1, E_2 = 夫々.....の Young 率,
- a_1, a_2 = 夫々.....の効果的面積,
- k_1, k_2 = 夫々.....の断面慣性半徑,

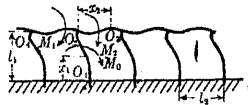
l_1, l_2 = 夫々翼長と二つの翼間にある帯板の効果的長さ,

y_1, y_2 = 夫々翼と帯板の座標 x_1, x_2 に於ける撓み,

M_0, M_1, M_2 = 翼及び帯板の接ぎ目に於ける屈曲モーメント.

R = 翼車の半徑,

ω = 翼車の回轉角速度.



第 45 圖

1) E. Schwerin, "Ueber die Eigenfrequenzen der Schaufelgruppen von Dampfturbinen," *Verh. 2-int. Kongr. tech. Mech.* (Zürich, 1926), 207-212; *Zs. f. tech. Phys.*, 8 (1927), 312.

2) 筆者, "Vibrations of a Group of Turbine Blades," *造船協會會報*, 50 (1932).

遠心力のない場合を解くのであるから $\omega=0$ として差支がない。又タービン翼の長さは翼車の半徑に比較すると小さいし、その翼列の間隔は一番狭いものである。それで $1/R=0$ と見て弾性振動を取扱つてもよい譯である。その場合の翼の振動方程式は次の如くなる：

$$E_1 k_1^2 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} + \rho_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0. \tag{185}$$

この式を解く爲に $y_1 = u_1 \cos p't$ と書けば上式から次式が出る：

$$\frac{d^4 u_1}{dx_1^4} = m_1^4 u_1, \tag{185'}$$

茲に

$$m_1^4 = \frac{\rho_1 p'^2}{E_1 k_1^2}.$$

(185') の解は

$$u_1 = A_1 \cos m_1 x_1 + B_1 \sin m_1 x_1 + C_1 \cosh m_1 x_1 + D_1 \sinh m_1 x_1. \tag{186}$$

固定端 O_1 に於ける條件は

$$x_1 = 0; \quad u_1 = 0, \quad \frac{du_1}{dx_1} = 0. \tag{187}$$

(186) を (187) に入れて

$$u_1 = A_1 (\cos m_1 x_1 - \cosh m_1 x_1) + B_1 (\sin m_1 x_1 - \sinh m_1 x_1). \tag{188}$$

他端 O_2 に於ける條件は

$$x_1 = l_1; \quad -E_1 a_1 k_1^2 \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} = M_0, \quad -E_1 a_1 k_1^2 \frac{d^3 u_1}{dx_1^3} = \rho_2 a_2 l_2 p^2 u_1. \tag{189}, (190)$$

$O_2 O_3$ 又は $O_4 O_2$ の振動方程式は

$$E_2 k_2^2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4} + \rho_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0. \tag{191}$$

この式に於て $y_2 = u_2 \cos p't$ と書けば

$$\frac{d^4 u_2}{dx_2^4} = m_2^4 u_2 \tag{191'}$$

となる。茲に

$$m_2^4 = \frac{\rho_2 p'^2}{E_2 k_2^2}.$$

(191') の解は

$$u_2 = A_2 \cos m_2 x_2 + B_2 \sin m_2 x_2 + C_2 \cosh m_2 x_2 + D_2 \sinh m_2 x_2. \quad (192)$$

剛節点 $x_2=0$, $x_1=l_1$ に於ける条件は

$$u_2=0, \quad \frac{du_2}{dx_2} = \frac{du_1}{dx_1}, \quad -E_2 a_2 k_2^3 \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} = M_2 \quad (193), (194), (195)$$

であり、同様な節点 $x_2=l_2$, $x_1=l_1$ に於ける条件は

$$u_2=0, \quad \frac{du_2}{dx_2} = \frac{du_1}{dx_1}, \quad -E_2 a_2 k_2^3 \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} = M_1. \quad (196), (197), (198)$$

