第六章　桁ニ關スル理論

(Theory on the Strength of Beam)

第一節　外力ノ關係

(General Relation of External Forces)

茲ニ Fig. 104 ニ示スABナル棒(Bar)ヲ正座標軸 (Rectangular co-ordinate axes) X, Y, Z ニ關シテ考ヘX軸ハ棒ノ重心ヲ通ジ他ノY及Z軸ハコレニ直角ナルモノトスル.今夫等自身ガ相互ニ平衡ニアル

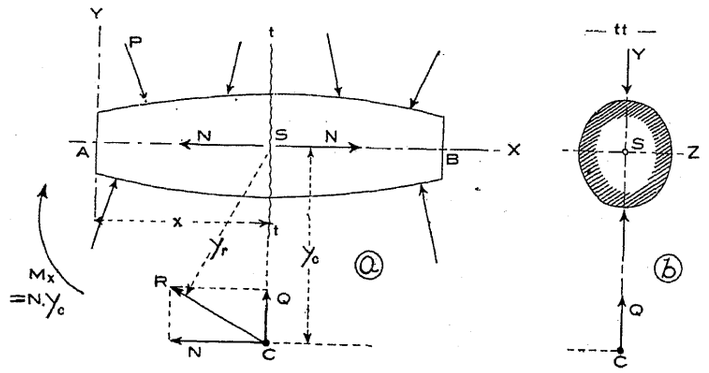


Fig. 104.

所ノ外力ガ此棒ニ働クモノトシ其作用スル平面ハ圖示ノ如クY軸ヲ通ジテノ一垂直面内ニアルモノトス,コノ平面ヲ**力面** (Plane of forces) ト名附ク.

此外力ニ依ツテ彎曲 (Bending) ト云フ變形ガ生ジ是ニ伴ツテ内部ニハ彎曲應力ガ起ル,斯クノ如キ變形及應力ヲ受ケル棒ヲ**桁** (Beam) ト稱スル。

今此桁ヲ左端カラ距離 x ノ斷面 tt ニテ二個ニ切斷シタモノト考ヘル時ハ此場合此斷面ニ於テ生ズル内力即チ應力ハ勿論其桁ノ左右何レカノ側ニ於ケル外力ト平衡ヲ保タネバナラヌ,茲ニ斷面 tt ノ左側ニ於ケル外力ハ其數ニ關セズコレヲ合成力ニシテ考ヘテRナル値ヲ有シ tt 斷面ヲC點ニテ切ルモノト假定シヤウ,即チRハ斷面ノ重心Sカラハ y_c ダケノ偏倚ヲ以テC點ニ働クモノデアツテ且ツRハ一般的ニハ tt 斷面ニ對シテ傾斜シテ居ル故ニ是レヲ垂直分力Nト切線分力Qトニ分ツモノトスレバ勿論此兩者共ニY軸ヲ通ズル力面内ニアル事ハ明カデアル,然ル時ハ垂直分力Nノ重心Sカラノ挺率ハ y_c デアリ合成力R自身ノS點カラノ垂直距離ハ y_r デアル,斯クノ如ク偏倚ヲ有シテ作用スル力ヲ考フル場合ニハ常ニ次ノ如クシテ考フルガ便デアル,即チ垂直分力Nト等シク且ツ反對ノ方向ヲ有スル二力N及Nガ重心Sニ於テ働クモノト考ヘル,然ル時ハ此右向キノNトC點ニ働クNトデ以テ挺率 y_c ノ偶力ヲ發生シ他ニ一ツノ左向キノNガ重心Sニ殘ルノデアル,即チ偏倚的 (Eccentrically) ニ働イタNナル力ハ軸ニ沿フNト更ニ偶力率 $M_x=N.y_c$ トノ二ツニヨツテ置換ヘラレル事トナル,即チ

N ＝直力 (Normal axial force)

及ビ　M_x＝偶力率又ハ**彎曲力率** (Couple moment or Bending moment)

$=N.y_c+Q.O=N.y_c=R.y_r$

ノ二力ニヨツテ置換ヘラレル。

斯クノ如ク外力ハ極ク一般的ニ云ヒテコレヲ三ツノ力即チ

Q ＝剪力 (Shearing force in the section)

N＝直力 (Normal axial force)

M_x＝彎曲力率 (Bending moment)

ニ分解シテ取扱フ事ガ出來ル,換言セバRノ働キハ此三力 Q, N, M_xノ働キト同一デアル,則チ此三力ニ就イテ更ニ研究ヲ進メヤウ。

第二節　內力ノ關係

(General Relation of Internal Forces)

Fig. 105 ハ Fig. 104 ト同ジ桁ヲ採リ外力ハ三力ニ分解サレ斷面ニ對シテハ剪力Q,直力N及彎曲力率M_xトシテ働クモノト考ヘル。

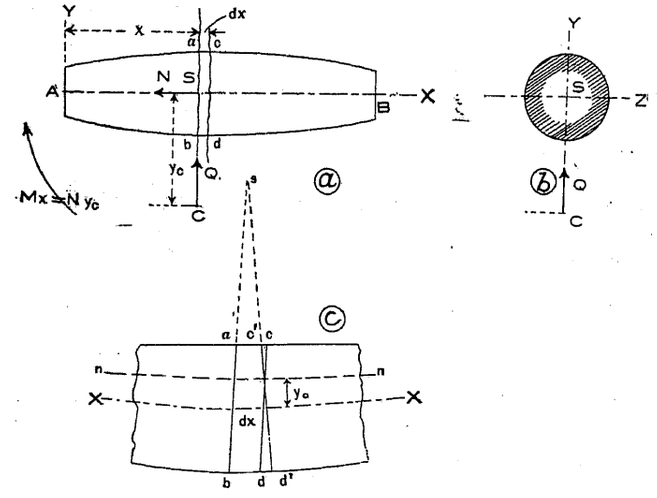


Fig. 105.

此三力ノ內Qガ其桁ニ働ク影響ハ是ヲ後節ニ譲リ茲ニハ直力N彎曲力率M_xガ如何ナル影響ヲ及ボスカニ就キテ研究ヲ進メヤウ,是レニ先ダチ先ヅ次ノ如キ假定ヲ前提トス,卽チ

『桁ノ內ニ採ラレタ斷面ハ彎曲後モ尙平面ニテ存在ス』

圖ノ*ab*ト*cd*トハ*dx*隔タレル平行斷面トシ夫レガ桁ニ荷重ガ働イテ彎曲シタ結果此二平面ハ平行デナクナリⓒ圖ニ示ス如ク相交

ルニ至ル,此交線ハ力面ノ關係上Z軸ニ平行ナル線トナリ其線ノ圖上ニ表ハレタ點ヲ*s*トスル,斯クノ如ク荷重ノ爲メ彎曲シタ結果ⓒ圖ニ於テ元來*bd*デアツタ纖維ハ伸長シテ*bd'*トナり始メ*ac*デアツタ纖維ハ縮小シテ*ac'*トナル,斯クノ如キ長サノ變化ハ圖上*nn*線カラノ距離ニ正比例シ且ツZ軸ニ平行ナ線上ノ總テノ點ニ就イテ等シクナケレバナラヌ,尙變形ニ對シテ生ズル應力ハ變形量ニ比例シ且ツ

$$\frac{\triangle dx}{dx} = \frac{\triangle l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

デアル故ニ$\triangle dx$ナル變形ノ等シイ點ニテハ應力σモ亦等シイ筈デアル,故ニZ軸ニ平行ナ線上ニアル等シキ變形ヲ爲ス總テノ點ハ等シキ應力ヲ受ケル事ヲ知ル。

斯クノ如ク一斷面ニ於ケル下端ト上端トノ纖維ハ一方ハ伸ビ一方ハ縮ムノデアルカラ其中間ノ纖維ヲ考ヘレバ伸長カラ縮小ニ移ル所ニ伸縮共ニ零從テ應力ガ亦零デアル點ガアル筈デアル,此ノ伸縮,應力共ニ零デアルZ軸ニ平行ナ層ヲ**中立層** (Neutral layer),其圖上ニ表ハルル線*nn*ヲ**中立線** (Neutral line) 或ハ**中立軸** (Neutral axis) ト云フ。

Fig. 106 ニ於テ中立線ガ重心軸カラ隔レル距離ヲy_oトス,今二斷面*ab*, *cd*, ノ一方*ab*ガ固定サレタルモノト考ヘレバ*cd*ハ中立線ヲ軸トシテ廻轉スルモノト考ヘ得ル,從テ*cd*面上ノ各點ノ移動 (Displacement) 從テ其各點ノ應力ハ此中立線カラノ距離ニ比例スルヲ見ル,故ニ今圖上ノ任意層*mm*ヲ考ヘ其Z軸カラノ距離ヲ*y*トスル時ハ此層ハ中立線カラy_o+yトナリ前述ノ如ク應力ハ中立線カラノ距離ニ比例スル故ニ此層ノ總テノ點ノ應力ハ

$$\sigma = C(y_o + y) \quad \cdots\cdots(\alpha)$$

式中　　C＝未知ノ定數

ニテ與ヘラレル,今 $y=o$ ノ時ニハ Z 軸ノ應力ヲ示ス事トナリ

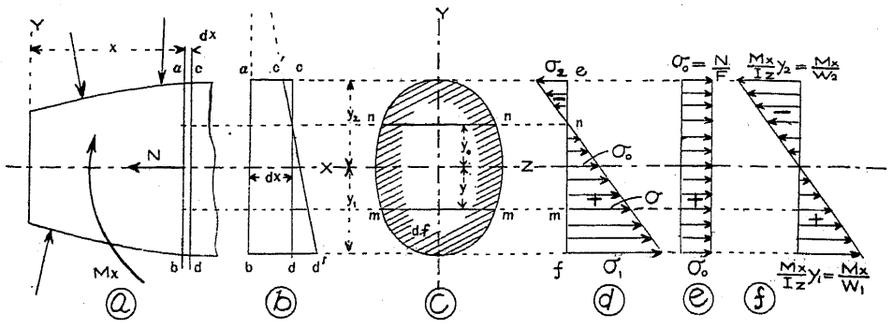


Fig. 106.

