

### 第三章 車軸の振動

#### 52. 車軸の屈曲振動及び回轉車軸の危険速度

回轉してゐない車軸の屈曲振動を論ずることは棒の屈曲振動の議論をする場合と全く同じである。棒の屈曲振動の議論は既に一般弾性體の振動論に於て述べたからこゝに態々持出す必要もない。即ち回轉せぬ車軸の屈曲振動問題は單に回轉車軸の危険速度 (critical speed of a shaft) を出す爲の豫備的研究として意味があるのに過ぎないのである。それでこゝでは直ちに回轉車軸の危険速度のことを論じ、以て屈曲振動が危険速度の問題と如何に密接な関係があるかを示さう。尙又、車軸の危険速度が屈曲振動の如何なる場合の現象を意味するか、そのことにも論及したいと思ふ。

すべての車軸に於て、それがたとひかなりの程度まで平衡されてゐる場合であつても、或る回轉速度に到達するときは異常な振動的撓みを生ずるものである。而して時としてはその車軸が折損することさへもある。しかしこの回轉速度を越した所では再び振動がなくなるのが普通である。上述の如き特別の回轉速度を危険速度 (critical speed) と名づける。この危険速度は車軸の支へ方、車軸の長さ、その弾性率、附着車輪の質量、大きさ、車軸上の位置、偏心などに關係するものである。

附加質量がない場合の理論的考察は 1869 年 Rankine<sup>1)</sup> によつて初めて與へられたものであつて、その稍複雑な部分は 1883 年 Greenhill<sup>2)</sup> によつて研究された。しかし附加質量のある場合や其他種々の状態の研究は Dunkerley<sup>3)</sup> に負ふ所が非

<sup>1)</sup> W. J. M. Rankine, "On the Centrifugal Force of Rotating Shafts," *The Engineer*, 27 (1869), 249.

<sup>2)</sup> G. Greenhill, "On the Strength of Shafting under Torsion and End Thrusts," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1883, 182-225.

<sup>3)</sup> S. Dunkerley, "On the Whirling and Vibration of Shafts," *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, (A), 185 (1894), Part 1, 279-360.

常に多く、その時既にかかりの領域にまで達してゐたことがわかる。尙、之等の人と無關係に直接實際問題について考究し、危険速度を越せば實際に於て安定となる事を應用して細い軸を用ひたものに de Laval の所謂 flexible shaft の問題がある。其後この研究は理論的にも實驗的にも異常な進展をとげた。

危険速度が存在する理由として二つのものがある。一つは、若し偏心がなければ車軸が何かの原因で少しの屈曲變位を生じたときに、それによつて質量に基づく遠心力が生ずる爲である。斯る遠心力の働いてゐる部分が幾何學的車軸の周圍に回轉するとき、その回轉の週期が車軸の屈曲振動の週期と一致するときに不安定の振動が起るとするのである。他の一つは、偏心があるときに本來斯る速度で共振が起り不安定となるといふのである。即ち危険速度に於て車軸の所謂 whirling が起るのである。實際に於てこの兩方から出した危険速度は一致してゐるから、理論上はともかく、便宜上何れの方法で危険速度を出してもよいものである。

Dunkerley は理論を實際に確める爲に Owen College の Whitworth 實驗室に於て車軸の模型を作つて試験をした。この方法によつて計算では殆ど不可能な場合までも研究することができたのである。一車軸に數個の回轉集中質量がある場合について出した Dunkerley の實驗公式は非常に有名なものである。

#### 53. 回轉子を有せず且つ偏心なき車軸の危険速度

均一なる断面を有する車軸を考へ、その長さの方向に  $x$  を取り、 $x$  に於て回轉と共に起る屈曲變位を  $y$  とする。車軸の密度を  $\rho$ 、Young 率を  $E$  とし、 $\omega$  を回轉角速度、 $Ak^2$  を車軸断面の屈曲に對する慣性モーメントとする。然るときは  $x$  に於ける單位長さの element が  $y$  だけ變位を起したときに生ずる遠心力は

$$-\rho A \omega^2 y \quad (1)$$

である。従て回轉中に起る變位の方向の棒の屈曲振動の方程式は極座標の考から

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho \omega^2 y = -E k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (2)$$

である。この方程式の可能性、殊に  $\rho \omega^2 y$  の性質については kinematics の考から多少の疑を持たれてゐるが、固體の粘性其他の物理的性質によつてこの方程式が大體

成立し得るものと信ぜられてゐる。<sup>1)</sup>この式を正當に解いてその振動が不安定になる所を求めれば、それが車軸の whirling の起る境を與へ、そのときの回轉速度が危険速度を示すものである。即ち  $\omega$  で回轉せる場合の固有振動の週期を  $2\pi/p$  とし、 $y = u \frac{\cos}{\sin} pt$  と書けば、式 (2) は

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{\rho(p^2 + \omega^2)}{Ek^2} u = 0 \quad (3)$$

となり、兩端の條件によつて Eigenwertproblem の考から  $p^2 + \omega^2$  が丁度車軸が回轉せぬ場合の振動数の式  $p^2$  に等しくなる。従て

$$p^2 = p'^2 - \omega^2.$$

即ち振動週期  $\frac{2\pi}{p}$  は

$$\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{p'^2 - \omega^2}} \quad (4)$$

となり、不減衰組織の場合に  $p'^2 = \omega^2$  となれば車軸の振動がその振動型に對しては不安定となる。換言すれば、車軸の回轉数が車軸の回轉せぬ場合の固有振動数に等しくなるとき、その車軸は whirling を起して不安定となる。しかし斯る振動型に對しては不安定となつても、高次の振動型に對しては未だ安定である。然るに實際問題を考へると主要振動型の不安定も振幅が小なる範囲内についてのみ成立するのであつて、大きな振幅になると弾性體の性質其他から安定となる場合が多いのみでなく、振幅が大きくなる結果は一種の偏心状態に入り、問題が別のものになることが多い。かうして主要振動が見た所安定となつた後、回轉数が速くなると第二次第三次の如き高次の振動型が現はれ、之等が順々に不安定となり得るものである。之等の事柄から偏心のない場合の危険速度は振動の不安定になる所であるといふ規範を以て説明しておいて先づ差支がないものである。

さて、このやうに考へた不安定の問題は小振幅の場合にしか適用されず、従て不安定となる限界にしか用ひられない。従てその目的に向つては、(2) に於て  $\rho \partial^2 y / \partial t^2$  を省略して

$$\rho \omega^2 y = Ek^2 \frac{d^4 y}{dx^4} \quad (5)$$

<sup>1)</sup> J. Prescott, *Applied Elasticity* (London, 1924), 236-237.

を解けばよいのである。換言すれば弾性振動の復原力のなくなる所をしらべることである。今

$$m^4 = \rho \omega^2 / Ek^2 \quad (6)$$

と書けば、上の方程式は

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = m^4 y \quad (7)$$

となる。この式の解は

$$y = A \cosh mx + B \sinh mx + C \cos mx + D \sin mx \quad (8)$$

である。A, B, C, D は兩端の條件から定まる所の常數である。

(5), (6) を考へて見ると、危険速度  $\omega$  に於ける回轉數  $\omega/2\pi$  は車軸が回轉せぬ場合の屈曲振動の固有振動数に等しいことがわかる。従て危険速度に於ける棒の屈曲線は丁度棒の自由屈曲振動の曲線に等しいことがわかる。勿論、車軸の端の條件は棒の場合のそれと同様であるものとする。

危険速度に於ける屈曲線が棒の自由振動の形と同じであることがわかれば、最早餘り深く立入る必要がないやうではあるけれども、具體的説明の爲に二三の場合を擧げて見ることにしよう。極く簡単な場合、即ち長さ  $l$  なる車軸の一端が固定され他端が自由なときには、

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0, \\ x=l; \quad \frac{d^2 y}{dx^2}=0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3}=0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

であるので、(9) を (8) に入れて次の關係が出る：

$$\cosh ml \cos ml + 1 = 0. \quad (10)$$

而して  $ml$  の最小値は  $ml = 1.870 01$  で與へられる。

兩端が支持されてゐるときは同様にして

$$ml = 3.1416. \quad (11)$$

次に  $l+l'$  なる車軸の一端  $x=-l$  及び中間點  $x=0$  が支持され、他端  $x=l'$  が自由なときはその兩 spans に於て

$$\left. \begin{aligned} y &= A \cosh mx + B \sinh mx + C \cos mx + D \sin mx, \\ y_1 &= A' \cosh mx + B' \sinh mx + C' \cos mx + D' \sin mx \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

なる方程式が成立する。

境界条件として

$$\left. \begin{aligned} x = -l; \quad y &= 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \\ x = 0; \quad y &= 0, \quad y_1 = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \\ x = l; \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= 0, \quad \frac{d^3 y_1}{dx^3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(12) を (13) に入れて  $A, B, C, \dots, D'$  を消去すれば

$$\begin{aligned} &(\cosh ml \sin ml - \sinh ml \cos ml)(\cosh ml' \sin ml' - \sinh ml' \cos ml') \\ &\quad - 2 \sinh ml \sin ml (1 + \cosh ml' \cos ml') = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

この式を近似的に解く爲に、 $l' = \alpha l$  と書き  $\alpha < 1$  とすれば、上式を  $ml$  の級数に展開して近似的に

$$(ml)^6 \left\{ \frac{\alpha^4}{270} + \frac{2\alpha^3}{945} \right\} - (ml)^4 \left\{ \frac{\alpha^4}{3} + \frac{4\alpha^3}{9} + \frac{2}{45} \right\} + 4 = 0 \quad (15)$$

となる。之を解いて表で示せば次の如くなる：

$\alpha$	1	3/4	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	0
$ml$	1.508	1.902	2.507	2.905	3.009	3.044	3.060	3.069	3.071	3.073	3.078	3.080

Dunkerley<sup>1)</sup> はこの結果を模型実験と比較した所が、危険速度に於て數%以内の差異しか認めることができなかつたといふことである。

今度は一端が固定され他端が支持されてゐる場合を (8) を用ひて計算して見ると

$$\coth ml = \cot ml \quad (16)$$

<sup>1)</sup> S. Dunkerley, 前掲。

となり、 $ml$  の最小値は

$$ml = 3.9266 \quad (17)$$

となるのである。

次に  $l_1 + l_2$  なる棒の両端  $x = -l_1$  及  $x = l_2$  と中間点  $x = 0$  が支持されてゐるときは、(12) を應用して

$$\coth ml_1 + \coth ml_2 = \cot ml_1 + \cot ml_2 \quad (18)$$

が得られる。今、 $ml_2 = \alpha ml_1$  と書き、上式を展開して解いた結果を表で示せば下の如くなる：

$\alpha$	0	$\frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}$ 位	$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ 位	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \sim 1$
$ml_1$	3.9003	3.7620	3.6480	3.6056	3.5101	3.3282	3.1416

この場合にも數%の範囲内に於て実験とよく一致したのである。

最後に  $x = 0$  及  $x = l$  なる両端が固定せる場合には容易に

$$\cosh ml \cos ml - 1 = 0 \quad (19)$$

なる関係のあることがわかり、その場合に  $ml$  の最小値は次の如くなる：

$$ml = 4.74503. \quad (20)$$

上述の研究は Dunkerley の外に Chree<sup>1)</sup> や Frith 及 Buckingham<sup>2)</sup> が大體同じやうなことをもつと丁寧にやつてゐる。又、同様な問題で車軸の中間にも支持点のあるものに就ては Darnley<sup>3)</sup> の研究がある。Chree の問題で車軸の方向に壓縮力の働く場合は Southwell<sup>4)</sup>, Naylor<sup>5)</sup> の論文に出てゐる。

<sup>1)</sup> C. Chree, "The Whirling and Transverse Vibrations of Rotating Shafts," *Phil. Mag.*, 7 (1904), 504-542.

<sup>2)</sup> J. Frith & F. Buckingham, "The Whirling of Shafts," *Journ. Inst. Elect. Eng.*, 62 (1924), 107-113.

<sup>3)</sup> E. R. Darnley, "The Transverse Vibrations of Beams and the Whirling of Shafts supported at Intermediate Points," *Phil. Mag.*, 41 (1921), 81-96.

<sup>4)</sup> R. V. Southwell, "On the Stability of a Rotating Shaft Subjected Simultaneously to End Thrust and Twist," *Brit. Assoc. Rep.*, 1921, 345-355.

<sup>5)</sup> T. M. Naylor, "Whirling of Shafts," *Brit. Assoc. Rep.*, 1927 (Abstract).

尚種々の振動型に対する危険速度の方程式は棒の自由振動の式に似てをり、振動のノーマル函数の性質をも保有してゐる。車軸の主要危険速度に於ける變位を  $y_1$  とし、高次のものを  $y_2$  とすれば各危険速度に於て

$$(EIy_1'')' = \omega_1^2 \rho A y_1, \quad (21)$$

$$(EIy_2'')' = \omega_2^2 \rho A y_2, \quad (22)$$

こゝに  $I$  は断面の慣性モーメント、 $A$  は断面積とし、之等は長さに沿うて變化があるものとしておく。又  $(\prime)$  は  $x$  に就ての微分を示す。 $\omega_1, \omega_2$  は  $y_1, y_2$  に相當する危険速度である。(21) に  $y_2$  を乗じ、(22) に  $y_1$  を乗じて差引をし、之を棒の長さについて積分すれば

$$\int_0^L y_2 (EIy_1'')' dx - \int_0^L y_1 (EIy_2'')' dx = (\omega_1^2 - \omega_2^2) \int_0^L \rho A y_1 y_2 dx. \quad (23)$$

左邊の第一式を積分すれば

$$[y_2 (EIy_1'')]_0^L - \int_0^L y_2' (EIy_1') dx.$$

この式の第二項を更に積分して

$$[y_2 (EIy_1'')]_0^L - \int_0^L y_2'' EI y_1' dx.$$

然るに、兩邊の條件が指定されてゐるとき、例へば一端が支持されてゐるときは  $y_2 = 0, y_2' = 0$  であるし、固定されてゐるときは  $y_2 = 0, y_2'' = 0$  である。それで結局

$$\int_0^L EI y_2'' y_1' dx \quad (24)$$

のみが残る。同様にして(23)の左邊の第二項を積分しても(24)と同じになり、それ等を差引すると當然零であるから、直ちに

$$\int_0^L \rho A y_1 y_2 dx = 0 \quad (25)$$

が得られるのである。この関係やその延長を利用して高次の危険速度の性質の研究に應用できる。以上の関係は初めにも説明した通り、不安定の限界にのみ適用されるものである。

#### 54. 附加回轉子を有し偏心なき車軸の危険速度<sup>1) 2)</sup>

この場合もやはり前節の如く安定の限界のみを取扱ふといふ條件のもとに議論するのである。今、車軸の途中に  $M$  なる質量の回轉子があるとき、その點の回轉と共に起る撓みを  $y_1$  と書けば

$$\frac{dR}{dx} - \frac{dL}{dx} = M\omega^2 y_1 \quad (26)$$

が成立する。こゝに  $R$  及  $L$  は回轉子の右側及び左側の屈曲モーメントである。而して回轉子と支持點との間では(5)、(8)で表されるやうな方程式と解とが成立する。

次に  $M$  なる質量による couple を考へて見ると

$$R - L = J\omega^2 \frac{dy}{dx}, \quad (27)$$

茲に  $J$  は附加回轉子  $M$  の重心を通り車軸に直角なる線の周圍に取つた  $M$  の慣性モーメントを表す。

さて一例として  $x=0$  で固定され、その右の  $x=l$  なる自由端に  $M$  なる質量の回轉子があるときは、 $x=l$  で  $R=0$  である。従て(8)及(26)から

$$A \left\{ \sinh ml + \frac{M\omega^2}{m^3 EI} \cosh ml \right\} + B \left\{ \cosh ml + \frac{M\omega^2}{m^3 EI} \sinh ml \right\} \\ + C \left\{ \sin ml + \frac{M\omega^2}{m^3 EI} \cos ml \right\} - D \left\{ \cos ml - \frac{M\omega^2}{m^3 EI} \sin ml \right\} = 0. \quad (28)$$

次に、(8)及(27)から

$$A \left\{ \cosh ml + \frac{\omega^2 J}{m EI} \sinh ml \right\} + B \left\{ \sinh ml + \frac{\omega^2 J}{m EI} \cosh ml \right\} \\ - C \left\{ \cos ml + \frac{\omega^2 J}{m EI} \sin ml \right\} - D \left\{ \sin ml - \frac{\omega^2 J}{m EI} \cos ml \right\} = 0. \quad (29)$$

<sup>1)</sup> S. Dunkerley, 前掲

<sup>2)</sup> W. Kerr, "On the Whirling Speeds of Loaded Shafts," *Engineering*, 101 (1916), 150-152, 187-199, 224-226, 245-248.

又  $x=0$  で  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$  であるから

$$A+C=0, \quad B+D=0. \quad (30)$$

(28), (29), (30) から  $A:B:C:D$  を消去すれば

$$\begin{aligned} & \cosh ml \left\{ \cos ml \left( 1 + \frac{M\omega^4 J}{m^4 E^2 I^2} \right) + \sin ml \left( \frac{\omega^2 J}{mEI} - \frac{M\omega^2}{m^3 EI} \right) \right\} \\ & + \sinh ml \cos ml \left\{ \frac{M\omega^2}{m^3 EI} + \frac{\omega^2 J}{mEI} \right\} + \left\{ 1 - \frac{M\omega^4 J}{m^4 E^2 I^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

これから  $ml$  を出すにはためしの計算を用ひればよい。同様にして支持点の中間に質量がある場合もその数式だけは容易に書くことができる。

上述の方法は車軸の質量を考慮に入れた場合であつて、方程式の考としては厳密なものであるけれども、その値を出すことが非常にむづかしい。それで車軸の質量は看過できるものとして近似計算を行ふことは、實際問題として大して差支ないのみでなく、その便利さからいつてむしろ望ましいことである。

この考から我々は (7) の代りに次の微分方程式を書いてよい:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0. \quad (32)$$

之の解は一般に

$$y = \frac{A}{6} x^3 + \frac{B}{2} x^2 + Cx + D. \quad (33)$$

即ち車軸の屈曲線は静力學的のそれに等しい譯である。今、一例として  $x=0$  で固定され  $x=l$  なる自由端に  $M$  なる質量を有する車軸を考へると、

$$x=0; \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0 \quad (34)$$

から  $C=D=0$ 。又  $x=l$  に於て (26) 及 (27) の如き関係がある。即ち  $x=l$  で

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\omega^2 J}{EI} \frac{dy}{dx}, \quad (35)$$

及び

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{M}{EI} \omega^2 y \quad (36)$$

といふ関係を書き得る。(33) を之等の式に入れて見ると次の如くなる:

$$\frac{1}{12} \alpha \beta l^4 + \frac{1}{3} \alpha l^3 - (\beta l + 1) = 0, \quad (37)$$

茲に

$$\alpha = \frac{M\omega^2}{EI}, \quad \beta = \frac{J\omega^2}{EI}.$$

(37) から

$$\omega^2 = \frac{EI}{Ml^3} \left\{ \left( 6 - \frac{2l^2}{k^2} \right) \pm \sqrt{\left( 6 - \frac{2l^2}{k^2} \right)^2 + \frac{12l^3}{k^2}} \right\} \quad (38)$$

が出る。茲に  $k^2 = J/M$  である。

(37) 式は又次の如く書き得る:

$$k^2 = \frac{3 - \alpha l^3}{\alpha l^2 - 12 \alpha l}.$$

$\alpha l^3 < 3$  又は  $> 12$  のときは  $k^2$  が負の符號を持ち、危険速度の方程式が成立しない。従て whirling は  $M\omega^2 l^3 / EI$  が 3 と 12 との間に於て起る譯である。

長さ  $l$  なる車軸の中間點、即ち左端及び右端の支持點から夫々  $l_1, l_2$  なる距離に  $M$  なる質量がある場合を考へる。 $M$  の左側に就ては

$$y = \frac{A}{6} x^3 + \frac{B}{2} x^2 + Cx + D, \quad (39)$$

右側では

$$y_1 = \frac{A'}{6} x^3 + \frac{B'}{2} x^2 + C'x + D' \quad (40)$$

なる屈曲線がある。之等を

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad y=0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \\ x=l; \quad y_1=0, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = 0, \\ x=l_1; \quad y=y_1, \quad dy/dx = dy_1/dx, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} x=l_1; \quad dL/dx - dR/dx = -M\omega^2 y, \\ L - R = -J\omega^2 dy/dx, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

なる条件に入れて、結局

$$\alpha^2 k'^2 + 3 \left\{ \frac{\alpha l}{l_1 l_2} - \alpha k'^2 \left( \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right) \right\} - \frac{9l^2}{l_1^2 l_2^2} = 0 \quad (43)$$

が得られる。但し  $\alpha = M\omega^2/EI$ ,  $k'^2 = J/M$  である。この場合にも whirling のある所は前例の如くして

$$\frac{l_1 + l_2}{l_2} - 1 > \alpha l^2 l_2^2 / 3l > 1 \quad (44)$$

で示される。この不等式の左端の式に相当する  $\omega$  を superior limit of whirl といひ、右端の場合に相当する  $\omega$  を inferior limit of whirl といふ。且つ式の形を検査すると inferior limit の  $\omega$  はこの組織の回轉せざる場合の自由振動の frequency に一致する。

本節の場合の簡單なる問題は G. Greenhill<sup>1)</sup> によつても計算された。又後には飛行機のプロペラ軸の危険速度の問題に關聯して Fage<sup>2)</sup>, Greenhill<sup>3)</sup>, Morris<sup>4)</sup>, Berry<sup>5)</sup> などが委しい數理的研究を行つたのである。

### 55. 偏心のある場合の車軸の危険速度

今までは車軸に何等の偏心のない理想的の場合を考へ、或る回轉速度、即ち普通稱されてゐる所の危険速度に達するときは、その自由振動の不安定が起ることから、特別の現象の起り得ることを説明したのである。然るに實際の車軸では必ず偏心が存在し、又偏心がないとしても大なる振動振幅になると、偏心があるのと同じ事柄になるものである。それで本節では偏心のある場合を委しく考へることとする。

1) G. Greenhill, "Whirling and Whip of a Revolving Shaft," *Engineering*, 105 (1918), 273-274, 387-388, 415-417.