剛節点 O_2 又は O_3 の条件は

$$M_0 + M_1 - M_2 = 0. \quad (199)$$

(189), (190), (193), (194), (195), (196), (197), (198), (199) の条件を (188), (192) にあてはめて $A_1, B_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ といふ定数、及び M_0, M_1, M_2 なるモーメントを見出し、同時に振動数 $p'/2\pi$ を定めるべき m_1, m_2 を決定することができる。

$$\text{今} \quad m_1 l_1 = \alpha, \quad m_2 l_2 = \beta, \quad \frac{\rho_2 a_2 l_2 p'^2}{E_1 a_1 k_1^3 m_1^3} = \gamma, \quad \frac{m_2}{m_1} = \xi, \quad \frac{E_2 a_2 k_2^3 m_2^2}{E_1 a_1 k_1^3 m_1^2} = \eta \quad (200)$$

と書けば、(190) の条件から

$$\begin{aligned} A_1 [(\sin \alpha - \sinh \alpha) + \gamma (\cos \alpha - \cosh \alpha)] \\ = B_1 [(\cos \alpha + \cosh \alpha) - \gamma (\sin \alpha - \sinh \alpha)]. \end{aligned} \quad (201)$$

(193), (194) から

$$(B_2 + D_2) \xi = -A_1 (\sin \alpha + \sinh \alpha) + B_1 (\cos \alpha - \cosh \alpha). \quad (202)$$

(196) から

$$A_2 (\cos \beta - \cosh \beta) + B_2 \sin \beta + D_2 \sinh \beta = 0. \quad (203)$$

(197), (202) によつて

$$A_2 (\sin \beta + \sinh \beta) + B_2 (1 - \cos \beta) + D_2 (1 - \cosh \beta) = 0. \quad (204)$$

(189), (195), (198) 及 (199) とから

$$\begin{aligned} A_1 (\cos \alpha + \cosh \alpha) + B_1 (\sin \alpha + \sinh \alpha) + A_2 \eta (-2 + \cos \beta + \cosh \beta) \\ + B_2 \eta \sin \beta - D_2 \eta \sinh \beta = 0. \end{aligned} \quad (205)$$

A_1, B_1, A_2, B_2, D_2 を (201), (202), (203), (204), (205) から消去すれば

$$\begin{aligned} 2\{\cos \alpha \sinh \alpha + \sin \alpha \cosh \alpha\} + \gamma (\cos \alpha \cosh \alpha - 1) \{\sin \beta (\cosh \beta - 1) \\ + \sinh \beta (1 - \cos \beta)\} \\ = \frac{\xi}{\eta} \{(\cos \alpha \cosh \alpha + 1) + \gamma (\cos \alpha \sinh \alpha - \sin \alpha \cosh \alpha)\} (\cos \beta \cosh \beta - 1) \end{aligned} \quad (206)$$

なる関係が出る。之から振動数 $p'/2\pi$ が算定できる。

翼の剛度が帯板のそれに比し非常に高いときには $\eta/\xi=0$ となり、従て

$$\cos \beta \cosh \beta - 1 = 0. \quad (207)$$

之は帯板の振動数の式であつて、両端の固定された棒の撓み振動の場合を示してゐる。特別に帯板のないときには $\eta/\xi=0$, $\gamma=0$ であり、

$$\cos \alpha \cosh \alpha + 1 = 0 \quad (208)$$

なる関係が出る。之は一端固定、他端自由なる棒の振動数を定める式であつて、翼の振動のそれを意味して居る。

又若し帯板の剛度が翼のそれに比し非常に高いときには、 $\xi/\eta=0$, $1/\gamma=0$ と置ける。従て

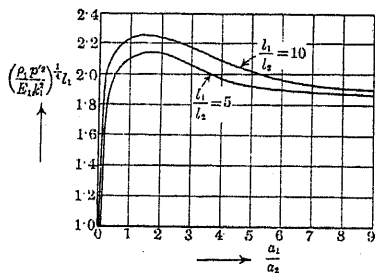
$$\cos \alpha \cosh \alpha - 1 = 0 \quad (209)$$