$$\sigma_o = Cy_o$$

此式ヲ(α)式ニ挿入シ

$$\sigma = \sigma_o + Cy \quad \cdots\cdots(b)$$

トナル,此應力 σ ヲ圖示スル爲メニⓐ圖ニ一ツノ垂直線 *ef* ヲ引キ其線上ノ *m* 點ニ今求メラレタ σ ヲ水平縱距 (Horizontal ordinate) トシテ置ケバ玆ニ直線ニテ圍マレタル一ツノ面積卽チ**應力圖** (Stress diagram) ナルモノガ得ラレル,此ⓐ圖ニ於テ *nn* 軸ノ所ニ縱距零ノ點ガ存在シ最大應力ハ Z 軸カラ最モ遠ク隔ツタ點卽緣維 (Remotest fibre) ニ起ル,是レ卽チ圖上ノ σ_1 及 σ_2 デアル,尙 *nn* ヨリモ下方ノ斷面ハ從テ應張力ヲ受ケ上方ノ斷面ハ從テ應壓力ヲ受ケルヲ見ル。

是等ノ內力ハ外部ヨリ作用スル直力 N 及彎曲力率 M_x ト平衡ヲ保タネバナラヌノデアル,則チ先ヅ任意層 *mm* 上ニ *df* ナル極微

面積ヲ採リテ考ヘ

df 面上ノ應力 $= \sigma.df$

此力ノ Z 軸ニ對スル靜力率 $= \sigma.df.y.$

故ニ平衡條件ヨリ次ノ式ヲ得ル

$\Sigma H = 0$ ヨリ　　$N = \int \sigma.df$

$\Sigma M = 0$ ヨリ　　$M_x = N.y_o = \int \sigma.y.df$

此二式ニ任意點ノ應力 $\sigma = \sigma_o + Cy$ ヲ挿入シ

$$N = \int (\sigma_o + Cy)df = \sigma_o \int df + C\int y.df$$

$$M_x = \int (\sigma_o + Cy)y.df = \sigma_o \int y df + C\int y^2 df$$

此式ニ於テ

$\int df = F =$ 斷面積

$\int y.df =$ Z 軸ニ對スル斷面ノ靜力率 (Statical moment of the cross section about Z-axis)

然ルニ Z 軸ハ重心ヲ通ズルガ故ニ

$$\int y.df = 0$$

更ニ　　$\int y^2 df =$ Z 軸ニ對スル斷面ノ**慣性能率** (Moment of inertia of the cross section about Z-axis)

$\equiv I_z$

是等ノ値ヲ上ノ二式ニ入レ

$$N = \sigma_o \int df = \sigma_o.F$$

$$M_x = C\int y^2.df = C.I_z$$

此式ヲ書キ直セバ

Z 軸ニ於ケル應力　$\sigma_o = \frac{N}{F}$

未知定數　$C = \frac{M_x}{I_z}$

(*b*)式卽チ $\sigma = \sigma_o + Cy$ ニ此値ヲ挿入シテ次ノ一般式ヲ得ル。

$$\sigma = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{F}} + \frac{\mathbf{M}_x}{\mathbf{I}_z}\boldsymbol{y} \quad \cdots\cdots(88)$$

此式ハ任意層 *mm* 上ニ於ケル總テノ點ノ應力ヲ與フルモノデアツテ可變數 *y* ヲ含ム一次式デアル。

此式ヲ利用シ與ヘラレタ直力N及彎曲力率Mニ對スル中立線ノ位置ヲ決定スル事ガ出來ル,卽チ中立線デハ應力ハ零デアルカラ(88)式ニ $\sigma=0, y=y_o$ ト置キ

$$0 = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_z} y_o$$

$$\therefore \quad y_o = -\frac{N.I_z}{M_x.F} \quad \cdots\cdots(89)$$

コレ中立線ト重心軸トノ間ノ距離デアル,此式ヲ變形スル爲メニ

$$\frac{I_z}{F} = r_z^2$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \text{Z 軸ニ對スル斷面ノ環動半徑 (Radius of gyration)}$$

及ビ　$M_x = N.y_c$　ヲ用ヒ

$$y_o = -\frac{N.r_z^2}{N.y_c} = -\frac{r_z^2}{y_c} \quad \cdots\cdots(90)$$

此式ガ負號ヲ有スルハ Fig. 105 ニ於テSヨリ下方ニC點ノ距離 y_c ヲ測ツタト反對ノ方向卽チS點ヨリ上方ニ y_o ガ $\frac{r_z^2}{y_c}$ ダケ隔ツテ居ル事ヲ示ス。

此斷面中ノ σ ノ最大値ハ(88)式ニ於テ y ニ對シ y_1 又ハ $-y_2$ ヲ置ケバ得ラレ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_z} y_1 \\ \sigma_2 &= \frac{N}{F} - \frac{M_x}{I_z} y_2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(91)$$

是レ此斷面ニ起ル最大應力ヲ示スモノデアル。

此式中ノ $\frac{I_z}{y_1}$ 及 $\frac{I_z}{y_2}$ ハ斷面ノ形ニヨツテ變ル値デアツテ普通次ノ如ク表ハス

$$\frac{I_z}{y_1} = W_1, \quad \frac{I_z}{y_2} = W_2$$

式中　W_1 及 W_2 ＝ **斷面ノ下端及上端纖維ニ對スル斷面係數.**

(Section modulus of the cross section with regard to the bottom and the top fibre respectively)

此値ヲ用ヒテ(91)式ヲ書キ直シ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_1} \\ \sigma_2 &= \frac{N}{F} - \frac{M_x}{W_2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(92)$$

(91)式或ハ(92)式カラ容易ニ認メ得ラルル如ク Fig. 106 ⓓ ノ應力圖ハ二ツノ部分カラ成立ツモノデアル,卽チ是等ノ式ノ右邊ガ二項カラ成立ツ如ク ⓓ 圖ハ ⓔ 圖ト ⓕ 圖トカラ成立ツモノデアル,其 ⓔ 圖ハ直力ニ因ツテ起ル應力卽チ式ノ第一項ニ當ルモノ ⓕ 圖ハ彎曲力率ニ因ツテ起ルモノ,式ノ第二項ニ相當スルモノデアル,卽チ直力ニ因ツテ起ルモノハ其總テガ同一性質ノ直應力デアリ彎曲力率ニ因ツテ起ル應力ハ一部應張力一部應壓力デアル,此兩者ヲ結合スレバ ⓓ ノ應力圖トナリZ軸ニ於テハ直力ニヨル應力 $\sigma_o = \frac{N}{F}$ ノミガ存在シコレヨリ下方デハ應力ハ增シ上方デハ應力ハ減ズルモノデアル。

上式ハ一般的ニNトMトノ働ク場合ヲ考ヘタノデアツテ其何レカ一方ノミノ働ク時ニハ他ヲ消セバヨイノデアル,例ヘバ直力Nノミガ作用スル時ニハ此式ハ

$$\sigma=\frac{N}{F}$$

トナリ又彎曲力率Mノミガ作用スル時ニハ此式ハ

$$\sigma=\frac{M}{I}y=\frac{M}{W}$$

ナル簡單ナ形トナル。

第三節　桁(外力ノ垂直ナル場合)

(Ordinary Beam—External Forces being Vertical)

Fig. 107ニ示ス AB ナル直桁 (Straight beam) ガ横荷重 (Transverse load) 卽チ垂直荷重 (Vertical load) ノミヲ受クルモノトス,今任意斷面 tt ヲ作リ其左側ノミノ外力ノ合成力Rヲ求ムレバコレモ矢張リ垂直デアル筈デアル,卽チ Fig. 105 ニ於ケルQナル剪力ノ方向ト一致スル,卽チ此場合ニハ直力Nハ存在セズ剪力Qハ合成力Rト同ジモノトナル,而シテRノ量ハ其斷面左側ノ荷重ノ代數和ニ依ツテ容易ニ求メラレ

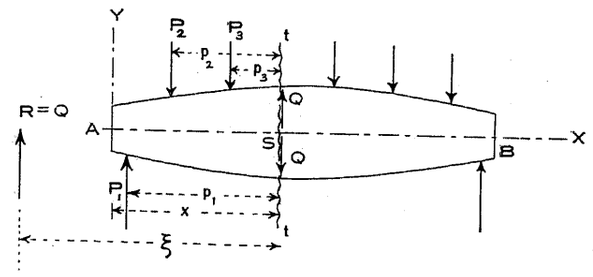


Fig. 107.

$$R=P_1-P_2-P_3=\sum_o^x P$$

其斷面 tt ヨリノ距離ヲ ξ トスル。

斯クノ如ク合成力ガ斷面 tt ノ重心ヨリ隔ツテ働ク時ハ Fig. 104 ニ於テ用ヒタト同樣ノ手段ヲ用ヒ重心Sニ合成力R(=剪力Q)ニ等シクシテ反對ニ向フ二力ヲ働カシテ考ヘル,然ル時ハS點ニ働ク下向キノQハ合成力 R=Q ト挺率 ξ ヲ以テ偶力率 (Couple moment) ヲ作ル事トナリ更ニ一ツノQガ斷面ニ沿フテ殘リ其斷面ニ於ケル剪力トシテ作用スル,從テ重心ヨリ ξ ダケ隔ツテ働イタ R=Q ニ因ツテ此斷面ニハ

$$Q=\text{剪力}$$

$$M_x=\text{彎曲力率}=Q.\xi=R.\xi$$

ガ生ジ且ツ一般的ニ合成力ノ力率ハ各力ノ力率ノ總和ニ等シキガ故ニ

$$M_x=R.\xi=P_1.p_1-P_2.p_2-P_3.p_3.$$

$$\therefore\quad \xi=\frac{M}{R}=\frac{P_1.p_1-P_2.p_2-P_3.p_3}{P_1-P_2-P_3}$$

$$=\frac{\sum_o^x P.p}{\sum_o^x P}.$$

斯クノ如ク斷面ニ沿フテ働ク剪力ノ外ニ生ジタ偶力率 M_x ヲ稱シテAヨリ x ノ距離ノ斷面ニ於ケル**彎曲力率** (Bending moment) ト云フ。

第二節ト比較シテ此場合ニハNハ無クナリQトMトノミ存在ス,其二ツノ內Qニ就キテハ玆ニ說カズ,Mノミノ影響ヲ考ヘテ見ルニ一般式(91)ニ於テN=oト置ケバ得ラレ

$$\sigma=\frac{M_x}{I_x}y\cdots\cdots\cdots\cdots(93)$$

又同樣ニ最遠纖維ノ最大應力卽緣維應力ハ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{M_x}{I_z}y_1 = \frac{M_x}{W_1} \leqq k_t \\ \sigma_2 &= \frac{M_x}{I_z}y_2 = \frac{M_x}{W_2} \leqq k_c\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(94)$$