2) A. Fage, "The Whirling and transverse vibrations of a rotating air screw and its shaft," *Tech. Rep. Adv. Comm. Aeron.*, 1917-1918, 2, 453-470.

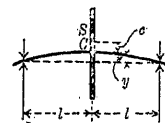
3) G. Greenhill, "The Whirling and whip of a revolving shaft," *T.R.A.C.A.*, 1918-1918, 2, 682-690.

4) J. Morris, "The bending, vibrating and whirling of loaded shafts," *T.R.A.C.A.*, 1918-1918, 2, 691-727.

5) Arthur Berry, "Report on the whirling of an airscrew shaft," *T.R.A.C.A.*, 1918-1918, 2, 728-737.

静力學的の極限決定法 先づ極限のみを出す爲に問題を静力學的に考へて見る。この考方は Stodola<sup>1)</sup>, Schwerin<sup>2)</sup> 其他<sup>3)</sup> により採用されてをり、その便利さからいふと非常に都合がよい。集中せる質量即ち回轉子を考へて回轉子が車軸から離れんとする力に抵抗する車軸の彈性的力を

$$P = \alpha y \quad (45)$$



第 17 圖

と書けば、

$$M(y+e)\omega^2 = P = \alpha y \quad (46)$$

なる釣合方程式を作ることができる。ここに  $e$  は車輪の偏心、 $y$  は回轉子の静止の位置からの撓み變位、 $M$  は回轉子の質量、 $\alpha$  は梁の静力學的釣合の關係から出し得る係數とする。上式によつて車輪の静止の位置からの變位の式が

$$y = \frac{M\omega^2 e}{\alpha - M\omega^2} \quad (47)$$

の如く表せる。今、 $2l$  を車軸の長さとし、 $I$  を車軸の断面内に引かれた中線の周囲の慣性モーメントとすれば、車軸の兩端が支持され、回轉子が車軸の中央にあるときは  $y = Pl^3/6EI$  によつて

$$\alpha = \frac{6EI}{l^3}$$

であるし、兩端が固定されてゐるときは  $y = Pl^3/24EI$  から

$$\alpha = \frac{24EI}{l^3}$$

となる。又、一端が固定され他端が自由なときは、 $y = 7Pl^3/96EI$  によつて

$$\alpha = \frac{96EI}{7l^3}$$

1) A. Stodola, *Dampf- und Gasturbinen*, 6. Aufl., § 88.

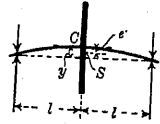
2) E. Schwerin, "Die Stabilität rotierender achsial belasteter Wellen," *Z.A.M.M.*, 5 (1925), 101-111.

3) L. Föppl, *Technische Mechanik* (Wien-Harm, Handb., 3, 2. Teil) (1929); A. L. Kimball, *Vibration Prevention in Engineering* (New York, 1932).

となる譯である。而して、式(47)から車軸の同轉速度が

$$\omega = \omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \tag{48}$$

となれば  $y$  が無限に大きくなる傾向を有し、従て危険速度に達するものである。



第 18 圖

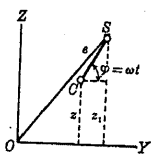
$\omega$  が增大して  $\omega_k$  よりも大きくなるときは(47)は最早成立せず、實際に於て左圖の如き位置を取るものである。従て式(47)の代りに

$$y = \frac{M\omega^2 e}{M\omega^2 - \alpha} = \frac{e}{1 - \frac{\alpha}{M\omega^2}} \tag{47'}$$

の如き式をおく必要がある。このことは初めから振動問題を論じて位相のことを考へておけば、自然に出て来る筈であつたのである。(47')を見るに、 $\omega$  が大になればなる程  $y$  が小さくなる。そこで  $P$  の式を書いて見ると

$$P = \alpha y = \frac{M\omega^2 e}{\frac{\omega^2}{\omega_k^2} - 1} \tag{49}$$

となるから、 $\omega$  を大きくする代りに  $\omega_k$  を小さくすればする程  $P$  が小さくなるのである。即ち車軸を細くする程危険速度から(その速度よりも大きな所で)免れ得る事がわかる。之が de Laval によつて試みられた所謂 flexible shaft である。



第 19 圖

振動の問題 上述の説明でわかるやうに静力學的に限界速度の問題を取扱ふときは、多少の不明瞭なる關係を持來するものである。それでこの問題を初めから動力學的に且つ分析的に考へて見ることにする。それには左圖に於て  $C$  を車軸の中心、 $S$  を同轉子の重心、この兩點間の距離即ち偏心を  $e$ 、 $M$  を同轉子の質量とすれば次の運動方程式<sup>1)</sup>が成立する：

<sup>1)</sup> A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, 4 (1909), § 43, 283-301; "Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle," *Ziviling.*, 41 (1895), 332-342; "Vereinfachte Darstellung meiner Theorie der Lavalschen Turbinenwelle," *Ziviling.*, 42 (1896), 242.

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\alpha y + M\omega^2 e \cos \varphi, \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\alpha z + M\omega^2 e \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

こゝに  $\alpha$  は車輪が單位變位をなす爲に生ずる彈性的抵抗を示す。又  $\varphi$  は  $\varphi = \omega t$  の如く變化するものと見てよい譯である。(50)の式に就て次の一般解が作られる：

$$\left. \begin{aligned} y &= A \sin \sqrt{\frac{\alpha}{M}} t + B \cos \sqrt{\frac{\alpha}{M}} t + \frac{M\omega^2 e}{\alpha - M\omega^2} \cos \omega t, \\ z &= C \sin \sqrt{\frac{\alpha}{M}} t + D \cos \sqrt{\frac{\alpha}{M}} t + \frac{e}{\alpha - M\omega^2} \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \tag{51}$$

$A, B, C, D$  は常數であつて初期條件の如き時間的の事項によつて決定される。(51)の各式の右邊の第一項と第二項とは論文の著者に従つてしるしたのであるが嚴密な意味に於ては多少形を變へる必要がある。但し之は結局は減衰する項であるから其儘にしておいた。式(51)を見れば  $\omega^2 = \alpha/M$  の時即ち  $\omega = \omega_k$  のときに共振的の振動が起るのである。この事柄に關聯しては沖博士<sup>1)</sup>の研究結果も参考に値する。

式(51)のごとき解が果して完全なものであるかどうかは多少疑がある。即ち、(51)の自由振動の項が車軸の同轉に全然無關係でなく、實際はその自由振動の項を

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \sin \sqrt{\frac{\alpha}{M}} t + B \cos \sqrt{\frac{\alpha}{M}} t, \\ z_1 &= C \sin \sqrt{\frac{\alpha}{M}} t + D \cos \sqrt{\frac{\alpha}{M}} t \end{aligned} \right\}$$

の如く書いて、 $A, B, C, D$  を單に初期の條件からのみ定め得るものかといふことがあるからである。この  $y_1$  と  $z_1$  との間には普通の車軸では大抵一定の拘束が存在する。即ち同轉子の位相と車軸同轉の位相との間に適當の關係が存在すべきものである。この意味から考へると、車軸の振動問題は極座標で取扱つた方がよいやうである。普通の車軸では、減衰力其他によつて、同轉子の重心が車軸の周圍を廻る

<sup>1)</sup> 沖巖, "水平軸の低次危険速度," *機械學會誌*, 21, 第 52 號 (1918), 17-42.

速度は車軸の回転速度に等しいものとしてよいうに思はれる。(51)でも同様な結果を與へるものである。この意味から、先づ振動の方程式を極座標を用ひて、その  $r$  の方向の成分を取ると、次の如く表すことが尤もらしい：

$$M \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) = -\alpha r + M\omega_e^2 \quad (52)$$

茲に  $r$  は車軸の半径方向の変位である。このやうに置けば、上に述べた拘束の影響が入つてをり、この拘束がある以上は  $\varphi$  の方向の振動は考慮に入れないのである。

しかし厳密な意味では勿論正當でない。さて  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  としてよいかから、上式は

$$M \frac{d^2 r}{dt^2} + (\alpha - M\omega^2)r = M\omega_e^2 \quad (52')$$

この方程式の解は

$$r = A \cos \sqrt{\frac{\alpha - M\omega^2}{M}} t + B \sin \sqrt{\frac{\alpha - M\omega^2}{M}} t + \frac{M\omega_e^2}{\alpha - M\omega^2} \quad (53)$$

となる。茲に於て  $\omega = \omega_k = \sqrt{\alpha/M}$  と置くと、自由振動の方は不安定の振動となり、強制的振動の方は共振的の性質を現すのである。(51)の強制振動の方のベクトルを取ると、丁度この式の強制的振動の項に等しくなるのである。不安定の方の振動が危険速度より高い速度で大して意味をなさぬことは、前にも述べたやうに大きな振幅では安定問題が遡つて来る爲であると思はれる。

こゝで注意すべき事は、Routh の意見の如く、たとひ共振的の現象であつても時間と共に振幅が次第に大になるものはすべて不安定といふことがあるから、我々は式(51)を見てやはり一種の不安定の現象であると思惟しても誤とはいはれぬことである。Jeffcott<sup>1)</sup> は共振の問題を減衰力を考慮に入れて計算を試みた。Pöschl<sup>2)</sup> は Föppl<sup>3)</sup> の研究方法から更に進んで車軸の自重による第二次作用までも論じてゐる。又、彼は同じ問題に Routh の勢力式の方法を適用して計算を試みた。この

<sup>1)</sup> H. H. Jeffcott, "The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed. The Effect of Want of Balance," *Phil. Mag.*, [6], 37 (1919), 304.

<sup>2)</sup> Th. Pöschl, "Über die Bestimmung der kritischen Drehzahlen von elastischen Wellen und deren Stabilität," *ZAMM*, 3 (1923), 297-312.

<sup>3)</sup> A. Föppl, 前掲.

外、偏心車軸の問題は Lees<sup>1)</sup> も手をつけてゐる。

多くの回転子のある場合 以上の場合では質量のない車軸に一個の回転子があるものを論じたのであるが、回転子が二個又はそれ以上存在する時は如何に取扱ふべきか。先づ回転子二個のときを取り、各回転子の質量を  $M_1, M_2$  とする。各、の偏心の  $y, z$  の方向の成分を夫々  $(\eta_1, \zeta_1), (\eta_2, \zeta_2)$  と書き、各軸心の變位の成分を夫々  $(y_1, z_1), (y_2, z_2)$  とすれば求心力は次の如く書ける：

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= (y_1 + \eta_1) M_1 \omega^2, & Z_1 &= (z_1 + \zeta_1) M_1 \omega^2, \\ Y_2 &= (y_2 + \eta_2) M_2 \omega^2, & Z_2 &= (z_2 + \zeta_2) M_2 \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

之が各回転子の變位に及ぼす影響は次の如く書き得る：

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2, & z_1 &= a_{11} Z_1 + a_{12} Z_2, \\ y_2 &= a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2, & z_2 &= a_{21} Z_1 + a_{22} Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

こゝに  $a_{11}, a_{12}(=a_{21}), a_{22}$  は  $\alpha$  の如く弾性抵抗を表す。(54)を(55)に代入し、之を各回転子の運動方程式に入れ、且つ慣性力の項を初めから零に置いて危険速度を表すに必要な方程式を作れば

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} M_1 \omega^2 - 1) y_1 + a_{12} M_2 \omega^2 y_2 + a_{11} \eta_1 M_1 \omega^2 + a_{12} \eta_2 M_2 \omega^2 &= 0, \\ a_{21} M_1 \omega^2 y_1 + (a_{22} M_2 \omega^2 - 1) y_2 + a_{21} \eta_1 M_1 \omega^2 + a_{22} \eta_2 M_2 \omega^2 &= 0, \\ (a_{11} M_1 \omega^2 - 1) z_1 + a_{12} M_2 \omega^2 z_2 + a_{11} \zeta_1 M_1 \omega^2 + a_{12} \zeta_2 M_2 \omega^2 &= 0, \\ a_{21} M_1 \omega^2 z_1 + (a_{22} M_2 \omega^2 - 1) z_2 + a_{21} \zeta_1 M_1 \omega^2 + a_{22} \zeta_2 M_2 \omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

これから出て来る  $y_1, z_1, y_2, z_2$  は

$$D = \begin{vmatrix} (a_{11} M_1 \omega^2 - 1), & a_{12} M_2 \omega^2 \\ a_{21} M_1 \omega^2, & (a_{22} M_2 \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (57)$$

なる関係の成立するときに無限大となる。この式を書き換へて

$$D = (a_{11} M_1 \omega^2 - 1)(a_{22} M_2 \omega^2 - 1) - a_{12}^2 M_1 M_2 \omega^4 = 0 \quad (57')$$

<sup>1)</sup> S. Lees, "The Whirling of an Eccentrically-loaded Overhung Shaft," *Phil. Mag.*, 37 (1919), 515-523; "The Whirling of an Overhung Eccentrically Loaded Shaft," *Phil. Mag.*, 45 (1923), 689-714.



を作れば、この式を満足する  $\omega = \omega_k$  が極限速度を表すことになる。この式を満足する正数の  $\omega$  は二個存在する。

$M_1 = M_2 = M$  のとき場合に同轉子の場所も對稱的に置かれてゐるときは  $a_{11} = a_{22} = a$ ,  $a_{12} = b$  であり、従て  $aM\omega_k^2 - 1 = \pm bM\omega_k^2$  となる。従て

$$M\omega_{k1}^2 = \frac{1}{a-b}, \quad M\omega_{k2}^2 = \frac{1}{a+b}.$$

全く同様にして同轉子  $M_1, M_2, M_3, \dots$  があり、抵抗の係数が  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{21}, a_{22}, \dots$  なるとき、危険速度  $\omega = \omega_k$  を與へる式は

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}M_1\omega^2 - 1 & a_{12}M_2\omega^2 & \dots & \dots & a_{1n}M_n\omega^2 \\ a_{21}M_1\omega^2 & (a_{22}M_2\omega^2 - 1) & \dots & \dots & a_{2n}M_n\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}M_1\omega^2 & a_{m2}M_2\omega^2 & \dots & \dots & (a_{mn}M_n\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (58)$$

と與へられる。

以上の問題と同じ行き方で車軸の支點の外側にも同轉子のあるときや支點が三個も四個もある場合などの理論的の吟味を試みることができるとも茲では省略する。但し Müller<sup>1)</sup> が車軸の屈曲抵抗を正確に取り、質量分布も考慮に入れて危険速度を出し、van den Dungen<sup>2)</sup> と Karas<sup>3)</sup> が積分方程式によつて危険速度を算出したことを附加しておく。

### 56. 同轉車軸のジャイロ作用<sup>4)</sup> (Gyroscopic Vibrations of a Rotating Shaft)

<sup>1)</sup> W. Müller, "Die kritischen Drehzahlen von Turbinenwellen," *ZS. f. tech. Phys.*, 4 (1923), 88-93.

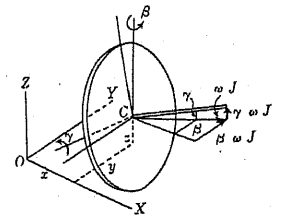
<sup>2)</sup> F. H. van den Dungen, "Les équation integrales à plusieurs paramètres et la technique des vibrations," *Verh. 2-int. Kongr. f. tech. Mech.* (Zürich, 1926), 113-118.

<sup>3)</sup> K. Karas, "Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen und Kreiselwirkung," *ZAMM*, 9 (1929), 485-487.

<sup>4)</sup> A. Stodola, "Neue kritische Drehzahlen als Folge der Kreiselwirkung der Laufräder," *ZS. f. d. gesamte Turbinenwesen*, 15 (1918), 253, 264, 269; *Gas- und Dampfturbinen*, 6. Aufl., § 190; "New Critical Shaft speeds as Effects of the Gyroscopic Disc Action," *Engineering*, 106 (1918), 665-666.

一個の同轉子がある場合 今迄の説明では同轉車軸がその軸を一定の方向に保つものとして取扱はれ従て何等ジャイロのやうな作用が起らないものとしてあつた。然るに實際問題では車軸が撓みを生じたり軸承の油の流體力學的の運動を起したりして、その結果車軸の方向が錐面を畫き、所謂 precessional motion をなすものである。即ちジャイロのモーメントを同轉子に與へるものである。

右圖に於て  $x, y, z$  を同轉子の中心の座標とし、 $\beta, \gamma$  を同轉子が夫々  $ZOX$  面及び  $XOY$  面となす小さな傾斜角とする。又  $S'_y, S'_z$  を同轉子の前面に於ける車軸の断面に働く剪斷力の  $Y$  及  $Z$  成分、 $S_y, S_z$  をその後面に於ける成分、 $M'_y, M'_z$  及  $M_y, M_z$  を  $S'$  及  $S$  の場合と同様な断面に働く屈曲モーメントの各成分とし、又  $J$  を同轉子の中心の周圍の質量極慣性モーメント、 $J'$  を圓板の直徑の周圍の質量慣性モーメントとする (即ち  $2J' = J$ )。



第 20 圖

今、同轉角速度  $\omega$  を一定とする。  $\beta, \gamma$  は時間の函数であるため

$$\frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$$

が  $Z$  軸及び  $Y$  軸の周圍の角速度を表す。従て  $Z$  軸及び  $Y$  軸の周圍の運動方程式を書いて見ると夫々次の如くなる: ( $\cdot$  は時間についての微分係数)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ J' \dot{\beta} + J \omega \gamma \} &= M_\beta, \\ \frac{d}{dt} \{ J' \dot{\gamma} - J \omega \beta \} &= M_\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

茲に  $M_\beta, M_\gamma$  は同轉子に働く外力のモーメントである。車軸の自由端に同轉子があるときは  $M_\beta = M_z, M_\gamma = M_y$  としてよいから、

$$\left. \begin{aligned} J' \dot{\beta} + J \omega \dot{\gamma} &= M_z, \\ J' \dot{\gamma} - J \omega \dot{\beta} &= M_y, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

こゝに  $J \omega \dot{\gamma}$  及  $J \omega \dot{\beta}$  は  $\dot{\gamma}, \dot{\beta}$  がある爲に  $Z$  軸及び  $Y$  軸の周圍に生ずるジャイロのモーメントを表す譯である。

次に C 点自身の Y, Z 方向の運動方程式は

$$m\ddot{y}=P_y, \quad m\ddot{z}=P_z \quad (61)$$

となる。ここに  $m$  は回転子の質量,  $P_y, P_z$  は Y, Z 方向の外力を示す。一般に  $M_y, M_z, P_y, P_z$  は次の如き形をもつものである: ( $a', b', a, b$  は時間の関数である.)

$$\left. \begin{aligned} M_z &= a'y + b'\beta, & P_y &= ay + b\beta, \\ M_y &= a'z + b'\gamma, & P_z &= az + b\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

何となれば, 例へば一端が固定された梁の自由端に  $P$  なる力が加へられ, 且つ梁に別に一定の屈曲モーメント  $M$  が與へられるときを取つて見ると, 梁の自由端の撓みと傾斜は

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pl^3}{8} - \frac{Ml^2}{2} \right], \quad \beta = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pl^2}{2} - Ml \right]$$