となり、翼の両端が固定された場合の振動数の式を與へる。

(206) を正式に解くことは非常に困難であるから、之を trial and error の方法で解いた。又問題を $l_1/l_2=10, =5$ の場合に限り、且つ $\rho_1=\rho_2$, $E_1=E_2$ と考へ、尙翼の幅とそれが撓む方向を考へるときの帯板の有効幅は等しいとしたのである。そのやうにして出した $\left(\frac{\rho_1 p'^2}{E_1 k_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} l_1$ の値は次の如くなる：

α_1/α_2	1/10	1/2	1	2	4	6	9
$l_1/l_2 = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$	1.717	2.13	2.226	2.235	2.086	1.966	1.879
	—	1.98	2.096	2.131	1.965	1.896	—

又同じものを圖示すれば次の如くなる。この結果によつて帯板がある爲の固有振



第 46 圖

井清氏におふ所が多い。

遠心力の影響 次に弾性を看過して遠心力のみ働くときの問題を考へ、 x の原點を翼の固定端に置く。 x なる断面に於ける遠心力は

$$\rho_2 a_2 l_2 \omega^2 (R+l_1) + \rho_1 a_1 \omega^2 \int_x^{l_1} (R+x) dx \quad (210)$$

であるから、翼の單位長さの部分の振動方程式は

$$\rho_1 a_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\{ \rho_2 a_2 l_2 \omega^2 (R+l_1) + \rho_1 a_1 \omega^2 \int_x^{l_1} (R+x) dx \right\} \frac{\partial y}{\partial x} \right] \quad (211)$$

となる、但し y は撓み變位である。今、 $y = u \cos p''t$ と書けば、上式は

$$\left[\frac{\rho_2 a_2 l_2}{\rho_1 a_1} (R+l_1) + R(l_1-x) + \frac{l_1^2 - x^2}{2} \right] \frac{d^2 u}{dx^2} - (R+x) \frac{du}{dx} + \frac{p''^2}{\omega^2} u = 0. \quad (212)$$

又

$$z = \frac{R+x}{R+l_1}, \quad \zeta^2 = 1 + \frac{2\rho_2 a_2 l_2}{\rho_1 a_1 (R+l_1)} \quad (213)$$

と書けば、

$$\left\{ 1 - \left(\frac{z}{\zeta} \right)^2 \right\} \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{2z}{\zeta^2} \frac{du}{dz} + \frac{2p''^2}{\zeta^2 \omega^2} u = 0 \quad (214)$$

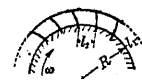
となる。この式の解は

$$u = AP_n \left(\frac{z}{\zeta} \right) + BQ_n \left(\frac{z}{\zeta} \right), \quad (215)$$

動数の増加は a_1/a_2 が 1 乃至 2 位のときに極大を示し、その割合は約 50% であることがわかる。 a_1/a_2 が 6 乃至 7 になると帯板をつけたことは殆ど無効になる。又 $a_1/a_2 < \frac{1}{2}$ 位になると固有振動数が著しく低下することが認められる。而して遂には零に向ふのである。この計算に對しては金

但し

$$\frac{2p''^2}{\omega^2} = n(n+1). \quad (216)$$



従て一般解は

$$y = \left\{ AP_n \left(\frac{z}{\zeta} \right) + BQ_n \left(\frac{z}{\zeta} \right) \right\} \cos p''t. \quad (217)$$