尙(93)又ハ(94)式ヨリ得ラルル如ク任意斷面ノ彎曲力率ハ

$$M_x = \frac{\sigma_1}{y_1}I_z \leqq \frac{k_t}{y_1}I_z$$
$$\leqq k_t.W_1$$
$$M_x = \frac{\sigma_2}{y_2}I_z \leqq \frac{k_c}{y_2}I_z$$
$$\leqq k_c W_2$$

又ハ一般的ニ次ノ條件ヲ滿足セネバナラヌ。

$$M_x \leqq k.W$$

此意味ニ於ケル $k.W$ ノ値ヲ斷面ノ**抵抗力率** (moment of resistance) ト云ヒ外力ニ因ル彎曲力率ヨリ大ナルカ又ハ極限ニ於テ等シキ事ヲ要ス。

或材料ニ對シテハ k ノ値ハ一定デアル故ニ其斷面係數ノ大ナル程ヨリ大ナル彎曲力率ニ耐エル事ガ出來從ツテ桁ノ强度ハ大トナルノデアル,卽チ桁ノ强度ハ其斷面係數ニ正比例スルト云ヒ得ル。

要之(93)式又ハ(94)式ヨリ見ル如ク應力ハ其斷面ノ彎曲力率ニ正比例シ,斷面係數ニ逆比例ス,尙此場合ニハ中立軸ハ重心軸ニアリテ Fig. 108 ノ如キ應力圖ヲ有スル事トナル,此事實ヲ證明スルタメニ今 Z 軸ヨリ y_o ノ距離ノ點ノ應力ヲ σ_o, y ノ距離ノ點ノ應力ヲ σ トセバ

$$\frac{\sigma}{\sigma_o} = \frac{y}{y_o} \quad 或ハ \quad \sigma = \frac{\sigma_o}{y_o}y,$$

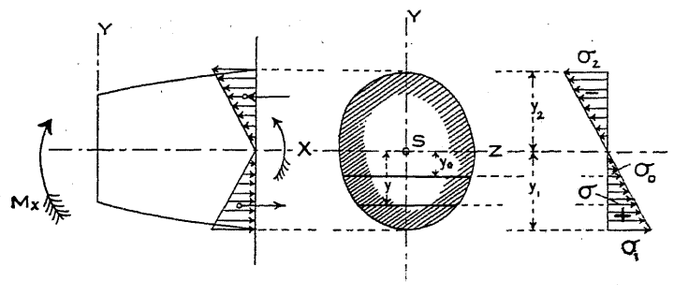


Fig. 108.

$\sum H=0$ ノ條件ヨリ

$$\int \sigma.df = 0 \quad 或ハ \quad \frac{\sigma_o}{y_o}\int ydf = 0$$
$$\therefore \quad \int y.df = 0$$

然ルニ此 $\int y.df$ ハ Z 軸ニ對スル斷面ノ靜力率デアル,其力率ガ零デナケレバナラヌト云フ事ハ中立線ガ Z 軸ト一致シ斷面ノ重心ヲ通ラネバナラヌ事ヲ意味スルノデアル。

尙 Z 軸ニ對スル力率ノ式ヲ作リ

$$\int \sigma.y.df = M_x$$

或ハ $$\frac{\sigma_o}{y_o}\int y^2.df = M_x$$

然ルニ $\int y^2.df = I_z$ デアルガ故ニ

$$\frac{\sigma_o}{y_o}I_z = M_x$$
$$\sigma_o = \frac{M_x}{I}y_o$$

從ツテ $$\sigma = \frac{M_x}{I_z}y \cdots\cdots(93)式參照$$

是卽チ(93)式ヲ根本的ニ誘導證明シタルモノデアル。

斯クノ如ク此場合ニハ應力ハ單ニ彎曲力率ノミニ正比例スルガ故ニ均一斷面ノ桁ノ場合ニ於テハ最大應力ハ如何ナル斷面ニ起ルカト云ヘバ彎曲力率ノ最大ナル斷面ニ於テ起ルノデアル,斯

ノ如ク均一斷面ノ桁ニ於ケル彎曲力率ノ最大ナル斷面ヲ**危險斷面** (Dangerous section) ト稱ス,均一斷面ヲ有スル如キ桁ヲ取扱フ場合ニ研究スベキ事項ハ如何ナル點ニ如何ナル量ノ最大彎曲力ガ起ルカヲ決定シ次イデ是ヲ用ヒテ其斷面ノ最遠纖維ニ如何ナル應力ガ發生スルカヲ計算スレバヨイノデアル。

最大應力ハ(94)式ヨリ知ル如ク

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_1}, \quad \sigma_2 = \frac{M_x}{W_2}$$

一般的ニハ $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$

デ得ラレ,斯クノ如ク求メタル最大應力ガ

$$\sigma_{max} \leqq k_t \text{ 或ハ } k_c \text{(其內ノ小ナル方ヲ採ル)}$$

又ハ $\sigma_{max} \leqq k_b$

式中 k_b = **許容彎曲應力** (Allowable strength of the material against bending)

以上ノ說明ハ普通ノ桁ニ對スル應力 σ(極限ニ於テ k), 彎曲力率M及ビ斷面係數Wノ間ノ關係ヲ與ヘタノデアル,而シテ此三ツノ內Mノ價ハ其桁ノ荷重ガ與ヘラルレバ後述(第七節以後ニ於テ)ノ如ク容易ニ決定セラルルモノデアリWハ斷面ガ與ヘラレサヘスレバ之レモ容易ニ知ラレ得ルモノデアル,然レバ前述三者ノ關係ヲ知リサヘスレバ茲ニ其何レカノ二ツヲ知リテ他ノ一ツヲ計算シ得ルノデアツテ

(a)荷重ト斷面トヲ與ヘテ應力ヲ算定スル事。

(b)材料ノ强度ト荷重トヲ與ヘテ斷面ヲ決定スル事。

(c)材料ノ强度ト斷面トヲ與ヘテ其耐ヘ得ル荷重ヲ求ムル事。

此三ツノ場合ヲ容易ニ計算シ得ラレル。

第四節 慣性能率 (Moment of Inertia)

(I) 簡單ナル斷面ノ慣性能率 (Moment of inertia of the simple surface)

茲ニ任意ノ斷面ガ與ヘラレテ其任意ノ軸 OO (Fig. 109 參照)カラ y ノ距離ニ極微面積 df ヲ採リ其 OO 軸ニ對スル慣性能率ヲ求ムレバ

$$dI = y^2.df.$$

此 dI ハ常ニ正デアル,コレ y ガ y^2 トナツテ表ハレルカラデアル,全斷面積ノ慣性能率ハ

$$I = \int y^2 df$$

此式ニ見ル如ク積分ノ値ハ y ノミノ函數デアル,故ニコノ面積 df ヲ OO 軸ニ平行ニ移動サセテモ y ハ變ラナイ故ニ慣性能率ニハ變化ハ無イ,同樣ニ此斷面ノ一部分例ヘバ Fig. 109 ニ於ケル ab 線以上ノ面積ヲ軸ニ平行ニ動カシテモ何等變化ハ無イ,從ツテ次ニ示ス三通リノ群ハ等シイ慣性能率ヲ有スル事ヲ知ル。

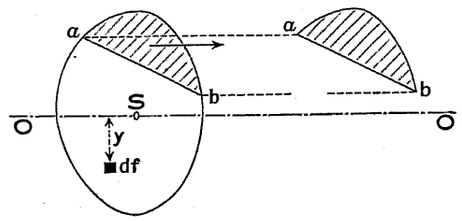


Fig. 109.

(1)矩形及是レト等シキ底及高ヲ有スル平行四邊形ガ底邊ニ平行ナル軸ニ對スル慣性能率 (Fig. 110 ⓐ參照)

(2)等シキ底及高ヲ有スル三角形ガ底邊ニ平行ナル軸ニ對スル慣性能率 (Fig. 110 ⓑ參照)

(3)中空矩形及其變形 (Fig. 110 ⓒ參照)

(II) 平行軸ニ對スル慣性能率 (Moment of inertia about parallel axis)

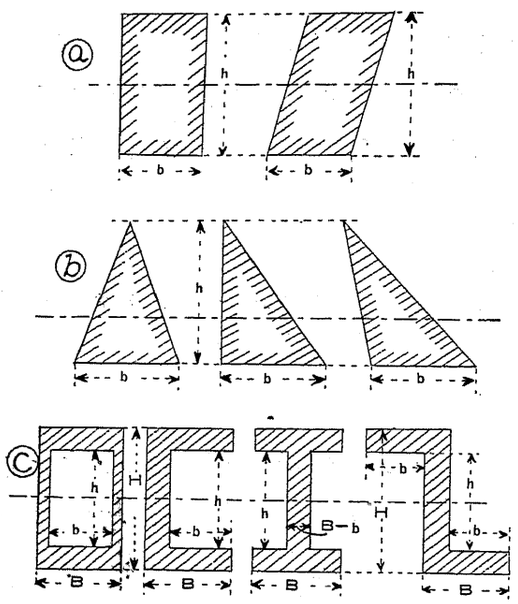


Fig. 110.

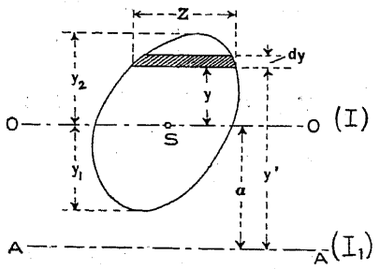


Fig. 111.

Fig. 111 ニ於テ與ヘラレタル斷面ノ重心 S ヲ通ズル軸 OO ニ對スル此斷面ノ慣性能率ヲ I トシ極微面積 $df=z.dy$ ガ此軸カラノ距離ヲ y トスレバ

$$I=\int y^2.df=\int y^2.z.dy$$

次ニ OO 軸ニ平行ナル他ノ軸 AA ヲ考ヘ其 OO 軸トノ間隔ヲ a トス，然ル時ハ df ナル面積ガ AA 軸カラノ距離ハ

$$y'=y+a$$

從ツテ AA 軸ニ對スル慣性能率ハ

$$I_1=\int y'^2df=\int(y+a)^2.df=\int(y^2+2ay+a^2)\,df$$

$$=\int y^2.df+2a\int y.df+a^2\int df$$

$$=I+2a\times o+a^2F$$

$$\therefore\quad I_1=I+a^2F \quad\cdots\cdots(95)$$

(III) 集成斷面ノ慣性能率 (Moment of inertia of compound surface)

Fig. 112 ハ三部分ヨリ成ル集成斷面トシ各々 F_1, F_2, F_3 ナル斷面ヲ有シ其重心ヲ夫々 s_1, s_2, s_3 トス，茲ニ別ニ軸 AA ヲ與ヘ此軸ニ對スル此斷面ノ慣性能率ヲ求メントス。

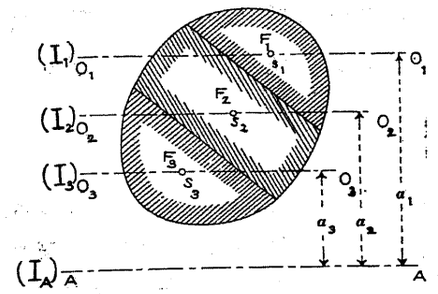


Fig. 112.