で與へられる。ここに  $l$  は梁の長さ,  $I$  は梁の断面の慣性モーメントとする。上式から逆に

$$P = \frac{EI}{l^3} (12y - 6l\beta), \quad M = \frac{EI}{l^2} (6y - 4l\beta)$$

となり, 結局

$$P = ay + b\beta, \quad M = a'y + b'\beta$$

の形を取るのである。この関係は任意の梁について成立し, 又 Y, Z 成分のあるときでも同様に出るものである。

さて, (62) を (60), (61) に代入すれば四個の微分方程式が作られる。而して

$$y = A \cos pt, \quad z = B \sin pt, \quad \beta = C \cos pt, \quad \gamma = D \sin pt \quad (63)$$

と置けば, 結局  $p^2$  についての解が得られる。

今, 特別に C 点の軸の正しい位置から  $r$  だけ撓み, 且つ C 点の軸の傾斜が  $\varphi$  であるとする。我々は一般に

$$y = r \cos \omega t, \quad z = r \sin \omega t, \quad \beta = \varphi \cos \omega t, \quad \gamma = \varphi \sin \omega t \quad (64)$$

と置いてもよい。但し  $r, \varphi$  は一定とする。便宜上  $t=0$  といふ瞬間を取れば,

$$\beta = \varphi, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \ddot{\beta} = -\varphi \omega^2, \quad \gamma = 0, \quad \dot{\gamma} = \varphi \omega, \quad \ddot{\gamma} = 0,$$

$$y=r, \quad \dot{y}=0, \quad \ddot{y}=-r\omega^2, \quad z=0, \quad \dot{z}=r\omega, \quad \ddot{z}=0$$

となり, 之を (60), (61) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} mr\omega^2 + ar + b\varphi &= 0, \\ -(J-J')\omega^2\varphi + a'r + b'\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

この中から  $r, \varphi$  を消去すれば,

$$(a+m\omega^2)\{b'-(J-J')\omega^2\} - a'b = 0. \quad (66)$$

今,  $a/m=p^2, b'/(J-J')=q^2$  と書けば, 上式は次の如くなる:

$$(p^2+\omega^2)(q^2-\omega^2) - cp^2q^2 = 0,$$

但し  $c=a'b/ab'$  とする。即ち書き直して

$$\omega^4 + (p^2 - q^2)\omega^2 - p^2q^2(1-c) = 0 \quad (67)$$

となる。故にこの式から

$$\omega^2 = -\frac{p^2 - q^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(p^2 - q^2)^2}{4} + (1-c)p^2q^2}. \quad [c < 1] \quad (68)$$

上述の議論では車軸の屈曲の曲線を含む面の回轉速度が車軸の回轉速度に等しいと置いたのであるけれども, 初めから之が違ふものとすることもできる。それには

$$y = r \cos \lambda t, \quad z = r \sin \lambda t, \quad \beta = \varphi \cos \lambda t, \quad \gamma = \varphi \sin \lambda t \quad (64')$$

として前の如き関係を作れば

$$\left. \begin{aligned} mr\lambda^2 + ar + b\varphi &= 0, \\ -(J\omega\lambda - J'\lambda^2)\varphi + a'r + b'\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (65')$$

この式で  $\omega = \lambda$  と書けば (65) になる。又  $\lambda = -\omega$  と書けば, (65') の第二式は

$$(J+J')\omega^2\varphi + a'r + b'\varphi = 0. \quad (69)$$

この式は, 車軸の撓み面が  $\omega$  なる角速度で回轉子の回轉方向と逆の方向に廻る場合にジャイロの抵抗モーメントが

$$M = -(J+J')\omega^2\varphi$$

になることを示すのである。(65') から  $r, \varphi$  を消去すれば

$$(a+m\lambda^2)\{b'-(J\omega-J'\lambda)\lambda\}-a'b=0. \quad (66')$$

即ちこの $\lambda$ について三次の式を解けば、ジャイロの作用のもとにある振動数を算出することができるが、こゝではそれを省略しておく。

同轉子が數個ある場合 次に同轉子が一個でなく、恰もタービンの如く無数の同轉子が車軸上に分布してゐる場合の車軸振動の性質を考へて見ようと思ふ。今、車軸の單位長さについて同轉子の有する質量極慣性モーメントを $J'$ と書き、同轉子の直径のまはりの質量の慣性モーメントを $J$ 、同單位長さ中にある車軸を包含する同轉子の質量を $m$ とする。然るときは車軸の $dx$ なる長さの部分について式(60),(61)中の $J, J', m$ の代りに夫々 $Jdx, J'dx, m dx$ と置けばよい。而して便宜上 $\beta, \gamma$ の代りに $y, z$  ( $'$ は $x$ についての微分係数)とし、且つXY面に車軸のある場合を最初に考へる。ジャイロに働く抵抗モーメント $M_\beta$ は次の如く表すことができる：

$$M_\beta = M'_y - M_y + S_y dx. \quad (70)$$

然るに梁の屈曲力の關係、即ち、屈曲力 $=EIy''$ から

$$M'_y - M_y = dM_y = EIy''' dx, \quad (71)$$

こゝに $I$ は車軸断面の慣性モーメントである。又、 $P_y$ は次の如く書ける：

$$P_y = S'_y - S_y = dS_y. \quad (72)$$

従て、式(60),(61)は

$$\left. \begin{aligned} J[y' + 2\omega z'] - EIy'' &= S_y, \\ m\ddot{y} &= \frac{dS_y}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

この兩式から $S_y$ を消去して

$$-m\ddot{y} + J'(y'' + 2\omega z'') - EIy'' = 0. \quad (74)$$

全く同様にして $z$ に関する式を作れば

$$-m\ddot{z} + J'(z'' - 2\omega y'') - EIz'' = 0. \quad (75)$$

車軸の兩端( $x=0, x=l$ )が自由に支へられてゐるときは、 $y, z$ が $\sin kx$ に比例すると、 $kl$ は次の條件を満足する：

$$kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad (76)$$

即ち

$$y = B \sin kx \cos \lambda t, \quad z = C \sin kx \sin \lambda t \quad (77)$$

の形を持つ。今

$$\frac{J'}{m} k^2 = h, \quad \frac{EIk^4}{m} = \omega_k^2 \quad (78)$$

と書く。 $\omega_k$ はこの場合の危険速度である。換言すれば車軸が同轉せぬ場合の固有振動数 $\frac{2\pi}{\omega_k}$ を表す式である。(77)を(74),(75)に代入して

$$\{(1+h)\lambda^2 - \omega_k^2\} B - 2h\omega\lambda C = 0, \quad (79)$$

$$-2h\omega\lambda B + \{(1+h)\lambda^2 - \omega_k^2\} C = 0. \quad (80)$$

これ等から $B, C$ を消去すれば

$$[(1+h)\lambda^2 - \omega_k^2]^2 - 4h^2\omega^2\lambda^2 = 0. \quad (81)$$

之の平方根を取れば

$$(1+h)\lambda^2 \mp 2h\omega\lambda - \omega_k^2 = 0. \quad (82)$$

これを $\lambda$ について解いて見ると次の如くなる：

$$\lambda = \frac{1}{1+h} \{ \pm h\omega \pm \sqrt{h^2\omega^2 + (1+h)\omega_k^2} \}. \quad (83)$$

この根は符號の取方によつて四つ出来る。即ち $\lambda_1 = ++, \lambda_2 = +-, \lambda_3 = -+, \lambda_4 = --$ の如き符號の取方である。而して $\lambda_3 = -\lambda_2$ であつて低い絶対値を有し、 $\lambda_4 = -\lambda_1$ であつて高い絶対値をもつ。即ち振動数は二種類しかない。(80)によつて

$$\frac{B}{C} = \frac{(1+h)\lambda^2 - \omega_k^2}{2h\omega\lambda}. \quad (84)$$

而して之は(82)によつて

$$= \pm 1 \quad \left[ \begin{array}{l} + \text{は } \lambda_1, \lambda_2 \text{ に相當し,} \\ - \text{は } \lambda_3, \lambda_4 \text{ に相當する} \end{array} \right] \quad (84')$$

である。即ち車軸の重心が圓弧を描くことがわかるのである。

若し $B$ が正號を取り、 $C$ と $\lambda$ が同じ符號になるときは、 $y = B \sin kx \cos \lambda t$ ,  $z = C \sin kx \sin \lambda t$ は $\omega$ と同方向の回轉をなす。然るに $B$ が正號であつて、 $C$ と $\lambda$ とが反對の符號を持つときは逆の方向に回轉することがわかる。 $\lambda_1$ と $\lambda_4$ が初め

の場合に當り、 $\lambda_2$  と  $\lambda_3$  が後の場合に相當するから、高い絶對値を有する根は forward precession を與へ、低い絶對値を有する根は backward precession を與へることがわかる。こゝに forward precession とは、回轉子の重心が空間に固定された軸に對して回轉する角速度の方向が回轉子の回轉方向と一致する場合をいひ、backward precession とは逆方向の場合をいふのである。

(77) に相當する一般解として次の如き  $\lambda_1, \lambda_2$  を有する  $y, z$  が得られた譯である：

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin k\omega [B_1 \cos(\lambda_1 t + e_1) + B_2 \cos(\lambda_2 t + e_2)], \\ z &= \sin k\omega [B_1 \sin(\lambda_1 t + e_1) + B_2 \sin(\lambda_2 t + e_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{1+h} [h\omega + \sqrt{h^2\omega^2 + (1+h)\omega_k^2}], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{1+h} [h\omega - \sqrt{h^2\omega^2 + (1+h)\omega_k^2}]. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

前の説明によつて  $B_2=0$  のときは forward precession を與へ、 $B_1=0$  のときは backward precession を與へる。

尙、週期的外力が働くときその週期が  $\lambda_1$  又は  $\lambda_2$  の週期と一致すれば共振の起ることは當然である。即ち實驗をやつて見てもそのやうなことがよく現はれるものである。

以上の外、ジャイロ作用ではないが、軸承の所の油の film の運動によつて車軸に振動を生じその爲に一つの危険速度を與へることがある。之は Stodola<sup>1)</sup> 其他によつて研究された。

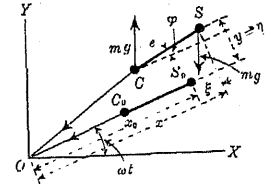
### 57. 回轉部分の自重其他に起因する二次的危険速度

自重に起因する場合 今までは車軸が重力に影響されぬ場合を取扱つたのであるが、普通の車軸のやうに水平の場合にはその車軸や回轉子の自重が影響し或る回轉速度で大きな振動を起すものである。之を “critical speed of the second

<sup>1)</sup> A. Stodola, “Kritische Störungen elastischer Wellen infolge Nachgiebigkeit des Oelpolsters in den Lagern,” *Verh. 2-int. Kongr. f. tech. Mech.* (Zürich, 1926), 201-206.

order” と稱し、Stodola<sup>1)</sup> によつて初めて實驗的及び理論的に發見されたものである。それに多少關聯せる場合や特別な場合は O. Föppl<sup>2)</sup>, H. Lorenz<sup>3)</sup>, Pöschl<sup>4)</sup> などによつて議論された。最近には Karas<sup>5)</sup> がその研究を試みた。

右圖に於て O を撓み(静力學的撓みを除く)のないときの車軸の位置、C を撓みのあるときの車軸の位置、S をそのときの回轉子の重心とする。C<sub>0</sub>, S<sub>0</sub> は OCS が一直線になる場合の C, S の位置である。又、m を回轉子の質量、 $\omega$  を車軸の回轉角速度、J を車輪の S 點の周圍の慣性モーメント、 $\alpha$  を車軸が單位長さだけ撓



第 21 圖

む爲の弾性力、e を C と S との距離、即ち偏心を表すものとする。尙、S の座標  $x, y$  は O の周圍に  $\omega$  なる角速度を以て回轉する空間に對してとることとする。然るときは S 點の實際の速度は  $\dot{x} - \omega y, \dot{y} + \omega x$  で表される。従て S 點の加速度は  $\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x, \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y$  で示される。即ち  $m\omega^2 x, m\omega^2 y$  は遠心力の影響であり、 $2m\omega \dot{y}, -2m\omega \dot{x}$  は Coriolis の力の影響と見てよい譯である。さて運動方程式は

$$m\ddot{x} - m\omega^2 x - 2m\omega \dot{y} = -\alpha(x - e \cos \varphi), \quad (87)$$

$$m\ddot{y} - m\omega^2 y + 2m\omega \dot{x} = -\alpha(y - e \sin \varphi), \quad (88)$$

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= -\alpha(x - e \cos \varphi)e \sin \varphi + \alpha(y - e \sin \varphi)e \cos \varphi \\ &\quad - mge \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (89)$$

<sup>1)</sup> A. Stodola, “Neuere Beobachtungen über die kritische Winkelgeschwindigkeit von Wellen,” *Schweizerische Bauzeitung*, 68 (1916), 197-199, 209-210; 69 (1917), 93-94.

<sup>2)</sup> A. Stodola, *Dampf- und Gasturbinen*, 6. Aufl., § 191.

<sup>3)</sup> O. Föppl, “Kritische Schwingungen von schnell umlaufenden Rotoren,” *ZS. f. gesamte Turbinenwesen*, 15 (1918), 157, 168.

<sup>4)</sup> H. Lorenz, “Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen,” *VDI*, 63 (1919), 240-245.

<sup>5)</sup> Th. Pöschl, “Über die Bestimmung der kritischen Drehzahlen von elastischen Wellen und deren Stabilität,” *ZAMM*, 3 (1923), 297-312.

<sup>6)</sup> Karl Karas, “Die kritischen Drehzahlen der fliegenden Welle mit Längsbelastung und Kreiswirkung,” *Ing. Arch.*, 1 (1930), 84-103.

<sup>7)</sup> K. Karas, “Kritische Drehzahlen stetig mit Masse belegter Wellen mit Längsbelastung und Kreiswirkung,” *Ing. Arch.*, 1 (1930), 158-202.

となる。  $x, y$  は回転する座標に取つたのであるが、  $\varphi$  が大體に於て零になるやうな位置を取つたとすれば、次の如き形の座標に置き換へることができる：

$$x = x_0 + \xi, \quad y = \eta. \quad (90)$$

且つ  $\cos \varphi \sim 1, \sin \varphi \sim \varphi, \cos(\omega t + \varphi) \cong \cos \omega t$  となる。又、  $J = m q^2, \alpha = m \omega_k^2$  ( $\omega_k$  は危険速度) と取れば大體次の如き式が出る：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= (\omega^2 - \omega_k^2) \xi + 2\omega \dot{\eta}, \\ \ddot{\eta} &= (\omega^2 - \omega_k^2) \eta - 2\omega \dot{\xi} + \omega_k^2 e \varphi, \\ q^2 \ddot{\varphi} &= -\omega_k^2 x_0 e \varphi + \omega_k^2 e \eta - g e \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

茲に  $x_0 = \omega_k^2 e / (\omega_k^2 - \omega^2)$  といふ関係が用ひてある。然るに  $\xi, \eta, \varphi$  は何れも時間について調和函数となるべきものである。それで  $\xi, \eta, \varphi$  について問題を解くときは  $2\pi/\omega$  なる週期を有する強制振動と別の週期を有する自由振動とになるけれども、その強制振動の方のみを取れば

$$\varphi = A \cos \omega t, \quad \xi = B \sin \omega t, \quad \eta = C \cos \omega t \quad (92)$$

として差支がない。之等の  $\cos \omega t, \sin \omega t$  は  $\omega t$  なる角速度で回転する意味でなく、單に同週期を持つといふ事柄に過ぎないのである。(92) を (91) に代入して

$$\left. \begin{aligned} (2\omega^2 - \omega_k^2) B - 2\omega^2 C &= 0, \\ -2\omega^2 B + (2\omega^2 - \omega_k^2) C + \omega_k^2 e A &= 0, \\ -\omega_k^2 e C + (q^2 \omega^2 - \omega_k^2 x_0 e) A &= g e. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

$A, B, C$  の値は次の  $D$  が零になるとき無限大となる。即ち

$$D = \frac{\omega^2 \omega_k^2 q^2}{\omega_k^2 - \omega^2} \left[ (\omega^2 - \omega_k^2) (4\omega^2 - \omega_k^2) + \frac{e^2}{q^2} \omega_k^2 (2\omega^2 + \omega_k^2) \right] = 0, \quad (94)$$

茲に  $x_0 = \omega_k^2 e / (\omega_k^2 - \omega^2)$  といふ関係が用ひてある。上式を解いて

$$\frac{\omega_{\eta_1}^2}{\omega_{\eta_2}^2} = \frac{\omega_k^2}{4} \left\{ \left( \frac{5}{2} - \epsilon^2 \right) \pm \sqrt{\left( \frac{5}{2} - \epsilon^2 \right)^2 - 4(1 + \epsilon^2)} \right\}, \quad (95)$$

但し  $\epsilon = e/q$  とする。この  $\epsilon$  は實際非常に小であるから、上の平方根は展開してもよい。さうすると

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\eta_1}^2 &= \frac{\omega_k^2}{4} (1 + 2\epsilon^2), \\ \omega_{\eta_2}^2 &= \omega_k^2 (1 - \epsilon^2). \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

ができる。即ち茲に於て更に  $\epsilon^2 \rightarrow 0$  とすれば  $\omega_{\eta_2} = \omega_k$  であり、又

$$\omega_{\eta_1} = \frac{\omega_k}{2}. \quad (97)$$

即ち  $\omega_k$  以外に普通の危険速度の半分の  $\omega$  の所で重量に原因する危険速度が現れるものである。

變化する角運動量に起因する場合<sup>1)</sup> この場合には角變位の變化  $\varphi$  が

$$\varphi = A \cos \lambda t \quad (98)$$

で與へられる。 $\omega_k$  の代りに  $x, y$  の方向で、 $\omega_1, \omega_2$  を取り、(91) に相當して

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= (\omega^2 - \omega_1^2) \xi + 2\omega \dot{\eta}, \\ \ddot{\eta} &= (\omega^2 - \omega_2^2) \eta - 2\omega \dot{\xi} + A_0 \cos \lambda t \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

を作る。但し  $A_0 = A \omega_k^2 e$  とする。而して

$$\xi = B \sin \lambda t, \quad \eta = C \cos \lambda t \quad (100)$$

と書き、且つ簡單の爲に  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_k$  と置けば、 $D=0$  の根として

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \left\{ \right. &= \pm \omega_k - \omega, \\ \lambda_2 \left\{ \right. &= \pm \omega_k + \omega \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

が作られる。以前の如く上の式は實は二つの根を意味する。今、 $\lambda = \nu \omega$  と書き又 cross link の様な場合に例を取り、 $\nu=2$  と置けば、危険速度  $\omega_{a_1}, \omega_{a_2}$  は

$$\lambda_1 = \nu \omega_{a_1} = \omega_k - \omega_{a_1}, \quad \lambda_2 = \nu \omega_{a_2} = \omega_k - \omega_{a_2}$$

で與へられる。即ち

$$\omega_{a_1} = \frac{\omega_k}{\nu + 1}, \quad \omega_{a_2} = \frac{\omega_k}{\nu - 1}$$

となり、之等二つが危険速度を與へるものである。

1) O. Föppl, "Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen," ZVDD, 63 (1919), 866-867.

### 58. 任意の質量分布をなす車軸の危険速度の圖式解法及び勢力式による解法

車軸の直径や質量がその長さに沿うて一定でない場合には數式的に問題を解く事は殆ど不可能である。それで他の振動問題でも用ひられてゐるやうに、その近似的解法に大體二つの行方がある。一つは圖式解法であり、他は主として Rayleigh 其他による變形の仕事を計算する方法である。初めの圖式のものは船體その他の振動に用ひられるものと同じく、こゝに一々説明することは甚だ煩はしい。即ち圖式積分や funicular polygon を要領よく應用するのに過ぎない。これを委しく知るには Stodola<sup>1)</sup> の教科書や Morley<sup>2)</sup>, Blaess<sup>3)</sup> の論文などがかなり参考になると思ふ。この外、断面が一定でない場合について極めて理論的に圖式解法を與へたものに Southwell<sup>4)</sup> 及び Jeffcott<sup>5)</sup> の研究がある。尚、本書の船體の振動其他の章を参考にしてみるのも面白いと考へる。それでこゝでは問題全體を省くことにした。

次に勢力式の方法を用ひることも、船體其他の所に完全な説明があるからこゝで餘り委しく説明をしなくてもよいと思ふ。それでこゝではその方法を説明するよりも、勢力の式を導入して危険速度を出し得る概念だけを擧げて見たいと考へる。車軸が屈曲する爲に要する勢力を  $V_E$  とし、質量に遠心力がかゝつてできる仕事を  $V_C$  とし、又車軸が振動する爲の運動勢力を  $T_K$  と書けば

$$T_K = V_E + V_C \quad (102)$$

の形となるべきである。而して普通の勢力算出の方針によつて  $T_E$  には  $\lambda^2$  の因

<sup>1)</sup> A. Stodola, *Dampf- und Gasturbinen*, 6. Aufl. (1924), § 92.

