第一章　振動の一般理論

1.　振動學の範圍

廣い意味に於て振動と名づけ得るものはかなり多くの事柄を含むものである．機械的振動はもとより電氣や光の振動さへもその範圍に入れ得るものである．稍狹い意味の機械的振動を取つても，工學者が普通考へてゐる部分の外に，音響，水の波動，剛體の復原運動などは物理學的に明かに機械的の振動と稱して差支ないものである．しかし，工學上で振動と謂ふものは或る條件に從ふ機械的の運動を定義してゐるやうに思はれる．即ち餘り明瞭な考方ではないが，固體の運動組織の中の各々の點が空間に對して互に異なる變位をなし，且つ各點が各々一定時の後に原位置に復した上，更に同樣な事を繰返すやうな場合を指定してゐるらしく思はれる．上述の定義は學理上は勿論のこと，實用上でも直ちに同意し兼ねるものである．例へば，一つの剛體が一體として極く小刻みに運動する場合に，工學上でさへも之を振動と名づけることがあるし，又一般の振動に於て各點が運動の後に原位置に歸らぬ場合でも振動の性質を失はぬことがある．故に筆者は振動について餘り判然とした定義をつけるのを態と避けることにした．大體は前述の工學者の定義による場合を論ずる積りであるけれども，場合によつてはこの定義から離れた場合，即ち船や飛行機の動搖なども論ずる考である．但し固體の機械的振動といふことからは，なるべく離れぬやうにしたいと思ふ．純粹の力學上では振動に多少正確な定義をつけ得るが，それは實際問題を取扱ふときに却て複雜となる虞れがあるから斯る嚴密な分け方は取らぬことにした．

次に問題の取扱ひ方は大體に於て力學的の方法を用ひ，又所々實驗的の事實や實驗のやり方などを附加へることにした．從て，振動學の定義上ではかなり漠然としてゐるが，その研究方法は大體に於て純理的立場を守る積りである．振動學は一種の運動力學であるから，物質の慣性が影響することは靜力學的問題と大いに異な

る所である．又力學的の性質上から,振動の諸現象は普通の剛體の振動や音波の場合のそれとかなり共通した所がある．しかし一々具體的に考へると,やはり非常な距たりがある．

振動學は力學がその根元をなす以上,數學が最も重要な道具であることは否むことができない．しかし振動の事實はどこまでも事實であり,且つ實際上の場合には,普通の數學を以てしては到底解析できぬやうな複雜な場合もあるから,數學を離れて諸現象を捉へることの方が却て等閑にし得ない程である．但し比較的簡單な場合に數學や力學で解析して得られた諸定性は,複雜な現象の了解に役立つことも見逃し得ないものである．又曩に定義したやうに振動學は固體の中の各點が互に異なる變位をなす場合が多いといふ關係上から,固體の彈性的の振動が相當重要な部分を占めることも注意を要する次第である．隨て振動を研究するには彈性學上の知識が是非必要であると考へられる．

機械や構造物の振動がそれ等の機能に重大な影響を及ぼすことは論を俟たぬ．又振動が機械や構造物の强度に直接影響することも誰しも知る所であらう．しかしそれよりも一層注意すべきは,應用力學上の諸性質,例へば構造及び素材の安定問題や材料の衝擊,其他繰返し應力の如く,普通は特別に取扱はれてゐることなどにも實は振動の研究そのものが役立つことが多いことである．

尙,地震學などで常に取扱はれる波動の問題は普通の振動と殆ど同じ順序で解析される．それについて筆者の注意したいことは振動そのものが媒體中の波動の結果と見る方が適當と思はれることである．衝擊が振動に關係するといふのはこの波動を考へてのことであつて,單に瞬時的外力による强制振動の意味だけ取つたのでは不完全である．其他,地震觀測に用ひられる地震計は測定の極めて困難な場合の振動測定器であるから,之に必要な固體運動の知識も一般の振動問題に缺くべからざる要素であらう．從て振動と地震學との間にも殆ど不可分の關係がある．

2. 單弦振動 (Simple Harmonic Vibration)

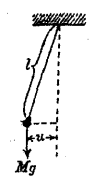
時間について圓函數的に變位其他が變化する振動を單弦振動と稱へる．力學的の意味は後廻しとしてその表し方を示して見ると,

$$u=a\cos(nt+\epsilon) \qquad (1)$$

の如く置くことができる．この式は調和振動の場合の變位 u を時間 t の函數として與へたものであつて, a, n, ϵ が恒數でさへあれば,振動が圓函數的に繰返されることを意味する．而してこの a は當然に振動の振幅 (amplitude) 卽ち變位の極限値を表し, ϵ は振動の初位相 (initial phase) を示す．換言すれば $t=0$ のときの初變位が $a\cos\epsilon$ といふことになる．又 $2\pi/n$ が振動の週期 (period) を與へる．つまり時間が $2\pi/n$ だけ經過する每に振動の同じ向きの同じ變位が現はれることを示す．しかし振動の問題では週期の代りに單位時間內に繰返す振動數 (frequency) を取る方が便利なことがある．その場合には當然 $n/2\pi$ を以て振動數と置けばよい．尙 n のことを circular frequency といつてゐる．

單弦振動を幾何學的に簡單に示すには半徑 a なる一つの圓弧を想像して見る．今一つの動點がその圓周上を一定の角速度 n を以て運動するとき,その動點から圓の一つの定まつた直徑上に垂線を下すとすれば,その垂線の足はこの直徑上を繰返しの運動を行ふ．この運動が u なる單弦振動を表すことになるのである．而して $t=0$ のときに,圓周上の動點を圓の中心と結ぶ直線が上述の直徑となす角が卽ち ϵ といふ事になるから, ϵ のことを別に位相角 (phase angle), 又は單に位相 (phase) ともいふ．しかし一般的には $nt+\epsilon$ のことを或る時間に於ける位相 (phase) といふ．

上述の單弦振動は一寸考へると餘りに簡單過ぎる運動のやうに思はれるが,實際に力學的の種々の問題を考へて見ると,この振動に歸着する場合が相當に多い．この問題の一例を取つて見るに,長さ l なる絲の上端が固定され,下端に M なる質量の重錘を附け,この重錘を水平の方向に振らしたとする．絲の方向が鉛直線の方向から餘り離れぬ間は,絲の張力は大體に於て Mg に等しい． g は重力の加速度を示す．上述の小變位の運動の範圍內に於て重錘の平衡の位置からの水平の動きを u とすれば,重錘の運動方程式として



第 1 圖

$$M\frac{d^2u}{dt^2}=-Mg\frac{u}{l} \qquad (2)$$

が得られる. (2)に於て

$$n^2=\frac{g}{l} \tag{3}$$

と置けば, (2) は

$$\frac{d^2u}{dt^2}+n^2u=0 \tag{4}$$

の形を取る. この式の解は

$$u=A\cos nt+B\sin nt \tag{5}$$

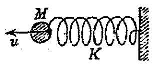
となる. A, Bは任意の常數とする. (5)に於て

$$A=a\cos\epsilon, \quad B=-a\sin\epsilon \tag{6}$$

と書けば,式 (5) は

$$u=a\cos(nt+\epsilon) \tag{7}$$

となる. 即ち前述の單弦振動の形となつた譯である. 即ち重錘の水平的位置が時間について調和振動をすることになる. 又 n は $\sqrt{(g/l)}$ を意味してゐるから一定の値を取り,隨て振子の運動は絲の角變位が小なる間は a の如何に拘らず一定の週期を有することになる.



第 2 圖

更に一例を考へる. 完全な彈性を有するばねの一端に M なる質量の重錘があり,ばねが單位の長さだけ伸び縮みするとき K なる彈性抵抗が働くとする. 時間 t に於ける重錘の平衡の位置からの伸びを u とすれば,ばねは Ku なる張力を以て重錘を平衡の位置の方へ引張つてゐることが明かであるから

$$M\frac{d^2u}{dt^2}=-Ku \tag{8}$$

なる運動方程式が成立つ. $n^2=K/M$ と置けば (8) は (4)の型式を取り, (5) 又は (7) の如き單弦振動の解を與へる. この場合にも勿論一定の週期を保ち,その値は

$$\frac{2\pi}{n}=2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \tag{9}$$

によつて與へられる. この場合に週期は二つの量K及Mによつて決定される. このKのことを一般的の彈性,或は安定度 (degree of stability), ときには安定係數

(coefficient of stability) と稱し, Mのことを慣性係數 (coefficient of inertia) などといふ. 即ちKが大なれば大なる程週期が短くなり,又 Mが大になる程週期が長くなる. Kが大きくなることは結局原位置に復する力の大なることを意味するから, Kのことを時には stiffness と呼ぶ.

單弦振動のみに限らず振動の一般的理論に關しては Routh[1], Rayleigh[2], Whittaker[3], Lamb[4][5] などの教科書が非常に參考になる.

3. 單弦振動の合成 (Superposition of Simple Harmonic Vibrations)

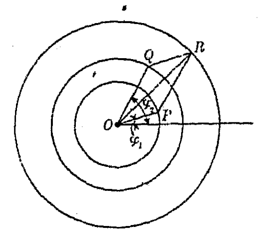
變位が同じ直線上に起る種々の單弦振動はそのまゝ加へ合せても何等差支なく,その組合つたものが或る振動を表すことになる. 今,簡單のために二つの單弦振動が組合ふ場合を考へて見ることにする. その各々は

$$u_1=a_1\cos(n_1t+\epsilon_1), \qquad u_2=a_2\cos(n_2t+\epsilon_2) \tag{10}$$

として,その和

$$u=u_1+u_2 \tag{11}$$

を幾何學的に表すには,右圖に於て OP, OQ が一つの直徑上に投射する長さがそれぞれ u_1, u_2 を示すことになるから, OP, OQ のヴェクトル和 OR が上述の直徑上に投射する長さを以てuとすればよい. 之の理由はu_1, u_2を與へる餘弦函數の性質を見れば直ちに了解できる. 同樣な幾何學的の方法によつて多くの單弦振動を組合せることができる.



第 3 圖

こゝに注意すべきことは,組合された振動は最早一般には單弦振動を與へぬといふことである. たゞ之を分解すれば單弦振動の集まりになるだけである. しかし組合される振動の各々がすべて同じ週期を持つ場合には合成振動も亦單弦振動と

---

1) E. J. Routh, *The Advanced Part of Dynamics of a System of Rigid Bodies* (London, 1905).
2) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, 2nd ed. rev. (London, 1926), 19–169.
3) E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 2nd ed. (Cambridge, 1917).
4) H. Lamb, *Higher Mechanics* (Cambridge, 1920), 177–248.
5) H. Lamb, *Dynamical Theory of Sound* (London, 1925), 1–58.

なることである.

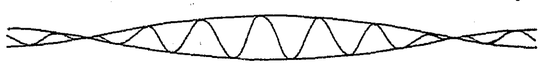
週期の等しくない二つの單弦振動が合成される場合を考へて見る. 即ち

$$u=a_1\cos(n_1t+\epsilon_1)+a_2\cos(n_2t+\epsilon_2) \tag{12}$$

に於て n_1 と n_2 とが非常に近いが全く等しくはないときは,所謂唸り(beats)の現象を生ずる. 即ち第3圖に於て POQ なる角度は, P なり Q なりが圓周上を一回轉する間には大して變化がないが,幾度も回轉する間にその角度は次第に變化する. 而してその間に振動の振幅は $a_1\pm a_2$ の間を消長する譯である. この振幅の消長の週期は $2\pi/(n_1-n_2)$ なることも明かである. 上述の振幅の變化は a_1 と a_2 とが等しいときに最も甚しく,零と $2a\,(=2a_1=2a_2)$ との間を消長する譯である. そのとき

$$\begin{aligned} u&=a\cos(n_1t+\epsilon_1)+a\cos(n_2t+\epsilon_2)\\ &=2a\cos\left\{\tfrac{1}{2}(n_1-n_2)t+\tfrac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2)\right\}\cos\left\{\tfrac{1}{2}(n_1+n_2)t+\tfrac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2)\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

即ち $2\pi/\frac{1}{2}(n_1+n_2)$ なる週期を持つ殆ど調和型波動の振幅が $\pi/\frac{1}{2}(n_1-n_2)$ の週期を以て零と $2a$ との間を消長する.



第 4 圖

週期及び振幅が何れも等しい無數の單弦振動を組合せたときの合成された振幅の尤もらしい (probable) 大さについては Lord Rayleigh[1] の研究がある.

又,互に直角な二軸の上に各々一つの點が互に異なる週期(特に簡單な比を有する)と位相とを以て單弦運動をなすときに,この二點を各軸上の座標とするやうな平面内の一點の軌跡は種々の複雜なものとなるものである. しかし週期的に繰返される軌跡である. この軌跡を Lissajous figure[2] といふ.

4. Fourier の定理

振動の問題も他の場合と同じく Fourier の定理を適用する場合が多い. 今, u

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, § 42 a.

2) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, § 33.

が t の或る函數である場合に, Fourier 級數適用の條件,即ち Dirichlet 等の條件が滿足されるならば

$$u=A_0+\sum_{s=1}^{\infty}A_s\cos\frac{2s\pi t}{\tau}+\sum_{s=1}^{\infty}B_s\sin\frac{2s\pi t}{\tau} \tag{14}$$

が成立する. こゝに u は $t=0$ から $t=\tau$ 迄の間の週期を有するものであつて,これを分析することが目的である. 又 A_0, A_s, B_s 等は次の如くして決定される:

$$\left.\begin{aligned} A_0&=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}u\,dt,\\ A_s&=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}u\cos\frac{2s\pi t}{\tau}\,dt,\\ B_s&=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}u\sin\frac{2s\pi t}{\tau}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

A_0 は τ なる週期中の u の平均値を示す譯である. 或は又

$$u=A_0+\sum_{s=1}^{\infty}C_s\sin\left(\frac{2s\pi t}{\tau}+\epsilon_s\right) \tag{16}$$

の如く書くこともできる. そのときは式 (15) と比較して

$$C_s=\sqrt{A_s^2+B_s^2},\qquad \tan\epsilon_s=\frac{B_s}{A_s} \tag{17}$$

なる關係がある.

Fourier 級數は振動の時間的變化のみでなく座標的の分布に對する分析にも當然用ひられる. しかし Fourier 分析について注意すべきは Dirichlet の數學的條件[1] のみでなく,力學的に考へても何等の準備もなく適用されるものではない. 例へば振動を與へる運動方程式の代表的解が圓函數にならぬやうな場合に,複雜な變位等を無理に Fourier 級數のみで表さうとしてもそれはどうしても不正確に陷ることを免れぬ. しかし實際問題では,單に定理にのみこだはつては問題の解決ができぬから,屢々定理を冒すことがある.

1) Riemann-Weber, *Die Differentialgleichungen der Physik*, 1 (Braunschweig, 1925), 157–169.