第 47 圖

この形の解は小野鑑正博士がタービン翼の問題について得られたのと似た形であり、従てこの解を得る爲には小野博士の論文が非常に参考になつてゐる。二種の解は $Q_n(z/\zeta)$ が不便な性質のものであるから、之を捨てて $P_n(z/\zeta)$ のみを取ると下の如くなる。このやうにしても實際問題上に大して差支がない。

$$y = AP_n \left(\frac{z}{\zeta} \right) \cos p''t. \quad (218)$$

境界條件として

$$x=0; \quad y=0$$

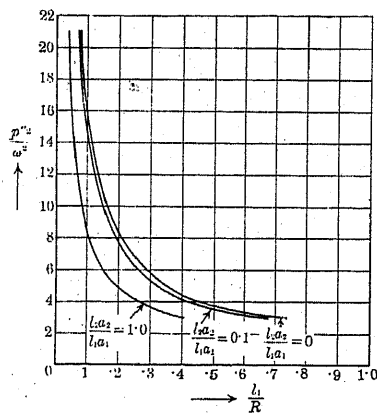
と置けば、

$$P_n \left(\frac{R}{R+l_1} / \sqrt{1 + \frac{2\rho_2 a_2 l_2}{\rho_1 a_1 (R+l_1)}} \right) = 0, \quad (219)$$

但し $n(n+1) = 2p''^2/\omega^2$ である。この式を解き、種々の p''^2/ω^2 , $l_2 a_2/l_1 a_1$ に對する l_1/R を求めれば次の表及び圖の如くなる。

p''^2/ω^2	3	6	10	15	21
0	.736	.291	.1615	.104	.073
1/40	.719	.285	.160	.102	.071
1/20	.698	.280	.153	.099	.069
1/10	.678	.263	.149	.097	.068
1/5	.617	.250	.136	.090	.061
1	.410	.151	.082	.052	.038

帯板があると、この場合の振動数が少しではあるが減少する事がわかる。



第 48 圖

上述の如くして出た二つの場合の結果を結合して實際問題にあてはめればよいのである。理論的には翼については

$$\rho_1 a_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + E_1 a_1 k_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_2 a_2 l_2 \omega^2 (R + l_1) + \rho_1 a_1 \omega^2 \int_x^{l_1} (R + x) dx \right] \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \quad (220)$$

なる式を用ひ、帯板については既に述べた式と同じものを用ひればよい。しかし現在は

$$p^2 = p'^2 + p''^2 \quad (221)$$

を用ひて計算を行つたのである。今、一例として

$$R = 65.3 \text{ 寸}, \quad l_1 = 10 \text{ 寸}, \quad l_2 = 1 \text{ 寸}, \quad a_1 = 0.6 \text{ 平方寸}, \quad a_2 = 0.3 \text{ 平方寸},$$

$$\text{翼の幅} = \text{帯板の幅} = 1.67 \text{ 寸}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 6.0, \quad E_1 = E_2 = 1 \times 10^{12} \text{ C.G.S.}, \quad \omega = 100 \pi$$

にとり前の結果を用ひて計算して見ると、 $\left(\frac{\rho_1 p'^2}{E_1 k_1^3}\right)^{1/4} l_1 = 2.35$ が出る。之から

$$\frac{p'}{2\pi} = 335 \text{ 毎秒.}$$

同様にして $p''^2/\omega^2 = 10$ 。これから

$$\frac{p''}{2\pi} = 370 \text{ 毎秒.}$$

従て

$$\frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{p'^2 + p''^2} = 578 \text{ 毎秒.}$$

帯板のない時には $\left(\frac{\rho_1 p'^2}{E_1 k_1^3}\right)^{1/4} l_1 = 1.875$ であり、故に

$$\frac{p'}{2\pi} = 237 \text{ 毎秒.}$$

又、この場合 $p''^2/\omega^2 = 10.8$ 。故に

$$\frac{p''}{2\pi} = 165 \text{ 毎秒.}$$

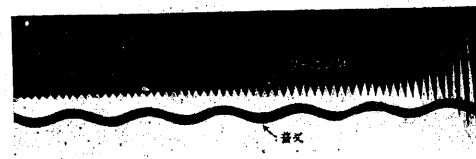
従て

$$\frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{p'^2 + p''^2} = 289 \text{ 毎秒.}$$