<sup>2)</sup> A. Morley, "The Calculation of Vibration and Whirling Speeds," *Engineering*, 88 (1909), 135-137, 205-206.

<sup>3)</sup> V. Blaess, "Zur graphischen Berechnung der kritischen Drehzahl rasch umlaufender Wellen," *ZVDI*, 58 (1914), 183-189.

<sup>4)</sup> R. V. Southwell, "On a Graphical Method for determining Frequencies of Lateral Vibrations, or Whirling Speeds, for a Rod of Non-Uniform Cross-Section," *Phil. Mag.*, 41 (1921), 419-431.

<sup>5)</sup> H. H. Jeffcott, "A Graphical Method for Determining the Whirling Speeds of Loaded Shafts," *Phil. Mag.*, 3 (1927), 689-713.

子があり、 $V_C$  には  $\omega$  なる回轉速度の二乗の因子がある。従て (102) は

$$\lambda^2 T'_K = V_E + \omega^2 V'_C \quad (102')$$

の如き形を取る。然るに減衰性のない車軸の危険速度に於ては  $\lambda^2=0$  となるべきである。従て、危険速度  $\omega_k$  は

$$\omega_k = \sqrt{-V_E/V'_C} \quad (103)$$

となるものである。尚、(102), (102'), (103) に書いた置き方は勢力の關係を採用せる最も近似的な方法であつて、尙一層委しい近似法は Rayleigh の考を應用する事である。それは (102') に於て parameter  $c$  の含まれてゐる  $T_K, V_E, V'_C$  を假定し、(102') によつて

$$\lambda^2 = \frac{V_E + \omega^2 V'_C}{T'_K} \quad (104)$$

が得られる。そこで

$$\frac{\partial \lambda^2}{\partial c} = 0 \quad (105)$$

と書けば種々の  $\omega$  即ち  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  に對して  $c_1, c_2, c_3, \dots$  が得られる。之等の  $c$  を  $V_E$  及  $V'_C$  に入れておく。そこで

$$V_E + \omega^2 V'_C = 0 \quad (106)$$

となるやうな  $\omega$  を捜せば、この  $\omega$  が危険速度  $\omega_k$  を與へるものである。この場合にも

$$\omega_k = \sqrt{-V_E/V'_C} \quad (106')$$

の形となることは (103) の通りである。以上述べたことは言葉を換へて言へば、我々は (105) と (106) を満足するやうな  $c$  と  $\omega$  を求めること、即ち (105) と (106) なる  $c$  と  $\omega$  についての二元式を解くことに歸着する。

勢力式を用ひる方法は Stodola<sup>1)</sup>, Morley<sup>2)</sup> などによつて別に考案された。

<sup>1)</sup> A. Stodola, *Dampf- und Gasturbinen*, 6. Aufl. (1924), § 92.

<sup>2)</sup> A. Morley, "The Whirling Speed of Shafts Supported in Three Bearings," *Engineering*, 106 (1918), 573-574.

59. 軸 壓 及 び 材 質 摩 擦 を 受 け る 車 軸 の 危 険 速 度<sup>1)</sup>

本節の問題は偏心がない場合の車軸の危険速度や回転する車軸に軸圧が働く場合の限界の軸圧を出す目的で行った計算である。

今、 $x$  を車軸方向に取った座標、 $y$  を  $t$  に於てその軸に直角なる方向の撓み、 $\rho$  を密度、 $E$  を Young 率、 $\xi$  を材質の直接粘性係数、 $k$  を車軸断面の直径の周囲の慣性半径、 $\omega$  を車軸の回転角速度、 $T$  を車軸の軸方向の圧縮力とする。然るときは車軸に偏心がないとき、車軸の回転中の撓みの振動方程式が次の如くなる：

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ek^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \xi k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} + \frac{T}{A} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho \omega^2 y = 0, \tag{107}$$

茲に断面の回転慣性の影響は除いてある。又、この方程式の出し方は紙面の都合上省略しておいた。

この方程式を解く爲に  $e^{i p t}$  といふ時間の factor を置き次式が得られる：

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{T/A}{Ek^2 + i p \xi k^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\rho(p^2 + \omega^2)}{Ek^2 + i p \xi k^2} y = 0.$$

今若し

$$\left. \begin{aligned} \frac{T/A}{Ek^2 + i p \xi k^2} &= -\frac{2\alpha}{l^2}, \\ \frac{\rho(p^2 + \omega^2)}{Ek^2 + i p \xi k^2} &= \frac{\beta^2}{l^4}, \\ y &= Y \sin \lambda x \end{aligned} \right\} \tag{108}$$

と置くときは

$$\lambda^4 + \frac{2\alpha}{l^2} \lambda^2 - \frac{\beta^2}{l^4} = 0.$$

この方程式の解は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \} &= \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha}}{l}, & \lambda_3 \} &= \pm i \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha}}{l} \\ \lambda_2 \} & & \lambda_4 \} & \end{aligned} \right.$$

となる。但し、 $l$  は車軸支點間の長さとする。従て (107) の一般解式は

<sup>1)</sup> 筆者、應用力學聯合大會論文 (1931).

$$y = \left\{ A \cos \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha}}{l} x + B \cosh \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha}}{l} x + C \sin \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha}}{l} x + D \sinh \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha}}{l} x \right\} e^{i p t} \tag{109}$$

となる。この解式を境界条件に入れる時は、圧縮力や回転速度と振動週期との関係が出るのである。之等の結果を次に挙げたいのであるが、その主要振動のみを出すことにする。高次の振動は圧縮力や回転速度のないときはともかく、こゝでは後にわかるやうにこの問題に全く無意味となるからである。

両端が支持された車軸の場合 両端が支持されてゐるときは

$$x = \pm l/2; \quad y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

としてよい。  $x$  の原点は車軸の中央點に取つてある。上式 (109) を代入して

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha = \pi,$$

但し  $\alpha, \beta^2$  は (108) に與へてある。即ち其等を入れるときは

$$\rho(p^2 + \omega^2) - i p \frac{\pi^4 \xi k^2}{l^4} - \left( \frac{\pi^4 E k^2}{l^2} - \frac{\pi^2 T}{l^2 A} \right) = 0$$

が出る。之を解いて

$$p = \frac{i \pi^4 \xi k^2}{2 \rho l^4} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{\rho l^2} \left( \frac{\pi^2 E k^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{\rho \omega^2 l^2}{\pi^2} \right) - \frac{\pi^8 \xi^2 k^4}{4 \rho^2 l^8}}$$

従て振動式は

$$y = A e^{-\frac{\pi^4 \xi k^2}{2 \rho l^4} t} \cos \left\{ \sqrt{\frac{\pi^2}{\rho l^2} \left( \frac{\pi^2 E k^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{\rho \omega^2 l^2}{\pi^2} \right) - \frac{\pi^8 \xi^2 k^4}{4 \rho^2 l^8}} t \right\} \cos \frac{\pi x}{l}$$

となる。この式からわかることは

$$\frac{\rho \omega^2 l^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2 E k^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{\pi^8 \xi^2 k^4}{4 \rho l^8}$$

のときに振動が無週期となり、

$$\frac{\rho \omega^2 l^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2 E k^2}{l^2} - \frac{T}{A}$$

のときに振動が不安定となり、車軸の buckling と同時に車軸の whirling の境が出る事である。即ち偏心のないときには共振の問題に非ずして柱の不安定の問題と平行してゐる事が知られるのである。

両端固定せる車軸の場合 両端が固定されてゐるときは

$$x = \pm l/2; \quad y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

なる条件がある。(109)の C, D を零にして上の条件に代入すれば

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha \tan \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha \tanh \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2} = 0, \quad (110)$$

但し  $\alpha$  と  $\beta^2$  とは (108) によつて定まる。

式(110)を其儘解くことは非常に困難である。それで次の如き間接の方法を採用した。(110)から  $\alpha$  と  $\beta^2$  との間の関係を出して graph を作り、 $\alpha$  と  $\beta^2$  との間の実験公式を作れば下の如くなる：

$$\beta^2 = 501 \left( 1 + \frac{1}{19.7} \alpha \right).$$

この公式中へ (108) の  $\alpha$  と  $\beta^2$  の値を代入すれば

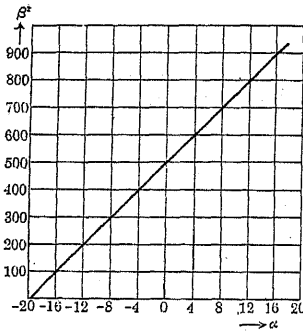
$$\rho(p^2 + \omega^2)l^2 - ip \frac{501\xi k^2}{l^2} - 12.74 \left( \frac{39.4Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A} \right) = 0.$$

この式から

$$p = \frac{i501\xi k^2}{2\rho l^4} \pm \sqrt{\frac{12.74}{\rho l^2} \left( \frac{39.4Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{\pi^2} \right) - \frac{501^2 \xi^2 k^4}{4\rho^2 l^8}}$$

従て、振動の解式は

$$y = e^{-\frac{501\xi k^2}{2\rho l^4} t} \frac{\cos}{\sin} \left\{ \sqrt{\frac{12.74}{\rho l^2} \left( \frac{39.4Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{\pi^2} \right) - \frac{501^2 \xi^2 k^4}{4\rho^2 l^8}} t \right. \\ \left. \left[ A \cos \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{l} x + B \cosh \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{l} x \right] \right.$$



第 22 圖

となる。この式からわかるやうに

$$\frac{\rho\omega^2 l^2}{\pi^2} = \frac{39.4Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{501^2 \xi^2 k^4}{12.74 \times 4\rho l^8}$$

のときに無週期振動となり、

$$\frac{\rho\omega^2 l^2}{\pi^2} = \frac{39.4Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A}$$

のときに振動が不安定となり、buckling が起り、whirling の境が出るのである。

一端固定し他端支持される場合 境界条件は次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} x=0; \quad y=0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \\ x=l; \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \end{aligned} \right\}$$

但し  $x$  の原点をその支持点の所に取つた譯である。(109)の A, B を零にして上の式に代入するときは

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha \cot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha \coth \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2} = 0$$

となる。この式から出る関係を graph にして出してみると右の如くなり、 $\alpha$  と  $\beta^2$  との間の関係を実験公式で出して見ると

$$\beta^2 = 238 \left( 1 + \frac{1}{10.1} \alpha \right)$$

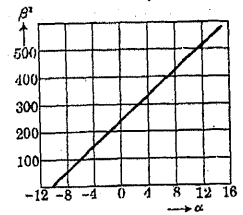
となる。この公式中に (108) の  $\alpha$  と  $\beta^2$  の値を入れるときは

$$\rho(p^2 + \omega^2)l^2 - ip \frac{238\xi k^2}{l^2} - 11.79 \left( \frac{20.2Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A} \right) = 0$$

となり、これから

$$p = \frac{i238\xi k^2}{2\rho l^4} \pm \sqrt{\frac{11.8}{2\rho l^2} \left( \frac{20.2Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{\pi^2} \right) - \frac{238^2 \xi^2 k^4}{4\rho^2 l^8}}$$

が出る。従て、振動の方程式は



第 23 圖



$$y = e^{-\frac{238\xi^2 k^4}{2\rho l^4} t} \cos \left[ \sqrt{\frac{11.8}{\rho l^2} \left( \frac{20 \cdot 2Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{\rho \omega^2 l^2}{\pi^2} \right) - \frac{238\xi^2 k^4}{4\rho^2 l^6}} t \right] \\ \cdot \left[ C \sin \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha}}{l} x + D \sinh \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha}}{l} x \right]$$

この式からわかるやうに

$$\frac{\rho \omega^2 l^2}{\pi^2} = \frac{20 \cdot 2Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A} - \frac{238\xi^2 k^4}{11.8 \times 4\rho l^6}$$

のときに振動が無週期となり,

$$\frac{\rho \omega^2 l^2}{\pi^2} = \frac{20 \cdot 2Ek^2}{l^2} - \frac{T}{A}$$

の如きときに振動が不安定となり, whirling の起る境が出るのである。

結論 以上の理論及び例によつて偏心がないときの whirling の問題は柱の問題と同じく, 力學的問題の不安定に歸することができるのである。單に共振的のものであれば, 材質摩擦の影響が非常にきいて危険速度が摩擦によつて變化する筈であるけれども, 以上の例によれば常に一定速度になる。且つその振幅が共振の場合にはその振幅を一定値に止めることができるのであるが, 今の場合には數式的には時間と共に振幅が後程増加する傾向を持つてをるものである。但し振幅が大になると別の安定問題になると共に偏心の性質がよくきいて來る爲に, 實際問題では, こゝに於て共振現象にとる方がよくなるものと思はれる。

次に  $\frac{T}{A}$  は壓縮力であり, この大さ如何によつて  $\omega$  の危険速度を如何にでも, 小にすることができるものである。極端なる場合をいへば, 車軸が一つの strut として, その buckling の近くまでの壓縮力  $T$  を受けてゐる時に極めて小なる回軸速度  $\omega$  を與へても直ちに whirling を起すといふことが知られるのである。又軸壓が Euler の公式で知られてゐる極限値の半分になつてゐるときには, 車軸の危険速度が, 普通のもの  $1/\sqrt{2}$  となるものである。同じ極限値の  $3/4$  になつてゐるときには, 車軸の危険速度が, 普通の危険速度の  $1/2$  になることがわかるのである。このことは筆者の論文<sup>1)</sup> 發表後殆ど同時に Howland によつて示されたことがわか

<sup>1)</sup> 筆者, 應用力學聯合大會論文 (1931)。

つた。<sup>1)</sup>

尙, この計算にある兩端又は一端固定せる場合の振動式の出し方は特別に考案したものであることを附加しておく。又, 高次の振動問題が不用なことは前記の説明によつて明かであると思ふ。

計算例 一例として  $E=2000$  噸/糎<sup>2</sup>,  $\rho=7.8$ ,  $l=3$  米,  $k=1$  種の圓形車軸に軸壓  $T/A=100$  厩/糎<sup>2</sup> だけ働くときに, その危険速度は次の如くなる:

- |                     |                           |                                |
|---------------------|---------------------------|--------------------------------|
| (i) 兩端支持のとき         | $\omega \approx 390$ 回轉毎分 | ( $T/A=100$ 厩/糎 <sup>2</sup> ) |
|                     | $\omega \approx 530$ "    | ( $T/A=0$ )                    |
| (ii) 兩端固定のとき        | $\omega \approx 1040$ "   | ( $T/A=100$ 厩/糎 <sup>2</sup> ) |
|                     | $\omega \approx 1060$ "   | ( $T/A=0$ )                    |
| (iii) 一端固定, 他端支持のとき | $\omega \approx 680$ "    | ( $T/A=100$ 厩/糎 <sup>2</sup> ) |
|                     | $\omega \approx 750$ "    | ( $T/A=0$ )                    |

に就ての影響の計算例は省略しておく。

同様な研究で多少異なるやり方は Reissner<sup>2)</sup> によつて試みられてゐる。

## 60. Dunkerley の實驗公式及びその説明

車軸に多くの回轉子があり, 且つ各  $i$  の回轉子が一つ宛ある場合の夫々の危険速度がわかつてゐるときに, 全體の回轉子に對する危険速度を出す公式がある。それは Dunkerley<sup>3)</sup> が數多の實驗の結果から見出した實驗式である。今,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  を各一つ宛の回轉子のあるときの危険速度とすれば, 全體の回轉子があるときの危険速度  $\Omega$  は次の形で表されるのである:

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \dots \quad (111)$$

<sup>1)</sup> R. C. J. Howland, "The Vibrations of Revolving Shafts," *Phil. Mag.*, 12 (1931), 297-311.

<sup>2)</sup> H. Reissner, "Über den Einfluss der inneren Reibung auf die Stabilität rotierender Wellen," *ZAMM*, 9 (1929), 483-485.

<sup>3)</sup> S. Dunkerley, "On the Whirling and Vibration of Shafts," *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, (A), 185 (1894), Part 1, 279-360.

この公式は大分昔 Dunkerley が殆ど理論を用ひることなく出したのであるけれども、實際の結果に非常によく一致するものであつて、多くて 3% か 4% 位の誤差しかない。勿論、 $\Omega$ ,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  は主要振動的の whirling の起る速度であつて、高次の調和振動を含まぬものである。極めて特別の場合に限つて上の公式があはぬこともある。その場合には Dunkerley も指摘せる如く ( $\omega_1, \omega_2$  だけの例を取り)

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{a}{\omega_2^2} \quad [a < 1]$$

の形に置けば比較的によく一致させることができる。a は適當な常數である。

斯の如く實際とよく一致する公式には何か理論的にも根據があるに違ひない。このことに就ては Blaess<sup>1)</sup>, Hahn<sup>2)</sup>, Jeffcott<sup>3)</sup> などによつてその根據が委しく研究された。

今車軸が適當な方法で支持され、その車軸上の適當な點に  $m_1, m_2, m_3, \dots$  といふ質量を有し且つ  $\Omega$  なる危險速度のときにそれ等  $m_1, m_2, m_3, \dots$  のある點の撓みが  $y_1, y_2, y_3, \dots$  であるとする。又、求心力を  $P_1 = m_1 y_1 \Omega^2, P_2 = m_2 y_2 \Omega^2, P_3 = m_3 y_3 \Omega^2, \dots$  とすれば、危險速度に於ては振動的の慣性力の影響が無くなり、従て梁が荷重  $P_1, P_2, P_3, \dots$  によつて撓むのと同様な考によつて

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 + \dots + \alpha_{1n} P_n, \\ y_2 &= \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 + \dots + \alpha_{2n} P_n, \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= \alpha_{n1} P_1 + \alpha_{n2} P_2 + \dots + \alpha_{nn} P_n \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

なる關係が出る。但し  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn}$  は  $P_1, P_2, \dots, P_n$  の夫々の大き及びそ

<sup>1)</sup> V. Blaess, "Zur graphischen Berechnung der kritischen Drehzahl rasch umlaufender Wellen," ZVDI, 58 (1914), 183-189.

<sup>2)</sup> E. Hahn, "Note sur la vitesse critique des arbres et la formule de Dunkerley," Schweiz Bauzeitung, 72 (1918), 191-194.

<sup>3)</sup> H. H. Jeffcott, "The Periods of Lateral Vibration of Loaded Shafts.—The Rational Derivation of Dunkerley's Empirical Rule for Determining Whirling Speeds," Proc. Roy. Soc., London, 95 (1919), 106-115.