先ヅ各部分ノ重心ヲ通ジ與ヘラレタル AA ニ平行ナル軸ヲ考ヘ其三軸ガ與ヘラレタル軸 AA トノ距離ヲ a_1, a_2, a_3 トス，而シテ

$I_1=O_1O_1$ 軸ニ對スル F_1 ノ慣性能率

$I_2=O_2O_2$ 〃 〃 F_2 〃 〃

$I_3=O_3O_3$ 〃 〃 F_3 〃 〃

(95)式ニヨリ此各部分ノ軸 AA ニ對スル慣性能率ハ

$$I'_1=I_1+a_1^2F_1$$

$$I'_2=I_2+a_2^2F_2$$

$$I'_3=I_3+a_3^2F_3$$

コレヲ合計シタモノガ與ヘラレタ慣性能率トナリ

$$I_A=I'_1+I'_2+I'_3=\Sigma(I+a^2F) \quad\cdots\cdots(96)$$

モシ斷面ガ二個ノ斷面ノ差ヨリ成ルモノト見得ラルル場合ニハ其斷面ノ慣性能率ハ相互差引キテ求メラレル，例ヘバ Fig. 113 ⓐニ示ス中空矩形ノ慣性能率ハ ABCD 及 $abcd$ ナル兩矩形ノ差ト見ラレル故ニ其二個ノ矩形ノ慣性能率ノ差ニヨツ

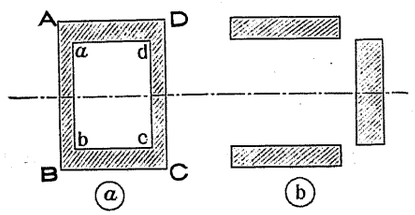


Fig. 113.

テ求メラレル,又ハコレヲ集成斷面ト考ヘ⑥圖ノ如ク水平矩形二個ト垂直矩形一個トノ和ト考ヘテコレヲ計算スル事モ出來ル。

(IV) 慣性能率及斷面係數ノ算定例。

(1) 矩形斷面(幅 b, 高 h)

OO 軸ニ對スル慣性能率テ求メンニハ Fig. 114 ニ示ス如ク軸ニ平行ナル薄片 (Thin slice) テ考ヘ其幅 dy, 長 b, 軸カラ y 隔ツルモノトセバ此薄片ノ面積ハ $df=b.dy$ トナリ

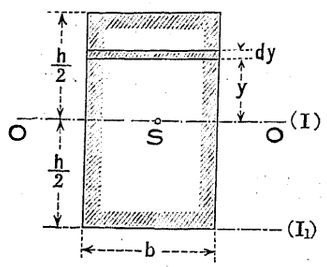


Fig. 114.

$$I=\int y^2.df=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2.b.dy=b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2dy=\frac{bh^3}{12} \quad \cdots(97)$$

底邊テ軸トスル場合ノ此斷面ノ慣性能率ハ(95)式ニヨリ

$$I_1=I+a^2.F=\frac{bh^3}{12}+\left(\frac{h}{2}\right)^2bh=\frac{bh^3}{3} \quad \cdots\cdots(98)$$

上端及下端纖維ハ中立線ヨリ等距離ニアル故此兩纖維ニ對スル斷面係數ハ相等シク

$$W_1=W_2=W=\frac{I}{\frac{h}{2}}=\frac{bh^2}{6} \quad \cdots\cdots(99)$$

正方形斷面ニ對スル値テ求メンニハ(97)及(99)式ニ於テ $b=h$ ト置キ

$$I=\frac{b^4}{12} \quad \cdots\cdots(100)$$

$$W=\frac{b^3}{6} \quad \cdots\cdots(101)$$

(2) 中空矩形斷面

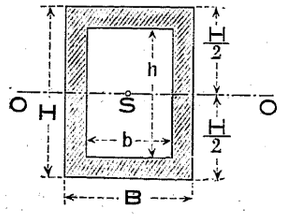


Fig. 115.

中空矩形ハ二個ノ矩形ヨリ成ルモノト考ヘ得ル,而シテ外部ノ大ナル方ノ矩形ガ重心軸 OO ニ對スル慣性能率ハ

$$I'=\frac{BH^3}{12}$$

內側ノ小ナル矩形ノ慣性能率ハ

$$I''=\frac{bh^3}{12}$$

(III) 又ハ(96)式ニ說明シタ所ニヨリ重心軸 OO ニ對スル中空矩形ノ慣性能率ハ

$$I=I'-I''=\frac{BH^3-bh^3}{12} \quad \cdots\cdots(102)$$

最遠纖維迄 OO 軸カラノ距離ハ $\frac{H}{2}$ ナレバ是レニ對スル斷面係數ハ

$$W=\frac{I}{\frac{H}{2}}=\frac{BH^3-bh^3}{6H} \quad \cdots\cdots(103)$$

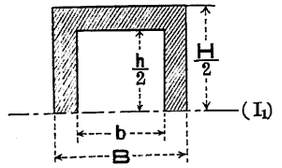


Fig. 116.

又ハ Fig. 116 ニ示ス如ク考ヘ(98)式ニヨリ

$$I_1=\frac{1}{3}\left\{B\left(\frac{H}{2}\right)^3-b\left(\frac{h}{2}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{24}(BH^3-bh^3)$$

全斷面ニ對シテハコレヲ二倍シ

$$I=2I_1=\frac{1}{12}(BH^3-bh^3) \quad \cdots\cdots(102)\text{式參照}$$

(3) 十字形又ハ丁字形斷面 (Fig. 117 參照)

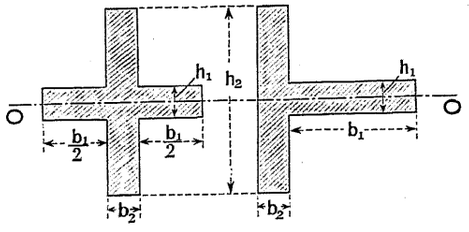


Fig. 117.

水平矩形(面積 b_1h_1)ノ OO 軸ニ對スル慣性能率ハ

$$I'=\frac{1}{12}b_1h_1^3$$

垂直矩形(面積 b_2h_2)ノ夫レハ

$$I''=\frac{1}{12}b_2h_2^3$$

故ニ全斷面ニ就キ

$$I=I'+I''=\frac{b_1h_1^3+b_2h_2^3}{12} \quad \cdots\cdots(104)$$

最遠纖維ノ斷面係數ハ

$$W=\frac{I}{\frac{h_2}{2}}=\frac{b_1h_1^3+b_2h_2^3}{6h_2} \quad \cdots\cdots(105)$$

(4) 三角形斷面 (Fig. 118 參照)

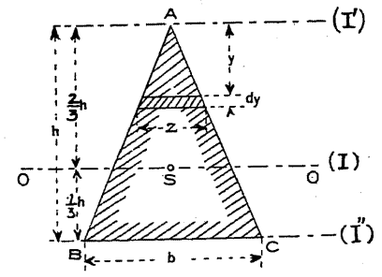


Fig. 118.

今

I' = 底邊 BC ニ平行ニ A テ通ズル軸ニ對スル慣性能率

I'' = BC 軸ニ對スル慣性能率

I = 重心軸 OO ニ對スル慣性能率トスレバ

$$I'=\int_o^h y^2df$$

但シ $df=z.dy$

$$z : b = y : h \qquad \therefore \quad z = \frac{b}{h}y, \quad df = \frac{b}{h}y.dy$$

故ニ

$$I' = \int y^2 df = \int_o^h y^2 \frac{b}{h} y.dy = \frac{b}{h}\int_o^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4} \qquad \cdots\cdots(106)$$

(95)式ニヨリ

$$I' = I + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{b.h}{2} = \frac{bh^3}{4}$$

$$I'' = I + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b.h}{2}$$

前式ヨリ　　$$I = \frac{b.h^3}{4} - \frac{2}{9}bh^3 = \frac{b.h^3}{36} \qquad \cdots\cdots(107)$$

後式ヨリ　　$$I'' = \frac{b.h^3}{36} + \frac{b.h^3}{18} = \frac{b.h^3}{12} \qquad \cdots\cdots(108)$$

下端纖維ニ對スル此三角形ノ斷面係數ハ

$$W_1 = \frac{I}{\frac{h}{3}} = \frac{bh^2}{12} \qquad \cdots\cdots(109)$$

同ジク上端纖維ニ對スルモノハ

$$W_2 = \frac{I}{\frac{2}{3}h} = \frac{bh^2}{24} \qquad \cdots\cdots(110)$$

〔注意〕 W_1 及 W_2 ニ對スル式ハ二等邊三角形ノ場合ニ限リ其儘ニ用ヒテ應力ノ計算ヲ行ヒ得ル。

(5) **圓形斷面** (Fig. 119 參照)

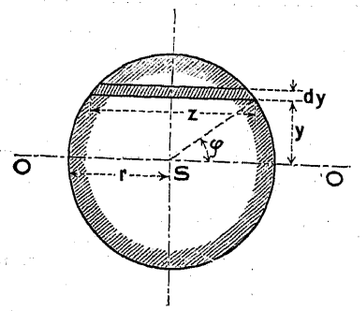


Fig. 119.