5. 減衰自由振動 (Damped Free Vibrations)

力學的組織に於て摩擦の力を看過することは單に理想上の事柄に過ぎぬ．實際問題では自由振動の勢力は次第に外部の媒體中へ逃げ去つたり,又は熱などの形で自然に消滅して行くものである．之が振動を減衰させる抵抗を與へることになるのである．極めて簡單な場合には斯る抵抗は振動の速度に比例するものと見做すのを普通とする．今,抵抗の係數 (coefficient of resistance) を R と置けば, (8) の如き振動の式は次式の如く改められる:

$$M\frac{d^2u}{dt^2}=-Ku-R\frac{du}{dt} \tag{18}$$

若し

$$K/M=n^2, \qquad R/M=2k \tag{19}$$

と置けば,式 (18) は

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2k\frac{du}{dt}+n^2u=0 \tag{20}$$

と書くことができる．この微分方程式の解は

i) $k<n$ のときは直ちに

$$u=Ae^{-kt}\cos(n't+\epsilon) \tag{21}$$

となる,但し

$$n'^2=n^2-k^2. \tag{22}$$

式 (21) に於て A, ϵ は任意常數とする．(21) は修正された調和的振動を表し,時間が零から t に經過する間に其振幅が A から Ae^{-kt} に減少するものである．從て振幅は $1/k$ なる時間の間に $1/e$ の割合に減衰する筈であるが,この $1/k$ なる時間を減衰率 (modulus of decay) と呼ぶ．このやうにして振動は調和振動的の運動を行ひつゝ,遂には理論的に見た無窮時の後に $u=0$ なる零變位の所へ戻る．故に $k<n$ なる範圍内に於ては振動が勿論安定 (stable) であるといふことができる．而してこの振動には必ず

$$\frac{2\pi}{n'}\left(=2\pi/\sqrt{n^2-k^2}\right) \tag{23}$$

の如き週期が存在するから, $k<n$ の如き場合に之を週期性振動 (periodic vibration) といふ.

ii) $k>n$ のときは (20) の解として

$$u=Ae^{-(k+\sqrt{k^2-n^2})t}+Be^{-(k-\sqrt{k^2-n^2})t} \tag{24}$$

と書くことができる．A, B は任意常數とする．e の指數は何れも負數であるから, u なる變位は漸近的に靜止の位置へ復するけれども繰返し的の振動をなさぬ．卽ちこの運動には週期がないから之を無週期性振動 (aperiodic vibration) と名づける．又運動は結局零の位置へ戻るから振動は矢張り安定な譯である．極く粘質性流體中の振子の振動は斯の如き振動性を持つ.

iii) $k=n$ の場合には (20) の解は容易に

$$u=(A+Bt)e^{-nt} \tag{25}$$

となり,振動は無週期性で安定である.

iv) n^2 が正數でありさへすれば振動は必ず安定なことは上述の通りであるが,若し n^2 が負數換言すれば n が虚數のときは振動が不安定となる．卽ち式 (24) が式 (20) の一般的の解であることは容易に判る所であるから,式 (24) に於て n^2 を負數とすれば,式 (24) の右邊は二項共に實數であり,其第二番目の項は e について正の指數を持つこととなる．その爲に振動は時と共に增大して $u=0$ の位置へは遂に戻らぬものである．隨て振動が不安定なことが明瞭となるであらう．第 2 節に於て K のことを安定係數と名づけた意味は上述の事柄に因るのである.

6. 强制振動 (Forced Vibrations)

第 2 節や第 5 節の問題では,振動體に時間的に變化のある外力が働かぬ場合を考へたのであつたが,若し外力が振動體に

$$F\cos pt \tag{26}$$

の如き週期性を以て働くときには,式 (8) の代りに次の如き式が成立つものである．但し摩擦力のない場合を考へる.

$$M\frac{d^2u}{dt^2}=-Ku+F\cos pt. \tag{27}$$

即ち外力は F なる力の振幅及び $2\pi/p$ なる週期の時間的調和函數を以て變化することを意味する．今

$$K/M=n^2,\qquad F/M=f \tag{28}$$

と置けば,式 (27) は

$$\frac{d^2u}{dt^2}+n^2u=f\cos pt \tag{29}$$

となるから,その一般解 (general solution) は直ちに

$$u=A\cos nt+B\sin nt+\frac{f}{n^2-p^2}\cos pt \tag{30}$$

と書くことができる．若し初動の狀態の二個の條件,例へば $t=0$ のとき u 及び du/dt の如きものが與へられてをれば, A, B は定まつた形となり, u の式の中には任意常數を含まぬこととなる．今假りに適當な調節によつて A, B を含む項を追ひ出したとすれば

$$u=\frac{f}{n^2-p^2}\cos pt. \tag{31}$$

p が極めて小なるときは $u=f\cos pt/n^2$ で表され,この u を $\bar{u}$ で表して平衡値 (equilibrium value) といふ．隨て u は一般に下式で示される:

$$u=\frac{\bar{u}}{1-p^2/n^2}. \tag{32}$$

摩擦力を考に入れぬときの強制振動の解からわかる性質の重要な部分が,摩擦を入れると非常に違つてくるから,こゝで餘り委しく說明しても無益になる虞れがある．しかし極く簡單な點だけは注意しておくことにする．

外力の週期 $2\pi/p$ が自由振動の週期 $2\pi/n$ に殆ど等しいときは,式 (30) の最後の項が非常に大きくなる．u が無限に大きくなることは種々の意味から成立し難い事情にはあるが,しかし p と n とがかなり近いときには必ず振幅が特別に大きくなる傾向だけは充分に存在してゐる．

p が n に全く等しいときは (30) の式を其儘採用する事は無意味である．即ち, $p\to n$ のときの初動の狀態が $t=0$; $u=0$, $\dfrac{du}{dt}=0$ で示される場合には,式 (30) を變

形して下の如く置けば意味を有するものとなる:

$$u=\frac{f}{p+n}\,\frac{\sin\dfrac{p-n}{2}t}{\dfrac{p-n}{2}}\sin\frac{p+n}{2}t. \tag{33}$$

こゝに於て, p が n に近いとするときは

$$u=\frac{f}{2n}t\sin nt \tag{34}$$

を得．即ち t が增大するとともに u は益々大となる．しかしこの型の式も, t の比較的初めの部分に於てのみ成立することが式 (33) 其他からわかる．一般に外力の週期と固有振動の週期とが一致するときに振幅が大となることは動かせない所である．斯の如き現象を共振 (resonance) と名づける．又,固有振動週期と外力の週期との一致する事柄を同調 (synchronism) 或は同期性といふ．

7. 減衰系物體の強制振動

強制振動の問題を論ずるには,勢力供給の關係や振動の位相問題等の上から,どうしても減衰性 (dissipation) の影響を看過する譯に行かぬ．減衰性の殆ど働かぬやうな場合でも初めに減衰の係數を假想しておいて後に之を零に持つて行く方が確かな方法であるといへる．式 (18) で表されるやうな減衰振動の方程式に時間的に變化のある外力の影響を加へて書き表して見ると,

$$M\frac{d^2u}{dt^2}=-Ku-R\frac{du}{dt}+F\cos pt \tag{35}$$

と置くことができる．今

$$K/M=n^2,\qquad R/M=2k,\qquad F/M=f \tag{36}$$

と書けば,

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2k\frac{du}{dt}+n^2u=f\cos pt. \tag{37}$$

この方程式の一般解を作つて見ると次の如くなる:

$$u=Ae^{-kt}\cos(\sqrt{n^2-k^2}\,t+\epsilon_1)+\frac{f\sin\epsilon_2}{2pk}\cos(pt-\epsilon_2), \tag{38}$$

但し A, ϵ_1 は任意常數, ϵ_2 は次式で與へられる:

$$\tan\epsilon_2=\frac{2pk}{n^2-p^2}. \tag{39}$$

初動の條件が與へられてをれば A, ϵ_1 は決定的のものである.

週期的の外力が絶えず働くときは式(38)に於てその右邊の第一の項は時間と共に指數函數的に減衰する. 隨て遂にその右邊の第二番目の項のみが殘り,この項は式の形でわかるやうに時間と共に減衰しない. 即ち式(38)の右邊の第二の項のみを取り,且つ式(39)によつて書き直せば下の如くなる:

$$u=\frac{f}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4p^2k^2}}\cos\left\{pt-\tan^{-1}\frac{2pk}{n^2-p^2}\right\}. \tag{40}$$

若し $2k^2<n^2$ でさへあれば,

$$p=n\sqrt{1-\frac{2k^2}{n^2}} \tag{41}$$

のときに u は最も大なる値を取り,そのときの振幅は

$$\frac{f}{2kn}\Big/\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}} \tag{42}$$

の形となる. 摩擦の力が比較的に小なる場合には k^2/n^2 は容易に看過することができる. 即ち振幅は外力の週期が固有振動の週期に等しいときに極めて大となり,共振の現象を起す. 第6節の式(34)は初動の條件が與へられてその直ぐ後の振幅を表してゐるが,式(42)は寧ろ時間が經過した後の定常の狀態を意味してゐる.

次に $2k^2>n^2$ の時は, p を小にすればする程振幅が增大し,遂にはその値が f/n^2 に達する. 即ち平衡値の場合に相當するのである.

強制振動に於て極大の變位は極大の外力よりも次の位相 ϵ_2 だけ遲れて起ることが式(40)によつて知られる:

$$\tan\epsilon_2=\frac{2pk}{n^2-p^2}. \tag{43}$$

若し外力の週期が摩擦力のない自由振動の週期よりも長いときは,この遲れは0°と90°との間にあり,逆に外力の週期が上述の固有振動週期よりも短いときは,遲れが

90° と 180° との間にある. 而して摩擦の係數 k が極めて小さいときは前者の位相は殆ど 0° であつて外力と振動體とが同じ位相となり,後者の場合には 180° の違ひがある. しかし共振の場合には一般に振動體の位相の遲れが略 90° となる.

尙,外力の振動週期が極端に短いときは,式(40)から

$$u=-\frac{f}{p^2}\cos pt \tag{44}$$

と置くことができ,又逆に外力の振動週期が極端に長いときは

$$u=\frac{f}{n^2}\cos pt \tag{45}$$

と書くことができる.

一つの振動體に別々の週期を有する數多の外力が働くときは,若し振動の方向が一定であればそれ等を加へ合せることができる. 外力が

$$\sum_s f_s\cos(p_st+\alpha_s) \tag{46}$$

の如きもので與へられるとすれば,式(40)に α_s なる外力の位相の修正をして,

$$u=\sum_s\frac{f_s}{\sqrt{(n^2-p_s^2)^2+4p_s^2k_s^2}}\cos\left(p_st-\alpha_s-\tan^{-1}\frac{2p_sk}{n^2-p_s^2}\right) \tag{47}$$

なる變位の式を書くことができる. しかして k が小なるときに,この中で $n\approx p_s$ になるやうな部分があれば振動體に大なる振幅を與へることとなる. 即ち振動體は $2\pi/p_s$ なる週期を持つ外力に共振した譯である. この現象を選擇共振 (selective resonance) といふ.

8. 簡單な振動の一般座標による解析

多くの自由度を有する振動の研究を行ふ前に一般座標 (generalised coordinates) を用ひて簡單な問題を解く方法を出して見ようと思ふ.

或る運動組織に於て一つの變化する要素,即ち一つの座標 q を決定すればその組織全體の運動が決定的となる場合に,此組織は一つの自由度 (one degree of freedom) をもつといふ. 例へば多くの質點があつてこの組織が一つの q を變化することによつて運動が規定されるとする. 今,一つの質點の質量を m を以て代表することとし,一般座標に δq だけの變化を與へたときに, m はそれ自身の運動方向に δs

だけ動きがあるとしよう. δs は q によつて決定的のものとなるから, $\delta s=\alpha\delta q$ の如き關係があつてよい譯である. α は各質點について夫々異なる係數であり,又 q の或る狀態に關係がある. 而して各質點の速度は δs を δt で割ることによつて與へられるから, $v=\alpha dq/dt$ 即ち $v=\alpha\dot{q}$ と書くことができる. そこで組織全體の運動勢力は容易に

$$T=\frac{1}{2}\sum mv^2=\frac{1}{2}a\dot{q}^2 \tag{48}$$

で示されるのである. 但し

$$a=\sum(m\alpha^2). \tag{49}$$

この $\sum$ はすべての質點に及ぼすものであり,一般に a は q の函數となる. 而して a を q の或る特定狀態に於ける慣性係數 (coefficient of inertia) と名づける.

次にこの組織のポテンシャル勢力を V と置き, V の中で運動の爲に變化する部分だけ取つて書けば,

$$V=\frac{1}{2}cq^2 \tag{50}$$

の如くすることができる. c は正數であつて,之を安定係數 (coefficient of stability) といふ. 勢力保持の場合には (48), (50) から

$$\frac{1}{2}a\dot{q}^2+V=\text{常數}. \tag{51}$$

之を t で微分し,更に $\dot{q}$ で割れば,

$$a\ddot{q}+\frac{1}{2}\frac{da}{dq}\dot{q}^2+cq=0. \tag{52}$$

a が q の函數でない場合には,直ちに

$$a\ddot{q}+cq=0. \tag{53}$$

即ち單弦振動の場合と同型の方程式が得られた譯である. しかしこの同型となつたことには充分な理由があるのであつて,式 (48) 及 (50) に示すやうに T 及 V の形を適當に取つた爲である. T はともかくとして V をもつと異なる形に置くときは (53) のやうな式を得ることができない.

勢力保持の原則は振動の場合にも勿論行はれる. 式 (53) の運動方程式で示さ

れるやうな振動は

$$q=A\cos(nt+\epsilon) \tag{54}$$

及 $n^2=c/a$ で與へられることは既に說明してあるが,この振動に相當する運動勢力及びポテンシャル勢力を書表せば,

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}a\dot{q}^2=\frac{1}{2}n^2aA^2\sin^2(nt+\epsilon),\\ V&=\frac{1}{2}cq^2=\frac{1}{2}cA^2\cos^2(nt+\epsilon). \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

$n^2=c/a$ に注意して兩勢力の和を作れば,

$$T+V=\frac{1}{2}n^2aA^2=\frac{1}{2}cA^2. \tag{56}$$

これ以外に摩擦力などは考へてをらぬから,これで勢力保持の關係が確められた譯である. 次に $\sin^2(nt+\epsilon)$ の平均値と $\cos^2(nt+\epsilon)$ の平均値とは等しいのであるから, (55), (56) から全勢力の半分宛が運動勢力とポテンシャル勢力とになることも容易にわかる.

實際上の問題に上述の方法を適用するには a と c の値を算出することが主要な事柄となる. c の計算は一般に困難を伴ふが, a の方は比較的容易に出せるものである. 例へば,長さ l なるばねの一端に M なる質量を附するとき,この組織が自由振動をなす爲の運動勢力は

$$\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}M\dot{q}^2+\frac{1}{2}\int_0^l (z/l)^2\dot{q}^2\rho\,dz\\ &=\frac{1}{2}\left(M+\frac{1}{3}\rho l\right)\dot{q}^2 \end{aligned} \tag{57}$$

によつて示される. ρ はばねの單位長さの質量, z はばねを吊す點からばね上の或る點までの距離, q は M なる質量の變位を表す. この場合,各點の運動も q のみによつて示すことができるから,一つの自由度を持つ振動であることも容易にわかる. さて式 (56) の所の說明から,この組織のポテンシャル勢力の平均値は式 (57) の運動勢力の平均値と同値を有することが明かであるが,その値を安定係數の方から算出することは必しも容易とは言はれない.

9. 多くの自由度を有する一般座標及び速度 (Generalised Coordinates and Velocities of a Multiple System)[1) 2)]

前節では一つの自由度を有する場合の一般座標を用ひて勢力の式を出す方法を示して置いたが,こゝでは多くの自由度がある場合の勢力式其他を説明して見ようと思ふ．前節のやうな方法を押進める方が寧ろ望ましいのではあるけれども,それには非常な困難がある爲,こゝでは三次元の空間に存在する質點や剛體の集まりを直交固定座標で考へておいて,その狀態を更に一般座標の形に書き直す方法を取ることにした．

さて或る組織に n 個の自由度が存在するとき,この組織の一般座標は n 個だけあり,この n 個の座標が決定できれば組織の狀態卽ちその configuration が定まる筈である．一般座標の取り方は無限にあるが,その座標の數は自由度の數 n だけしかない．これ等の座標を $q_1, q_2, \ldots, q_n$ としておく．

今或る一つの質點の質量を m とし,その直角固定座標を x, y, z とすれば, x, y, z は一般座標 q の函數と見て差支がない．勿論,他の質點の x, y, z についてはｑの別の函數となる．上述の事柄から下の式を書くことができる：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n,\\ \dot{y}&=\frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial y}{\partial q_n}\dot{q}_n,\\ \dot{z}&=\frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial y}{\partial q}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial z}{\partial q_n}\dot{q}_n.\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

卽ち, configuration 及び一般座標の時間的變化の割合卽ち $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ がわかつてをれば,各質點の速度が決定される．尙, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ なる割合を速度の一般成分 (generalised components of velocity) と名づける．このやうにして見ると $q_1, q_2, \ldots, q_n$ は n-dimensions の空間に於ける一つの點の座標と考へてよい譯である．從

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Chap. 4.