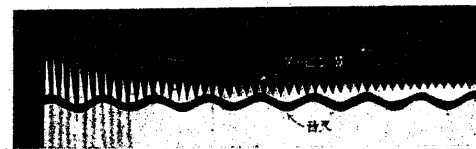
86. タービン翼振動の實驗

タービン翼の如き簡單なものの固有振動を測定する方法は考方によつて種々のものができるであらうけれども、完全な實驗は割合に少い。しかし小野博士¹⁾がその理論的研究に關聯して行つた實驗は、實驗そのものとしても大分面白い。それで實驗の一例としてここに紹介しておく。

この方法はアーク燈から出た光を condenser とスリットとを通し、次に寫眞用レンズを通過させた後圓筒レンズのあるフィルム暗箱の中へうつすのである。而してタービン翼はスリットのある枠の一方の側へ置き、これに初めかけてある荷重を離して振動させたときにスリットを通過する光の幅を増減させるのである。



第 49 圖 (a)



第 49 圖 (b)

倍率は35倍位であつた。又、時間を測る爲に光線の路の中へ音叉を置き、その振動の曲線を直接フィルムにうつすのである。

其實驗例を示せば上圖(小野博士論文より)の如くなる。翼の翼車軸の方向の位置に於ける振動數と圓周方向の振動數とは毎秒夫々 477.4 (a 圖) 及び 299.9 (b 圖) で

¹⁾ 小野鐵正, "Vibrations of Turbine Blades," 機械學會誌, 27 (1924). 467-479.

あつた。各圖の下に出てゐる波形は音叉の記録である。

この結果を、小野博士が行つた遠心力のみによる振動計算の結果と組合せると、
夫々

$$\sqrt{\left(\frac{p_1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{2\pi}\right)^2} = 100\sqrt{22.75 + 1.97} = 497 \text{ 毎秒,}$$

$$\sqrt{\left(\frac{p_1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{2\pi}\right)^2} = 100\sqrt{9.00 + 1.97} = 331 \text{ 毎秒}$$

となるのである。\$p_1, p_2\$ は小野博士の論文の所で述べた意味をもつ。

87. 水力機械の振動

水力機械に於ては水の運動が振動を起す原因となつて遂に機械全體の振動が誘起されるのである。この種の研究は比較的昔から行はれてゐるのにも拘らず、問題をやかましく考へると非常に複雑になる爲に、極めて簡単にかたづけられたやうである。Hort¹⁾ の教科書を見るとその種々の場合が論じられてゐるから、茲では何れの場合も省略して普通には出て來ない特別な研究例を擧げることとする。

内丸博士²⁾ は鬼頭氏と共に水力タービンの通水管に異常な振動が起ることに着目してその理論的研究を試みた。即ち、水力タービン車を通つた水が一緒になつて通水管を通るときにその管中に吸水及びタービンの状態によつて定まる circulation を有する圓錐形の渦柱ができ、それがタービン其他の擾亂力によつて振動するとき、固有の振動週期を葆ち得るのである。然るに外部の管も亦固有の週期を持ち得るものであるから、若し管の週期と同じ週期の渦柱の振動が誘起されたとすると、茲に共振が起り、實際にあるやうな振動が見られるといふ譯である。渦柱の振動形は圓周方向には \$\cos \theta\$ の如く變化する主要型のみが取つてあり、又渦柱と管との間には渦のない層を置いてある。渦柱の振動については非常に長い計算があるけれども省略する。又、管の固有振動數 \$n_0\$ には

1) W. Hort, *Technische Schwingungslehre* (Berlin, 1922).