重心軸ニ對スル慣性能率ハ

$$I = 2\int_o^r y^2.df = 2\int_o^r y^2.z.dy$$

然ルニ　$y = r.\sin\varphi, \qquad z = 2r.\cos\varphi$

$$dy = r.\cos\varphi.d\varphi$$

故ニ

$$I = 2\int_o^{\frac{\pi}{2}} r^2.\sin^2\varphi.2r.\cos\varphi.r.\cos\varphi.d\varphi$$

$$= 4r^4\int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi.\cos^2\varphi.d\varphi = r^4\int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi.d\varphi$$

$$= r^4\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{r^4}{2}\int_o^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{r^4}{2}\left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_o^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi r^4}{4} \qquad \cdots\cdots(111)$$

或ハ　$d=2r$　トオキ

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

故ニ斷面係數ハ

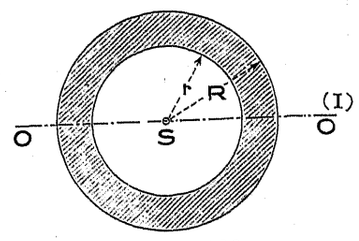


Fig. 120.

$$W = \frac{I}{r} = \frac{I}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi r^3}{4} \qquad \cdots\cdots(112)$$

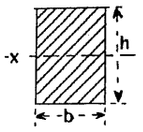
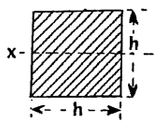
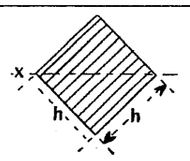
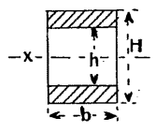
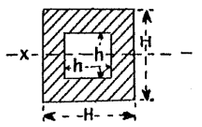
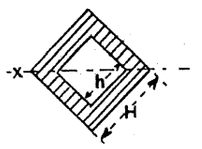
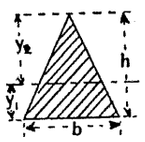
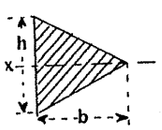
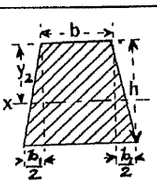
或ハ　$$= \frac{\pi d^3}{32}$$

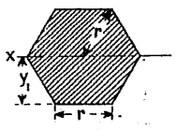
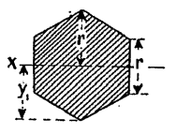
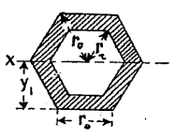
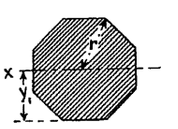
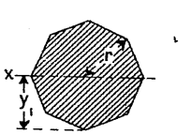
中空圓形斷面ニ於テハ

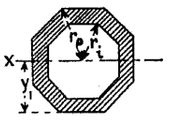
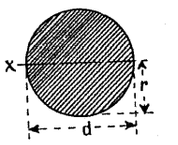
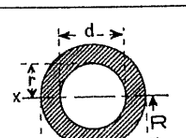
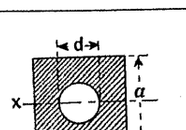
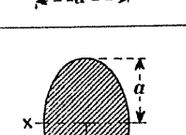
$$I = \frac{\pi.R^4}{4} - \frac{\pi.r^4}{4} = \frac{\pi(R^4-r^4)}{4} \qquad \cdots\cdots(113)$$

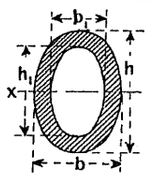
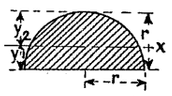
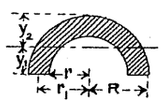
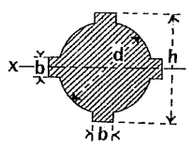
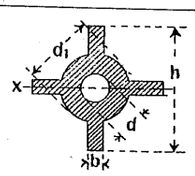
$$W = \frac{I}{R} = \frac{\pi(R^4-r^4)}{4R} \qquad \cdots\cdots(114)$$

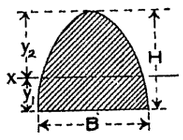
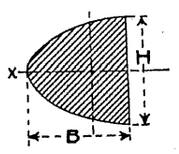
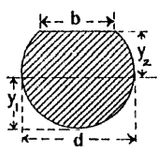
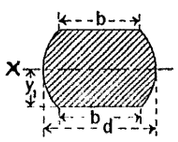
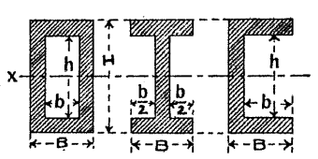
第七表　慣性能率及斷面係數ノ表

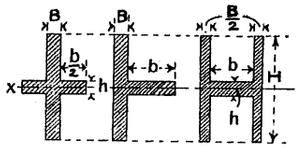
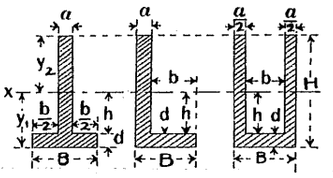
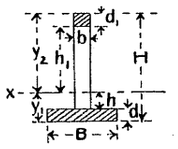
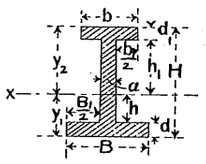
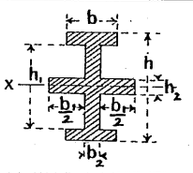
番號	斷面	面積 F	重心軸ヨリ最遠纖維迄ノ距離 y	慣性能率 I	斷面係數 $W=\frac{I}{y}$
1		$b\,h$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b\,h^3}{12}$	$\frac{b\,h^2}{6}$
2		h^2	$\frac{h}{2}$	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^3}{6}$
3		h^2	$\frac{\sqrt{2}}{2}h$	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}h^3=0.1179h^3$
4		$b(H-h)$	$\frac{H}{2}$	$\frac{b}{12}(H^3-h^3)$	$\frac{b}{6H}(H^3-h^3)$
5		H^2-h^2	$\frac{H}{2}$	$\frac{H^4-h^4}{12}$	$\frac{1}{6H}(H^4-h^4)$
6		H^2-h^2	$\frac{\sqrt{2}}{2}H$	$\frac{H^4-h^4}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12H}(H^4-h^4)$ $=0.1179\frac{H^4-h^4}{H}$
7		$\frac{b\,h}{2}$	$y_2=\frac{2h}{3}$ $y_1=\frac{h}{3}$	$\frac{b\,h^3}{36}$	$W_2=\frac{b\,h^2}{24}$ $W_1=\frac{b\,h^2}{12}$
8		$\frac{b\,h}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b\,h^3}{48}$	$\frac{b\,h^2}{24}$
9		$(2b+b_1)\frac{h}{2}$	$y_2=\frac{1}{3}\,\frac{3b+2b_1}{2b+b_1}h$	$\frac{6b^2+6bb_1+b_1^2}{36(2b+b_1)}h^3$	$W_2=\frac{6b^2+6bb_1+b_1^2}{12(3b+2b_1)}h^2$

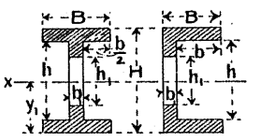
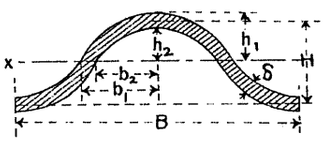
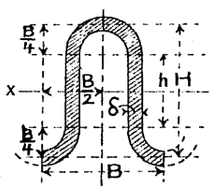
10		$\frac{3_1\sqrt{2}}{2}r^2=$ $2.598\ r^2$	$r\sqrt{\frac{3}{4}}=0{,}866\ r$	$\frac{5_1\sqrt{3}}{16}r^4=0{,}5413r^4$	$\frac{5}{8}\ r^3$
11		$\frac{3_1\sqrt{3}}{2}r^2=$ $2.598r^2$	r	$\frac{5_1\sqrt{3}}{16}r^4=0{,}5413_1{}^4$	$\frac{5_1\sqrt{3}}{16}{}_1{}^3=0{,}5413_1{}^3$
12		$2.598(r_o{}^2-r_i{}^2)$	$0.866r_o$	$0.5408(r_o{}^4-r_i{}^4)$	$0.624\frac{r_o{}^4-r_i{}^4}{r_o}$
13		$2.828r^2$	$0{,}924r$	$\frac{1+2_1\sqrt{2}}{6}{}_1{}^4=0{,}6384_1{}^4$	$0{,}6906_1{}^3$
14		$2.828r^2$	r	$0{,}6384.^4$	$0{,}6384_1{}^3$

15		$2.828(r_o{}^2-r_i{}^2)$	$0{,}924r_o$	$2.552(r_o{}^4-r_i{}^4)$	$2\ 76\ \frac{r_o{}^4-r_i{}^4}{r_o}$
16		$\pi\gamma^2=\frac{\pi d^2}{4}$	$\gamma=\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi r^4}{4}$ $=0{,}0491d^4=0{,}7854r^4$	$\frac{\pi d^3}{32}=\frac{\pi\ \frac{3}{}}{4}$ $=0\ 0982d^3=0{,}7854r^3$
17		$\pi(R^2-r^2)$ $=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$	$R=\frac{D}{2}$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=\frac{\pi}{4}(R^4-r^4)$	$\frac{\pi}{32}\ \frac{D^4-d^4}{D}=\frac{\pi}{4}\ \frac{R^4-r^4}{R}$
18		$a^2-\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{1}{12}(a^4-\frac{3\pi}{16}d^4)$	$\frac{1}{6a}(a^4-\frac{3\pi}{16}d^4)$
19		$\pi\ a\ b$	a	$\frac{\pi ba^3}{4}=0{,}7854ba^3$	$\frac{\pi ba^2}{4}=0{,}7854ba^2$

20		$\frac{\pi}{4}(bh-b_1h_1)$ $=0,7854(bh-b_1h^1)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{64}(bh^3-b_1h_1^3)$ $=0,0491(bh^3-b_1h_1^3)$	$\frac{\pi}{32}\left(bh^2-\frac{b_1h_1^3}{h}\right)$ $=0,0982\left(bh^2-\frac{b_1h_1^3}{h}\right)$
21		$\frac{\pi r^2}{2}$	$y_1=0,4244r$ $y_2=0,5756r$	$r^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)=0,1098r^4$	$W_1=0,2587r^3$ $W_2=0,1908r^3$
22		$\frac{\pi}{2}(R^2-r^2)$	$y^1=\frac{4}{3\pi}\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}$ $y_2=R-y_1$	$0,1098(R^4-r^4)-\frac{0,283R^2r^2(R-r)}{R+r}$ $=\sim 0,35r_1^3$	$W_1=\frac{I}{y_1}$ $W_2=\frac{I}{y_2}$
23		$2b(h-d)+\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16}d^4+b(h^3-d^3)+b^3(h-d)\right]$	$\frac{1}{6h}\left[\frac{3\pi}{16}d^4+b(h^3-d^3)+b^3(h-d)\right]$
24		$2b(h-d)+\frac{\pi}{4}(d_1^2-d^2)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16}(d_1^4-d^4)+b(h^3-d_1^3)+b^3(h-d_1)\right]$	$\frac{1}{6h}\left[\frac{3\pi}{16}(d_1^4-d^4)+b(h^3-d_1)+b^3(h-d_1)\right]$