2) E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 2nd ed. (Cambridge, 1917), Chap. 2.

て $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ は n 本の軸に平行なる分速度と考へてよい譯である．之等を出す爲に x, y, z を用ひたのは單に便宜上のことに過ぎないのである．

組織全體の質點についての運動勢力を書いて見ると

$$2T=\sum m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2+\ldots+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\ldots \tag{59}$$

となる．但し

$$\left.\begin{aligned}a_{rr}&=\sum m\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial q_r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)^2\right\},\\ a_{rs}&=\sum m\left\{\frac{\partial x}{\partial q_r}\frac{\partial x}{\partial q_s}+\frac{\partial y}{\partial q_r}\frac{\partial y}{\partial q_s}+\frac{\partial z}{\partial q_r}\frac{\partial z}{\partial q_s}\right\}=a_{sr}.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

卽ち T は一般速度の二次の同次式となる．又 a_{rr}, a_{rs} をこの組織の慣性係數 (coefficient of inertia) といひ,一般に定數でなく,座標 q_r の函數である．隨て configuration が變れば慣性係數も當然變るものである． a_{rr}, a_{rs} は或る代數的條件に從ふ．それは (59) の式が零以外のすべての速度に對して正の値を持たねばならぬ爲である．その爲には次の式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{61}$$

を作り,この行列式に於て第一横行と第一縱行を除いた行列式を Δ_{n-1} で表す．次に斯くして得られた行列式に於て更に第一横行と第一縱行を除いて得られる行列式を Δ_{n-2} とする．同樣にして $\Delta_{n-3}, \ldots, \Delta_1$ が作られる．こゝで前述の式 (59) が正になる爲には

$$\Delta_n,\ \Delta_{n-1},\ \ldots,\ \Delta_2,\ \Delta_1$$

の各々がすべて正の符號を持つ必要がある．

尙, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ なる n 個の座標が全く獨立になり得る場合,卽ち n 個の自由度があるときに,これ等の座標組織を holonomic system といふ．之に反して n 個の自由度に對して m 個の拘束があるときに之等 n 個の座標組織は non-holonomic system であるといふ. 即ち $(n-m)$ 個の自由度しかないのである. 一般に組織の座標數と自由度の等しいものが holonomic system であり,然らざる場合が non-holonomic system である.

10. 運動量及び瞬力の一般成分 (Generalised Components of Momentum and Impulse)[1]

一つの質點 m に瞬力 (X', Y', Z') が働くとき,運動量保持の法則から

$$m\dot{x}=X', \qquad m\dot{y}=Y', \qquad m\dot{z}=Z' \tag{62}$$

なる方程式を書くことができる. この各々に夫々 $\partial x/\partial q_r$, $\partial y/\partial q_r$, $\partial z/\partial q_r$ を乘じて加へ合せ,然る後すべての質量についての總計を取れば

$$p_r=Q_r' \tag{63}$$

となる. 但し

$$p_r=\sum m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_r}+\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_r}\right), \tag{64}$$

$$Q_r'=\sum\left(X'\frac{\partial x}{\partial q_r}+Y'\frac{\partial y}{\partial q_r}+Z'\frac{\partial z}{\partial q_r}\right). \tag{65}$$

この p_r を運動量の一般成分と稱し, Q_r' を瞬力の一般成分と名づける.

(64) の中へ式 (60) を代入すれば

$$p_r=a_{1r}\dot{q}_1+a_{2r}\dot{q}_2+\ldots+a_{nr}\dot{q}_n \tag{66}$$

となり,次に式 (59) によつて次式が得られる:

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \tag{67}$$

又, T は式 (59) に示す如く $\dot{q}_r$ について均等二次函數であるから,容易に

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}+\dot{q}_2\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}+\ldots+\dot{q}_n\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right)$$

と書ける. 隨て (67) によつて

$$T=\tfrac{1}{2}(p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2+\ldots+p_n\dot{q}_n). \tag{68}$$

1) H. Lamb, *Higher Mechanics* (Cambridge, 1920), § 73.

11. 可反關係 (Reciprocal Relations)[1)2)]

式 (66) は,一定の configuration $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ に於ける運動の任意の二つの狀態の間に或る可反關係を與へる. 即ち一つの狀態に於ける速度と運動量をそれぞれ $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ 及 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とし,他の狀態に於けるそれ等を $\dot{q}_1', \dot{q}_2', \ldots, \dot{q}_n'$ 及 $p_1', p_2', \ldots, p_n'$ とすれば

$$p_1\dot{q}_1'+p_2\dot{q}_2'+\ldots+p_n\dot{q}_n'=p_1'\dot{q}_1+p_2'\dot{q}_2+\ldots+p_n'\dot{q}_n \tag{69}$$

の關係があるといふことである. 何となれば,式 (66) によつて (69) の各邊は何れも

$$a_{11}\dot{q}_1\dot{q}_1'+a_{22}\dot{q}_2\dot{q}_2'+\ldots+a_{12}(\dot{q}_1\dot{q}_2'+\dot{q}_1'\dot{q}_2)+\ldots \tag{70}$$

となるからである. こゝで特別に q_r, q_s なる座標に相當する運動量の外の運動量はすべてないものとすれば

$$p_r\dot{q}_r'+p_s\dot{q}_s'=p_r'\dot{q}_r+p_s'\dot{q}_s. \tag{71}$$

更に $p_s=0$, $p_r'=0$ であるとすれば

$$\frac{\dot{q}_s}{p_r}=\frac{\dot{q}_r'}{p_s'} \tag{72}$$

なる關係を得ることができる.

式 (69) が廣い意味の可反關係であるが,それをわかり易く解釋する爲に式 (72) について考へて見る. 今 q_r, q_s が同種のものであると假定する. 例へば兩方共に線上の位置であつたり,又は兩方共に角を示すやうなものであるとする. 然るとき,本定理によつて, r 型の瞬力によつて s 型のものに與へられる速度は, s 型の瞬力によつて r 型に與へられる速度に等しいことを示す. もつとわかり易い一例を取るに,或る結合を有する A, B なる二つの球體があり,各々の中心は各一定の線上に自由に動ける様な結合になつてゐるとき, A なる球が或る瞬力により一定の速度で動き出すとすれば, B の球も自然に動き出す. そこで定理によれば, B の方へ前と同樣な瞬力を與へても, A の自然に動き出す速度が前回の B のものに等しい事を示す.

12. Bertrand 及 Kelvin の定理[3)4)]

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, § 77.
2) H. Lamb, *Higher Mechanics* (Cambridge, 1920), § 74.
3) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, § 79.
4) H. Lamb, 前揭.

前節と同様な表し方によることとして,式 (68) を考へて見ると

$$T-T'=\frac{1}{2}\sum_r(p_r\dot{q}_r-p_r'\dot{q}_r')$$

$$=\frac{1}{2}\sum_r(p_r-p_r')(\dot{q}_r+\dot{q}_r')-\frac{1}{2}\sum_r(p_r\dot{q}_r'-p_r'\dot{q}_r). \qquad (73)$$

然るに前節の可反定理によつて

$$\sum_r(p_r\dot{q}_r'-p_r'\dot{q}_r)=0. \qquad (74)$$

故に

$$T-T'=\frac{1}{2}\sum_r(p_r-p_r')(\dot{q}_r+\dot{q}_r'). \qquad (75)$$

同様な說明を用ひることによつて,又

$$T-T'=\frac{1}{2}\sum_r(p_r+p_r')(\dot{q}_r-\dot{q}_r'). \qquad (76)$$

これ等から二つの重要な定理,即ち或る組織が一定の瞬力を受け又は一定の速度を與へられて運動をする場合の運動勢力が,その組織の一部に拘束があるかどうかによつて違ふといふ理論がわかるのである.

先づ或る型の瞬力がこの組織に働くこととする. 然るときは拘束の影響は,瞬力の働かぬ殘餘の型の座標を適當に移動して,その一部分の座標を消滅せしめることによつて代表させることができる. さて式 (75) から

$$T-T'=\frac{1}{2}\sum_r(p_r-p_r')(\dot{q}_r+\dot{q}_r')$$

$$=\frac{1}{2}\sum_r(p_r-p_r')(\dot{q}_r-\dot{q}_r')+\sum_r(p_r-p_r')\dot{q}_r'. \qquad (77)$$

こゝで(′)を附したものが拘束運動に相當し,然らざるものは拘束のない自由な運動とすれば,前述の如き假定から,瞬力の働く座標に對しては $p_r=p_r'$ と置けるし,又瞬力の働かぬ殘餘の型に對しては $\dot{q}_r'$ が零となるから,式 (77) は

$$T-T'=\frac{1}{2}\sum_r(p_r-p_r')(\dot{q}_r-\dot{q}_r') \qquad (78)$$

となる. 右邊は $\dot{q}_r-\dot{q}_r'$ なる速度の場合の運動勢力の式になつて,必ず正の符號を持つ. 即ち或る瞬力によつて或る組織が得る勢力はその組織に拘束があるときのそれよりも次の値だけ大きいことがわかる. 即ち其値とは組織が自由なときと拘束のあるときとの差に相當する運動の勢力の値である. この定理は Bertrand によつて初めて完全に提出されたものである.

次にこの組織の或る型の成分に一定の速度が與へられる時を考へて見よう. (76) によつて

$$T-T'=\frac{1}{2}\sum_r(p_r+p_r')(\dot{q}_r-\dot{q}_r').$$

$$=\sum_r p_r(\dot{q}_r-\dot{q}_r')-\frac{1}{2}\sum_r(p_r-p_r')(\dot{q}_r-\dot{q}_r'). \qquad (79)$$

速度の與へられた型に對しては $\dot{q}_r=\dot{q}_r'$ であるし,殘餘の型に對しては p_r が消えてなくなる. 隨て

$$T'-T=\frac{1}{2}\sum_r(p_r-p_r')(\dot{q}_r-\dot{q}_r'). \qquad (80)$$

即ち或る組織が或る速度で運動を起す場合の勢力は,その組織に拘束があるときのそれに比較して或る値だけ小さい. 其値とは其組織が自由なときと拘束のあるときとの差に相當する運動勢力の値のことである. この定理は Kelvin が 1863 年に發表したものである.

以上の定理の證明法はまだ他にもあるが,こゝでは省く. 本節の定理は種々の場合に役立つ. 例へば一つの組織が或る瞬力や或る速度を與へられて運動を起すとき,その組織が得る勢力の極限値を見出す便宜などである.

13. Lagrange の運動方程式[1) 2)]

一般座標による運動方程式を出すには,前の如く各質點の運動方程式から出發する事が便利である. 直角固定座標を用ひるときの運動方程式は

$$m\ddot{x}=X, \qquad m\ddot{y}=Y, \qquad m\ddot{z}=Z$$

である. 各々に $\partial x/\partial q_r$, $\partial y/\partial q_r$, $\partial z/\partial q_r$ を乘じて加へ,すべての質點についての合計をとれば

$$\sum m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_r}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)=\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_r}+Y\frac{\partial y}{\partial q_r}+Z\frac{\partial z}{\partial q_r}\right). \qquad (81)$$

式 (58) に照らし,且つ t について總微分を行ひ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_r}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_r}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 x}{\partial q_2\partial q_r}\dot{q}_2+\dots+\frac{\partial^2 x}{\partial q_n\partial q_r}\dot{q}_n$$

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, § 80.

2) E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 2nd ed. (Cambridge, 1917), Chap. 2.

$$=\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2+\dots+\frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n\right)=\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_r}.$$

從て

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}\right)-\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_r}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}\right)-\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_r}. \tag{82}$$

以下同様にし,且つ (64) により

$$\sum m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_r}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\sum m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_r}+\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)-\sum m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_r}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_r}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_r}\right)$$

$$=\frac{dp_r}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_r}. \tag{83}$$

次に configuration を僅か變更する爲の仕事を考へて見ると

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\dots+Q_n\delta q_n, \tag{84}$$

但し

$$Q_r=\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_r}+Y\frac{\partial y}{\partial q_r}+Z\frac{\partial z}{\partial q_r}\right).$$

この Q_r のことをこの組織に働く外力の一般成分 (generalised components of force) といふ. X, Y, Z なる力は m なる質點に働くすべての力を含んでゐたが, Q_r は剛體に働く內力や接觸面の反力の如く仕事をなさぬ力は含まない事は注意を要する.

さて式 (81) は

$$\frac{dp_r}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r,$$

即ち

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r. \tag{85}$$

(85) に於て $r=1, 2, \dots, n$ を順々に置けば n 個の獨立した方程式が得られる. 之を Lagrange の運動方程式といふ.

外力の影響を受けぬポテンシャル組織即ち conservative system に於ては

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=-\delta V,$$

但し V はポテンシャル勢力である. 從て

$$Q_r=-\frac{\partial V}{\partial q_r}. \tag{86}$$

故に Lagrange の式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}=-\frac{\partial V}{\partial q_r}. \tag{87}$$

尙 $T-V=L$ と書いて,この L を kinetic potential と稱し,之を用ひて Lagrange の方程式を書くと

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \qquad [r=1, 2, \dots, n] \tag{88}$$

となる.

勢力保持式を出すには (68) によつて

$$2T=\sum_r p_r\dot{q}_r. \tag{68'}$$

從て (67), (85) から

$$2\frac{dT}{dt}=\sum_r(\dot{p}_r\dot{q}_r+p_r\ddot{q}_r)$$

$$=\sum_r\left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\dot{q}_r+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r+Q_r\dot{q}_r\right)$$

$$=\frac{dT}{dt}+\sum_r(Q_r\dot{q}_r).$$

即ち

$$\frac{dT}{dt}=Q_1\dot{q}_1+Q_2\dot{q}_2+\dots+Q_n\dot{q}_n. \tag{89}$$

從て運動勢力の變化は外力によつて仕事がなされる時間的割合に等しい事がわかる. ポテンシャル組織に於ては式 (89) は

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{dV}{dt} \quad 即ち \quad T+V=常數. \tag{90}$$

之が勢力の關係式である.

14. 一般座標の組織の自由振動[1)][2)]

運動勢力は (59) によつて

$$2T=a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2+\ldots+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\ldots. \tag{91}$$

平衡の configuration の附近の振動をなす組織では a_{rr}, a_{rs} はすべて常数と見て差支がない. 而して小變位をなす組織ではポテンシャル勢力は (50) の如く近似的に

$$2V=c_{11}q_1^2+c_{22}q_2^2+\ldots+2c_{12}q_1q_2+\ldots \tag{92}$$

と書いてもよい. 勿論時間に無關係な變位は (92) から除いてある. 又,振動の場合を取る爲,振動組織の釣合の位置では $q_1, q_2, \ldots, q_n$ が零になるやうな座標の取方となつてゐる. conservative system なることに注意して Lagrange の式を書けば,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}+\frac{\partial V}{\partial q_r}=0, \qquad [r=1, 2, \ldots, n] \tag{93}$$

但し $\partial T/\partial q_r$ は速度の二次の微小數である爲に省くこととする. (91), (92) を (93) に代入すれば

$$a_{1r}\ddot{q}_1+a_{2r}\ddot{q}_2+\ldots+a_{nr}\ddot{q}_n+c_{1r}q_1+c_{2r}q_2+\ldots+c_{nr}q_n=0. \tag{94}$$

之を解く爲に

$$q_r=A_re^{\lambda t} \tag{95}$$

と書き, (94) に入れるときは

$$(a_{1r}\lambda^2+c_{1r})A_1+(a_{2r}\lambda^2+c_{2r})A_2+\ldots+(a_{nr}\lambda^2+c_{nr})A_n=0. \qquad [r=1, 2, \ldots, n] \tag{96}$$

の如き型の方程式を n 個だけ作れる. こゝで

$$A_1 : A_2 : \ldots : A_n \tag{97}$$

なる $n-1$ だけの比を消去すれば

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2+c_{11}, & a_{21}\lambda^2+c_{21}, & \ldots, & a_{n1}\lambda^2+c_{n1} \\ a_{12}\lambda^2+c_{12}, & a_{22}\lambda^2+c_{22}, & \ldots, & a_{n2}\lambda^2+c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}\lambda^2+c_{1n}, & a_{2n}\lambda^2+c_{2n}, & \ldots, & a_{nn}\lambda^2+c_{nn} \end{vmatrix}=0 \tag{98}$$

1) E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 2nd ed. (Cambridge, 1917), Chap. 7.
2) H. Lamb, *Higher Mechanics* (Cambridge, 1920), § 89.