2) 内丸最一郎、鬼頭史城、"On the Vibration of Draft Tube of Water Turbine," 東京帝國大學工學部紀要, 18 (1930), 213-270.

$$n_0 = \frac{3.516}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{M+M'}}$$

なる式を用ひた。茲に管は長さが \$l\$ であつて、上端固定、下端自由とし、その直径の圓周の斷 慣性モーメントは \$I\$、材料の Young 率は \$E\$、管の單位長さの質量は \$M\$、管中の水の管の單位長さに付ての質量は \$M'\$ である。又別に模型實驗を行つて管の固有振動を測定し、次に種々の圓周的速度をもつ水を送つて共振になるやうな所を探した。之等の實驗結果は理論のそれと或る意味に於てよく一致したのである。

内丸博士等³⁾ は更に圓錐狀に下の開いた送水管を製作して理論的考察と實驗的研究とを併せ行ひ、その理論が近似的であるにも拘らず、割合によく實驗と一致することを確めた。

内丸博士と同種類の問題の研究は全く獨立して宮城博士⁴⁾ によつて行はれた同博士の研究によれば送水管の振動は渦柱の振動と管の振動との共振ではなく、送水管中に擾亂せる水が送られる爲に管中に水の空虚即ち cavitation が起り、この爲に管の振動が誘起されるといふのである。

以上兩種の研究は何れも一長一短があり、内丸博士の方にしても渦の一定週期の振動が何故絶えず誘起されるであらうかといふ疑問が研究の経験のないものには起つて來るし、宮城博士のものにしても、水面近くにある船用推進器の如く、送水管の cavitation にもタービンの速度に關係して變化する種々の規則的週期が本當にあり得るかといふ疑が起らないでもない。之等を確定するにはもつと精密なる定性的實驗を繰返して見る必要があるやうに思はれる。

流體の振動に伴つて、又は流體と共に起る機械の振動問題はそれが複雑なだけそれだけ今後益々發達の傾向を取るものと思はれる。最近發表された Magyar⁵⁾ や

1) 内丸最一郎、鬼頭史城、"On the Vibration of Conical Draft-tube," 東京帝國大學工學部紀要, 19 (1930), 71-106.

2) 宮城晋五郎、"Cavitation in and consequent Vibration of the Draught Tube of a Water Turbine," 機械學會誌, 33 (1930), 57-59.

3) F. Magyar, "Theorie der Schwingungen in Windkesseln von Kolbenpumpen," *ZS. f. tech. Phys.*, 7 (1926), 396-413.

Selikin¹⁾の論文などはこの種の研究の導火線になるものと考へられる。

88. 調速機其他の振動問題

調速機等の附属機械類は遠心力其他の力を巧に應用してゐる爲にそれだけ又振動現象が多く現はれるのは當然である。しかしその振動はそれ自身の機構上から起ることが多く、その機械を精密に作れば作る程餘計な振動はなくなるものであり、たとひ振動があつても他へ直接に機械的影響を及ぼすことが少いのである。従てその説明も重要ならざるものと見て省略することにしたが、委しい事は Tolle²⁾の教科書や Mises³⁾の綜合報告、Hort⁴⁾の教科書などを見ればよい。

一般機械の振動問題を Lagrange 其他の方程式を用ひて委しく研究したものには Eksergian⁵⁾の非常に長い論文がある。この種の問題は従來多くの人によつて取扱はれてはゐるけれどもこの位によく纏つたものは少いやうである。最近には Root⁶⁾の教科書も現はれた。

89. 砲身の振動問題

銃口から弾丸が中心をよく保つて飛び出る場合でも、銃内に螺線が切つてある爲に、銃口に於ける状態其他から振動が誘起されるものである。その屈曲、長さの方向其他の振動に對する理論は簡單ではあるが、屈曲振動の場合は昔 Mallock⁷⁾によつて出されてをり、又 Jones⁸⁾も手をつけた。單に砲身の方向や半径の方向の振動の

1) R. Selikin, "Schwingungen der Dampfmaschinen in Verdampferanlagen," *ZS. f. tech. Phys.*, 11 (1930), 545-546.