25		$\frac{2}{3}BH$	$y_2=\frac{3}{5}H$ $y_1=\frac{2}{5}H$	$\frac{8}{175}BH^3=\frac{12}{175}FH^2$	$W_1=\frac{4}{35}BH^2$ $W_2=\frac{8}{105}BH^2$
26		$\frac{2}{3}BH$	$\frac{H}{2}$	$\frac{BH^3}{30}=\frac{1}{20}FH^2$	$\frac{BH^2}{15}$
27		$b=\frac{d}{3}$, ナラバ $F=0,779d^2$; $y_1=0,476d$ $d=\frac{d}{2}$, ナラバ $F=0,763d^2$; $y_1=0,447d$		$I=0,048d^4$ $I=0,044d^4$	$W_1=\frac{I}{y_1}$ $W_2=\frac{I}{y_2}$
28		$b=\frac{d}{3}$ ナラバ $F=0,714d^2$; $y_1=y_2=0,471d$, $b=\frac{d}{2}$ ナラバ $F=0,711d^2$; $y_1=y_2=0,433d$,		$I=0,047d^4$ $I=0,043d^4$	$W_1=W_2=\frac{I}{y_1}$
29		$HB-hb$	$\frac{H}{2}$	$\frac{1}{12}(BH^3-bh^3)$	$\frac{1}{6H}(BH^3-bh^3)$

30		$HB+hb$	$\frac{H}{2}$	$\frac{1}{12}(BH^3+bh^3)$	$\frac{1}{6H}(BH^3+bh^3)$
31		$HB-b(y_2+h)$	$y_1=\frac{1}{2}\frac{aH^2+bd^2}{aH+bd}$ $y_2=H-y_1$	$\frac{1}{3}(By_1^3-bh^3+ay_2^3)$	$W_1=\frac{I}{y_1}$ $W_2=\frac{I}{y_2}$
32		$BH-(B-b)$ (y_2+h)	$y_1=\frac{1}{2}\frac{Bd^2+bd_1(2H-d_1)}{Bd+bd_1}$ $y_2=H-y_1$	$\frac{1}{3}\left[B(y_1^3-h^3)\right.$ $\left.+b(y_2^3-h_1^3)\right]$	$W_1=\frac{I}{y_1}$ $W_2=\frac{I}{y_2}$
33		$BH-B_1(h_1+h)$ $-d_1(B-b)$	$y_1=\frac{1}{2}\frac{aH^2+B_1d^2}{aH+}$ $\frac{+b_1d_1(2H-d_1)}{B_1d+b_1d_1}$ $y_2=H-y_1$	$\frac{1}{3}(By_1^3-B_1h^3$ $+by_2^3-b_1h_1^3)$	$W_1=\frac{I}{y_1}$ $W_2=\frac{I}{y_2}$
34		$2b(h-h_1)$ $+b_1h_2+b_2h_1$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3-(b-b_2)h_1^3+b_1h_2^3}{12}$	$\frac{bh^3-(b-b_2)h_1^3+b_1h_2^3}{6h}$

35		$BH-bh-b_1h_1$	$\frac{H}{2}$	$\frac{B(H^3-h^3)+b_1(h^3-h_1^3)}{12}$	$\frac{B(H^3-h^3)+b_1(h^3-h_1^3)}{6H}$
36			$\frac{H+\delta}{2}$	$I=\frac{64}{105}(b_1h_1^3-b_2h_2^3)$ $h_1=\frac{1}{2}(H+\delta)$ $h_2=\frac{1}{2}(H-\delta)$ $b_1=\frac{1}{4}(b+2{,}6\delta)$ $b_2=\frac{1}{4}(b-2{,}6\delta)$	$\frac{2I}{H+\delta}$
37			$\frac{H+\delta}{2}$	$\frac{\delta}{4}\left[\frac{\pi B^3}{16}+B^2h\right.$ $\left.+\frac{\pi Bh^2}{2}+\frac{2}{3}h^3\right]$ $h=H-\frac{B}{2}$	$\frac{2I}{H+\delta}$

(V)　慣性能率ノ圖式算定法

(1)　クールマン氏法 (Culmann's method)

既ニ第一章第七節ニ於テ平行力ノ或軸ニ對スル二次力率ヲ求ムル方法ヲ說明シタガコレト全ク同一ノ方法デ以テ或面積ガコレト同一平面內ニアル一ツノ軸ニ對スル慣性能率ヲ求ムル事ガ出來ル,此場合ニハ單ニ力ガ面積ニ變ツタダケノ差デアル。

Fig. 121 ニ示ス如キ軌條斷面ヲ採リ其X軸ニ對スル慣性能率ヲ求メントス,一般ニ $I_x=\int y^2.df$ ナルガ故ニ慣性能率ハ其斷面ニ於ケル橫距ニハ關係ナキ事ヲ知ル,尙此式ニアル df ハX軸ニ平行ナ極微薄片 (Infinitely thin slice) ノ面積デアルガ圖式的ニ之ヲ取扱フタメニハ極微薄片ノ代リニ或幅 (Finite breadth) ヲ有スル面積ヲ以テ代用スルノデアル,今此面積ヲ $F_1, F_2, F_3,\cdots\cdots$ トシ其面積ノ重心ガX軸ヨリノ距離ヲ $y_1, y_2, y_3,\cdots\cdots$ トセバ近似的ニ

$$I_x = F_1y_1^2 + F_2.y_2^2 + F_3.y_3^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots = \Sigma(F.y^2)$$

トナル,扨 $F_1, F_2, F_3,\cdots\cdots$ ハ一般的ニハ異ナル長 $b_1, b_2, b_3,\cdots\cdots$ ヲ有スルモノデアルカラコレヲ取扱フ場合ニハ等シイ幅 a ヲ有スル矩形ニ變形シ此變形サレタ矩形ノ長サヲ $z_1, z_2, z_3,\cdots\cdots$ トスレバ

$F_1=a.z_1$,　$F_2=a.z_2$,　$F_3=a.z_3,\cdots\cdots$ トナル,從ツテ

$$I_x = \Sigma(F.y^2) = a\Sigma(z.y^2).$$

斯クノ如クニシテ此 $z_1, z_2, z_3,\cdots\cdots$ ヲ各面積ノ重心ニ於テX軸ニ平行ニ働ク力ト考ヘル,然ル時ハ第一章第七節(I)ニ說明シタ方法ニヨリ是等ノ力ノX軸ニ對スル二次ノ力率ハ容易ニ求メラレルベク此場合ニ

a_1 = 第一平衡多邊形ⓑニ對スル極距(示力線ⓐニ於ケル極距)

a_2 = 第二平衡多邊形ⓒニ對スル極距(示力線ⓑニ於ケル極距)

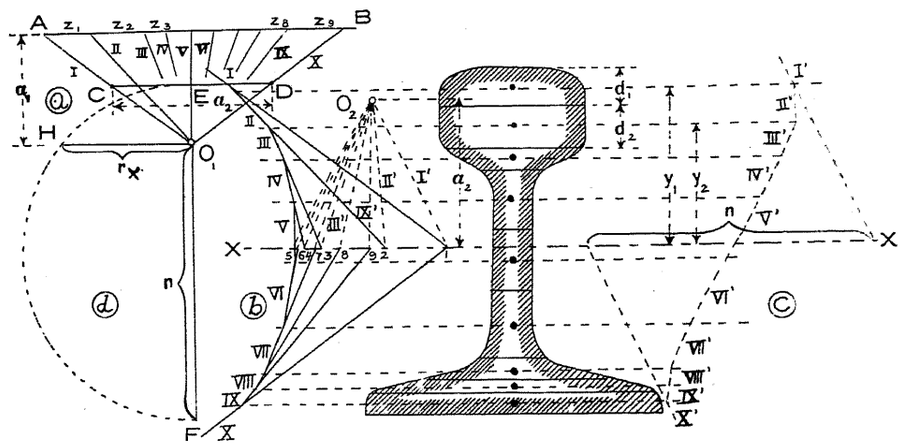


Fig. 121.

n = 第二平衡多邊形ノ兩端邊ニ依テX軸上ニ切リタル長サトスレバ

$$I_x = \Sigma(Fy^2) = a\Sigma zy^2 = aa_1a_2n \cdots\cdots (115)$$

此最後ノ式ノ a, a_1, a_2 及 n ハ何レモ長サノ尺度デ計レバヨロシ,而シテ a, a_1, a_2 ハ共ニ整數 (Round number) ニ採リ置ク方ガ計算上便利デアル。

尙斷面ヲ數多ノ部分ニ分割スル時ニ個々ノ薄片ハ之ヲ梯形ト看做シ得ル形トナスモノトシ其平均長(上邊ト下邊トノ平均)ヲ h, 高サヲ b トセバ其面積ハ $F=b.h$ 故ニ前記 $F=az$ ニ於ケル z ノ値ハ

$$z = \frac{b.h}{a}$$

此 z ハ此式ヲ用ヒ計算カラ求メラレ又ハ Fig. 122 ニ示ス相似三角形ノ作圖ヨリモ求メラレル,然シ前者即チ計算ニヨル方ガ便利デアラウ。

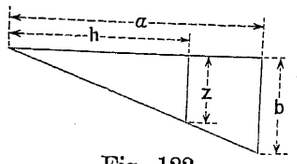


Fig. 122.