なる關係が出る. この行列式は λ^2 について n 次の式となる. λ^2 の n 個の値がすべて眞數になる事は明かである. 而して λ^2 がすべて眞の負數であれば, λ の値は

$$\lambda=\pm i\sigma \tag{99}$$

の如き對の値を取ることも當然である.

(96) の如き式は (98) から出る λ^2 の値によつて $n-1$ 個だけの存在するが,これが (97) にある $n-1$ だけの比を決定して具れる. しかし之等の常數 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の絶對値は確定しない. 而して $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を (98) なる行列式の任意の一つの横行に就ての各小行列式 (minor determinants) を示すものとすれば,

$$\frac{A_1}{\alpha_1}=\frac{A_2}{\alpha_2}=\ldots=\frac{A_n}{\alpha_n}=H \tag{100}$$

なる關係が成立つ. これ等の小行列式は λ^2 の函數であり,隨て λ の符號が異つても同じになる. 故に(99)で示される様な一對の根に對する解は

$$q_r=\alpha_r(He^{i\sigma t}+Ke^{-i\sigma t}) \tag{101}$$

の形となる. 又眞數の形で表せば

$$q_r=C\alpha_r\cos(\sigma t+\epsilon) \tag{102}$$

となる. 但し任意常數 H, K, 換言すれば C, ϵ はすべての座標成分について同じものとなる.

上述の解は振動のノーマル型 (normal mode, nomal vibration) 即ち基本型 (fundamental mode, fundamental vibration) と呼ばれてをるものを與へる. 組織の各點は $2\pi/\sigma$ なる週期の單弦振動を行ふ. 又,各點の振動の方向や,各點の振動變位の比較的の大さは決定的のものである. たゞ定まらぬものは振幅の絶對値と ϵ なる位相常數とである.

λ^2 のすべてが負價を持ち且つ互に異なるときは,斯る normal modes が n 個ある. 換言すれば自由度が n 個あることである. 而して,組織の一般的の小振動は之等の normal modes 即ち normal vibrations を加へ合せることによつて次式の如く表すことができる:

$$q_r=C\alpha_r\cos(\sigma t+\epsilon)+C'\alpha'_r\cos(\sigma' t+\epsilon')+C''\alpha''_r\cos(\sigma'' t+\epsilon'')+\dots. \qquad (103)$$

この式中に $2n$ 個の任意常數,即ち $C, C', C'', \dots, \epsilon, \epsilon', \epsilon'', \dots$ があるから,初期の條件即ち最初の小變位 $q_1, q_2, \dots, q_n$,及び最初の速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ に適應せしめることができる.又式 (103) の各項は何れも週期性の形式を持つからその變位は如何に時間が經過しても必ず平衡狀態の近所から離れ得ない.故に振動は安定である.

次に λ^2 の或ものが正の符號を持つ場合には,次の如き解を含む:

$$q_r=\alpha_r(He^{\lambda t}+Ke^{-\lambda t}). \qquad (104)$$

この場合には一般に q_r は時間と共に増大するから,振動が不安定となる.

最後に $\Delta(\lambda)$ の minor determinants がすべて零になるときは (100) の關係を作ることができない.それは λ^2 について重根 (multiple roots) があるときに起るのであるが,そのときは,

$$\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda^2}=\sum(\text{常數}\times\text{minor determinant}) \qquad (105)$$

といふ事柄と,

$$\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda^2}=0 \qquad (106)$$

が一對の重根を持つといふ條件であることとがわかれば自ら明瞭となるであらう.

尙,(98) に出した行列式が根の眞又は虚になることの議論について Sylvester の定理[1] がある.かなり重要であり,用途もあるけれども說明を省略する.又,振動の安定極限の規範は Routh によつて與へられてゐるが,之は後に示す積りである.

15. ノーマル座標 (Normal Coordinates)[2][3][4]

前節に於て α_r と書いた部分は或る重要なる性質を持つ.今

$$\Delta(\lambda)=0 \qquad (107)$$

1) E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 2nd ed. (Cambridge, 1917), Chap. 7.
2) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, § 86.
3) E. T. Whittaker, 前揭.
4) H. Lamb, *Higher Mechanics* (Cambridge, 1920), § 91.

の二つの異なる根に相當して α_r, α'_r が存在するとする.一般には n 個存在するがこゝでは代表的に二個だけ取つて考へる.さて假りに

$$\left.\begin{aligned}2T(\alpha,\alpha')&=a_{11}\alpha_1\alpha'_1+a_{22}\alpha_2\alpha'_2+\dots+a_{12}(\alpha_1\alpha'_2+\alpha_2\alpha'_1)+\dots,\\2V(\alpha,\alpha')&=c_{11}\alpha_1\alpha'_1+c_{22}\alpha_2\alpha'_2+\dots+c_{12}(\alpha_1\alpha'_2+\alpha_2\alpha'_1)+\dots,\end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

及び

$$\left.\begin{aligned}T(\alpha)&=T(\alpha,\alpha)=\tfrac{1}{2}(a_{11}\alpha_1^2+a_{22}\alpha_2^2+\dots+2a_{12}\alpha_1\alpha_2+\dots),\\V(\alpha)&=V(\alpha,\alpha)=\tfrac{1}{2}(c_{11}\alpha_1^2+c_{22}\alpha_2^2+\dots+2c_{12}\alpha_1\alpha_2+\dots)\end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

の如きものを作る.次に (96) の n 個の式に於て $A_1, A_2, \dots, A_n$ を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ で置き換へた後,それぞれの式に $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を乘じ,然る後加へ合せれば

$$\lambda^2T(\alpha)+V(\alpha)=0 \qquad (110)$$

となり,又 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ の代りに $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ を乘じて同樣な手續きを施せば

$$\lambda^2T(\alpha,\alpha')+V(\alpha,\alpha')=0 \qquad (111)$$

が作られる.又同樣にして

$$\lambda'^2T(\alpha,\alpha')+V(\alpha,\alpha')=0 \qquad (112)$$

も出すことができる.しかし現在の場合 λ^2 と λ'^2 とは等しくない筈であるから,(111), (112) から直ちに

$$T(\alpha,\alpha')=0, \qquad V(\alpha,\alpha')=0 \qquad (113)$$

といふ關係が出る.即ち (108) のごとき型の式に於て共軛 (conjugate) 即ち直交 (orthogonal) の關係の存在することがわかる.さて應用の例として n 個の一般的座標 $\theta, \theta', \theta'', \dots$ を導入し,それ等が q_r と

$$q_r=\alpha_r\theta+\alpha'_r\theta'+\alpha''_r\theta''+\dots \qquad (114)$$

の如き關係にあるものとする.$\theta, \theta', \theta'', \dots$ は時間のみの函數である.(114) の式を (91), (92) の勢力式に代入し,前述の (113) の關係を用ひれば

$$\left.\begin{aligned}2T&=a\dot{\theta}^2+a'\dot{\theta}'^2+a''\dot{\theta}''^2+\dots,\\2V&=c\theta^2+c'\theta'^2+c''\theta''^2+\dots\end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

の如く表し得る．この中には異なる座標の乘じあつたものを含まない．又

$$\left.\begin{aligned} a&=2T(\alpha)=a_{11}\alpha_1^2+a_{22}\alpha_2^2+\ldots+2a_{12}\alpha_1\alpha_2+\ldots, \\ c&=2V(\alpha)=c_{11}\alpha_1^2+c_{22}\alpha_2^2+\ldots+2c_{12}\alpha_1\alpha_2+\ldots. \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

即ち上述の新しい座標 $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ を組織のノーマル座標 (normal coordinates) 又は主要座標 (principal coordinates) といふ．而して $a, a', a'', \ldots$ を主要慣性係數 (principal coefficients of inertia) といひ，T が正の符號をもつから，之等も當然正の符號を持つ．又 $c, c', c'', \ldots$ を主要安定係數 (principal coefficients of stability) といふ．即ち (116) の關係の諸係數を持來すことによつて，ノーマル座標を適用することが許される譯である．

故にノーマル座標を採用すれば，Lagrange の方程式から，次の如き簡單な運動方程式が書ける：

$$a\ddot{\theta}+c=0,\quad a'\ddot{\theta}'+c'\theta'=0,\quad a''\ddot{\theta}''+c''\theta''=0,\ \ldots. \tag{127}$$

隨てその解は

$$\theta=C\cos(\sigma t+\epsilon),\quad \theta'=C'\cos(\sigma' t+\epsilon'),\quad \theta''=C''\cos(\sigma'' t+\epsilon''),\ \ldots. \tag{118}$$

こゝに

$$\sigma^2=c/a,\quad \sigma'^2=c'/a',\quad \sigma''^2=c''/a'',\ \ldots. \tag{119}$$

即ち式 (110) と一致した關係が出る．このノーマル座標の形式は種々の素材の振動問題を解く場合に極めて重要なものである．

16. Rayleighの定常型振動數決定法 拘束の影響 Rayleighの變分法則[1]

多くの自由度を持つ組織の振動を解くことは時として非常な困難に遭遇することがある．そこで Rayleigh は，この組織に態と或る摩擦のない拘束を入れることによつて，自由度の一つしかないものに書き直し，その振動週期を見出す事に成功した．實際問題として斯る方法で週期を出すことは確かに望ましい所である．

一つの自由度 ϕ しかない振動を考へ，前節のノーマル座標 $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ を次の如く書く：

$$\theta=\mu\phi,\quad \theta'=\mu'\phi,\quad \theta''=\mu''\phi,\ \ldots, \tag{120}$$

玆に $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ は或る拘束に對して定まつた値を取る．之等を (115) にある運動勢力及びポテンシャル勢力の式の中へ代入すれば

$$\left.\begin{aligned} 2T&=(a\mu^2+a'\mu'^2+a''\mu''^2+\ldots)\dot{\phi}^2, \\ 2V&=(c\mu^2+c'\mu'^2+c''\mu''^2+\ldots)\phi^2. \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

これ等の勢力の式の中には，ϕ といふ一つの自由度しかないから，振動數も一つとなり，次式の如く書表される：

$$\sigma^2=\frac{c\mu^2+c'\mu'^2+c''\mu''^2+\ldots}{a\mu^2+a'\mu'^2+a''\mu''^2+\ldots}. \tag{122}$$

$\mu,\ \mu',\ \mu''$ のどれか一つを除いて他が零になれば拘束のない振動となり，σ^2 はどれかのノーマル型の振動數を與へるものである．しかし今の場合には拘束された振動の振動數の二乘が，すべてのノーマル座標の固有振動數の二乘，即ち c/a, c'/a', c''/a'', … 中の最大なるものと最小なるものとの中間に位する．而して彈性體などでは振動數の最大といふことはなく，單に振動數の最小なるもの即ち主要振動が問題になるから，斯く拘束を入れて近似的に求めた振動數は常に主要振動の振動數よりも多い譯である．尙，拘束された振動型が一つのノーマル型と餘り違はぬとき，換言すれば，$\mu', \mu'', \ldots$ が μ に比較して極めて小なるときは，拘束された振動の振動數と上述の一つのノーマル型の振動數との差違は二次以上の微小數になる．この性質をノーマル型の定常性 (stationary property of the normal mode) といふ．又，斯の如くして振動數を出すことを Rayleigh の方法といひ，かなり有名なものであつて，實際の應用は上述の如き場合に最も都合よく行はれる．

無限の自由度を有する場合の一例として，一點にぶら下つてゐる長さ l なる鎖の振動を考へて見る．[1] 上端から x なる距離にある點の水平の變位を y とすれば

$$2T=\rho\int_0^l \dot{y}^2dx.$$

[1] Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, §§ 88-91.

[1] H. Lamb, *Higher Mechanics* (Cambridge, 1920), § 94.

ψ を x なる點の部分が鉛直線となす角度とすれば,その點の x の方向への變位は

$$x-\int_0^x \cos\psi\,dx=2\int_0^x \sin^2\frac{\psi}{2}\,dx.$$

然るに $\sin\psi=\partial y/\partial x\,(=y')$. 故に第二次微小數まで取り,

$$\begin{aligned}2V&=g\rho\int_0^l dx\int_0^x y'^2dx\\&=g\rho\left[x\int_0^x y'^2dx\right]_0^l-g\rho\int_0^l xy'^2dx\\&=g\rho\int_0^l (l-x)y'^2dx.\end{aligned}$$

適當に拘束が入つたとして,次の如き一自由度のある變位型を假定する:

$$y=\eta\frac{x}{l}\left(1+\beta\frac{x}{l}\right),$$

茲に y は t の函數である. 然るときは

$$2T=\rho l\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{5}\beta^2\right)\dot{\eta}^2,$$

$$2V=g\rho\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\beta+\tfrac{1}{3}\beta^2\right)\eta^2.$$

(122) によつて

$$\sigma^2=\frac{g}{l}\,\frac{15+20\beta+10\beta^2}{10+15\beta+6\beta^2}. \qquad (123)$$

前述の理論によつて,β が如何なるものであらうと,上記の σ^2 は一番低い振動型の振動數よりも大きく出る. 今 $\beta=0$ ととれば,剛體の棒の場合卽ち複振子の振動數を表し,その週期は

$$\frac{2\pi}{\sigma}=5{\cdot}130\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる. 又,實際の値に近づける爲に (123) の極小値を計算すれば

$$\frac{2\pi}{\sigma}=5{\cdot}225\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となり,之は正確な場合に一致する. 之は一般には一致しないものである. (123) の

極小値を出すこと,卽ち (123) を β の如き變數について微分して零に置いて β を定める事を Rayleigh の變分法則 (principle of variation) といふ. Rayleigh の近似法については最近 Hohenemser 及 Prager[1] が更に研究してゐる.

17. ノーマル函數 (Normal Functions)　共軛性 (Conjugate Property)[2]

第14節に於て α_r と記したものは時間の函數でなく,一般には位置の座標の函數であるべき筈である. この α_r の事を普通ノーマル函數といひ,之によつて或る週期に相當する振動の形を表すことができる. ノーマル座標が多くの場合に時の圓函數によつて表される如く,ノーマル函數も亦調和函數によつて示されることが多い. しかしそれは單にさうなつて現はれるだけで,性質としては次に述べる拘束のもとにありさへすればよいから,時には別の函數になることもある.

ノーマル函數には共軛の性質がある. 第15節の式 (113) がその一般性を與へてゐる. しかし一般に用ひられてゐる表し方は

$$\int\rho\alpha_r\alpha_s\,d(\text{volume})=0 \qquad [r\neq s] \qquad (124)$$

の如きものである. 之等は主として境界條件によつて定まるのであるが,委しい事は彈性體の振動の所にある故,こゝでは單にノーマル函數の名前だけを擧げておく.