の車軸上の位置によつて定まる函数であることは梁の屈曲の場合と同じである。次に Kelvin 又は Rayleigh の reciprocal theorem によつて

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$$

であることも勿論とする。  $P_1, P_2, P_3, \dots$  の値を (112) に代入し、且つ  $y_1, y_2, y_3, \dots$  を消去すれば

$$D = \begin{vmatrix} (\alpha_{11} m_1 \Omega^2 - 1), & \alpha_{12} m_2 \Omega^2, & \dots, & \alpha_{1n} m_n \Omega^2 \\ \alpha_{21} m_1 \Omega^2, & (\alpha_{22} m_2 \Omega^2 - 1), & \dots, & \alpha_{2n} m_n \Omega^2 \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1} m_1 \Omega^2, & \alpha_{n2} m_2 \Omega^2, & \dots, & (\alpha_{nn} m_n \Omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (113)$$

を得る。この式は前にも述べた如く、whirling の速度では車軸の振動の慣性力がなくなつたのと同效果であるといふことから出る關係式である。この式は  $\Omega^2$  について  $n$  次の方程式であり、次のやうな對稱形をなしてゐる：

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} + \Phi, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} + \Phi, & \dots, & a_{2n} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ a_n, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} + \Phi \end{vmatrix} = 0. \quad (114)$$

之を展開して

$$A = \Phi^n + A_1 \Phi^{n-1} + A_2 \Phi^{n-2} + \dots + A_{n-1} \Phi + A_n = 0, \quad (115)$$

但し

$$A_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn},$$

$$A_2 = \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right. \\ \left. + \dots + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{2n} \\ a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ a_{n, n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \right\}.$$

同様に  $A_3, A_4, \dots$  が作られる。さて式 (113) に還り、 $\Phi = -\frac{1}{\Omega^2}$  とし、

$$a_{11} = \alpha_{11} m_1, \quad a_{12} = \alpha_{12} m_2, \quad \dots, \quad a_{nn} = \alpha_{nn} m_n$$

と書けば

$$\left(\frac{1}{\Omega^2}\right)^n - \left(\frac{1}{\Omega^2}\right)^{n-1} (\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \dots + \alpha_{nn}m_n) + \dots = 0. \quad (116)$$

$\frac{1}{\Omega^2}$  について  $n$  根の和は代数学の定理に従て

$$\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \dots + \alpha_{nn}m_n \quad (117)$$

となる。即ち  $\frac{1}{\Omega^2}$  の各根を  $\frac{1}{\Omega_1^2}, \frac{1}{\Omega_2^2}, \dots, \frac{1}{\Omega_n^2}$  と書けば

$$\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_n^2} = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \dots + \alpha_{nn}m_n. \quad (118)$$

車軸に単に  $m_1$  のみがあるときを考へると、(112) に於て

$$y_1 = \alpha_{11}P_1.$$

$P_1$  の値を入れ、且つそのときの危険速度を  $\omega_1$  とすれば

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\alpha_{11}m_1}. \quad (119)$$

同様にして

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\alpha_{22}m_2}, \quad \omega_3^2 = \frac{1}{\alpha_{33}m_3}, \quad \dots \quad (120)$$

之等と (118) と比較して

$$\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_n^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} \quad (121)$$

なる関係が出る譯である。 $\Omega_1$  が主要危険速度であり、 $\Omega_2, \Omega_3, \dots$  は高次の危険速度である。従て  $\frac{1}{\Omega_2^2}, \frac{1}{\Omega_3^2}, \dots$  は  $\frac{1}{\Omega_1^2}$  に比して非常に小さいのが普通であり、且つ  $\frac{1}{\Omega_2^2} +$

$\frac{1}{\Omega_3^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_n^2}$  を取つても  $\frac{1}{\Omega_1^2}$  よりも小なる場合が多い。斯る意味に於て

$$\frac{1}{\Omega_1^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} \quad (121')$$

なる Dunkerly の公式が成立する所以である。故に厳密なる意味に於ては、 $\frac{1}{\Omega_2^2} + \frac{1}{\Omega_3^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_n^2}$  が  $\frac{1}{\Omega_1^2}$  よりも小さくなる場合を豫め見當をつけておく必要があると思ふ。

## 61. 車軸の固有振り振動

振り振動の現象 タービンや電動機の車軸は比較的均一な回転速度を有するけれども、往復蒸気機関やディーゼル機関の如きはそれが如何にバランスされてゐるといつてもその回転速度に多少のむらがある。例へば潜水艦の 8 気筒 4 サイクルのディーゼル機関では、クランクが  $90^\circ$  の位相差をなし、車軸の一回轉中に 4 週期をもつ振り振動が伴ふものである。而してその強制的週期と有限長車軸の固有振り振動週期との関係によつて共振現象が起り、それは必しも看過できぬ問題を興へるものである。往復蒸気機関ではその気筒の大きさが異なり、従てバランスが一層悪いから、振り振動が殊に甚しい。車軸の振り振動の問題は往復蒸気機関の全盛時代にかなり重要視されたものであつて、最初に注目したのは Bauer (1900) であると思ふ。その翌年 (1901) 及び翌々年 (1902) には Gumbel, Frahm, Frith 及 Lamb<sup>1)</sup> 等が車軸の頻々たる切損の原因がこの問題に關係してゐることを唱へたのである。Gumbel<sup>2)</sup> の論文が有名なもの、それが單に不均一断面の車軸や船體に關聯してゐる爲だけではなく、かゝる實際上の重要問題に關聯してをつた爲である。然るにその後タービン機関の新しい問題が提出され、一時は車軸の振り振動などのことは忘れかけてをつたのであるが、近頃のディーゼル機関や航空發動機の隆盛時代に於て車軸の問題が再び研究の對象となり得るやうになつた次第である。その中で比較的理論的な研究には、Föppl<sup>3)</sup>, Lewis<sup>4)5)6)</sup> 其他のものを擧げることがで

1) J. Frith & E. H. Lamb, "The Breaking of Shafts in Direct-Coupled Units, due to Oscillation set up at Critical Speeds," *Journ. Inst. Elect. Eng.*, 31 (1902), 646-667.

2) L. Gumbel, "Torsional Vibrations of Shafts," *TINA*, 44 (1902), 133-150, "Torsional Vibration of Elastic Shafts of any Cross Section and Mass Distribution, and their Application to the Vibration of Ships," *TINA*, 54 (1912), 219-230.

3) O. Föppl, "Drehschwingungen von Wellen und geradlinige Schwingungen von Wellen und Massen zwischen Federn," *ZAMM*, 1 (1921), 367-373.

4) F. M. Lewis, "Torsional Vibration of irregular Shafts," *Journ. Amer. Soc. Nav. Eng.*, 31 (1919), 857-877.

5) F. M. Lewis, "The Critical Speeds of Torsional Vibration," *Journ. Soc. Autom. Eng.*, 7 (1920), 418-431.

6) F. M. Lewis, "Torsional Vibration in Diesel Engine," *Trans. Soc. N.I. & M.E.*, 33 (1925), 109-145.

きるし、圖式解法の上に特異性を持つものには Saas<sup>1)</sup> や Geiger<sup>2)</sup> 等の論文がある。又、斯る問題の實驗的研究には Kamm 及 Stieglitz<sup>3)</sup> や Fox<sup>4)</sup> 等の報告がある。前者は Geiger の torsigraph で測定せる結果の報告である。尚、以上の事柄を特に力を入れて教科書に出してゐる人には、Tolle<sup>5)</sup>, Holzer<sup>6)</sup>, Wydler<sup>7)</sup>, Morris<sup>8)</sup>, Lehr<sup>9)</sup> 等がある。

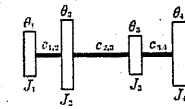
さて、以前の往復蒸氣機關と近來の内燃機關とは振動現象の上から如何なる差異があるかといふに、内燃機關では圓筒が同じ大きさであり、その間隔も一定である爲に大體に於てバランスが保たれてゐるけれども、しかしその compression stroke の状態と初期に於ける高壓といふことに於て非常な相違がある。その結果 6 氣筒 4 サイクル單働のものでは一回轉中にそのトルクが -20% から +220% 位も變化し、fly wheel が逆に機關に働いて機關を動かすといふやうな有様である。但し、もつと多くの氣筒のあるもの、複働機、2 サイクルの如きものではこれ程でもない。しかして車軸組織が全體として一つの剛體をなしてゐるときには振動の起りやうもないけれども、實際にはどうしても彈性的組織のものであるから、その結果車軸の振り振動が起されるのである。

通常の車軸は均一の太さと質量とを持つことは稀であり、その長さに沿うて變化のある事が普通である。軸の断面そのものが變化しないまでも、所々に集中せる

1) Fr. Saas, "Beiträge zur Berechnung kritischer Torsions-Drehzahlen," *ZVDI*, 65 (1921), 67-69.  
 2) J. Geiger, "Zur Berechnung der Verdrehungsschwingungen von Wellenleitungen," *ZVDI*, 65 (1921), 1241-1242.  
 3) W. Kamm u. A. Stieglitz "Schwingungsererscheinungen an der Maschinenanlage des Luftschiffes 'Graf Zeppelin,'" *ZFM*, 20 (1929), 465-474.  
 4) F. Fox, "Some Experiences with Torsional Vibration Problems in Diesel Engine Installation," *Journ. Amer. Soc. Nav. Eng.*, 38 (1926), 695-727.  
 5) Max Tolle, *Regelung der Kraftmaschinen*, 3. Aufl. (Berlin, 1921).  
 6) H. Holzer, *Die Berechnung der Drehschwingungen* (Berlin, 1921).  
 7) H. Wydler, *Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen* (Berlin, 1922).  
 8) J. Morris, *The Strength of Shafts in Vibration* (London, 1929); *Journ. Roy. Aeron. Soc.*, April 1923.  
 9) E. Lehr, *Schwingungstechnik* (Berlin, 1930).

質量があり、その結果、車軸の振動に對する設計は簡単な計算方法では役に立たぬものである。それでこゝでは態々初めから車軸の長さに沿うて變化のある場合の振動を研究することにしたいと思ふ。その考方を大別して二通りに分けることができる。一つは、質量を適當と思はれる所に集中させ、その質量間は質量のない彈性車軸で聯結されてゐるものと見て振動問題を研究する方法であり、他は、變化のある質量を車軸上の所々の適當の長さに一定の密度を以て分布させ、從て階段的の不連続をなす質量の分布の車軸の研究をすることである。

集中質量の分布を考へる計算法 先づ質量を所々に集中しておいてその間を質量のない車軸で結ぶ方法による自由振動の分析を試みる。この方法は Lewis<sup>1)</sup>, Holzer<sup>2)</sup>, Tolle<sup>3)</sup> 等によつてかなり完全なものとなされたのであつて、實際上に充分に役立つものである。今、右圖に於て  $J_1, J_2, J_3, \dots$  を各集中質量の極慣性モーメント、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  を夫々各質量の振動の爲の回轉變位、 $c_{1,2}, c_{2,3}, c_{3,4}, \dots$  をその數字で示された質量間の單位振り角に對する抵抗モーメントとする。 $c_{1,2}, c_{2,3}$  等に相當する車軸は各均一断面なる事を要しない。若し、 $J_1$  及  $J_n$  が自由端とするときは、各質量についての振動方程式が次の如くなる：



第 24 圖

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + c_{1,2}(\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + c_{2,3}(\theta_2 - \theta_3) - c_{1,2}(\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ J_3 \ddot{\theta}_3 + c_{3,4}(\theta_3 - \theta_4) - c_{2,3}(\theta_2 - \theta_3) &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ J_{n-1} \ddot{\theta}_{n-1} + c_{n-1,n}(\theta_{n-1} - \theta_n) - c_{n-2,n-1}(\theta_{n-2} - \theta_{n-1}) &= 0, \\ J_n \ddot{\theta}_n + c_{n-1,n}(\theta_n - \theta_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

上式を加へ合せる時は  $J_1 \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 + \dots + J_n \ddot{\theta}_n = 0$  (123)

となり、自由振動に於けるモメンタムのモーメントが一定であることを示す。今、自

1) F. M. Lewis, "Torsional Vibration in Diesel Engine," *Trans. Soc. NA & ME*, 33 (1925), 109-145.  
 2) H. Holzer, 前掲。  
 3) Max Tolle, 前掲。

由聯成振動を解く爲に

$$\theta_1 = A_1 \cos(pt + \alpha), \quad \theta_2 = A_2 \cos(pt + \alpha), \quad \dots$$

と書き (122) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned}
& J_1 p^2 A_1 - c_{1,2}(A_1 - A_2) = 0, \\
& J_2 p^2 A_2 + c_{1,2}(A_1 - A_2) - c_{2,3}(A_2 - A_3) = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& J_n p^2 A_n + c_{n-1,n}(A_{n-1} - A_n) = 0
\end{aligned} \right\} \tag{124}$$

となり、これ等の式から  $A_1, A_2, \dots, A_n$  を消去すれば固有振動の週期  $2\pi/p$  を決定することができる。<sup>1)</sup> 尙、 $J_1$  なる慣性モーメントの質量が自由端になく、その左側に  $c_{0,1}$  の如き抵抗の車軸があり、この車軸の他端が固定せる場合には (122) 及 (124) の第一式の代りに夫々

$$J_1 \ddot{\theta} + c_{1,2}(\theta_1 - \theta_2) + c_{0,1}\theta_1 = 0, \tag{122'}$$

及び

$$J_1 p^2 A_1 - c_{1,2}(A_1 - A_2) - c_{0,1}A_1 = 0 \tag{124'}$$

と置くべきである。茲に  $c_{0,1}$  は左端の固定せる車軸の單位角の振りに對する抵抗を示す。

今、二三の例を示して見たいと思ふが、第一の例として一端 O を固定し、他端が自由なる車軸上の二點に  $J_1, J_2$  なる慣性モーメントの質量がある場合を考へる。この場合には (124), (124') によりて

$$[J_1 p^2 - (c_{0,1} + c_{1,2})][J_2 p^2 - c_{1,2}] - (c_{1,2})^2 = 0.$$

この式を解けば二組の  $p^2$  が得られる。即ち二種の固有振動のあることを示す。この例は  $J_1$  なる fly wheel が  $c_{0,1}$  によりて機關に聯結され、更に  $c_{1,2}$  なる車軸によつて  $J_2$  なる推進機に結ばれてゐるやうな組織の振動問題に關聯してゐるのである。

又、兩端固定せる車軸の中間に  $J_1, J_2$  なる同轉子があるときには同様にして

$$p^4 - \left( \frac{c_{0,1} + c_{1,2}}{J_1} + \frac{c_{1,2} + c_{2,3}}{J_2} \right) p^2 + \frac{c_{0,1}c_{1,2} + c_{1,2}c_{2,3} + c_{0,1}c_{2,3}}{J_1 J_2} = 0$$

<sup>1)</sup> J. Morris, *The Strength of Shafts in Vibration* (London, 1929); *Journ. Roy. Aeron. Soc.*, April 1928.

が得られる。

次の例として車軸の自由なる兩端に  $J_1, J_2$  なる慣性モーメントの質量があり、中間に  $J_3$  なるモーメントのものがあつた場合の振動を考へて見る。式 (124) 及び

$$J_1 A_1 + J_2 A_2 + J_3 A_3 = 0 \tag{123} \text{ から出る}$$

なる關係から容易に

$$\frac{J_1 J_2 J_3}{c_{1,2} c_{2,3}} p^4 - \left( \frac{J_1 J_2 + J_1 J_3}{c_{1,2}} + \frac{J_2 J_3 + J_1 J_3}{c_{2,3}} \right) p^2 + (J_1 + J_2 + J_3) = 0$$

なる方程式が出る。この式は  $p^2$  について二次式であるから容易に解くことができる。而してやはり二組の振動数が出るのである。

こゝに注意すべきことは、(122) に於ては一つ一つの同轉子の振動方程式が書いてあるけれども、考へやうによつては、車軸系統の一端から或る特定の同轉子の所までを包含してのその振りの慣性力と、それに抵抗すべき車軸の振力を取つて振動方程式を作つてもよいことである。言ひかへれば element の平衡式を立てる代りに或る断面についてその一側全體の平衡式を作つてもよい事である。而して質量が  $n$  個あれば  $n$  個の断面を取り、各断面から一方の側全體の釣合を考へれば、斯る振動方程式が  $n$  個作られる譯である。小川博士<sup>1)</sup> は航空發動機の子軸の振り振動の研究に於てこの方法を採用したのである。尙、車軸一端の fly wheel の外の質量はすべてクランクやクランク・ピンを以て成立つてゐる場合が多いことは論を俟たぬ。

本節の方法を代數學的にのみ取扱ふことは實際問題として必しも容易でない。それでこゝに本節の關係を漸近的に應用して行く實用の計算法を示して見ることにする。(124) から

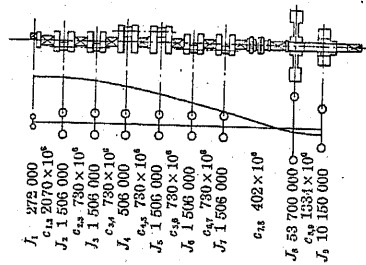
$$\left. \begin{aligned}
A_2 &= A_1 - \frac{p^2 J_1}{c_{1,2}} A_1, \\
A_3 &= A_2 - \frac{p^2}{c_{2,3}} (J_1 A_1 + J_2 A_2), \\
A_4 &= A_3 - \frac{p^2}{c_{3,4}} (J_1 A_1 + J_2 A_2 + J_3 A_3), \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \right\} \tag{125}$$

<sup>1)</sup> 小川清二, "On the Torsional Vibrations of Aeroengines," *機械學會誌*, 32 (1929), 1-26.

が作られる。先づ  $p^2$  を適當に假定して上式に入れるときは、その第一式から  $A_2$  が  $A_1$  の或る倍數として出る。次に第二式を適用すれば  $A_3$  が  $A_1$  の或る倍數として出る。同様にして  $A_4, A_5, \dots$  が作られるのである。然るに (123), 又は上の (125) から直接に

$$p^2(J_1 A_1 + J_2 A_2 + \dots + J_n A_n) = 0 \tag{126}$$

となるべきである。初め  $p$  の假定が間違つてをれば上式を満足せぬことになる。



第 25 圖

それで  $p$  を種々假定して見て結局上式が満足するまで繰返すのである。今、Lewis<sup>1)</sup> の論文にあるもので而も Timoshenko<sup>2)</sup> もその著書中に引用してゐる有名な例を茲に挙げて見たいと考へる。その例は淡濱船 Dan C. Kingman 號にあるディーゼル機関の車軸の計算であつて、車軸上の質量の分布は左圖に示してある。この圖に於て  $J_1, J_2, \dots$  は磅-吋の系統を用ひてある。又  $C_{1,2}, C_{2,3}, \dots$  等も同様系統のものであり、且つ同轉角 1 ラディヤンに對する抵抗モーメントであることは勿論である。毎秒の振動數  $N$  を 15.3 及 15.4 換言すれば  $p=96.2$  及  $96.8$  と置いて計算を行つて見ると次頁の表の如くなる。第一行は質量の慣性モーメント(磅-吋)、第三行は  $A_1=1$  として(後の結果を用ひて)順次  $A_2, A_3, \dots$  を出したもの、第四行は第二行と第三行とを乗じたもの、第五行は第四行の値を上から順次加へ合せたもの、第六行は初めからわかつてゐる  $c_{r,r+1}$  の値、第七行は第五行を第六行で除せるものである。この第六行の或る列と第三行中の同じ列とから初めて第三行の次の列の  $A$  の値が算出できるのである。さて  $N=15.3$  の場合に終りの列に  $\sum J p^2 A = +800.00$  が残る。然るに (126) によりこの値は零となるべきである。茲に於て更に  $N=15.4$  として計算を行ふときは、最後の

<sup>1)</sup> F. M. Lewis, "Torsional Vibration in Diesel Engine," *Trans. Soc. NA & ME.* 33 (1925), 109-145.

<sup>2)</sup> S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering* (New York, 1928), 151.