尙此圖上ニテ環動半徑 (Radius of gyration) ヲモ容易ニ求メ得ラレル,即チ其X軸ニ對スル環動半徑ヲ r_x トスレバ

$$r_x^2 = \frac{I_x}{F}$$

トナルベク $I_x = a.a_1.a_2.n$, $F = a.\Sigma z$ ナルガ故ニ

$$r_x^2 = \frac{aa_1a_2n}{a\Sigma z} = \frac{a_1a_2n}{\Sigma z} \quad \cdots\cdots(116)$$

此値ヲ圖上ニ求メンニハ Fig. 121 ⓐ 及ⓑ ニ示ス如ク第一ノ示力線 AB=Σz ニ對シ極距 a_1 ヲ以テ極 O_1 ヲ作リ極射線ヲ引キ其兩端極射線 I 及 X ノ間ヘ AB ニ平行ニ CD=a_2 ヲ挿入ス,次ニ CD ニ直角ニ O_1 ヲ通ジテ EO_1F ヲ引キ $O_1F=n$ ト採ル,更ニ此 O_1 點ニ於テ垂線 O_1H ヲ立テコレガ EF ヲ直徑トスル半圓ヲ H ニテ切リタルモノトスレバ O_1H ガ r_x ニ相當スルモノデアル。

何トナレバ $O_1E = a_1.\dfrac{a_2}{\Sigma z}$

$$\overline{O_1H}^2 = O_1E.O_1F = \frac{a_1a_2n}{\Sigma z}$$

コレ(116)式ト同ジ,故ニ O_1H ガ r_x ナル事ヲ知ル。

⑵ モール氏法 (Mohr's method)

Fig. 121 ニ表ハサレタ斷面ノX軸ニ對スル慣性能率 I_x ヲ第一平衡多邊形ⓑノミヲ用ヒテ決定スルノガ「モール」氏法デアツテ其平衡多邊形ト兩端邊 (Extreme side) I トX トノ間ニ包マレタ面積 F_0 ヲ

求ムレバ第一章第七節(II)ニヨツテ

$$\Sigma Px^2 = 2a_1F_0$$

$$\therefore \quad I_x = a\Sigma zy^2 = 2aa_1F_0 \quad \cdots\cdots(117)$$

此場合與ヘラレタル斷面ヲ割ル事小ナレバ小ナル程答ハ精密トナル筈デアル,モシ無限小ニ分チ得タ場合ニハ平衡多邊形ハ一ツノ曲線トナルベク其曲線ハ實際作圖ニ於テ各面積ガ或幅ヲ有スルモトトシテ生ジタ多邊形ト次ノ如キ關係ヲ有スル事ニヨツテ其曲線形ヲ作圖シ得ルモノデアル,即チ各面積ノ分割點ニ相當スル多邊形上ノ點ハ此曲線ガ此多邊形ニ對シテ切線トナルベキ位置ヲ示スモノデアル,換言スレバ此分割點ニ於テ多邊形ニ切線トナル樣ナ曲線ヲ作圖スレバヨイ事トナル。

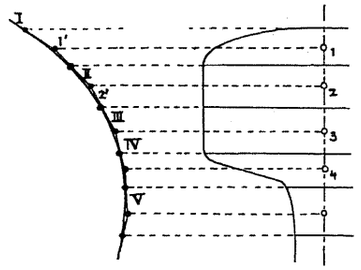


Fig. 123.

更ニ此モール氏法ニ於テ $I_x = 2aa_1F_0$ ノ式ヲ用ヒ慣性能率ヲ求メル場合ニ F_0 ノ面積ヲ算定スルニハ普通測面器 (Planimeter) ヲ用ヒルカ又ハ「シンプソン」氏公式 (Simpson's formula) ヲ用ヒテ之ヲ行フ,今此「シンプソン」氏公式ヲ說明センニ Fig. 124 ニ示ス如ク此面積 F_0 ヲ幅ノ等シキ偶數ノ薄片ニ分割シテ其分割線ヲ一方ノ切線ニ平行ナラシメル,其總數ヲ m トシ其分割線ノ長サヲ $y_0, y_1, y_2, \cdots\cdots y_{m-1}, y_m$, 分割線ノ垂直間隔ヲ e トスレバ

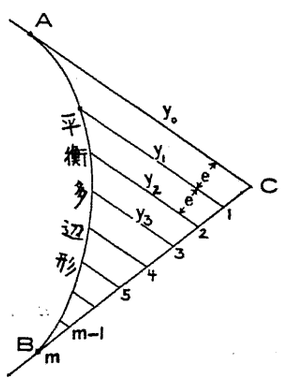


Fig. 124.

($y_m=o$ トナリ)

$$F_0=\frac{e}{3}(y_o+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots\cdots+4y_{m-1})\quad\cdots\cdots(118)$$

(3) 第三法。

(a) 與ヘラレタル任意ノ軸ニ對スル慣性能率ヲ求ムル事。

Fig. 125 ニ示ス軌條斷面ガ與ヘラレタル軸 AA ニ對スル慣性能率ヲ求ムルモノトス,先ヅ AA 軸ニ直角ニ任意線 OB ヲ引キ其軸 AA カラ任意距離 OB=k ニ於テ AA ニ平行ニ BC ヲ引ク,更ニ斷面ヲ AA ニ平行ナル線ニヨツテ數多ノ水平薄片ニ分ツモノトシ此線ガ OB 軸ヲ 1, 2, 3,……ニテ切ルモノトス,次ニ B ヨリ上方ニ B1′=O1, B2′=O2,……,B6′=O6 ヲ採リ分劃點 id ノ一端 d カラ 4′ ニ結ビツケコレガ BC 線ヲ 4_1 ニテ切ルモノトス,此 4_1 ヲ O ニ結べバコレガ id ノ線ヲ d'' ニテ切ル,コレト同ジ作圖ヲ $e, f,$……ニツキテ行ヒ e'', f'' ヲ得,全ク同樣ニシテ a'', b'', c'' ヲ決定シコレラノ點ヲ平滑曲線 (Smooth curve) ニテ結ブ。

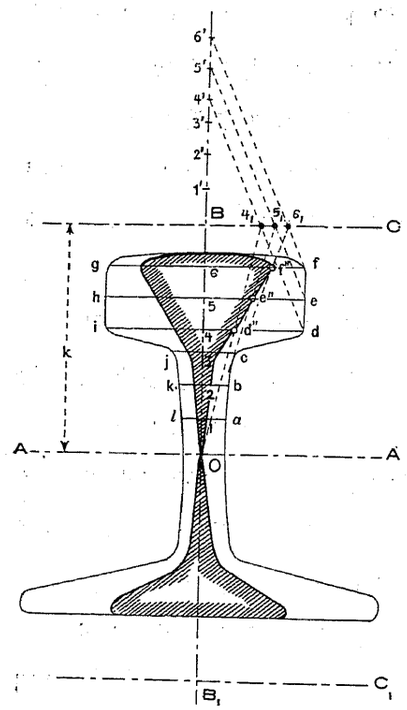


Fig. 125.

次ニ AA ヨリ以下ノ斷面ニツイテモ同樣ニ AA ヨリ距離 k ヲ隔テテ B_1C_1 ヲ引キコレニ就イテ作圖ヲ行ヒ同樣ナ曲線ヲ得ル。

斯クテ全斷面ニ對シテ作圖シテ得タ新曲線ノ面積ヲ F″ トスレバ求ムル AA 軸ニ對スル慣性能率ハ

$$I_x=k^2F''\quad\cdots\cdots(119)$$

Fig. 126 ニ就イテ證明ヲ行ハンニ 4d 線ニ接シ幅 dy ヲ有スル極微面積 $b.dy$ ヲ採ツテ考フ,然ル時ハ此斷面ノ AA 軸ニ對スル慣性能率ハ

$$I_a=\int b.dy.y^2.=k^2\int\frac{by^2}{k^2}\,dy\quad\cdots\cdots(a)$$

Fig. 126 ニ於テ 4_1 ノ點カラ $4_1d'$ ヲ OB ニ平行ニ引キ且ツ其 4d トノ交點 d' ヲ通ジ Od' ヲ延長セバ BC 線上ニ p ヲ得ル,然ル時ハ此圖ニ於テ O4=B4′, B4_1=4d'=b' ナルヲ以テ Bp=4d=b トナル,故ニ二組ノ相似三角形 OBp ト O4d' 及ビ OB4_1 ト O4d'' ニ於テ

$$\frac{b}{b'}=\frac{k}{y}\text{ 及 }\frac{b'}{b''}=\frac{k}{y}\quad\cdots\cdots(b)$$

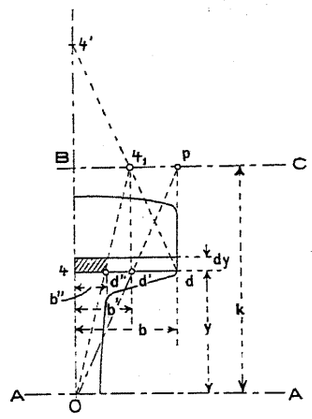


Fig. 126.

此二式ヲ乘ジ

$$b''=b\frac{y^2}{k^2}$$

此値ヲ(a)式ニ挿入スレバ

$$I_a=k^2\int b''.dy=k^2F''$$

則チ求ムル結果デアル。

若シ始メノ OB 線ヲ作ル時ニ對稱線ヲ擇べバ求ムル曲線ハ其半分ダケヲ作圖スレバ足ル事トナル。

尙 k ノ値ハ任意ニ採リ得ルガ故ニ之ヲ整數 (Round number) ニ置クヲ可トシ同時ニ作圖中ニ引ク斜線ノ交角ガ良クナル樣ニ工夫スベキデアル。

(b) 先ヅ重心軸ヲ求メタル後其軸ニ對スル慣性能率ヲ求ムル事。

Fig. 127 A_1A_1 ヲ假定シタル任意軸トシ求メントスル重心軸ニ平行トス,其兩軸ノ距離 a ヲ求メントス,先ヅ Fig. 125 ニ於テ說明シタル方法ヲ用ヒテ A_1A_1 軸ニ對スル F″ノ面積ヲ作圖ス,同時ニ其場合

ニ既ニ決定サレタ $4_1,5_1,\cdots\cdots$ ノ點カラ OB 線ニ平行線ヲ引キ $d',e',f',\cdots\cdots$ ヲ決定ス,此求メタ點 $d',e',f',\cdots\cdots$ ヲ曲線デ結ンデ得タ面積ノ內 A_1A_1 軸ヨリ上部ノ面積ヲ F_1', A_1A_1 軸ヨリ下部ノ面積ヲ F_2' トス,今軌條斷面積ヲ F トセバ A_1A_1 軸ト全斷面重心軸トノ距離ハ全斷面ノ A_1A_1 軸ニ對スル靜力率ヲ面積 F デ割ツテ求メラレ

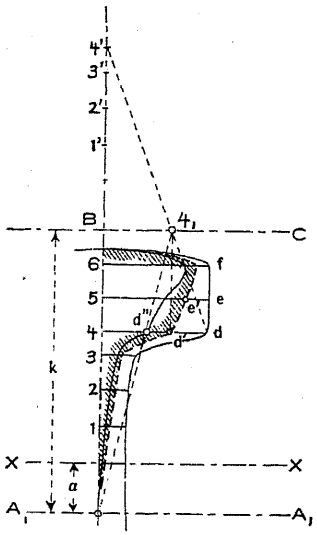


Fig. 127.