18. 一般座標の組織の强制振動[3][4]

一つの組織が各自由度に相當して $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ の如き外力を受けて振動する場合には, (87) を修正し,且つ (91), (92) によつて

$$a_{1r}\ddot{q}_1+a_{2r}\ddot{q}_2+\ldots+a_{nr}\ddot{q}_n+c_{1r}q_1+c_{2r}q_2+\ldots+c_{nr}q_n=Q_r \quad [r=1,2,\ldots,n] \qquad (125)$$

の如く書表すことができる. 最も普通に行はれる様に Q_r が $\cos(\sigma t+\epsilon)$ の如く單弦振動型である場合には式 (125) は大して困難がなく解ける. 時間についてもつと複雜な場合には單弦振動型のものを重ね合せることによつて得られる. 今,簡單

1) K. Hohenemser u. W. Prager, "Über das Gegenstück zum Rayleighschen Verfahren der Schwingungslehre," *Ing. Arch.*, 3 (1932), 306–310.

2) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, § 92.

3) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, Chap. 5.

4) H. Lamb, *Higher Mechanics* (Cambridge, 1920), § 95.

の爲に Q_r が $e^{i\sigma t}$ の如く變化するとすれば,q_r の振動型も亦 $e^{i\sigma t}$ に比例するものでなければならぬ．尤も q_r が $e^{i\sigma t}$ を因子とする解法以外にも(125)の解が存在するが,Q_r の影響を特に考へる解法としては $e^{i\sigma t}$ を持たねばならぬ．この $e^{i\sigma t}$ の事を時間的因數(time-factor)と稱する．式(125)からこの時間的因數を取去つて考へれば

$$(c_{1r}-\sigma^2a_{1r})q_1+(c_{2r}-\sigma^2a_{2r})q_2+\dots+(c_{nr}-\sigma^2a_{nr})q_n=Q_r. \quad [r=1,2,\dots,n]. \tag{126}$$

之を $q_1,q_2,\dots,q_n$ に就て解けば

$$\Delta(\sigma^2)q_r=\alpha_{1r}Q_1+\alpha_{2r}Q_2+\dots+\alpha_{nr}Q_n, \tag{127}$$

但し $\Delta(\sigma^2)$ は(126)に於て $q_1,q_2,\dots,q_n$ の係數によつて作られる行列式であり,$\alpha_{1r},\alpha_{2r},\dots,\alpha_{nr}$ は $\Delta(\sigma^2)$ の r 番目の横列についての小行列である．組織中のすべての點は强制外力の週期 $2\pi/\sigma$ の週期を以て單弦振動をなすものである．而して摩擦がなければ,すべての點は同時にその平衡位置を通過する筈である．

σ^2 が次式

$$\Delta(\sigma^2)=0 \tag{128}$$

の根になる場合には式(127)でわかるやうに振動の振幅が非常に大きくなる．換言すれば外力の週期が自由振動の週期のどれかと一致する場合に斯る事柄が起るのであつて,之を一般座標組織に於ける共振(resonance)の現象と名づける．

$\Delta(\sigma^2)$ が對稱型を持つ事から,$\alpha_{rs}=\alpha_{sr}$ といふことができる．故に q_s の式の中の Q_r の係數は q_r の式の中の Q_s の係數に等しい譯である．これ即ち可反定理(reciprocal theorem)の根元をなすものであつて,第11節で述べた事柄と大體に於て同性質のものである．

本節の初めにも附加へたやうに(127)なる解は(125)の particular integral であつて,完全なる解は之に第14節で示した自由振動の解を加へ合せる必要がある．この加へ合せたものも勿論式(125)の解として何等差支がないからである．而してこの自由振動に相當する解は $2n$ 個の任意常數を持つから,n 個の自由度を持つ振動組織の初時の變位と速度の條件に適合せしめることができる．

若しこの振動組織を第15節の如きノーマル座標に移したとして考へれば,式(126)の代りに

$$(c-\sigma^2a)\theta=Q,\quad (c'-\alpha^2a')\theta'=Q',\quad (c''-\sigma^2a'')\theta''=Q'',\dots \tag{129}$$

と書くことができる．若し $\sigma_0,\sigma_0',\sigma_0'',\dots$ を各ノーマル型の σ の値,即ち

$$\sigma_0^2=c/a,\quad \sigma_0'^2=c'/a',\quad \sigma_0''^2=c''/a'',\dots \tag{130}$$

とすれば,

$$\theta=\frac{Q}{c(1-\sigma^2/\sigma_0^2)},\quad \theta'=\frac{Q'}{c'(1-\sigma^2/\sigma_0'^2)},\quad \theta''=\frac{Q''}{c''(1-\sigma^2/\sigma_0''^2)},\dots \tag{131}$$

となる．

さて $Q/c,\ Q'/c',\ Q''/c'',\dots$ は各ノーマル型の一定の外力によつて靜力學的に生ずる變位であるから,之等の値の事を變位の平衡値(equilibrium value)といふ事がある．又式(131)によつてわかる樣に,外力の週期が各ノーマル型の自由振動週期に比して長いときは何れの時間に於ても組織は外力に對して平衡の位置を取る．換言すれば外力の位相と振動體の位相とが一致する．然るに外力の週期が振動體の或る週期に比して短いときは,そのノーマル型の位相は外力のそれとは逆になる．

最後に外力の週期が自由振動の一つの型の週期に接近するときは,そのノーマル型の振幅は他の型のものに比して著しく大きくなる．即ち式(47)の所で說明せる選擇共振(selective resonance)の現象を表す．

19. 一般座標組織の減衰自由振動[1)2)]

實際の振動では減衰力(dissipative force)が種々の形で働く．しかしその極めて簡易な表し方は摩擦的の力が一般速度に比例すると考へるのが普通である．

先づ第一に減衰性のある場合の振動方程式を作つて見よう．それには減衰性のない場合の振動の如く垂直固定座標の場合から出發した方が便利である．今,質點 m に働く減衰力が速度に比例するとすれば,運動方程式は

$$m\ddot{x}+k\dot{x}=X,\qquad m\ddot{y}+k\dot{y}=Y,\qquad m\ddot{z}+k\dot{z}=Z \tag{132}$$

となる．この各式に $\partial x/\partial q_r,\ \partial y/\partial q_r,\ \partial z/\partial q_r$ を乘じて加へ合せる．又,式(58)から上述の各因數は夫々 $\partial\dot{x}/\partial\dot{q}_r,\ \partial\dot{y}/\partial\dot{q}_r,\ \partial\dot{z}/\partial\dot{q}_r$ に等しいことがわかる．故に以前に求め

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 1, Chap. 5.
2) E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 2nd ed. (Cambridge, 1917), Chap. 8.

た一般の運動方程式の各項以外に

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\sum k(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \tag{133}$$

の如き項が附加はる譯である.

こゝに注意すべき事柄は,二つの質點 m_1 と m_2 の間に働く減衰力は絶對の速度を取つても何等意味をなさぬことである. 斯る場合にはその比較速度を取る必要がある. 故に m_1 なる質點の運動に對しては

$$k(\dot{x}_1-\dot{x}_2),\qquad k(\dot{y}_1-\dot{y}_2),\qquad k(\dot{z}_1-\dot{z}_2) \tag{134}$$

なる減衰抵抗力が働き, m_2 に對しては

$$k(\dot{x}_2-\dot{x}_1),\qquad k(\dot{y}_2-\dot{y}_1),\qquad k(\dot{z}_2-\dot{z}_1) \tag{135}$$

なる減衰抵抗力が働く筈である. この事柄は一般の組織のみでなく,凡ての變形する物體の振動に忘れてならぬ大切なものである. 今,(134) に $\partial\dot{x}_1/\partial\dot{q}_r, \partial\dot{y}_1/\partial\dot{q}_r, \partial\dot{z}_1/\partial\dot{q}_r$ を乘じ, (135) に $\partial\dot{x}_2/\partial\dot{q}_r$, $\partial\dot{y}_2/\partial\dot{q}_r$, $\partial\dot{z}_2/\partial\dot{q}_r$ を乘じ,兩方を加へれば

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\sum k\{(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+(\dot{z}_1-\dot{z}_2)^2\}. \tag{136}$$

式 (136) の $\sum$ 以下のものを F で表してもよい. 而して前の場合と同樣な筆法を以て

$$2F=b_{11}\dot{q}_1^2+b_{22}\dot{q}_2^2+\ldots+2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\ldots \tag{137}$$

の如く一般座標の形に變形させることは極めて容易である. このやうにしておけば問題がわかり易く取扱はれる. この F は Rayleigh により dissipation function と名づけられた.

さて運動方程式に F の影響のあるものを書けば

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}+\frac{\partial V}{\partial q_r}=0. \qquad [r=1, 2, \ldots, n] \tag{138}$$

これが減衰力の働く場合の運動方程式である.

次に (138) に $\dot{q}_r$ を乘じ, n 個の方程式を加へ合すときは

$$\frac{d}{dt}(T+V)=-2F, \tag{139}$$

即ち $2F$ は機械的勢力が摩擦によつて消滅する割合 (rate) を表す.

式 (138) の中へ一般の座標で書いた T, V, F を代入して見ると

$$\begin{aligned}&a_{1r}\ddot{q}_1+a_{2r}\ddot{q}_2+\ldots+a_{nr}\ddot{q}_n\\&\quad+b_{1r}\dot{q}_1+b_{2r}\dot{q}_2+\ldots+b_{nr}\dot{q}_n\\&\qquad+c_{1r}q_1+c_{2r}q_2+\ldots+c_{nr}q_n=0,\qquad [r=1, 2, \ldots, n]\end{aligned} \tag{140}$$

但し

$$a_{rs}=a_{sr}\,,\qquad b_{rs}=b_{sr}\,,\qquad c_{rs}=c_{sr}\,. \tag{141}$$

今

$$q_r=A_r e^{\lambda t} \tag{142}$$

と置けば

$$\begin{aligned}&(a_{1r}\lambda^2+b_{1r}\lambda+c_{1r})A_1+(a_{2r}\lambda^2+b_{2r}\lambda+c_{2r})A_2+\ldots\\&\qquad+(a_{nr}\lambda^2+b_{nr}\lambda+c_{nr})A_n=0.\qquad [r=1, 2, \ldots, n]\end{aligned} \tag{134}$$

上式から $(n-1)$ だけの比 $A_1:A_2:\ldots:A_n$ を消去すれば, λ について $2n$ 次の對稱行列式が得られる. 之を

$$\Delta(\lambda)=0 \tag{144}$$

と置く. 而して $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を $\Delta(\lambda)=0$ の任意の一横行の小行列式 (minors) とすれば, (144) の任意の一根に就て

$$\frac{A_1}{\alpha_1}=\frac{A_2}{\alpha_2}=\ldots=\frac{A_n}{\alpha_n} \tag{145}$$

の如き一定の關係のあることは減衰力のない場合と同じである.

(144) の根の性質を考へて見るために第 15 節と同じ進み方によつて

$$\lambda^2 T(\alpha)+\lambda F(\alpha)+V(\alpha)=0 \tag{146}$$

を作る. T, F, V は何れも正の符號を持つのが當り前であるから, (146) によつて λ なる複素數の實數の部分即ち α の實數の部分は負數でなければならぬ.

次に λ' を (144) の第二の根とし $\Delta(\lambda')$ の小行列式を (′) で區別すれば,第 15 節の擴張によつて

$$\left.\begin{aligned}\lambda^2 T(\alpha, \alpha')+\lambda F(\alpha, \alpha')+V(\alpha, \alpha')=0,\\ \lambda'^2 T(\alpha, \alpha')+\lambda' F(\alpha, \alpha')+V(\alpha, \alpha')=0.\end{aligned}\right\} \tag{147}$$

$\lambda \neq \lambda'$ のときは

$$\lambda+\lambda'=-\frac{F(\alpha,\alpha')}{T(\alpha,\alpha')},\qquad \lambda\lambda'=\frac{V(\alpha,\alpha')}{T(\alpha,\alpha')} \tag{148}$$

λ と λ' とが共軛 (conjugate) の複素根,即ち

$$\lambda=\rho+i\sigma,\qquad \lambda'=\rho-i\sigma \tag{149}$$

であるとすれば,

$$2\rho=-\frac{F(\mu)+F(\nu)}{T(\mu)+T(\nu)},\qquad \rho^2+\sigma^2=\frac{V(\mu)+V(\nu)}{T(\mu)+T(\nu)} \tag{150}$$

但し μ,ν は $\alpha_r=\mu_r+i\nu_r,\ \alpha_r'=\mu_r-i\nu_r$ の如く分けて

$$T(\alpha,\alpha')=T(\mu)+T(\nu),\qquad V(\alpha,\alpha')=V(\mu)+V(\nu) \tag{151}$$

の如き意味を持つ. (150) の左の式は式 (144) の複素根の眞數の部分が負の符號を有することを示してゐる.

(144) の眞の各根に對して次の如き型の解がある:

$$q_r=\alpha_r e^{\rho t}. \tag{152}$$

ρ は負數であるから變位は何等振動することなく減衰して行く. 卽ち振動が無週期性 (aperiodic) となる.

共軛の虛根に相當する解を眞の形で書いて見れば

$$q_r=A\{\mu_r\cos(\sigma t+\epsilon)-\nu_r\sin(\sigma t+\epsilon)\}e^{\rho t} \tag{153}$$

の如くなる. A,ϵ は任意常數ではあるが,各自由度に相當する座標につきすべて同じである. 式 (153) は漸減的の單弦振動を表し,變位は漸近的に零になる. 摩擦のない場合にはすべての質點に對して或る時刻の位相 (phase) が同じであつたが,摩擦がある場合には最早それが成立たない.

摩擦係數 b_{rr}, b_{rs} が小なる場合には,式 (144) の根が連續性の考から虛數となり, ν_r が小さくなる. 從て (150) の ρ が小さくなり,又 σ^2 は大體に於て

$$\sigma^2=\frac{V(\mu)}{T(\mu)} \tag{154}$$

となる. μ_r といふ量も摩擦のない場合に比較して大した違ひがなく,又式 (122) で

說明したノーマル型の定常性も大して影響を受けないことがわかる.

一體,僅かの摩擦力の導入は振動の振幅には大分變化を與へるが,その自由振動の週期には餘り影響を與へぬものである.

尙,摩擦が働く組織の强制振動は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}+\frac{\partial F}{\partial \dot q_r}+\frac{\partial V}{\partial q_r}=\Phi_r \tag{155}$$

から出發し,第18節及び本節の方法によつて積分式を求めることができるが,斯る一般的の方法は動もすれば複雜となつて困難に陷る虞れがあるから,こゝでは省略し,特別な場合について夫々特別な方法を採用する事にしておく.

種々の固有振動を有する組織に減衰性があり,之に非常に複雜な,寧ろ不規則ともいふべき週期の外力が加はるときでもその主要の固有振動のみが特によく誘起されることは數理からも實驗からも割合に明かな事柄となつた. このことに關しては寺田博士[1] の研究が特に參考になると思ふ. 前に述べた selective resonance の一種であることには違ひはないのであるが,減衰力其他の影響によつてその主要振動が誘起され易いのである.

20. 聯成自由振動 (Coupled Free Oscillations) の簡單な例[2) 3)]

減衰性のない聯成振動 一般座標の振動問題の中に既に含まれた事ではあるが,或る組織に於て二つ以上の振動型が互に適當なる機構によつて聯結してゐることがある. その場合に起る組合つた振動を聯成振動と稱し,實際問題に重要なる意味をもつ. その中でも二つの振動型の聯成してゐる場合が最も屢ゝ出るものである. 今,摩擦の減衰性がなく,且つ强制力のない自由振動を考へて見る. u_1, u_2 を二つの自由度の座標の變位として,聯成振動の方程式を作ると常に次のやうな形

---

1) 寺田寅彦, "*On Irregular Assemblage of Pulses and Its Action on Resonators,*" 數學物理學會記事, 9 (1917-8), 142-154.

2) M. Wien, "Über die Rückwirkung eines resonierenden Systems," *Wied. Ann.*, 61 (1897), 151-189.

3) A. Kalähne, "Die Normalkoordinaten in der mathematischen Behandlung gekoppelter Schwingungen," *Phys. ZS.*, 11 (1910), 1196-1209.