列で  $\sum J p^2 A = -16.59 \times 10^6$  となる。それで正しい値は  $N=15.3$  と  $N=15.4$  との間にあることがわかり、それを interpolation によつて出せばよいのである。尙、第三行を用ひて振動の角變位の割合の曲線を出して見ると、上圖にある曲線の如くなる。

質量番號	1	2	3	4	5	6	7
	$J$	$J p^2$	$A$	$J p^2 A$	$\sum J p^2 A$	$c$	$\sum \frac{J p^2 A}{c}$
	(N=15.3 p=96.2 p <sup>2</sup> =9250)						
1	708	6.55 × 10 <sup>6</sup>	1.0000	6.55 × 10 <sup>6</sup>	6.55 × 10 <sup>6</sup>	2070 × 10 <sup>6</sup>	.0081
2	3920	36.25 × 10 <sup>6</sup>	.9969	36.1 × 10 <sup>6</sup>	42.65 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.0585
3	3920	36.25 × 10 <sup>6</sup>	.9883	34.0 × 10 <sup>6</sup>	76.65 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.105
4	3920	36.25 × 10 <sup>6</sup>	.8333	30.2 × 10 <sup>6</sup>	106.85 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.1462
5	3920	36.25 × 10 <sup>6</sup>	.6871	24.9 × 10 <sup>6</sup>	131.75 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.1803
6	3920	36.25 × 10 <sup>6</sup>	.5068	18.98 × 10 <sup>6</sup>	150.1 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.206
7	3920	36.25 × 10 <sup>6</sup>	.3008	10.90 × 10 <sup>6</sup>	161.0 × 10 <sup>6</sup>	402 × 10 <sup>6</sup>	.401
8	139800	1293 × 10 <sup>6</sup>	-.1002	-130.0 × 10 <sup>6</sup>	31.0 × 10 <sup>6</sup>	1334 × 10 <sup>6</sup>	.0233
9	26400	244 × 10 <sup>6</sup>	-.1235	-30.2 × 10 <sup>6</sup>	+800.000		
	(N=15.4 p=96.8 p <sup>2</sup> =9380)						
1	708	6.65 × 10 <sup>6</sup>	1.0000	6.65 × 10 <sup>6</sup>	6.65 × 10 <sup>6</sup>	2070 × 10 <sup>6</sup>	.0082
2	3920	36.8 × 10 <sup>6</sup>	.9968	36.7 × 10 <sup>6</sup>	43.65 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.0594
3	3920	36.8 × 10 <sup>6</sup>	.9874	34.5 × 10 <sup>6</sup>	77.85 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.1069
4	3920	36.8 × 10 <sup>6</sup>	.8305	30.6 × 10 <sup>6</sup>	108.45 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.1487
5	3920	36.8 × 10 <sup>6</sup>	.6818	25.1 × 10 <sup>6</sup>	133.55 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.1830
6	3920	36.8 × 10 <sup>6</sup>	.4988	18.86 × 10 <sup>6</sup>	151.91 × 10 <sup>6</sup>	730 × 10 <sup>6</sup>	.208
7	3920	36.8 × 10 <sup>6</sup>	.2908	10.7 × 10 <sup>6</sup>	162.61 × 10 <sup>6</sup>	402 × 10 <sup>6</sup>	.404
8	139800	1312 × 10 <sup>6</sup>	-.1132	-148.5 × 10 <sup>6</sup>	14.11 × 10 <sup>6</sup>	1334 × 10 <sup>6</sup>	.0106
9	26400	248 × 10 <sup>6</sup>	-.1238	-30.7 × 10 <sup>6</sup>	-16.59 × 10 <sup>6</sup>		

階段的の質量分布を考へる場合 質量が階段的に分布せる場合の研究法<sup>1)</sup>は、考方によつては非常に面白い方法であるけれども餘り應用されぬやうであるから、こゝにはその方針のみを略記しておく。この方法は全く弾性力學にのみ頼る方法であるといつて差支なく、或る質量が車軸上  $l$  なる長さに均等に分布されてゐると考へるのであつて、その部分に就ては

<sup>1)</sup> F. M. Lewis, "Torsional Vibration of Irregular Shafts," *Journ. Amer. Soc. Nav. Eng.*, 31 (1919), 857-877.

$$\rho_1 A_1 k_1^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} = \mu_1 A_1 k_1^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \quad (127)$$

が成立つ。こゝに  $\rho_1 A_1$  はこの分布せる質量の単位長さについての密度、 $A_1$  は車軸の断面積、 $k_1$  はこの部分の質量の極慣性半径、 $k_1'$  は車軸断面の極慣性半径、 $\theta_1$  は  $x$  なる断面の回転角、 $\mu_1$  は車軸の捩り弾性率とする。同様にしてその隣りの  $l_2$  なる部分には

$$\rho_2 A_2 k_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} = \mu_2 A_2 k_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \quad (128)$$

が成立する。斯様にして順次に  $l_3, l_4$  なる次々の長さについての弾性捩り振動の方程式が作られるのであるが、之等の解式を作ることは極めて容易である。その解ができたときに、 $l_1$  と  $l_2$  との境、 $l_2$  と  $l_3$  との境等夫々の接目に於て

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \mu_1 A_1 k_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \mu_2 A_2 k_2^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \quad (129)$$

の如き条件式があるから、之等を用ひて解の常数を決定すればよい。但し自由端に於ては、上式の代りに、例へば

$$\mu_1 A_1 k_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0 \quad (130)$$

の如き境界条件があり、固定端に於ては、例へば

$$\theta_n = 0 \quad (131)$$

の如き条件のあることを注意すべきである。Lewis<sup>1)</sup> はこの方法を用ひる爲に圖式處理法を考案したのである。その圖式方法を簡単に示す爲に、一つの階段に於ける (127) の如き式の解を求めると、

$$\theta_1 = a_1 \cos(m_1 x + \gamma) \cos pt \quad \left[ m_1^2 = \frac{\rho_1 k_1^2 p^2}{\mu_1 k_1'^2} \right] \quad (132)$$

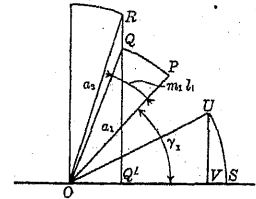
となり、そのモーメントは

$$M_1 = \mu_1 A_1 k_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = -A_1 \sqrt{\mu_1 \rho_1} k_1 k_1' p a_1 \sin(m_1 x + \gamma_1) \cos pt \quad (133)$$

<sup>1)</sup> F. M. Lewis, 前掲.

となる。この階段の長さを  $l_1$  とし、その初めの端  $x=0$  の振幅が  $\theta_1 = a_1 \cos \gamma_1$  とすれば、その初めの点の極大モーメントは必然的に  $A_1 \sqrt{\mu_1 \rho_1} k_1 k_1' p a_1 \sin \gamma_1$  となる譯である。而してその長さに沿うて  $\theta_1$  及  $M_1$  は (132), (133) の如く變化するものである。

その状態を圖示すれば右圖の PQ 線で示される。O を原点とする底線上へ OP の投射せられたる長さが、 $l_1$  なる step の初めの点の回転角變位を表し、縦軸上への OP の投射長が同じ点のモーメントを或る尺度で表してゐる。而して PQ 弧に相當する角は、 $l_1$  に沿うての長さを  $\gamma_1$  と同じ尺度で示せることになる。従て、 $l_1$  の他端に於けるモーメントは QQ' に等しく、回転角は OQ' に等しいのである。さて次の step  $l_2$  の初めの点では  $\theta_1 = \theta_2$  の条件から QQ' 線にあるべき事は當然である。その線上の R が求める点であるとすれば、式 (129) から



第 26 圖

$$\mu_1 A_1 k_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \mu_2 A_2 k_2^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}$$

なる關係によつて

$$p A_1 \sqrt{\mu_1 \rho_1} k_1 k_1' \overline{QQ'} = p A_2 \sqrt{\mu_2 \rho_2} k_2 k_2' \overline{RQ'} \quad (134)$$

が出る。この關係から  $\overline{RQ'}$  が出るのである。 $\overline{RQ'}$  と  $\overline{QQ'}$  とは夫々  $a_1 \sin(m_1 x_1 + \gamma_1)$ ,  $a_2 \sin(m_2 x_2 + \gamma_2)$  に比例してゐるが、このまゝでは  $x=l_1$  としても両方が一致しない。このやうな事はモーメントの條件から當然なことであつて、これ等の縦軸上の座標へ夫々  $A_n \sqrt{\mu_n \rho_n} k_n k_n'$  ( $n=1, 2, \dots$ ) を乗じて比較すれば明かに連続するものである。以上の方法を順次多くの階段に施して遂に車軸の他端に達するのである。而してこの端に於けるモーメント又は回転角の條件が満足すればよく、然らざれば  $p$  の假定を改めて同じことを繰返し結局最後の條件が満足する所で止めればよいのである。尙この方法を polar diagram の方法といひ、O の周圍に  $180^\circ$  だけの range のある diagram が描かれるときは一個の節點があり、 $360^\circ$  描くときは二個の節點のある振動となるものである。

この方法を前の Dan. C. Kingman 號の機關の場合にあてはめて見るときは  $N=15\cdot 21$  (前の方法では  $15\cdot 31$ ) となり、節點は一個出るのである。

振動實驗及び其他の問題 實際のものにつき J. Geiger の torsigraph によつて測定した結果では  $N$  が 15 位となり、計算がかなり實驗に近いことを示すものである。Lewis の計算の考方や torsigraph による實驗法を應用して航空機關の振り振動を研究せるものに Carter 及 Muir<sup>1)</sup>、其他<sup>2)</sup> のものがある。

又、車軸の振り振動の一般問題としては Brauchitsch<sup>3)</sup>、Stodola<sup>4)</sup>、Rembold 及 Jehlicka<sup>5)</sup> の論文があり、減衰力の影響のあるものは Gumbel<sup>6)</sup> や Carter<sup>7)</sup> の研究がある。

其他、車軸の振り振動を圖式に分析する方法は Lewis の論文にあるもの以外にも種々考へられてをり、例へば Sass<sup>8)</sup> や Geiger<sup>9)</sup> の研究の如きはその著しいものであらう。

尙、これ等の方法を應用して實際に問題を解く場合に特に注意すべきことは、プロペラの近所の水などの影響とか往復運動部の質量の影響等を常に考へておくべきことである。

1) B. C. Carter & N. S. Muir, "Torsional vibration of crankshafts. Beardmore, 'Tornado' airship engine investigations," *Tech. Rep. Aeron. Res. Comm.*, 36 (1929-30), 1049-1103; *Rep. & Mem.*, No. 1303; *Journ. Roy. Aeron. Soc.*, April 1927.

2) The Staff of the Engine Experimental Department, "Torsional Vibration of Crankshafts. A Description of the R.A.E. Mk. III Torsiograph," *Tech. Rep. Aeron. Res. Comm.*, 36 (1929-30), 1118-1122; *Rep. & Mem.*, No. 1248.

3) E. v. Brauchitsch, "Beitrag zur Untersuchung von Drehschwingungen bei Maschielen," *ZS. f. tech. Phys.*, 4 (1923), 426-430.

4) A. Stodola, "Drehschwingungen von Mehrkurbelwellen," *ZAMM*, 9 (1929), 349-360.

5) Rembold u. Jehlicka, "Resonanzausschläge bei Drehschwingungen von Kurbelwellen," *ZVDI*, 76 (1932), 480-482.

6) L. Gumbel, "Verdrehungsschwingungen und ihre Dämpfung," *ZVDI*, (1922), 252-281.

7) B. C. Carter, "Torsional Vibrations in Engines. Effects of Fitting a Damper, a Fly-wheel, or a Crankshaft-driven Supercharger," *Aeron. Rev. Comm.*, R. & M., No. 1053 (E-22) (1926).

8) Fr. Sass, "Beiträge zur Berechnung kritischer Torsions-Drehzahlen," *ZVDI*, 65 (1921), 67-69.

9) J. Geiger, "Zur Berechnung der Verdrehungsschwingungen von Wellenleitungen," *ZVDI*, 65 (1921), 1241-1242.

## 62. 車軸の強制振り振動<sup>1) 2) 3)</sup>

固有振動の計算には、氣筒のトルクや減衰摩擦力が考へに入らぬのが當り前であるが、強制振動の場合をとるとトルクと減衰力とが影響するものである。車軸に働く強制力としては往復運動をなす質量の慣性力及びガスの壓力から生ずるトルクとが考へられる。而して氣筒が幾つあつてもその強制力は各氣筒についての強制力が車軸系統全體に働く影響を全部ベクトル的に加へ合せたものに等しいから、結局一個の氣筒の場合を考へればよいことになる。その上一つの氣筒の運動による外力もその調和分析を行つて各<sub>1</sub>の成分についての強制振動を研究する事は簡單であるから、之等の位相を考へて全部をベクトル式に加へ合せておけば、實際の目的に適合せる解答が容易に得られる譯である。

最初に氣筒のガス壓力によるトルクの爲の強制振動を考へることとする。それには先づ、クランク角を底線に取り、壓力を縦線に取れる indicator card からクランクの turning effort の曲線を作る。この曲線には底線にクランク角、縦軸にクランクの回轉の爲の偶力が示されるものである。この偶力はクランク角  $\varphi$  が  $2\pi$  毎に繰返すものであり、この偶力を  $F_p(\varphi)$  と書けば Fourier 解析によつて

$$F_p(\varphi) = F_m + F_{c1} \cos \varphi + F_{c2} \cos 2\varphi + \dots \\ + F_{s1} \sin \varphi + F_{s2} \sin 2\varphi + \dots \quad (135)$$

の如く展開することができる。而して  $F_m, F_{c1}, F_{c2}, \dots, F_{s1}, F_{s2}, \dots$  は  $F_p(\varphi)$  の形がわかれば解析によつて決定されるものである。上式は又

$$F_p(\varphi) = F_m + F_{r1} \sin(\varphi + \gamma_1) + F_{r2} \sin(2\varphi + \gamma_2) + \dots$$

の如く書き直すこともできる。之等の各<sub>1</sub>の成分を強制振動の外力であるとして取扱へばよいのである。勿論  $\varphi$  は時間の或る倍數として表されるものである。

次に往復部分の慣性力の事を考へて見ようと思ふ。 $M$  を往復部の質量とし、 $r$

1) H. Wydler, *Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen* (Berlin, 1922).

2) F. M. Lewis, "Torsional Vibration in Diesel Engine," *Trans. Soc. N.A. & M.E.*, 33 (1925), 109-145.

3) 小川清二, "On the Torsional Vibrations of Aeroengines," *機械學會誌*, 32 (1929), 1-26



をクランク半径  $l$  を連桿の長さ ( $l/r = \lambda$  と書き),  $\omega$  をクランクの角速度,  $\theta$  を top centre から測つたクランク角とすれば, 往復質量の加速度による回轉偶力は次の如くなる:

$$F_0 = -M\omega^2 r^2 \left\{ \cos \theta + \frac{\lambda^2 \cos 2\theta + \sin^4 \theta}{(\lambda^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}} \right\} \left\{ \sin \theta + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \theta}} \right\}. \quad (136)$$

この式は  $\sum a_n \sin n\theta$  の如く展開できるから, その各 order のものの強制振動を取扱へばよいのである。

斯様にして出した  $F_1$  及  $F_2$  の各, の同じ order の調和成分をベクトル式に加へ合せて之を強制振動の強制力の項とすればよいのである。かうして出した強制力を (122) の右側の適當な所へ附加へておけばよい。而して之を解くには單に數學的に行つてもよいし, 又場合によつて前節に述べた所の polar diagram の方法によつてもよい。この polar diagram を強制振動の場合へ應用する方法は省略して, 充分な説明を Lewis の論文に譲ることとする。兎も角もこのやうにして出した強制振動の解を各氣筒につきその位相差を考慮に入れて加へ合せばよいのである。而して強制力の何れかの成分の週期が車軸系統のどれかの固有振動週期と一致するときに共振が起ることは當然である。但し減衰力が相當大であるために振幅はそれ程大きくはならない。2 サイクルの單氣筒の場合にはこのやうな方法によつて 1, 2, 3, ... 等の order の振り振動に對する危険速度を出すことができる。但しこの 1, 2, 3, ... なる order とはクランク軸の一回轉中に起る振動數を意味してゐる。4 サイクル機關では  $\frac{1}{2}$ , 1,  $1\frac{1}{2}$ , ... の order, 即ち整数及び  $\frac{1}{2}$  order のものの危険速度があるものである。之はその爆發による強制力の關係から容易に了解することができるであらう。すべての氣筒についての強制振動の總効果を見るには superposition の方法を取ればよい。即ち一回轉中に起る振動數が一回轉中に起る發火數に等しいか又はその倍數に等しいときには, その回轉速度を major critical speed といい, その位相差が零であるから, すべての振動を單に加へ合せておけばよろしい。斯る場合以外のものはすべて minor critical speed と稱し, それぞれ位相差があるから, 振動はベクトル式に加へ合さなければならぬ。而してこのベクトル和は

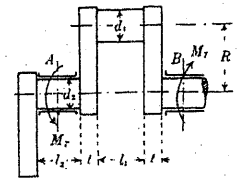
互に打消すこともあれば時には重なり合つて大きくなることもある。この minor critical speed は理論として存在することは勿論であるが, 實際の場合に時としてクランク軸を折損する程大なることさへあるものである。

尙, 車軸の單純なる彈性的強制振動の問題は Timoshenko<sup>1)</sup> が勢力式の方法によつて屈曲振動と共に委しく研究した。其他 Gradstein<sup>2)</sup> の報告もある。

### 63. クランク軸の振り振動に就て

前々章の車軸の振り振動の解析では, クランクの影響は單に附加質量と考へて問題を簡單に取扱つておいたのである。しかし計算の結果をよりよく實驗に合せる爲にはクランクの形状の影響について委しく考へておいた方がよいのである。

それには Timoshenko 及 Lessells<sup>3)</sup>, 小川博士<sup>4)</sup>, Föppl<sup>5)</sup> などの精密なる研究がある。右圖に於て AB の間に振りを生ずることを考へて見ると, それは journal (軸頸)



第 27 圖

の振り, クランク・ピンの振り, web の屈曲の結果と見てもよい。尙, 委しくはクランク・ピンの屈曲もあるけれども之は看過しても差支がない。振りの抵抗を分けて見ると下の如くなる:

$$\left. \begin{aligned} \text{journal の振りに対する剛度} &= C_1 = \frac{Gd_1^4}{32}, \\ \text{クランク・ピンの振りに対する剛度} &= C_2 = \frac{Gd_2^4}{32}, \\ \text{web の屈曲に対する剛度} &= D = \frac{Etb^3}{12}, \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

但し  $b$  は web の幅を示す。journal と web, 又はクランク・ピンと web の間の變形の影響を考へ入れる爲に journal とピンの長さを夫々  $l'_2 = l_2 + 0.9t$ ,  $l'_1 = l_1 + 0.9t$

1) S. Timoshenko, "Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe," *ZS. f. Phys. u. Math.*, 59 (1911), 116-203.

2) S. Gradstein, "Erzwungene Torsionsschwingungen von Kurbelwellen," *Ing. Arch.*, 3 (1932), 183-214.

3) S. Timoshenko & J. M. Lessells, *Applied Elasticity*, 185-197.

4) 小川清二, "On the Torsional Vibrations of Aeroengines," *機械學會誌*, 32 (1939), 1-26.

5) O. Föppl, "Schwingungsdämpfer für Kurbelwellen," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 223-231.

に取る。而して AB 間を (122) の集中質量間の車軸の部分と考へるときは、その  $c_{r,r+1}$  の代りに

$$\frac{1}{\frac{l_2}{C_2} + \frac{l_1}{C_1} + \frac{2R}{D}} \tag{138}$$

と置けばよいのである。何となれば、A と B との間の振り角を  $\theta$  とし、そのトルクを  $T$  とすれば、静力学の理論によつて

$$\theta = \left( \frac{l_2}{C_2} + \frac{l_1}{C_1} + \frac{2R}{D} \right) T$$

となり、又均一な断面のときには

$$\theta = \frac{T}{C_{r,r+1}}$$

であるからである。若し  $c_{r,r+1} = C/l$  と書くときは、(138) によつて

$$l = C \left( \frac{l_2}{C_2} + \frac{l_1}{C_1} + \frac{2R}{D} \right)$$

となる。C は均一なる断面のときの単位長さが単位角だけの振りに對する抵抗であるから、l のことを length of equivalent shaft といふ。

次に質量がクランク・ピンの所に集中せるものと假定し、且つ web が十分に撓み性を保有してゐると考へられるやうな簡単な場合の振動方程式を作つて見る。今、 $\theta_1$  を web の根元の回轉角、 $\varphi_1$  を質量が web の根元に對して回轉せる角とすれば

$$J_1(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\varphi}_1) + c_1\dot{\varphi}_1 = 0. \tag{139}$$

こゝに  $J_1$  はクランク・ピンに相當する質量の車軸中心線の周圍の慣性モーメント、 $c_1$  は web が単位角だけ曲る爲に起る彈性抵抗の同じ中心線の周圍のモーメントを表す。同様にして多くの質量が各、そのクランク・ピンの所に集中せる場合の方程式を作つて見ると次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} J_1(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\varphi}_1) + c_1\dot{\varphi}_1 &= 0, \\ J_2(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\varphi}_2) + c_2\dot{\varphi}_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ J_n(\ddot{\theta}_n + \ddot{\varphi}_n) + c_n\dot{\varphi}_n &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{140}$$

然るに彈性抵抗の釣合の關係から明かに ( $J_1, J_n$  が自由端にあるとき)

$$\left. \begin{aligned} c_1\dot{\varphi}_1 + c_{1,2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) &= 0, \\ c_2\dot{\varphi}_2 - c_{1,2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + c_{2,3}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ c_n\dot{\varphi}_n - c_{n-1,n}(\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{141}$$

(141) を (140) に代入して  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  を消去すれば  $\theta_1, \theta_2, \dots$  についての方程式を得る。これから問題を解けばよいのである。<sup>1)</sup> (138) 及び上式に關聯せる一例として航空機關のすべての throw と journal とが各、等しい形と大きさを持ち、端にはプロペラ軸を通してプロペラのある場合を考へて見る。今、 $J_i$  を各 throw のクランク軸の周圍の慣性モーメントとし、 $m_p$  をクランク・ピンの所で自由に回轉する質量とする。l をクランク軸の中心線からクランク・ピンの中心までの各 throw の長さとする。又

$$P = J_i + m_p l^2$$

と書いておく。 $c_{1,2}$  をプロペラ軸端のクランク平腕(を含み)を単位角だけ振る爲の抵抗モーメント、 $e$  をクランク・ピンの中央點からその次のクランク・ピンの中央點までの效果的振り抵抗モーメントとする。この  $c_{1,2}$  を出すには (138) の出し方と同じやうに、プロペラ軸(長さ  $L$ , 直径  $d_a$ ) の振りの抵抗モーメント  $c_a = \frac{mGd_a^4}{32L}$  及び web の屈曲の抵抗モーメント  $e = \frac{Etb^3}{12R}$  の兩方の影響の合計

$$c_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{c_a} + \frac{1}{e}}$$

<sup>1)</sup> J. Morris, *The Strength of Shafts in Vibration* (London, 1929); *Journ. Roy. Aeron. Soc.*, April 1923.