2) M. Tolle, *Die Regelung der Kraftmaschinen*, 2. Aufl. (Berlin, 1909).

3) R. v. Mises, "Dynamische Probleme der Maschinenlehre," *Encyk. d. math. Wiss.*, 4, Teil 2, Chap. 10.

4) W. Hort, *Technische Schwingungslehre*, 2. Aufl. (Berlin, 1923).

5) R. Eksergian, "On the Dynamical Analysis of Machines," *Proc. 3-int. Congr. Appl. Mech.* (Stockholm, 1930), 213-220; *Journ. Franklin Institute*, 209 (1930), 21, 237, 391, 503, 649, 815; 210 (1930), 227, 353, 477, 645; 211 (1931), 87, 225, 353, 495, 672.

6) R. E. Root, *Dynamics of Engine and Shaft* (1932).

7) A. Mallock, "Vibrations of Rifle Barrels," *Proc. Roy. Soc., London*, 63 (1901), 327-344.

8) H. J. Jones, "The Stiffness of Guns," *Engineering*, Dec. 30, 1910; *Journ. U. S. Artillery*, 35 (1911), 63-75.

弾性理論は Gossot 及 Liouville¹⁾, Dziobek²⁾, Martin³⁾などが研究し、其他 Klein⁴⁾も考を出し、Pilgram⁵⁾は大砲の復座發條の振動を論じた。之等は、大抵圓筒座標を用ひる弾性振動の研究に過ぎないやうである。銃身や砲身だけの振動理論は上述の範圍以外大して進歩したと思はれない⁶⁾。

銃身に關する實驗的研究は大河内、眞島の兩博士⁷⁾が光學的方法を用ひて行つた。それによると、銃の振動は屈曲、捩り、伸縮の振動があり、最も大なる振幅は屈曲のそれである。又、伸縮の振動は非常に週期が短く、振幅も小さく、且つ速く減衰するやうである。同様な問題は、これより前に Cranz 及 Koch⁸⁾が少しく異なる方法で研究を試みた。この場合にも矢張り大河内、眞島兩博士の研究と大體同じやうな結果が出てゐる。しかしそれは主として屈曲の振動だけしかよく現はれてをらないやうである。

1) F. Gossot et R. Liouville, "Mémoire sur les vibrations élastiques et la résistance des canons," *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, 25 (1897), 281-373.

2) O. Dziobek, "Die Beanspruchung der Kanonenrohre nach der dynamischen Theorie," *Mitt. ü. Gegen. d. Artillerie- u. Genie-Wetens*, 31 (1900), 33-44.

3) P. Martin, "Déformation et résistance élastique des bouches à feu sous des efforts dynamique," *Mémorial de l'Artillerie française*, 3 (1924), 647-696; 4 (1925), 1135-1165.

4) L. Klein, "Über Festigkeit und radiale Schwingungen dickwandiger Zylinder," *Artilleristische Monatshefte*, 14 (1920), 59-65.

5) M. Pilgram, "Die Berechnung von Vorholfedern mit Berücksichtigung der Massenbeschleunigungen und Eigenschwingungen," *Artilleristische Monatshefte*, 2 (1911), 292-306.

6) 之等の文献を知る事に關しては山内鎮一博士に負ふ所が多い。

7) 大河内正敏、眞島正市, "銃身の振動に關する研究," *火兵學會誌*, 11 (1916), 1-16; "Beiträge zur Schwingung des Gewehrlaufs," *數學物理學會記事*, [2], 9 (1917), 41-49.

8) C. Cranz u. K. R. Koch, "Untersuchungen über die Vibration des Gewehrlaufs," *Abh. d. bayer. Akad. d. Wiss.*, 19 (1899), 745-775; 20 (1900), 589-611; 21 (1901), 557-574.