を取るものである.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u_1}{dt^2}+n_1^2u_1+\tau_1n_1^2u_2=0,\\&\frac{d^2u_2}{dt^2}+n_2^2u_2+\tau_2n_2^2u_1=0.\end{aligned}\right\}\tag{156}$$

u_1 又は u_2 の何れかを消去すれば

$$\frac{d^4u}{dt^4}+\frac{d^2u}{dt^2}(n_1^2+n_2^2)+un_1^2n_2^2(1-\tau_1\tau_2)=0\tag{157}$$

の如き形を取る. 今,振動の時間的函數を e^{ipt} とし,且つ $p=i\sigma$ とすれば

$$\sigma^4+\sigma^2(n_1^2+n_2^2)+n_1^2n_2^2(1-\tau_1\tau_2)=0.\tag{158}$$

従て

$$(i\sigma)^2=p^2=\frac{n_1^2+n_2^2\pm\sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2\tau_1\tau}}{2}=p_1^2,\,p_2^2.\tag{159}$$

之を用ひて振動形を作れば

$$\left.\begin{aligned}u_1&=A\sin p_1t+B\sin(p_2t+\varphi)t,\\u_2&=\frac{2A\tau_2n_1^2}{n_1^2-n_2^2+\sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2\tau_1\tau_2}}\sin p_1t\\&\quad+\frac{2B\tau_2n_1^2}{n_1^2-n_2^2-\sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2\tau_1\tau_2}}\sin(p_2t+\varphi),\end{aligned}\right\}\tag{160}$$

但し A, B は初期條件で定まる常數である. 之を見ると,二つの振動型が聯成して出來た振動はやはり二つの型から組合つてをり,且つ (159) によつてその高い振動數の方は初め高かつた方の振動數よりも一層高くなり,低い方の振動數は初め低かつたものよりも一層低くなることがわかる.

初めの兩方の振動數が等しいときには $p^2=n_1^2\pm n_1n_2\sqrt{\tau_1\tau_2}$ であるから, $\tau_1\tau_2$ が小なるときは一種の唸りの如き振動が起り,且つその唸りは時間的に考へて交互に一方が大きく一方が小さくなる性質をも有するものである. 即ち振動の勢力が交互に一方から一方へ移るものであつて,一方が極大のときには他が極小になるものである. $A=B$ のときにはこの極小が零に等しくなる.

振動數の差が比較的に大なるときには $n_1^2-n_2^2\gg4n_1^2n_2^2\tau_1\tau_2$. 従て

$$(i\sigma)^2=p^2=n_1^2\pm\frac{n_1^2n_2^2\tau_1\tau_2}{n_1^2-n_2^2}.\tag{161}$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A\sin n_1\left(1+\frac{\tau_1\tau_2n_2^2}{2(n_1^2-n_2^2)}\right)t+B\sin\left\{n_2\left(1-\frac{\tau_1\tau_2n_1^2}{2(n_1^2-n_2^2)}\right)t+\varphi\right\},\\x_2&=\frac{A\tau_2n_1^2}{n_1^2-n_2^2+\dfrac{n_1^2n_2^2\tau_1\tau_2}{(n_1^2-n_2^2)}}\sin n_1\left(1+\frac{\tau_1\tau_2n_2^2}{2(n_1^2-n_2^2)}\right)t\\&\quad-B\frac{(n_1^2-n_2^2)}{\tau_1n_2^2}\sin\left\{n_2\left(1-\frac{\tau_1\tau_2n_1^2}{2(n_1^2-n_2^2)}\right)t+\varphi\right\}.\end{aligned}\right\}\tag{162}$$

この場合にも勿論高い振動數と低い振動數のものとが聯成するときに高い方の振動數は一層高くなり,低い方は一層低くなる.

同樣にして强制振動の場合も考へることができる.

減衰性のある聯成振動 減衰性の項を二つの自由度のある聯成振動の方程式に入れるときは次の如くなる:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u_1}{dt^2}+2f_1\frac{du_1}{dt}+n_1^2u_1+\tau_1n_1^2u_2=0,\\&\frac{d^2u_2}{dt^2}+2f_2\frac{du_2}{dt}+n_2^2u_2+\tau_2n_2^2u_1=0,\end{aligned}\right\}\tag{156'}$$

$2f_1$, $2f_2$ は減衰の係數である. 前の如く振動數の式を出して見ると

$$\sigma^4+2(f_1+f_2)\sigma^3+(n_1^2+n_2^2+4f_1f_2)\sigma^2+2(f_2n_1^2+f_1n_2^2)\sigma+n_1^2n_2^2(1-\tau_1\tau_2)=0\tag{158'}$$

となる.

$$z=\sigma+\frac{f_1+f_2}{2},\qquad \omega_1^2=n_1^2-f_1^2,\qquad \omega_2^2=n_2^2-f_2^2$$

と置くと,上式は

$$\begin{aligned}&z^4+z^2\left[\omega_1^2+\omega_2^2-\frac{(f_1+f_2)^2}{2}\right]-z(f_1-f_2)(\omega_1^2-\omega_2^2)+\omega_1^2\omega_2^2\\&\quad+\frac{(f_1-f_2)^2}{4}(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{(f_1-f_2)^2}{16}-\tau_1\tau_2(\omega_1^2+f_1^2)(\omega_2^2+f_2^2)=0\end{aligned}\tag{158''}$$

の如くなる. 今,特別に共振的の場合即ち $\omega_1-\omega_2$ が固有振動週期に比して非常に小なる場合を考へ,且つ f, $\tau_1\tau_2\omega^2$ も小であるとする. この假定のもとに上の σ の方

程式の解を出して見ると

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \pm i(Q-R)+S, \qquad \left.\begin{matrix} z_3 \\ z_4 \end{matrix}\right\} = \pm i(Q+R)-S$$

となる．但し

$$Q=\sqrt{\frac{a}{2}-\frac{a^2-4c}{8a}}, \quad \left.\begin{matrix} R \\ S \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{\{(a^2-4c)^2+8ab^2\}^{\frac{1}{2}}\pm(a^2-4c)}{16a}},$$

$$a=\omega_1^2+\omega_2^2+\frac{(f_1-f_2)^2}{2}, \qquad b=-(f_1-f_2)(\omega_1^2-\omega_2^2),$$

$$a^2-4c=(\omega_1^2-\omega_2^2)^2-2(f_1-f_2)^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+4\tau_1\tau_2\omega_1^2\omega_2^2.$$

特別に $f_1=f_2=f$ の如く取ると $b=0$, $S=0$ となり,従て

$$p^2=\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\{(\omega_1^2-w_2^2)^2+4\tau_1\tau_2\omega_1^2\omega_2^2\}}. \qquad (158')$$

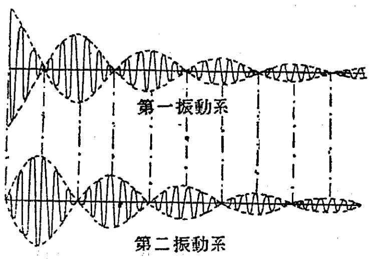
共振的の場合には

$$\omega_1^2-\omega_2^2>>2\tau_1\tau_2\omega_1\omega_2$$

として差支がなく,又 $\omega_1=\omega_2=\omega$ として見ると

$$p_1=\omega\sqrt{1-\tau_1\tau_2}, \quad p_2=\omega\sqrt{1+\tau_1\tau_2},$$

の如き關係が出る．この様な二つの週期をもつて各自由度の振動が起り,唸りの現象を示すものである．最初に第一の系統が或る振幅をもち,他の系統に振幅がないとすれば,振動の勢力は第一の系統から漸次第二の系統に移り,次に又第一の系統へ歸つて來るものである．この様にして勢力の往復が行はれる．しかし減衰性がある爲に全體の勢力が漸次減少して行くものである．これ等は振動振幅の解を前の式から作つて見れば容易にわかるものである．左圖は以上の事柄の大體の模様を示したものである．



第 5 圖

この問題につき注意すべきことは,二つの系統の聯成振動に於て振動系統の固有週期が互に等しいとき,共振現象と聯成振動が同じものであるやうに見えることである．しかし共振と聯成振動とは明かに區別がある．即ち共振は强制振動によつて外から振動勢力を順次加へて行くときに振動の位相關係から振幅が增大して行くものであつて,減衰がないときは勢力が無限に大きくなるものである．減衰性があつても勢力が一定の大さにとゞまるものである．然るに聯成自由振動では同じ自由振動週期のある事から振動の位相はやはり重なり合ふ傾向を取るけれども,勢力が全體の組織内に一定であるから,振動勢力が移動するのみであつて後程振幅が增大することもなく,減衰性があれば振幅は漸減するものである．之を要するに等週期の聯成振動と共振との類似の點は振動振幅の加はり方が位相によつて漸次重なり合ふ事にあり,異なる點は勢力が內部に保たれてをる事と外部からつぎ足される事にある．樂器の共鳴箱は聯成振動の一方の系統が音を發し易くしたものに過ぎない．聯成强制振動の問題にも多くの研究[1]があるがこゝでは述べない．

21. 振動安定問題に關する Routh の規範[2]

多くの自由度のある振動の安定問題は自由振動の部分で述べたやうに,その聯立の振動方程式の各項の係數が定數でありさへすれば,その係數に消去法を行ひ一つの被變數のみの方程式を作つて解くのが普通である．しかしそのやうな場合でも振動數や安定の極限を出すことはあまり容易なことではない．Routh は斯る複雜な問題の安定の極限を,比較的に簡單な方法によつて決定する方法を出したのである．便宜上二個の自由度のある場合を考へると方程式は一般に次の如くなる．

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d^2u_1}{dt^2}+B\frac{du_1}{dt}+Cu_1+A'\frac{d^2u_2}{dt^2}+B'\frac{du_2}{dt}+C'u_2=0, \\ E\frac{d^2u_1}{dt^2}+F\frac{du_1}{dt}+Gu_1+E'\frac{d^2u_2}{dt^2}+F'\frac{du_2}{dt}+C'u_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (163)$$

この式を解く爲に

$$u_1=\left[A'\frac{d^2}{dt^2}+B'\frac{d}{dt}+C'\right]V, \qquad u_2=-\left[A\frac{d^2}{dt^2}+B\frac{d}{dt}+C\right]V \qquad (164)$$

---

1) E. Hahnkamm, "Die Beruhigung störend schwingender Wellenlager bei konstanter Erregerfrequenz," *Ann. Phys.*, 14 (1932), 683-698；其他の論文．

2) E. J. Routh, *The Advanced Part of Dynamics of a System of Rigid Bodies* (London, 1905).

と書けば,之は明かに (163) の第一の式を滿足することができる．この關係を (163) の第二の式に代入し,且つ簡單の爲に $\dfrac{d}{dt}$ を δ と書けば

$$\begin{vmatrix} A\delta^2+B\delta+C, & A'\delta^2+B'\delta+C' \\ E\delta^2+F\delta+G, & E'\delta^2+F'\delta+G' \end{vmatrix} V=0 \tag{165}$$

となる．又この行列式を解くには一般に

$$f(z)=az^4+bz^3+cz^2+dz+e=0 \tag{166}$$

の如き代數方程式を解かねばならぬ．但し上式の a, b, c, d, e は前述の行列式を開いて得べき四式の微分方程式の各項の定數の係數を示す．

一般に振動が安定となるには $f(z)=0$ を解いて得られる根の眞數の部分が(根の眞數,複素數に拘らず)負の符號を持つことが必要である．何となれば振動の解は $f(z)=0$ の根を指數とする指數函數の和を以て表されるのであり,根の眞の部分が負號であることは振動の振幅が時と共に增大せぬことを意味するからである．今

$$X=bcd-ad^2-eb^2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a, & b, & c \\ b, & 0, & d \\ c, & d, & 2e \end{vmatrix} \tag{167}$$

を作つて置けば, $f(z)$ の四根の中で二つ宛加へたもの同志の積が X/a^3 となる．

X, a, b, c, d, e がすべて有限であり且つ零でない場合には,之等六個の値がすべて同符號を持ちさへすれば振動が安定である．之等を Routh の判別式といふ．

之を委しく考へる爲に,先づ第一にすべての根が複素數であるとして見ると,その根は $\alpha\pm pi, \beta\pm qi$ と書き得るから,

$$\frac{X}{a^3}=4\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2+(p+q)^2\}\{(\alpha+\beta)^2+(p-q)^2\}$$

であり,従て $\alpha\beta$ は X/a^3 と同符號を取る．然るに $\alpha+\beta$ は $-b/a$ の符號に一致するので, X, a, b の三つの量が同符號を持ちさへすれば α, β は負の符號を持つ．卽ちこの場合には X, a, b の關係だけで充分である．次に二個の根が眞數で,二個の根が複素數であるとして之等の根を $\alpha\pm pi, \beta\pm q'$ と書いて見る．この場合には

$$\frac{X}{a^3}=4\alpha\beta\{[(\alpha+\beta)^2+p^2-q'^2]^2+4p^2q'^2\}$$

となるから,やはり $\alpha\beta$ と X/a^3 とは同符號を取る．$\alpha+\beta$ は $-b/a$ の符號に同じく, $\beta^2-q'^2$ は e/a の符號を持つ．従て e/a の符號が正であれば $|\beta|>|q'|$ となる．卽ち a, b, e, X が同符號であれば, α 及び $\beta\pm q'$ が負の符號を持つことになる．最後に四根がすべて眞數であるとして見る．すべての係數が正の符號をもつとすれば Descartes の規則によつて各根が負の符號を持つ．又 X/a^3 は根を二つ宛加へたものの積であるから當然正號の値を取る．従て X も正の符號を持つ.尙,四次式は二つの二次式の積であり ,二次式の係数の性質から四次式の係数も同符号となる從つて一般的に， X 及び各係數が同符號であれば振動が安定な譯である．特別に $X=0$ の場合には,少しく吟味すると各係數が有限で同符號を持てば安定な振動となるこの場合に $z=\pm\sqrt{-d/b}$ といふ等根がある又特別に c が零のときは各係數が同符號であり, $bc-ad\geqq 0$ で安定となる．

b 又は d が零のときは b, d, X が共に不要となり,振動安定の條件として a, c, e が同符號を持ち,且つ $c^2>4ae$ といふ關係が得られる．

Routh は同樣にして種々の次數の振動式の安定の條件を出してゐる．例へば,

$$f(z)=z^3+p_1z^2+p_2z+p_3=0 \tag{168}$$

の如き式がある場合には,安定の條件として

$$p_1>0,\quad p_3>0,\quad p_1p_2-p_3>0$$

が得られる．

尙,注意として附加へたいことは,安定の極限といつても一般にその極限に於ける振動數が有限のものとして存在することである．之を二次の微分方程式で表されるやうな場合に比較すると,多少興味のある性質が存在してゐる．

22. Hamilton の原理[1]

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ の如き變數を n-dimensions の空間に於ける座標と考へ,組織の運動が之等の座標で示された一點の,この空間に於ける一つの path で與へられるも

[1] E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 2nd ed. (Cambridge, 1917), Chap. 9.

のと見做し,且つこの path を組織の trajectory と名づけておく.

今, holonomic system を取り, $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ なる n 個の獨立せる座標を有する一點があると考へる. その kinetic potential は L であり,且つ組織は conservative であるとしておく. AB なる弧はこの空間に於ける或る trajectory の部分を表すものとし, CD を其隣りにある弧の部分と見做す. この CD なる弧は必しも trajectory でなくてもよいが,しかし組織に拘束を入れるときは CD を trajectory となし得るものである. 時間 t に於て AB 中の P なる點が $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ なる座標を占めるものとする. CD 上の各點は或る時間に相關してをり,從て CD 上の Q なる點は P と同じやうに t なる時間に相關してをるものである. CD 上の動點は $q_1, q_2, \dots, q_n, t$ に從て位置を變化するから, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ の各値に相當することになる.

AB 上の或る點から CD 上の t によつて相關せる點へ移る爲の變分を δ と書く. 而して各弧の端の點, A, B, C, D を t について t_0, t_1, $t_0+\Delta t_0$, $t_1+\Delta t_1$ とし,各弧上の任意の點に於ける L を單に L としておく.