でよい譯である。又、 $c$  を出すには (138) を其儘記號だけ變更して

$$c = \frac{1}{\frac{1}{c_\beta} + \frac{2}{e} + \frac{1}{c_\gamma}}$$

となる。但し  $c_\beta$  はクランクピンの振り抵抗モーメントであり、 $c_\gamma$  は journal の振り抵抗モーメントを表す。

尚、プロペラが非常に大なる慣性モーメントを有するときには、振動数が

$$f = 2f_0 \sin \frac{\alpha}{2}$$

で與へられる。但し  $\tan \alpha \tan \frac{r}{2-r}$  であり、 $n$  は throw の總數、 $r = c_{1,2}/c$ 、 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{P}}$  である。(P は前頁にある。)

今、6-throw のクランク軸を取り、各 web が 6 吋×4.5 吋×1.44 吋とし適當の  $E$  及  $G$  其他を代入すれば

$$e = 54 \times 10^6 \times (32.2 \times 12) \text{ poundals,}$$

$$c_a = 35 \times 10^6 \times (32.2 \times 12) \text{ "}$$

$$c_\beta = 47 \times 10^6 \times (32.2 \times 12) \text{ "}$$

$$c_\gamma = 57 \times 10^6 \times (32.2 \times 12) \text{ "}$$

$$\text{従て} \quad \frac{1}{c_{1,2}} = \left( \frac{1}{35} + \frac{1}{54} \right) \times \frac{1}{384 \times 10^6} = \frac{.048}{384 \times 10^6}$$

$$\frac{1}{c} = \left( \frac{1}{47} + \frac{2}{54} + \frac{1}{57} \right) \times \frac{1}{384 \times 10^6} = \frac{.076}{384 \times 10^6}$$

$$\text{故に} \quad r = \frac{c_{1,2}}{c} = \frac{19}{12}$$

$J_i = 820 \text{ 磅吋}^2$ ,  $M_p = 20.562 \text{ 磅} = 10.625 \text{ 磅(連桿の太端部)} + 9.937 \text{ 磅(半ピストン部)}$ と置け

1) J. Morris, Journ. Roy. Aeron. Soc. (Oct. 1923).

ば

$$P = 820 + 20.562 \times 36 = 4.06 \times 384.$$

即ち

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{P}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^6}{.076 \times 4.06}} = 284.$$

又

$$\tan 6\alpha \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2-r}$$

から

$$\frac{\alpha}{2} = 7^\circ 20'.$$

従て

$$f = 2 \times 284 \sin 7^\circ 20' = 72.53 \text{ 毎秒.}$$

即ち、6 氣筒機關では毎分

$$N = \frac{120f}{6} = 1450$$

だけの發火トルクの回數があれば、共振の起ることがわかるのである。

#### 64. 齒車傳導装置の振動に就て

車軸と齒車とから成る動力傳導装置に於て、齒車が屢、空亡りをなしたり、音を生じたりすることが誰にでも知られてゐる。それで工場などでは齒車から生ずる雑音防止等に種々の方法が講ぜられてゐる。しかし原動機の回轉速度が速くなればなる程齒車の問題は一層重要となつて來るものである。即ち高速機關、電動機、蒸氣タービンなどでは必ず齒車をつけねばならず、且つ機械的方法としてこの装置を何段にもつけて行くことから免れ得ないものである。その結果齒車の空亡りの問題は一層大切なものとなつた。ある自動車ではその爲に特別の装置を施さなくては、一定範圍の速度の間到底走り得ぬものもある。又、電車では線路に凹凸を生じてやはり害を與へる。しかし最も問題となるのはタービン推進船に於ける齒車傳導の問題である。其他、往復運動の機械を用ひる場合の齒車装置、例へば電動機と齒車装置を用ひる往復動ポンプ又は壓縮機の如きもの、増速齒車装置により往復動から動力を受ける渦巻ポンプや送風機の如きも勿論問題となるものである。船の齒

車装置が特に注目すべきことは歯車の大きさが非常に大であることからでも想像がつくであらう。大きな船の親歯車は重量が60噸もある。又中間歯車でも20噸もあり、この歯車が或る限界速度では瞬間的に自由にされるものである。

悪い配置に置かれた歯車の齒をしらべて見ると、明かに hammer action のあつたことがわかるのである。ピッチの線に於て凹みが出来急な摩擦の爲に齒の表面に溝さへ出来てゐる。又材質の薄片や粒が油の流れの中に混じてゐたり、齒の端は時々摩擦し、時には齒そのものが根から折損して明かに疲労の壞れ方をなしてゐるものさへあることがある。従てその場合に毎平方吋に30噸乃至40噸の應力のあつたことが知られる譯である。之等の事から歯車同志が極めて強く且つ週期的にぶつかつたものであることが知られるのである。

上述の歯車間の壓力の異同や衝突作用を減する爲に種々の方法が示されてゐる。歯車箱に油を餘計に注ぐことも一法である。但し減摩剤としてよりも冷却剤として一層役立つものである。又、齒車の齒のピッチを減すること、輪の幅を廣くすることなどによつて表面壓を少くすることなども必要である。齒の形を變化させて接觸面を平たくすることも考へられる。

次に歯車装置の全體を考へると、fly wheel や彈性的の聯結装置を置くのも面白いと思ふ。或る技術者は之等のものを主動軸の方に取付けた方がよいといふし、別の技術者は反對にプロペラ軸の方に取付ける事を主張し、意見がなかなか定まらなかつたが、割合に理由のある方法の一つは、主動軸を齒車よりもさきの方まで延長し、その端に fly wheel を取付け、それによつて主動軸の節點に齒車があるやうにすることである。或は又、プロペラ軸の振り振動の節點の所に齒車を置いてよい。それよりも一層面白いと思ふのは齒車装置の固有振動週期をできるだけ長くしてプロペラの振動が如何にあつても、齒車の所は振動を餘り受けないやうにすることである。

この問題を理論的に取扱ふには、齒車系統の固有振動を出しておき、次に同系統の強制振動を出し、それについての共振をしらべて見ればよいのである。即ち、この共振に於て振動の振幅が自然大きくなるから、こゝに齒車間の齒のたゞき合ひが起

る。このやうな條件を研究すればすべての問題が自ら解決されるものである。

### 65. 齒車傳導装置の固有振り振動(一段聯結の場合)<sup>1)</sup>

最も簡単な場合 極めて簡単な場合をとり、親軸の自由端に  $J_1$  なる回轉慣性モーメントの荷重があり、兒軸の自由端には  $J_2$  なる慣性モーメントの質量があつて、兩軸間には質量のない齒車があり、親軸の方の半径は  $R_3$ 、兒軸の方の半径は  $r_3$  とする。又  $J_1$  は  $\theta_1$ 、 $J_2$  は  $\theta_2$ 、 $R_3$  なる半径の齒車は  $\theta_3$ 、 $r_3$  なる半径の齒車は  $\alpha_3\theta_3$  なる角變位をなすものとし、 $J_1$  と齒車間の單位角變化に對する振りの抵抗モーメントを  $c_{1,3}$ 、 $J_2$  と齒車間のそれを  $c_{2,3}$  とする。尙、齒車間の tangential の相互作用を  $F_3$  としておく。然るときは振動の方程式として次式が得られる：

$$J_1\ddot{\theta}_1 = c_{1,3}(\theta_3 - \theta_1), \quad (142)$$

$$F_3R_3 = c_{1,3}(\theta_3 - \theta_1), \quad (143)$$

$$F_3r_3 = c_{2,3}(\theta_2 - \alpha_3\theta_3), \quad (144)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -c_{2,3}(\theta_2 - \alpha_3\theta_3). \quad (145)$$

(143), (144) から

$$c_{1,3}(\theta_3 - \theta_1) = \alpha_3 c_{2,3}(\theta_2 - \alpha_3\theta_3),$$

茲に  $\alpha_3 = R_3/r_3$  である。従て、この式及び (142), (145) から

$$\alpha_3\ddot{\theta}_1 = \frac{\alpha_3^2 c_{2,3}(\theta_2 - \alpha_3\theta_3)}{J_1},$$

$$\alpha_3(\ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_1) = \frac{\alpha_3^2 c_{2,3}(\ddot{\theta}_2 - \alpha_3\ddot{\theta}_3)}{c_{1,3}},$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{c_{2,3}(\theta_2 - \alpha_3\theta_3)}{J_2}.$$

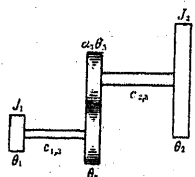
之等の三式から直ちに

$$\left(\frac{1}{c_{1,3}} + \frac{1}{\alpha_3^2 c_{2,3}}\right)\ddot{\theta}_{2,3} + \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{\alpha_3^2 J_2}\right)\theta_{2,3} = 0 \quad (146)$$

が出る。但し  $\theta_{2,3} = \theta_2 - \alpha_3\theta_3$  なることを意味する。

<sup>1)</sup> J. Morris, *The Strength of Shafts in Vibration* (London, 1929)

この式から固有振動の週期  $2\pi/p$  の  $p$  が次の如く書かれる:



第 28 圖

$$p^2 = \frac{\frac{1}{J_1} + \frac{1}{\alpha_2^2 J_2}}{\frac{1}{c_{1,2}} + \frac{1}{\alpha_2^2 c_{2,3}}} = \frac{\frac{\alpha_2^2 + 1}{J_1 + J_2}}{\frac{\alpha_2^2 + 1}{c_{1,2} + c_{2,3}}} \quad (147)$$

特別に  $\alpha_2=0$  なる時、即ち  $J_2$  側の歯車の半径が  $J_1$  側のそれに比して無限に小なる時には

$$p^2 = \frac{c_{2,3}}{J_2}$$

となり、 $J$  側の影響がきかぬ様な振動週期を與へる。之に反して  $\alpha_2=\infty$  なる時、即ち  $J_2$  側の歯輪の半径が  $J_1$  側のそれに比して無限に大なる場合には

$$p^2 = \frac{c_{1,2}}{J_1}$$

となり、 $J_2$  側の影響のない振動週期を與へるものである。即ち全體として歯車の半径の大なる方は振動に與らぬことがわかる。

モートル軸とプロペラ軸との歯車聯結 親軸が  $J_2$  なる質量慣性モーメントを有するモートルに聯結され、プロペラ軸は非常に短く、プロペラの質量慣性モーメントが  $J_1$  であるものとする。又親軸の振り抵抗モーメントを  $c$  と書き、プロペラ軸即ちプロペラ側の歯車の振動性角變位を  $\theta_1$ 、モートルのそれを  $\theta_2$  としておく。尙又歯車のプロペラ側の半径がモートル軸のその半径の  $\alpha$  倍になつてゐるものとする。然るときはモートル及びプロペラの回轉振動の方程式として次式が得られる:

$$\left. \begin{aligned} J_2 \ddot{\theta}_2 + c(\theta_2 - \alpha\theta_1) &= 0, \\ J_1 \ddot{\theta}_1 - \alpha c(\theta_2 - \alpha\theta_1) + M_w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

但し  $M_w$  はプロペラの回轉中に生ずるモーメントの變化である。之はプロペラ翼其他の機構から生ずるものである。而してモートルの平均回轉速度を  $\omega_0$ 、その傳へるモーメントを  $M_0$  とし、且つ  $M_w$  はその角速度の二乗に比例するモーメント

靜力學的に傳はるモーメントもやはり角速度の二乗に比例するとする)であるとするれば

$$M_w = \frac{2\dot{\theta}_1 \omega_0}{(\omega_0/\alpha)^2} M_0 \quad [(\omega_0 + \dot{\theta}_1)^2 = \omega_0^2 + 2\dot{\theta}_1 \omega_0 + \dots]$$

の如くなるものと見てよい。この値を (148) に入れ、且つ  $J_{10} = J_1/\alpha^2$ 、 $\theta_{10} = \alpha\theta_1$  と書けば、(48) は次の如くなる:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_2 + \frac{c}{J_2} (\theta_2 - \theta_{10}) &= 0, \\ \ddot{\theta}_{10} - \frac{c}{J_{10}} (\theta_2 - \theta_{10}) + \frac{2M_0}{J_{10}\omega_0} \dot{\theta}_{10} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

この式に於て

$$\theta_2 = Ae^{pt}, \quad \theta_{10} = Be^{pt}$$

と書き、 $A, B$  を消去すれば

$$\left| \begin{array}{cc} p^2 + \frac{c}{J_2} & -\frac{c}{J_2} \\ \frac{c}{J_{10}} & -\left(p^2 + \frac{2M_0 p}{\omega_0 J_{10}} + \frac{c}{J_{10}}\right) \end{array} \right| = 0. \quad (150)$$

之を展開して

$$\left(p^2 + \frac{c}{J_2}\right) \left(p^2 + \frac{2M_0 p}{\omega_0 J_{10}} + \frac{c}{J_{10}}\right) - \frac{c^2}{J_2 J_{10}} = 0.$$

この式に於て  $p=0$  を取除き

$$p^3 + p^2 \frac{2M_0}{J_{10}\omega_0} + p \frac{c}{J_2} \left(1 + \frac{J_2}{J_{10}}\right) + \frac{c}{J_2 J_{10}} \frac{2M_0}{\omega_0} = 0 \quad (151)$$

となる。この式から  $p$  の三つの根を求めればよい。この式に於て  $M_0=0$  とすれば

$$p = \pm i \sqrt{\frac{c}{J_2} \left(1 + \frac{J_2}{J_{10}}\right)}$$

となる。

モートル軸に多くのクランクのある場合 モートル軸に多くのク

ランクがあり、且つ歯車装置の質量も考慮に入るやうな場合を考へる。今、 $J_1, J_2, j_2, J, J, \dots$  をプロペラ、プロペラ側の歯車、モートル側の歯車、各 throw の慣性モーメントとし、 $\theta_1, \theta_2, \alpha_2 \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$  を其等に相當する振動性角變位、 $\theta_{1,2}, \theta_{2,3}, \theta_{3,4}, \dots$  を  $J_1 J_2$  間、 $j_2 J$  間、 $J J$  間の相対的角變位、 $c_{1,2}, c_{2,3}, c, \dots$  を其等の單位角變位に對する抵抗モーメント、 $F_2$  を歯車間の切線方向の力、 $R_2, r_2$  を歯車のプロペラ側及びモートル側のものの半徑とする。然るときは

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= c_{1,2} \theta_{1,2}, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= -c_{1,2} \theta_{1,2} + F_2 R_2, \\ j_2 \alpha_2 \ddot{\theta}_2 &= c_{2,3} \theta_{2,3} - F_2 r_2, \\ J \ddot{\theta}_3 &= -c_{2,3} \theta_{2,3} + c \theta_{3,4}, \\ J \ddot{\theta}_4 &= -c \theta_{3,4} + c \theta_{4,5}, \\ J \ddot{\theta}_5 &= -c \theta_{4,5} + c \theta_{5,6}, \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

但し、 $\theta_{1,2} = \theta_2 - \theta_1$ ,  $\theta_{2,3} = \theta_3 - \alpha_2 \theta_2$ ,  $\theta_{3,4} = \theta_4 - \theta_3, \dots$  である。上式の第二式、第三式から

$$(J_2 + \alpha_2^2 j_2) \ddot{\theta}_2 = -c_{1,2} \theta_{1,2} + \alpha_2 c_{2,3} \theta_{2,3}. \quad (153)$$

$J_2 + \alpha_2^2 j_2 = J_2'$  と書き、且つ上式と (152) の第一式とから

$$\left[ \frac{1}{c_{1,2}} \frac{d^2}{dt^2} + \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2'} \right) \right] c_{1,2} \theta_{1,2} - \frac{\alpha_2}{J_2'} c_{2,3} \theta_{2,3} = 0. \quad (154)$$

(152) の第四式と (153) とから

$$-\frac{\alpha_2}{J_2'} c_{1,2} \theta_{1,2} + \left[ \frac{1}{c_{2,3}} \frac{d^2}{dt^2} + \left( \frac{\alpha_2^2}{J_2'} + \frac{1}{J} \right) \right] c_{2,3} \theta_{2,3} - \frac{1}{J} c \theta_{3,4} = 0, \quad (155)$$

但し  $\theta_{2,3} = \theta_3 - \alpha_2 \theta_2$  である。(152) の第四式と第五式とから

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{J} c_{2,3} \theta_{2,3} + \left( \frac{1}{c} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{J} \right) c \theta_{3,4} - \frac{1}{J} c \theta_{4,5} &= 0, \\ -\frac{1}{J} c \theta_{3,4} + \left( \frac{1}{c} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{J} \right) c \theta_{4,5} - \frac{1}{J} c \theta_{5,6} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

以下同様な式が作れる。若しモートルが存在せず、クランク荷重  $J$  が  $n$  個あり、そ

の端が自由なる場合には  $2\pi/p$  なる週期を定める式として次式が作られる:

$$\left[ \left[ \frac{p^2}{c_{1,2}} - \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2'} \right) \right] \left[ \frac{p^2}{c_{2,3}} - \left( \frac{\alpha_2^2}{J_2'} + \frac{1}{J} \right) \right] - \frac{\alpha_2^2}{J_2'^2} \frac{\sin}{\sinh} \right] na \pm \left[ \frac{p^2}{c_{1,2}} - \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2'} \right) \right] \frac{\sin}{\sinh} \left\{ \frac{(n-1)a}{J} \right\} = 0, \quad (157)$$

こゝに  $\sin$  の形及び  $\pm$  の  $+$  の符號のときは

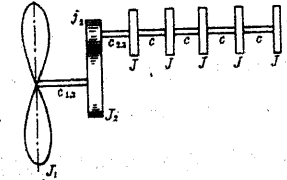
$$p^2 = \frac{4c \sin^2 \frac{a}{2}}{J}$$

となり、又 (157) に於て  $\sin$  が  $\sinh$  の形を取り、又  $\pm$  の  $-$  の符號を取るときは、上式は

$$p^2 = \frac{4c \cosh^2 \frac{a}{2}}{J}$$

となる。

上記の問題中特別な場合即ちモートル軸には單に一個の  $J$  のみがある場合を考へると、(152) の代りに



$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= c_{1,2} \theta_{1,2}, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= -c_{1,2} \theta_{1,2} + F_2 R_2, \\ j_2 \alpha_2 \ddot{\theta}_2 &= c_{2,3} \theta_{2,3} - F_2 r_2, \\ J \ddot{\theta}_3 &= -c_{2,3} \theta_{2,3}. \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

この中の第一式から

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{c_{1,2}}{J_1} \theta_{1,2}. \quad (159)$$

第二式、第三式から

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{c_{1,2}}{J_2'} \theta_{1,2} + \frac{\alpha_2 c_{2,3}}{J_2'} \theta_{2,3}, \quad (160)$$

但し

$$J_2' = J_2 + \alpha_2^2 J_2.$$

第四式から

$$\ddot{\theta}_3 = -\frac{c_{2,3}}{J} \theta_{2,3}. \tag{161}$$

週期を  $2\pi/p$  とし、(159), (160) から

$$\left[ \frac{p^2}{c_{1,2}} - \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2'} \right) \right] c_{1,2} \theta_{1,2} + \frac{\alpha_2}{J_2'} c_{2,3} \theta_{2,3} = 0. \tag{162}$$

(160), (161) から

$$\frac{\alpha_2}{J_1'} c_{1,2} \theta_{1,2} + \left[ \frac{p^2}{c_{2,3}} - \left( \frac{\alpha_2^2}{J_2'} + \frac{1}{J} \right) \right] c_{2,3} \theta_{2,3} = 0. \tag{163}$$

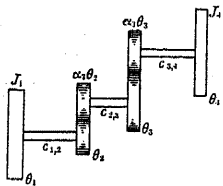
(162), (163) から  $\theta_{1,2}$ ,  $\theta_{2,3}$  を消去して

$$\left[ \frac{p^2}{c_{1,2}} - \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2'} \right) \right] \left[ \frac{p^2}{\alpha_2^2 c_{2,3}} - \left( \frac{1}{J_2'} + \frac{1}{\alpha_2^2 J} \right) \right] - \frac{1}{J_2'^2} = 0. \tag{164}$$

この式が振動数を與へる。而して之から  $p_1$ ,  $p_2$  の二つの根が出るから二組の振動数があることになる。此式は三つの質量  $J_1$ ,  $J_2'$ ,  $\alpha_2^2 J$  が  $c_{1,2}$ ,  $\alpha_2^2 c_{2,3}$  なる抵抗モーメントの車軸に挟まれてゐる場合の車軸振り振動の問題と同じ事になるものである。

66. 齒車傳導裝置の固有振り振動(數段直列又は複式の聯結の場合)

直列にある數段の齒車裝置 質量のない二組の齒車裝置が直列になつてゐる場合を考へる。次の圖に於て  $J_1$ ,  $J_2$  のみが質量の影響を受けるものとし振動の方程式を作れば次の如くなる：



第 30 圖

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= c_{1,2} \theta_{1,2}, \\ F_2 R_2 &= c_{1,2} \theta_{1,2}, \\ F_2 r_2 &= c_{2,3} \theta_{2,3}, \\ F_3 R_3 &= c_{2,3} \theta_{2,3}, \\ F_3 r_3 &= c_{3,4} \theta_{3,4}, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= -c_{3,4} \theta_{3,4}, \end{aligned} \right\} \tag{165}$$

茲に  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $R_2$ ,  $r_2$ ,  $R_3$ ,  $r_3$  は夫々の齒車の切線方向の力及び半径を表す。

(165) を順次解いて  $\theta_{3,4}$  のみの方程式を作れば、

$$\left( \frac{1}{c_{1,2}} + \frac{1}{\alpha_2^2 c_{2,3}} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 c_{3,4}} \right) \ddot{\theta}_{3,4} + \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 J_2} \right) \theta_{3,4} = 0. \tag{166}$$

$\frac{2\pi}{p}$  を振動週期とすれば、

$$p^2 = \frac{\frac{1}{J_1} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 J_2}}{\frac{1}{c_{1,2}} + \frac{1}{\alpha_2^2 c_{2,3}} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 c_{3,4}}} \tag{167}$$

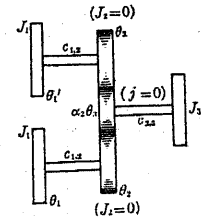
となる。同様にして質量なき  $n$  個の齒車裝置が直列になつてゐる場合には

$$p^2 = \frac{\frac{1}{J_1} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{n+1}^2 J_{n+2}}}{\frac{1}{c_{1,2}} + \frac{1}{\alpha_2^2 c_{2,3}} + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 c_{3,4}} + \dots + \frac{1}{\alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{n+1}^2 c_{n+1, n+2}}} \tag{168}$$

並列にある齒車裝置 質量なき一般の複式の齒車のある場合を考へる。

下圖に於て  $J_1$ ,  $J_2$  のみが質量の影響を持つものとする、振動の方程式は次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= c_{1,2} \theta_{1,2}, \\ J_1 \ddot{\theta}_1' &= c_{1,2} \theta_{1,2}', \\ F_2 R_2 &= c_{1,2} \theta_{1,2}, \\ F_2' R_2 &= c_{1,2} \theta_{1,2}', \\ (F_2 + F_2') r_2 &= c_{2,3} \theta_{2,3}, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= -c_{2,3} \theta_{2,3}, \end{aligned} \right\} \tag{169}$$



第 31 圖

但し  $\theta_{1,2} = \theta_2 - \theta_1$ ,  $\theta_{1,2}' = \theta_2 - \theta_1'$ ,  $\theta_{2,3} = \theta_3 - \alpha_2 \theta_2$ .