AB, CD の夫々の上に取つた次の積分

$$\int L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n,\ q_1, q_2, \dots, q_n, t)\,dt \tag{169}$$

の互の差を次の如く作つて見る:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{CD}} L\,dt - \int_{\mathrm{AB}} L\,dt &= L_{\mathrm{B}}\Delta t_1 - L_{\mathrm{A}}\Delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt \\ &= L_{\mathrm{B}}\Delta t_1 - L_{\mathrm{A}}\Delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta\dot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r\right)dt.\end{aligned}$$

之は Lagrange の式によつて

$$\begin{aligned}&= L_{\mathrm{B}}\Delta t_1 - L_{\mathrm{A}}\Delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\partial\dot{q}_r + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)\delta q_r\right\}dt \\ &= L_{\mathrm{B}}\Delta t_1 - L_{\mathrm{A}}\Delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta q_r\right)dt \\ &= L_{\mathrm{B}}\Delta t_1 - L_{\mathrm{A}}\Delta t_0 + \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta q_r\right)_{\mathrm{B}} - \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta q_r\right)_{\mathrm{A}}.\end{aligned}$$

B から D に移る爲の q_r の增加を $(\Delta q_r)_{\mathrm{B}}$ とすれば

$$(\Delta q_r)_{\mathrm{B}} = (\delta q_r)_{\mathrm{B}} + (\dot{q}_r)_{\mathrm{B}}\Delta t_1$$

であり,同樣にして A から C に移る爲の q_r の增加を $(\Delta q_r)_{\mathrm{A}}$ とすれば

$$(\Delta q_r)_{\mathrm{A}} = (\delta q_r)_{\mathrm{A}} + (\dot{q}_r)_{\mathrm{A}}\Delta t_0.$$

從て

$$\int_{\mathrm{CD}} L\,dt - \int_{\mathrm{AB}} L\,dt = \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta q_r + \left(L - \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r\right)\Delta t\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \tag{170}$$

今, C は A と一致し, D は B と一致して居るものとし,且つ C と D とに相關せる時間は t_0 と t_1 とすれば, $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n, \Delta t$ はすべて零であり,從て

$$\int_{\mathrm{CD}} L\,dt - \int_{\mathrm{AB}} L\,dt = 0 \tag{171}$$

となる. 即ち AB なる實際の trajectory 上に取つた $\int L\,dt$ は,その兩端が定まつてをり,且つその端の點の時間も一定でありさへすれば, stationary の値を取ることがわかる. 之を Hamilton の原理といひ,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0 \tag{172}$$

で示される. Hamilton の原理は non-holonomic の場合にも或る一定の條件のもとに擴張し得るものである.

Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial}{\partial q_r}(T-V) = 0 \qquad [r=1, 2, \dots, n] \tag{173}$$

は Hamilton の原理の一つの特別な場合をなしてゐる.

物體平衡の條件を考へると, T, V が explicitly には t に無關係といふことである. 且つ T は直接 q_r の函數でもない. 從て

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \qquad [r=1, 2, \dots, n] \tag{174}$$

といふ式が成立つ. この場合に平衡が安定である. 即ちこのときポテンシャル勢力が極小といふことになるのである.

Hamilton の原理の應用を示す爲に絲の振動問題を考へて見る. 兩端 $x=0$,

$x=l$ がすべての時に對して固定されてゐるときその變位に於て $u(0,t)=0,\ u(l,t)=0$ である．運動勢力は $T=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$ (ρ は單位長さの質量) であり,ポテンシャル勢力は $V=\dfrac{T}{2}\displaystyle\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$ (T は張力) である．從て Hamilton の原理は

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left\{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx\,dt$$

が stationary になるべきことを規定してゐる．之に變分法 δ を行ふと

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

なる方程式が出る．同様にして棒,板,膜其他の問題の方程式を Hamilton の原理から作り出すことができるものである．

23. Coulomb の振動減衰抵抗

振動減衰性が粘性によらず,所謂 Coulomb の摩擦抵抗によつて減衰すると考へられる場合には自由振動の方程式が次の如く書かれる：

$$m\ddot{u}+ku\pm F=0, \tag{175}$$

玆に $+F$ は $\dot{u}>0$ のとき，$-F$ は $\dot{u}<0$ のときに成立する．之を解くには上式を

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(u\pm\frac{F}{k}\right)+k\left(u\pm\frac{F}{k}\right)=0$$

の如く書き直し，$u\pm\dfrac{F}{k}=X$ と書けば

$$m\ddot{X}+kX=0$$

となるから,之から

$$X=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\epsilon\right),$$

即ち

$$u\pm\frac{F}{k}=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\epsilon\right) \tag{176}$$

となる．之によつて振動は $\dot{u}$ の同じ向きの間はその振幅が一定値宛少くなることがわかる．即ち $\dot{u}>0$ のときには $u=-\dfrac{F}{k}$ を平均線とする單弦振動の性質を持ち，

その振幅は初めの振幅 u_0 から F/k だけ減じた振幅の振動をなす．$\dot{u}<0$ になると上述の平均線から $u=+\dfrac{F}{k}$ だけ移動せる線を平均線として單弦振動をなす．このやうにして振幅が一振動毎に順次一定値宛減少して行くものである．

次に粘性による減衰性と Coulomb 減衰性とが共に存在し,且つ強制振動をなす場合を考へることにする．これは Hartog[1)2)] の論文が非常に參考になると考へられるのでそれに從て説明をなすことにした．

$c\dot{u}$ を粘性抵抗の項とし，$P\sin\omega t$ を週期的外力，F を Coulomb の減衰力とする．然るときは

$$m\ddot{u}+ku+c\dot{u}\pm F=P\sin\omega t. \tag{177}$$

Coulomb 減衰性のみを考へると

$$m\ddot{u}+ku\pm F=P\cos(\omega t+\varphi). \tag{178}$$

$+F$ は $\dot{u}>0$ のとき，$-F$ は $\dot{u}<0$ のときに用ひる．$F/k=u_f$，$P/k=a$，$k/m=\omega_n^2$ と置けば上式は次の如くなる：

$$\ddot{u}+\omega_n^2(u-u_f)=a\omega_n^2\cos(\omega t+\varphi). \tag{179}$$

途中で振動がとまらぬときは,條件として

$$\left.\begin{array}{lll} t=0; & u=u_0, & \dot{u}=0, \\ t=\pi/\omega; & u=-u_0, & \dot{u}=0 \end{array}\right\} \tag{180}$$

の如き強制振動があるものとする．u_0 は未だわからない．この條件を入れて問題を解くと $0<\omega t<\pi$ の間は

$$\begin{aligned} u&=u_0\cos\omega_n t+u_f(1-\cos\omega_n t)\\ &\quad+aV\left[\cos\varphi\{\cos\omega t-\cos\omega_n t\}+\sin\varphi\left\{\frac{1}{\beta}\sin\omega_n t-\sin\omega t\right\}\right], \end{aligned} \tag{181}$$

但し

---

1) J. P. Den Hartog, "Forced Vibrations with Combined Viscous and Coulomb Damping," *Proc. 3-int. Congr. f. Appl. Mech.* (Stockholm, 1930), 181–189.

2) J. P. Den Hartog, "Forced Vibrations with Combined Viscous and Coulomb Damping," *Phil. Mag.*, 9 (1930), 801–817.

$$\left.\begin{array}{l} u_0=a\sqrt{V^2-\left(\dfrac{F}{P}\right)^2U^2},\quad \cos\varphi=\dfrac{x_0}{a}\dfrac{1}{V},\quad \sin\varphi=-\dfrac{u_f}{a}\dfrac{U}{V}, \\ \text{且つ} \\ V=\dfrac{\beta^2}{\beta^2-1},\quad U=\dfrac{\beta\sin\beta\pi}{1+\cos\beta\pi},\quad \beta=\omega_n/\omega \end{array}\right\}\quad \left[\begin{array}{c}\dot{x}\leqq 0,\\ 0<t<\pi/\omega\end{array}\right] \tag{182}$$

である．$\dot{u}\leqq 0$ といふ條件は解式を微分して

$$\frac{u_0}{u_f}\geqq\beta^2\left[\frac{\beta\sin\omega_n t+U(\cos\omega t-\cos\omega_n t)}{\beta^2\sin\omega t}\right]\qquad\left[0<t<\frac{u}{\omega}\right] \tag{183}$$

といふことにもなる．この［ ］の極大値を S と書けば

$$\frac{u_0}{u_f}\geqq\beta^2 S.$$

或は前の關係を用ひて

$$\frac{u_0}{a}\geqq\sqrt{\frac{V^2}{1+(U/S\beta^2)^2}}$$

となる．尙別に F を Fourier の級數で展開し，

$$m\ddot{u}+ku=P\cos(\omega t+\varphi)+\frac{4F}{\pi}\sum_{1,3,5,\dots}\frac{1}{n}\sin n\omega t \tag{184}$$

として之を解けば

$$\frac{u}{a}=V\cos(\omega t+\varphi)+\frac{4}{\pi}\frac{F}{P}\beta^2\sum_{1,3,5,\dots}\frac{\sin n\omega t}{n(\beta^2-n^2)} \tag{185}$$

となる．但し φ は $t=0$ で $\dot{u}=0$ といふことから

$$\left.\begin{array}{l}\sin\varphi=\dfrac{4}{\pi}\dfrac{F}{V}\displaystyle\sum_{1,3,5,\dots}\dfrac{1}{\beta^2-n^2},\\ u_0=aV\cos\varphi\end{array}\right\} \tag{186}$$

の如くして定まる．之等の解は前のものと同じものであつて，$0<t<\pi/\omega$ の條件も同じである．

同樣にして運動が $t_0<t<\pi/\omega$ といふ間で一時停止する場合も解くことができる．

次に粘性と Coulomb の兩方の減衰性が働くときには

$$\ddot{u}+\omega_n^2(u-u_f)+\frac{c}{m}\dot{u}=a\omega_n^2\cos(\omega t+\varphi) \tag{187}$$

なる方程式が出る．運動が途中で止まらぬときは前と同じやうにして

$$\frac{u_0}{a}=-G\left(\frac{u_f}{a}\right)+\sqrt{\frac{1}{q^2}-H^2\left(\frac{u_f}{a}\right)^2}, \tag{188}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan(\varphi-\epsilon)=\dfrac{2V}{\beta}\dfrac{c}{c_c},\\ \sin\epsilon=-qH\dfrac{u_f}{a},\quad \cos\epsilon=q\left[\dfrac{u_0}{a}+G\dfrac{u_f}{a}\right],\end{array}\right\} \tag{189}$$

但し

$c_c=2m\omega_n=$ 極限の粘性減衰率，

$p=\omega_n=\sqrt{1-\left(\dfrac{c}{c_c}\right)^2}=$ Coulomb damping のないときの固有振動數，

$q=\sqrt{\dfrac{1}{V^2}+\dfrac{2}{\beta}\left(\dfrac{c}{c_c}\right)^2}=$ .... の振幅，

$$\left.\begin{array}{l}G=\dfrac{\sinh(\beta\pi c/c_c)-\dfrac{c/c_c}{\sqrt{1-(c/c_c)^2}}\sin\beta\pi\sqrt{1-(c/c_c)^2}}{\cosh(\beta\pi c/c_c)+\cos\beta\pi\sqrt{1-(c/c_c)^2}},\\ H=\dfrac{\beta}{\sqrt{1-(c/c_c)^2}}\cdot\dfrac{\sin\beta\pi\sqrt{1-(c/c_c)^2}}{\cosh(\beta\pi c/c_c)+\cos\beta\pi\sqrt{1-(c/c_c)^2}}.\end{array}\right\} \tag{190}$$

上の式によつて種々の $\beta, c/c_c, F/P$ に對して振幅の計算ができる．之等の結果は粘性のみによる減衰のときと多少異なる割合の振幅を與へる．

以上の樣な硏究又はそれに聯關せる問題は Eckolt[1], Thomas[2], Carter[3], Kimball[4], Ormondroyd[5], Holm[6] 其他多くの人々によつて手をつけられてゐることを

1) W. Eckolt, "Über erzwungene Reibungsschwingungen," *ZS. f. tech. Phys.*, 7 (1925), 226–232.

2) S. Thomas, "Vibrations damped by Solid Friction," *Phil. Mag.*, 9 (1930), 329–345.

3) B. C. Carter, "The Effect of Viscous and Solid Friction in Airscrew Drives in Damping Torsional Vibration," *Proc. 3-int. Congr. Appl. Mech.* (Stockholm, 1930), 198a–198e.

4) L. Kimball, "Analysis of Vibration with Solid Friction Damping," *Proc. 3-int. Congr. f. Appl. Mech.* (Stockholm, 1930), 190–198.

5) J. Ormondroyd, "Friction Dampers and their Application to Engines," *Proc. 3-int. Congr. f. Appl. Mech.* (Stockholm, 1930), 221–233.

6) O. Holm, "Die Reibungsdämpfung bei mechanischen Schwingungsmessern," *ZAMM*, 10 (1930), 30–40.

附加へておく．又,田丸博士[1] はこれ等より遙かに前に之に似た問題を理論的に研究した．

24. 僞調和振動 (Pseudoharmonic Vibrations) と擬調和振動 (Quasiharmonic Vibrations)

普通の調和振動ではその復原力が變位に比例するものであつてその解も極めて容易であるけれども,振動體の性質によつては振動式が

$$\frac{d^2u}{dt^2}+n^2f(u)=0 \tag{191}$$

の如き形をなし,而も $f(u)$ は u の一次のものでなくて任意の函數をなすことがある．而してともかくも復原の性質を有するときに之を僞調和振動と稱する．之を一般に解くことは到底できぬけれども,$f(u)$ の形の特別の場合については數學的に楕圓函數を以て解き得ることが屢ゝある．又,場合によつては圖上で積分し得ることもある．

數學的に之を解くには,先づ上式に du を乘じて下の如く積分する:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+n^2\int f(u)du=0. \tag{192}$$

從て, $t=0$ で $\frac{du}{dt}=0$, $u=u_0$ とすれば

$$t=\frac{-1}{\sqrt{2}\,n}\int\frac{du}{\sqrt{\int^{u_0}f(u)du}} \tag{193}$$

となる．今,假りに

$$f(u)=u^3$$

と置けば

$$t=\frac{-\sqrt{2}}{n}\int\frac{du}{\sqrt{u_0^4-u^4}}. \tag{194}$$

振動週期は極限を 0 から x_0 まで取り之を四倍すればよいから,

[1] 田丸卓郎, "Eine Beobachtungsmethode mit gedämpften Schwingungen bei fortrückender Ruhelage, besonders für ein Elektrometer," *Phys. ZS.*, 6 (1905), 289-190.

$$T=\frac{4\sqrt{2}}{n}\frac{1}{u_0}\int_0^{u_0}\frac{d\left(\frac{u}{u_0}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{u_0}\right)^4}}=\frac{4\sqrt{2}}{n}\frac{1}{u_0}\int_0^1\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}=\frac{4\times\sqrt{2}\times 1{\cdot}31}{nu_0}=\frac{5{\cdot}24\sqrt{2}}{nu_0}. \tag{195}$$

卽ち週期が振幅に逆比例するといふやうなことが出るのである．實際問題に於て斯る性質を有するものは極めて少く,實在の現象では寧ろ振幅の大なるものは週期も長いのが普通である．尙,一般に

$$f(u)=au+bu^2+cu^3 \tag{196}$$

と置けば普通の楕圓積分となることは明かである．

又,今の樣な場合の方程式を圖式に積分する事は種々の書物に出て居るが, W. Hort[1] の書物の如きは最も適當なものである．

次に强制振動の場合には

$$\frac{d^2u}{dt^2}+n^2f(u)=a\sin pt \tag{197}$$

の如き形を有してゐるが,その特別な場合

$$\frac{d^2u}{dt^2}+n^2u-mu^3=a\sin pt \tag{198}$$

の如き形をなすときには, $m=0$ の場合の解,卽ち第一近似解 u_1 を

$$u_1=A\sin pt \tag{199}$$

の如く作り,之を微分方程式に代入して第二の近似解 u_2 を求めるのである．卽ち

$$\frac{d^2u_2}{dt^2}=-n^2u_1+mu_1^3+a\sin pt=(a-An^2)\sin pt+A^3m\sin^3 pt \tag{200}$$

を出し,この式を二度積分すれば

$$u_2=\frac{1}{p^2}\left\{An^2-a-\frac{3}{4}mA^3\right\}\sin pt+\frac{m}{36p^2}A^3\sin 3pt \tag{201}$$

が得られる．

第一近似解の振幅と第二近似解の主要振動の振幅とが等しい爲には

[1] W. Hort, *Die Differentialgleichungen des Ingenieurs* (Berlin, 1925).

$$\frac{1}{p^2}\left(An^2-a-\frac{3}{4}A^3m\right)=A$$

であり,從て

$$a+A(p^2-n^2)=-\frac{3}{4}A^3m \tag{202}$$

が出る. 之から A を定めて u_2 の式の中へ入れて置けばよい. 卽ち

$$u_2=A\sin pt+\frac{A^3m}{36p^2}\sin 3pt \tag{203}$$

が解であるから,この中の A に上のやうにして出した値を代入するのである.