(169) の第三,第四,第五式を解き

$$\alpha_2 c_{2,3} \theta_{2,3} = c_{1,2} (\theta_{1,2} + \theta_{1,2}'). \tag{170}$$

(169) の第一,第二式から

$$\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}'_1 = \frac{c_{1,2}(\theta_{1,2} + \theta'_{1,2})}{J_1} \quad (171)$$

(170) から

$$\alpha_2(\theta_2 - \theta_1 + \theta_2 - \theta'_1) = \frac{\alpha_2^2 c_{2,3} \theta_{2,3}}{c_{1,2}} \quad (172)$$

(169) の第六式から

$$\ddot{\theta}_3 = -\frac{c_{2,3} \theta_{2,3}}{J_3} \quad (173)$$

(170), (171), (172), (173) の関係を用いて

$$2\ddot{\theta}_{2,3} = -\frac{\alpha_2^2 c_{2,3} \ddot{\theta}_{2,3}}{c_{1,2}} - \frac{2c_{2,3} \theta_{2,3}}{J_3} - \frac{\alpha_2^2 c_{2,3} \theta_{2,3}}{J_1}$$

即ち

$$\left(\frac{1}{2c_{1,2}} + \frac{1}{\alpha_2^2 c_{2,3}}\right) \ddot{\theta}_{2,3} + \left(\frac{1}{2J_1} + \frac{1}{\alpha_2^2 J_3}\right) \theta_{2,3} = 0 \quad (174)$$

この振動の振動数を  $p/2\pi$  とすれば,

$$p^2 = \frac{\frac{1}{2J_1} + \frac{1}{\alpha_2^2 J_3}}{\frac{1}{2c_{1,2}} + \frac{1}{\alpha_2^2 c_{2,3}}} \quad (175)$$

然るに  $\theta_1$  と  $\theta'_1$  との唸りの振動に對しては, (169) の第一, 第二式から

$$J_1(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}'_1) = -c_{1,2}(\theta_1 - \theta'_1)$$

之に相當する振動数  $p'/2\pi$  は

$$p'^2 = \frac{c_{1,2}}{J_1} \quad (176)$$

から求めることができる。即ち齒車装置の所が剛なる場合と同じ事になる。之は  $\theta_1$  と  $\theta'_1$  とが逆の符號を持ち、且つ齒車装置の中心線に對して對稱的の振動をすることを意味するものである。

$J_2$  及  $j_2$  が零でない場合 前述の場合に於ける  $J_2$  及  $j_2$  が零でないときを考へて見る。この場合の振動方程式は次の如くなる:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= c_{1,2} \theta_{1,2}, \\ J_1 \dot{\theta}'_1 &= c_{1,2} \theta'_{1,2}, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= -c_{1,2} \theta_{1,2} + F_2 R_2, \\ J_2 \dot{\theta}'_2 &= -c_{1,2} \theta'_{1,2} + F'_2 R_2, \\ j_2 \alpha_2 \ddot{\theta}_2 &= c_{2,3} \theta_{2,3} - (F_2 + F'_2) r_2, \\ J_3 \ddot{\theta}_3 &= -c_{2,3} \theta_{2,3}. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

この第一, 第二式から

$$\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}'_1 = \frac{c_{1,2}}{J_1} (\theta_{1,2} + \theta'_{1,2})$$

第三, 第四, 第五式から

$$(2J_2 + \alpha_2^2 j_2) \ddot{\theta}_2 = -c_{1,2} (\theta_{1,2} + \theta'_{1,2}) + \alpha_2 c_{2,3} \theta_{2,3}$$

第六式から

$$\ddot{\theta}_3 = -\frac{c_{2,3}}{J_3} \theta_{2,3}$$

但し

$$\theta_{1,2} = \theta_2 - \theta_1, \quad \theta'_{1,2} = \theta_2 - \theta'_1, \quad \theta_{2,3} = \theta_3 - \alpha_2 \theta_2$$

とする。今

$$\varphi_{1,2} = \theta_{1,2} + \theta'_{1,2}$$

とすれば, 上に得た関係から

$$\varphi_{1,2} = -\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right) c_{1,2} \varphi_{1,2} + \frac{\alpha_2}{J_2} c_{2,3} \theta_{2,3} = 0,$$

及び

$$\ddot{\theta}_{2,3} = \frac{\alpha_2}{2J_2'} c_{1,2} \varphi_{1,2} - \left(\frac{1}{J_3} + \frac{\alpha_2^2}{2J_2'}\right) c_{2,3} \theta_{2,3},$$

但し

$$2J_2' = 2J_2 + \alpha_2^2 j_2.$$

が得られる。従て上の二つの式から  $\varphi_{1,2}$ ,  $\theta_{2,3}$  を消去し、且つ  $2\pi/p$  を週期として

$$\left[\frac{p^2}{c_{1,2}} - \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2'}\right)\right] \left[\frac{p^2}{c_{2,3}} - \left(\frac{\alpha_2^2}{2J_2'} + \frac{1}{J_3}\right)\right] - \frac{\alpha_2^2}{2J_2'^2} = 0 \quad (178)$$

が得られる。之を書き直せば,



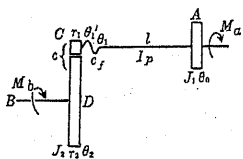


ば、それを調和函数に分析し、その各成分について particular solution を出し、之を外力の働かぬときの complementary solution 即ち固有振動の解に加へ、然る後、初期の条件等を用ひて係数を定めればよいのである。

歯車装置の場合の強制振動の週期が聯成固有振動のどれかと一致する時は、そこに共振の現象が必然的に起つて歯車装置に於ける歯が互に離れたり接したりすることとなり、その結果歯車の性能を害するばかりでなく、互に歯を傷つけ合ふやうになるのである。この意味に於て歯車の共振は恐るべきものである。Reissner<sup>1)</sup>は強制振動をなしつつある歯車を通して送られるトルクの働が逆の方向になるといふ關係から直接に、歯が互に打ち合ふ条件を出した。この關係は多少複雑であり、且つ共振によつて起る歯車の離れ方とは違ふ性質のものであつて、注意に値するものと思はれる。しかし初めに述べたやうに、歯車装置の固有振動週期を強制振動週期よりもできるだけ長くしておくことは理論上からもかなり安全な道である。

### 68. 歯車の歯の週期的變形によつて生ずる強制振動

歯車の歯は如何に精密に製作され、且つ共振の起らぬやうな回転にさせてあつても、歯車が互に力を受けて變形する爲に強制振動を起すといふことが小野博士<sup>2)</sup>



第 32 圖

によつて理論上から発見された。同博士の劃期的な研究をできるだけ詳しく紹介したいと思ふ。

先づ振りの自由振動を一應考へることとする。左圖に於てAは回転モーメント不變なるタービン翼車とし、Cは兒齒車であつてAC軸(圓形断面)の回転を親齒車

Dを経てBに傳へる。又BDは變形なしに廻ると見る。Gを振りの弾性係數、ρを軸材料の密度とする。AC上の任意の點の振り角は次式の關係にある：

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (181)$$

<sup>1)</sup> H. Reissner, "Über die Kraftschlüssigkeit von Zahnradgetrieben für Schiffspropeller," ZAMM, 4 (1924), 53-60.

<sup>2)</sup> 小野鑑正, "齒車軸の振動," 機械學會誌, 35 (1932), 624-628.

A點を  $x=0$  と考へ、この點の境界條件

$$x=0; \quad GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} = J_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad \left[ \begin{array}{l} I_p: \text{軸の断面の慣性モーメント} \\ J_1: \text{Aの質量慣性モーメント} \end{array} \right] \quad (182)$$

を考へて、上の微分方程式を解くと

$$\theta = A(\cos \alpha x - a \sin \alpha x) \sin(pt + \epsilon) \quad (183)$$

が出る。茲に  $\alpha = p\sqrt{\rho/G}$ ,  $a = \frac{\alpha}{\rho} \frac{J_1}{I_p}$  である。さてタービン軸の終點  $x=l$  のところで弾性的の接手を備へて運動が兒齒車に傳はるものとする。この接手は質量がないと假定し、その車軸の回転角は  $\theta$ 、兒齒車のそれは  $\theta_1$  とすれば、

$$x=l; \quad c_r(\theta_1 - \theta) = GI_p \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \quad (184)$$

と置き得る。  $c_r$  は接手の弾性係數である。次に親兒兩齒車のピッチ圓に沿うた相對的のりを考へると、親齒車に對して兒齒車の進む距離  $\xi$  は  $\xi = r_1\theta_1 - r_2\theta_2$  である。茲に  $\theta_2$  は親齒車の回転角、 $r_1, r_2$  は兩圓の半径である。  $c$  を齒の剛性の係數とすれば、兒齒車の質量を省略して次の關係が成立する：

$$c \xi r_1 = -GI_p \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \quad (185)$$

$$\xi = r_1\theta_1 - r_2\theta_2 = r_1\theta_1 - r_2\theta_2 + \frac{r_1 GI_p}{c r} \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$$

を用ひて

$$c r_1^2 \left( \theta_1 - \frac{r_2}{r_1} \theta_2 \right) + \frac{c r_1^2}{c r} GI_p \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = -GI_p \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \quad (186)$$

なる關係が出る。この中へ(182)の  $\theta_1$  を代入して  $\theta_2$  を求めれば、

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} \theta_2 &= \theta_1 + \left( \frac{1}{c r} + \frac{1}{c r_1^2} \right) GI_p \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \\ &= A \left\{ (\cos \alpha l - a \sin \alpha l) - \left( \frac{1}{c r} + \frac{1}{c r_1^2} \right) GI_p \alpha (\sin \alpha l + a \cos \alpha l) \right\} \sin(pt + \epsilon). \end{aligned} \quad (187)$$

親齒車の方を考へる時は、その質量慣性モーメントを  $J_2$  と書き、

$$J_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} = c \xi r_2 = -\frac{r_2}{r_1} GI_p \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \quad (188)$$

之に (183), (187) を入れて

$$\left\{ a + GI_p \alpha \left( \frac{1}{c_r} + \frac{1}{c r_1^2} \right) - \frac{GI_p \alpha r_2^2}{J_2 p^2 r_1^2} \right\} \sin \alpha l$$

$$= \left\{ 1 + a \frac{GI_p \alpha r_2^2}{J_2 p^2 r_1^2} - a GI_p \alpha \left( \frac{1}{c_r} + \frac{1}{c r_1^2} \right) \right\} \cos \alpha l \quad (189)$$

なる関係が出る。小野博士は同様にして兩軸とも振れる場合の自由振動をも研究した。

以上の計算に於ては  $c$  は不変數と考へたが、この  $c$  が  $T$  なる週期を有する變數であると考へて見る。一體、一組の親兒齒車の何れについて見るも、一つの齒の接觸の起點から終點に至る間に描かれるその車の回轉角は、單位のピッチに相當した同じ車の回轉角よりも大であるがその比は一般に整数ではない。若しこの比が 1 と 2 の間の數ならば、同時に一組又は二組の齒が接すべきことを意味する。即ち回轉中に接觸する齒の組數が變化し又回轉と共に各、の齒の接點も移動する故傳へられる力のための齒の變形は刻々變化するのみでなく、齒の接觸の起點及び終點に於て著しき變化を生ずる。而して齒の形が正確であれば單位ピッチに相當するだけ回轉すればすべて元の状態に歸るから、この變形は單位のピッチだけ進む時間を週期  $T$  として考へることを適當とする。

この値は刻々變化するものであるけれども、之を大體から見ると、 $T$  なる時間中で

$$\left. \begin{aligned} t_1 > t > 0; \quad c = c_1, \quad \xi = A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t + D_1, \\ T > t > t_1; \quad c = c_2, \quad \xi = A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t + D_2. \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

のごとく變化すると見るのが至當である。普通  $c_1 > c_2$  であり、 $\xi = r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2$  は  $\sin(pt + e)$  に比例することから (183), (187) に従て書いたのである。又、 $D_1, D_2$  は強制振動の必要上から書いたものである。軸に作用するモーメントを  $M_a, M_b$  とすれば定常状態では  $M_a = M_b \cdot r_1 / r_2$  であり、従て

$$D_1 = \frac{M_a}{c_1 r_1}, \quad D_2 = \frac{M_a}{c_2 r_1} \quad (191)$$

なる静力學的関係が出る。  $t = t_1$  に於て  $\xi$  及  $d\xi/dt$  の値が相等しくなるべきであ

る。この関係によつて先づ  $A_2, B_2$  を  $A_1, B_1$  で表し、次に  $t = T$  に於て (190) の第二式の  $\xi - D_1$  及  $d\xi/dt$  の値が第一式の其等の或る倍數  $\varphi$  に等しくなるものとする。

この方程式に前の條件から得た  $A_2, B_2$  を導けば  $A_1, B_1$  に對する方程式が出る。茲に注意すべきは、 $\xi$  に關してのみではなく、一般に  $\theta, \partial\theta/\partial t$  に就ても同様の條件が成立することである。しかし今の計算では正確に合せることができない。このやうにして  $A_1, B_1$  の計算の結果を次に示す。但し  $t_2 = T - t_1$  とする。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, & B_1 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ \Delta &= \varphi^2 - 2\varphi \left[ \cos p_1 t_1 \cos p_2 t_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 + p_2}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \right) \sin p_1 t_1 \sin p_2 t_2 \right] + 1, \\ \Delta_1 &= (D_2 - D_1) \left( \cos p_1 t_1 - \varphi \cos p_2 t_2 + \frac{p_2}{p_1} \sin p_1 t_1 \sin p_2 t_2 - \cos p_1 t_1 \cos p_2 t_2 + \varphi \right), \\ \Delta_2 &= (D_2 - D_1) \left( \sin p_1 t_1 + \varphi \frac{p_2}{p_1} \sin p_2 t_2 - \frac{p_2}{p_1} \cos p_1 t_1 \sin p_2 t_2 - \sin p_1 t_1 \cos p_2 t_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

之によつて見れば  $D_1, D_2$  が零でなければ一般に  $A_1, B_1$  は零でなく、且つ之等は  $\Delta = 0$  のとき非常に大になるものである。このやうな條件は

$$\varphi^2 - 2\varphi \left[ \cos p_1 t_1 \cos p_2 t_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 + p_2}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \right) \sin p_1 t_1 \sin p_2 t_2 \right] + 1 = 0. \quad (193)$$

この式の與へる  $\varphi$  が實數である爲には

$$\left| \cos p_1 t_1 \cos p_2 t_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 + p_2}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \right) \sin p_1 t_1 \sin p_2 t_2 \right| \geq 1. \quad (194)$$

この條件が満足されてをれば  $|\varphi|$  の一つの値が 1 よりも大であるか、又は二つ共丁度 1 に等しいかである。上の不等式の係數に  $p_2 = p_1 + \delta$  と置き、

$$\frac{p_1 + p_2}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} = 2 + \frac{\delta^2}{p_1(p_1 + \delta)}$$

故に若し  $p_1 \sim p_2$  ならば  $\delta$  が小であるから  $\delta^2$  を省略して

$$|\cos(p_1 t + p_2 t_2)| = 1.$$

従て  $p_1 t_1 + p_2 t_2 = 2\mu\pi$  又は  $(2\nu + 1)\pi$  によつて満足する ( $\mu = 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots$ ). この條件は  $pT = 2\mu\pi$  又は  $(2\nu + 1)\pi$  とも書かれる。但し  $p = (p_1 t_1 + p_2 t_2) / T$  とする。このとき  $|\varphi| \sim 1$  である。

完全に  $p_1=p_2$  のときには、 $\Delta=0$  と共に  $D_1=D_2$ ,  $\Delta_1=\Delta_2=0$  となつて、 $A_1, B_1$  は不定となるも之は内部に弾性変化のないときの自由振動である。

一般に  $p_1 \neq p_2$  のときには、 $p_2/p_1, t_2/t_1$  を與へて (194) の不等式を満足する  $p_1 t_1$  (及び  $p_2 t_2$ ) を求める問題の解は、無數に存在するのみでなく各  $t_1$  或る範圍内に連続して無數に存在する。 $p_1 \sim p_2$  のときはこの範圍が非常に狭くなるものである。

序に  $p_1 \neq p_2$  なるとき、前述のやうに  $p_1 t_1 + p_2 t_2 = 2\mu\pi$  又は  $(2\nu+1)\pi$  に取ることが (194) の不等式に適合するかどうかを検して見ると、結局左邊は

$$1 + \frac{\delta^2}{2p_1(p_1+\delta)} \sin^2 p_1 t_1 \quad (>1)$$

となり、 $p_1 t_1 + p_2 t_2 = 2\mu\pi$  又は  $(2\nu+1)\pi$  と取れば問題の範圍内にあることがわかる。

故に二つの異なる弾性に對する振動の速さの平均値  $p$  を見出して之を恰も常數の固有振動の速さと見做せば、その値が  $2\mu\pi/T$  又は  $(2\nu+1)\pi/T$  のとき又はその附近で共振が起るといへる。即ち  $c_1, c_2$  に分けてやることと大して異なる結果が出ない。何れにしても  $p$  が見出されるときは振動の條件を簡単に次のやうに述べることができる。齒の數  $z$  の車が 1 分間に  $n$  回轉すれば、單位ピッチだけ回轉する時間(秒)は  $T=60/nz$  であるから、條件として

$$p = 2\mu\pi \frac{nz}{60} \quad \text{又は} \quad (2\nu+1)\pi \frac{n'z}{60}$$

が出る。但し第二式に對する  $n$  を特に  $n'$  とした。之から  $n, n'$  を求めれば

$$n = \frac{60}{2\mu z} \frac{p}{\pi}, \quad n' = \frac{60}{(2\nu+1)z} \frac{p}{\pi} \quad (195)$$

$p$  が無數に存在し又  $\mu, \nu$  が幾つも取られれば  $n, n'$  は限りなく存在し、しかも各  $n$  の速さは各、危險の領域を有する。即ち二つの車の間の迂りの振動は回轉速度を變ずる際相繼いで起るものである。

以上は小野博士<sup>1)</sup> が發表せる研究の要旨であつて、誤のないやうになるべく原文の再録に近いものとした。詳細は同博士の論文をよく参照して貰ひたい。

1) 小野鑑正 “齒車軸の振動,” 機械學會誌, 35 (1932), 624-628.