同樣にして第三次,第四次の近似解を求めることができる. 但しそのためには $\frac{m}{p^2}A^2$ が 1 に比して小でなければ級數形が converge しない.

之等の委しい議論は G. Duffing[1] の書物を見ればよい. 又,特別な場合は Liénard[2] によつて取扱はれて居る.

振動體に於てその復原力が時間に關係することがある. 之を屢々擬調和振動 (quasiharmonic vibrations) と稱し,次の如き形に置くことができる:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2f\frac{du}{dt}+n^2u=F(t), \tag{204}$$

玆に f や n^2 は時間の函數である. このやうな方程式の出る場合は電氣機關車の側桿の運動による振動がその著明なものであるが,その解法についてはその問題の所で示すこととし,こゝでは單に名稱を擧げるに止めた. 上に揭げた形の式の研究には Balth van der Pol[3] の委しい報告があり, Schwerin[4] も同樣な問題を Bessel

---

1) G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz* (Braunschweig, 1918).

2) A. M. Liénard, "Oscillations auto-entretenues," *C.R. 3-congr. mecanique appl.* (Stockholm, 1930), 3, 173–177.

3) Balth van der Pol, "Electrical and Mechanical Oscillations the Period of which is proportional to a Time Constant (Relaxation Oscillations)," *Proc. 3-int. Congr. f. Appl. Mech.* (Stockholm, 1930), 3, 178–180; "On Relaxation Oscillations," *Phil. Mag.*, 2 (1926), 978–992.

4) E. Schwerin, "Ein allgemeines Integrationsverfahren für quasiharmonische Schwingungsvorgänge," *Verh. 3-int. Kongr. f. tech. Mech.* (Stockholm, 1930), 3, 125–137.

函數を用ひて解いた.

25. 振動曲線の分析及び振動の運動方程式の積分に就て

普通の意味でいふ振動曲線は週期性を有してをるといふ假定のもとにこれに harmonic analysis を施すことができる. それには曲線が或る函數で表すことができれば,數學的の Fourier analysis を用ひ得るし,又たとひそれが數學的函數でなくても方針だけは Fourier analysis の考から,圖上の ordinates をその儘用ひて圖式の分析,又は圖上に於て計算の諸法則をあてはめて分析をなすことができる. それに對して L. Zipperer[1], L. Herrmann, K. Pichelmayer 及 L. v. Schrutka[2], F. Meurer[3], C. Runge 及 F. Emde, L. W. Pollack, Lahr[4], Martens 其他の分析法があり,又器械を使用するものには Henrici 及 Coradi[5], O. Mader[6], E. Lübcke[7] 等の harmonic analysis があり,又我國では野口孝重技師[8] の analyser がある. それ等の議論には Sharp[9] 其他の論文がある. これ等は概して電流波形分析の必要上から發達したものが多く,その方の雜誌を見れば委しく出てをるが,又 Hort[10] の書や Geiger 及 Scheel[11] の教科書にも割合に深い說明が試みられてゐる.

---

1) L. Zipperer, *Tafeln zur harmonischen Analyse periodischer Kurven* (Berlin, 1922).

2) K. Pichelmayer u. L. v. Schrutka, "Eine neue Methode der Analyse von Wechselstromkurven," *Electrotech. ZS.*, 33 (1912), 129–130.

3) F. Meurer, "Eine neue Methode zur Analyse periodischer Kurven," *Electrotech. ZS.*, 34 (1913), 121–123.

4) J. Lahr, "Die Grassmann'sche Vocaltheorie...," *Ann. Phys.*, 27 (1886), 94–119.

5) O. Henrici, "On a new Harmonic Analyser," *Phil. Mag.*, 38 (1894), 110–121.

6) O. Mader, "Ein einfacher harmonischer Analysator mit beliebiger Basis," *Electrotech. ZS.*, 30 (1909), 847–849.

7) E. Lübcke, "Über einen Apparat zur harmonischen Analyse und Synthese von periodischen Kurven," *Phys. ZS.*, 16 (1915), 453–456.

8) 野口孝重, "A New Harmonic Analyser," *Engineering*, 118 (1924), 876–877; 電氣學會雜誌, 第133號 (1924); 機械學會誌, 27 (1924), 第91號.

9) A. Sharp, "Harmonic Analyser, giving Direct Readings of the Amplitude and Epoch of the various constituent Simple Harmonic Terms," *Phil. Mag.*, 38 (1894), 121–125.

10) W. Hort, *Technische Schwingungslehre* (Berlin, 1922), 141–146.

11) Geiger u. Scheel, *Handbuch d. Physik*, 8, Akustik (1927), 21–24.

圖上計算又は Nomogram を用ひることは最近には Sanden[1], Rausch[2], Heck 及 Walther[3] などの報告が出てをる位のものであつてまだ充分改良又は擴張すべき點があるやうに思はれる.

委しい事は上述の參考書類を參照する事にして,玆には一例として野口技師[4]の harmonic analyser の說明をして見たいと思ふ. 野口技師の analyser も前記 Henrici のものと同じ法則,即ち $y=f(\theta)$ なる曲線からその Fourier の係數として

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y\sin n\theta d\theta,\qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y\cos n\theta d\theta$$

を求める法則を用ひてをるけれども,その器械の機構上から,非常に高い次數の係數が出し得るにも拘らず,かなり小さな器械で濟むといふ長所がある.

さて上の係數は

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}y\sin n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\left[-y\frac{\cos n\theta}{n}\right]_{\theta=0}^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos n\theta dy,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}y\cos n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\left[y\frac{\sin n\theta}{n}\right]_{\theta=0}^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin n\theta dy.$$

[ ]の項は零にすることができる. それで後の項だけを積分すればよいのである. この器械では之等の積分は y の方向に動く水平の面を有する面と planimeter 型の積分輪との相對的運動を作ることによつて得られるのである. 第 6 圖に於ける (a) はこの積分輪を示し, (b) では積分輪の軸と ϕ なる方向に y の向きがあるものとする. 即ちその方向に Δy だけの變位があるとき,輪は辷りなく同轉するものとすれば,その同轉は圓周に於て $\Delta y\sin\phi$ の長さだけ廻る筈である. 同樣にして矢の方

---

1) H. v. Sanden, "Das Diagramm von Carl Runge für erzwungene Schwingungen," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 645–647.

2) E. Rausch, "Graphisches Verfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenzen bei mehrgliedrigen Schwingungsanordnungen," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 203–210

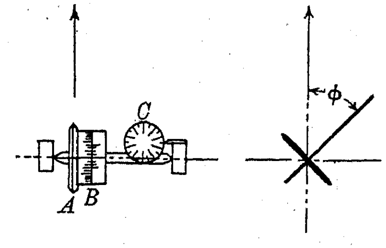
3) O. Heck u. A. Walther, "Nomogramme für die komplexen Wurzeln charakteristischer (insbesondere quadratischer und kubischer) Gleichungen von Schwingungsproblemen," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 611–618.

4) 野口孝重, 前揭.

向とは直角なる向きから車軸が ϕ' だけ角をなすときには車輪は $\Delta y\cos\phi'$ だけ廻るものである.

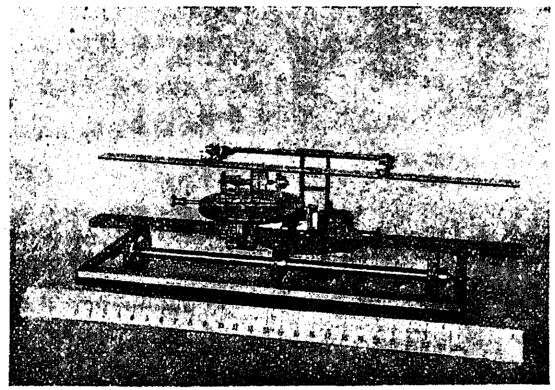
この器械の全體は第 7 圖の寫眞に示すが如き形をなし,その大さは10糎×20糎×35糎位の小さなものである.

器械の機構は第 8 圖でわかるやうに比較的に簡潔なものである. 鎖線は同轉する



(a)　(b)

第　6　圖

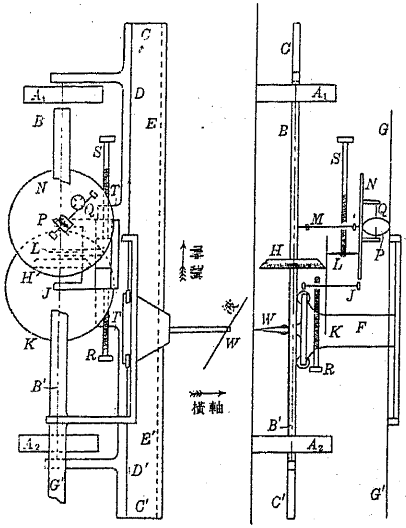


第　7　圖

部分の軸を示す. A_1, A_2 は紙の上を同轉する roller であつて BB′ といふ共通の軸をもつ. この軸は主要枠 CC′ から出てをる二つの枠によつて支へられてゐる. この枠の上面には DD′ といふ溝があり,下面には EE′ といふ溝があつて,之等は何れも三角の斷面を有し, BB′ なる車軸に平行してをる. これ等の中へ F といふ枠車がはまつてゐる.

この器械を用ひる場合には BB′ といふ車軸を y 軸に平行に置き,波形の線を F に附いて居る指示點 W を以て沿はしめるのである. この間に器械は A_1, A_2 の同轉の爲に波の基線即ち θ 軸の方へ動いて行く. 然るに波形の y 成分の爲に F

はDD′ EE′の溝に沿うて器械に對してyの方向へ動く．而してFにはセルロイドにて掩へるガラス板GG′がある爲に,回轉輪Pに$\Delta y\sin\phi$（又は$\Delta y\cos\phi'$）といふ回轉を與へるものである．この回轉輪Pの軸の方向は車軸BB′の回轉のために次の如く決定されるものである：



第 8 圖

車軸BB′の中央點に鋼の摩擦輪Hがあつて,之がJなる軸を有するガラスの水平輪Kの下面に接觸してをる．このKの上面には水平軸のあるLなる鋼の輪が接觸し,このLに更にMなる軸を有するガラスの水平輪Nがある．即ちBB′の回轉が適當に擴大されてNの回轉となるのである．このNなるガラス板の上にはPなる回轉輪の軸の兩端支持點が固定されてをるから,このNの回轉だけPの軸の方向が回轉するものである．

Nの回轉の倍率を適當にして置くと，$\int\sin n\theta dy$, $\int\cos n\theta dy$の任意のnに對する積分が得られるものである．それ故Nの一回轉が分析すべき曲線の全長に相當するときは$\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\theta dy$, $\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos\theta dy$が出るものであり，Nの$n$回轉が分析すべき曲線の全長の間に現はれるものとすれば，$\int_0^{2\pi}\sin n\theta dy$, $\int_0^{2\pi}\cos n\theta dy$が得られる譯である．從てこの器械ではNなる圓形盤の回轉の割合が思ふまゝに調整できなければならないのである．

Rなる螺旋はBB′に平行であつて，K, L, N, Sが載つてゐる所の辷りブロックを押すやうになつてゐる．この辷り運動によつてJなる軸がHに近づけられる程，Kなる圓盤の回轉が速くなる．又,螺旋SはLなる輪の支へを移動させ,以てLなる輪をJ軸とM軸との間の任意の場所へ持つて來ることができ,その結果,

NとKとの回轉の割合を如何樣にも變へることができる．即ちNなる圓盤の回轉はRとSとによつて二重に調整され得るのである．

以上は積分輪が一つしかないから，$\int\sin n\theta dy$及$\int\cos n\theta dy$を出すためには,積分輪の方向を最初に夫々y軸の方向及びθ軸の方向へ向けておいてやればよい．

Fの動く距離は30糎であるから,分析波の全振幅は30糎以下なる事を要する．之以上のときは波をθ軸に平行なる直線によつて半分又はそれ以下に分けてそれぞれについてやればよい．次に波長については,この器械は0·5糎から130糎までやれる．K及Nの直徑は7·6糎，JとMとの距離は4·2糎あり，Lなる輪はJ軸及M軸から6粍の距離まで近づけることができるから，從てNとKとの回轉比は1/6から6まで,換言すれば1と36の比の割合までやれる．又J軸はHの輪から3·5糎乃至0·5糎の距離に動かせる．即ち7と1との比である．之等を結合して考へると，Nの一回轉が器械のθの方向の變位0·5糎から130糎に相當せしめることができる譯である．之等の事から,この器機では主要波長130糎に對し第260次の副波長まで分析し得る筈であるけれども,實用上では高次のもの程誤差が入ることは免れ得ない．130糎のものでは第35次までは正確であり,主要波長5糎の場合には第10次まで確かであつた．野口技師は比較の爲にこの器械を用ひて數學的に既知の曲線を分析し,かなり好結果を收めた．以上の説明は野口技師の論文の大要そのまゝである事を附加へておく．

次に實験の分析でもなく,又單に數理上の作圖でもなく,振動の運動方程式を作つてその解を求める方法はやはり昔から行はれてゐる事であつて,殊更に説明を加へる必要もないが,こゝで注意したい事は普通出て來る微分方程式の非常に多くの部分が振動の問題に關聯し,又時には斯る實際問題の必要上から發達したことである．それで振動に關聯せる方程式を玆に列擧する事は實驗による振動曲線に種々の分析法がある以上に數多くあつて,餘りに煩はしい次第である．積分方程式や楕圓積分の問題,又Laméの函數等も亦振動問題に關聯して發達したものが多い．故にこゝに一々之等を列擧することの價値は充分にあるにしても,その結果は恰も數學の敎科書と化し去る虞れもあり,こゝにはたゞ深い關係のあることを注意するに

止めて,單に最近實際家のやつた二三の例を擧げると Hort[1], Klotter[2], Soderberg[3], Hohenemser[4] などのものであらうと思ふ. この Hohenemser のものは積分方程式によつて取扱はれてゐる.

---

1) W. Hort, "Die zeichnerische und rechnerische Näherungsbehandlung der Schwingungsdifferentialgleichung," *ZS. f. tech. Phys.*, 1 (1920), 182–189.

2) K. Klotter, "Über die Eigenschwingzahlen beliebiger Ordnung nach dem Verfahren von Ritz," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 491–498.

3) C. R. Soderberg, "On the Practical Application of the Theory of Vibrations to Systems with several Degrees of Freedom," *Phil. Mag.*, [7], 5 (1928), 47–66.

4) K. Hohenemser, "Praktische Wege zur angenäherten Schwingungsberechnung elastischer Systeme," *Ing. Arch.*, 1 (1930), 271–292.