$$a=\frac{\int b.dy.y}{F}=\frac{k\int\left(\frac{by}{k}\right)dy}{F}\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

(b) 式カラ

$$b'=\frac{by}{k}$$

且ツ A_1A_1 軸ヨリ下部 F_2' ヲ負ト考ヘ

$$\int b'.dy=F_1'-F_2'$$

此値ヲ (c) 式ニ挿入シ

$$a=k\frac{F_1'-F_2'}{F}\cdots\cdots\cdots\cdots(120)$$

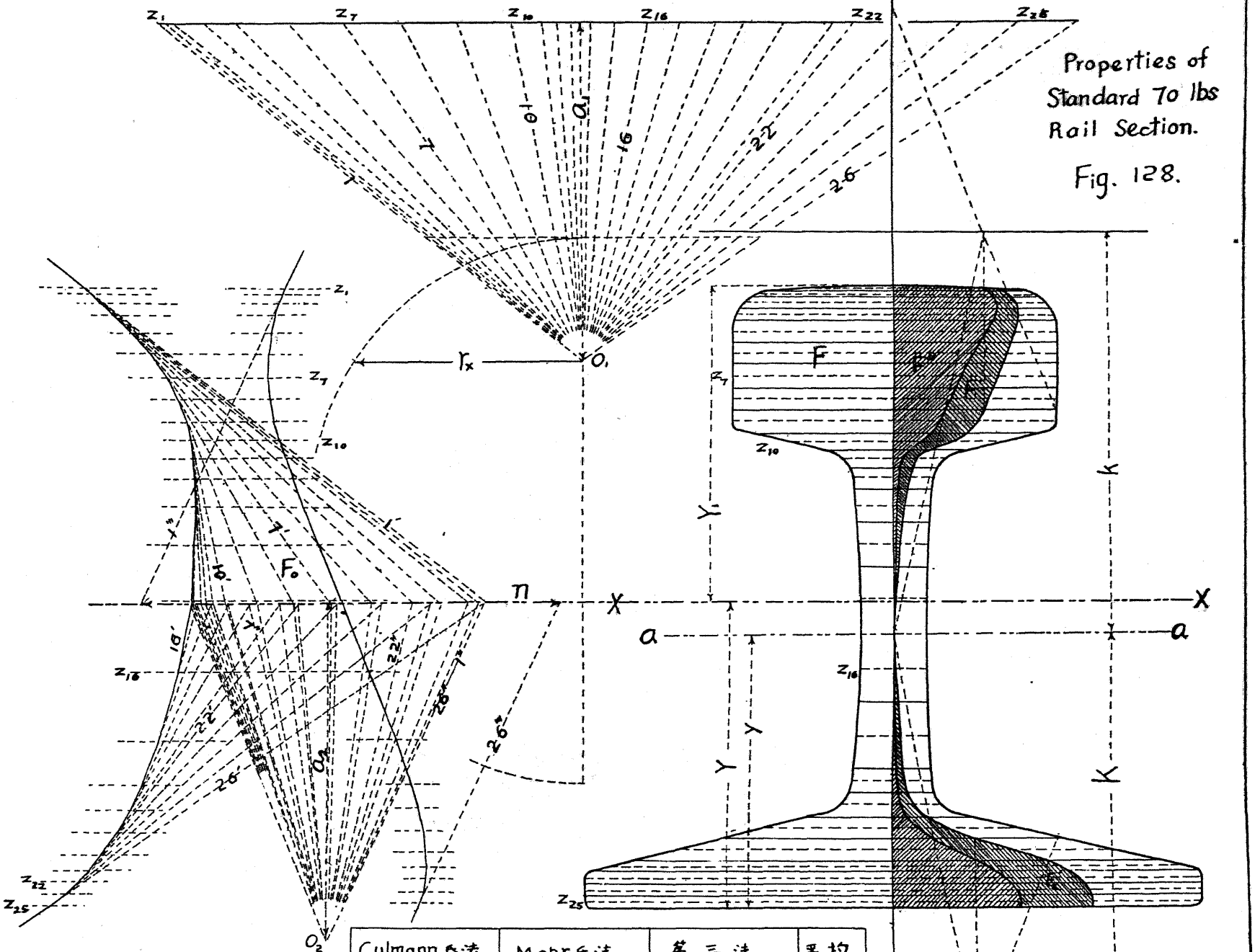
而シテ前述ノ通リ慣性能率 $I_{A_1A_1}=k^2F''$ デアリ今重心軸 XX ニ對スル慣性能率ヲ I_{XX} トセバ平行軸ニ對スル慣性能率ノ關係ヨリ

$$I_{XX}=I_{A_1A_1}-a^2F=k^2F''-a^2F$$

(120) 式ノ値ヲ挿入シ

$$I_{XX}=k^2\left\{F''-\frac{(F_1'-F_2')^2}{F}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(121)$$

此場合ニ計算上必要ナ面積ハ F,F'(F_1' 及 F_2' ヲ含ミ),F'' デアル,其 F'



Properties of Standard 70 lbs Rail Section.

Fig. 128.

	Culmann 氏法	Mohr 氏法	第三法	平均
慣性能率	$aa_1a_2n \approx 19.69$	$2aa_1F_0 \approx 20.15$	$K^2\left\{F'' - \frac{(F_1'-F_2')^2}{F}\right\} \approx 20.88$	20.24
環動半径	$r_x \approx 1.69$	$r_x \approx \sqrt{\frac{I_x}{F}} \approx 1.69$	$r_x \approx \sqrt{\frac{I_x}{F}} \approx 1.62$	1.66
断面係数	$w_1 = I/Y_1 \approx 8.31$ $w_2 \approx I/Y \approx 8.71$	$w_1 = I/Y_1 \approx 8.50$ $w_2 \approx I/Y \approx 8.91$	$w_1 = I/Y_1 \approx 8.77$ $w_2 \approx I/Y \approx 9.28$	8.52 8.96
基面ヨリ重心高	$Y \approx 2.26$	$Y \approx 2.26$	$Y = y + K\frac{F_1'-F_2'}{F} \approx 2.25$	2.26

Oct. 1. 1924,

Y. Matsubara.

0 縮 1 尺 2 in. sq. in.

ト F″ トハ圖上ニ作圖セラレタ $d'e'f'$……及 $d''e''f''$……曲線ノ面積デアル,是等ノ數値ヲ用ヒレバ(120)式及(121)式ヲ用ヒテ重心軸ノ位置及此重心軸ニ對スル斷面ノ慣性能率ヲ求メル事ガ出來ル。

例題第十二, A.S.C.E. 型 70*lbs* 軌條斷面ニ就イテ慣性能率及環動半徑ヲ求ム。

答. Fig. 128 參照。

用ヒタル縮尺　長サニ對シ　1″=1″ 實尺

假定シタル量　$k=3''$,　$a=1''$

$a_1=2.5''$,　$a_2=2.5''$

求メタル量　$n=3.15''$　$r_x=1.69''$　$y=2.26''$

$F=7.03^{\square''}$　$F_0=4.03^{\square''}$　$F_1'=2.13^{\square''}$

$F_2'=1.61^{\square''}$　$F''=2.36^{\square''}$

「クールマン」氏法,「モール」氏法及第三法ニ據ツテ求メタル結果 Fig. 128 ニ表記スル所ノ如シ。

第五節　二次斷面率

(Sectional Moment of the Second Order)

(I)　斷面率ノ說明

一ツノ棒ノ或斷面ニ於テ α ノ角ヲ爲ス傾斜軸 X,Y ヲ採リ座標 (x, y) ヲ有スル極微面積 df ヲ考ヘレバ(Fig. 129 參照)

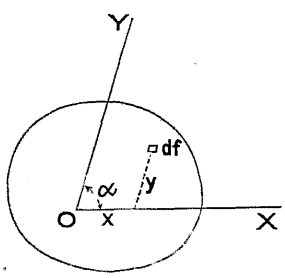


Fig. 129.

$I_x=\int y^2df=$ X 軸ニ對スル慣性能率

(Moment of inertia with respect to the axis X)

$I_y=\int x^2df=$ Y 軸ニ對スル慣性能率

$Z_{xy}=\int x.y.df=$**相乘面率** (Centrifugal moment or Product of inertia)

此三者ヲ總稱シテ二次ノ斷面率 (Sectional

monent of the 2nd order) ト云フ,普通 $\alpha=90°$ 即チ直座標軸ニ對シテ考フル場合多ク其場合ノ慣性能率ニ就キテハ既ニ前節ニ於テ說明シ盡シタルガ故ニ茲ニハ相乘面率ニ就イテ更ニ說明ヲ進メヤウ。

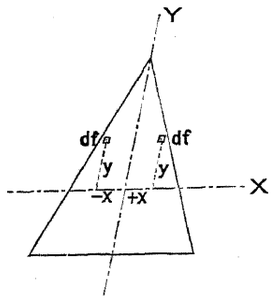


Fig. 130.

若シ一ツノ斷面ガ傾斜對稱軸 (Inclined symmetrical axis) ヲ有シY軸ガ其重心軸 (Gravity axis) ナリトスレバ極微面積 df ノ各々ニ對シ對稱軸ノ一側ニ $+x.y.df$, 他側ニ $-x.y.df$ ヲ有スベク其二項ノ和ハ零デアル,從ツテ

$$\int x.y.df = Z_{xy} = 0$$

故ニ對稱軸ニ對スル其斷面ノ相乘面率ハ常ニ零ニ等シ。

(II)　相乘面率ノ零トナルベキ軸ノ決定

Fig. 131 ニ示ス如キ任意軸 XY ニ對シテ考ヘタ時二次ノ斷面率ハ

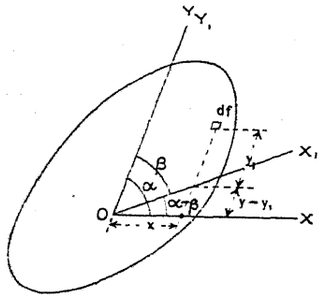


Fig. 131.

$$I_x = \int y^2.df$$
$$I_y = \int x^2.df$$
$$Z_{xy} = \int x.y.df$$

トナル,茲ニ新シキ座標軸ヲ X_1, Y_1 トシコノ Y_1 軸ガ Y 軸ト一致シ同時ニ $Z_{x_1y_1}=0$ トナル如キ X_1 軸ノ位置ヲ決定シヤウトスルノデアル。

此場合此二軸ニ對スル座標間ノ關係ヲ考フルニ

$$\frac{y-y_1}{x} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}$$

及ビ

$$\frac{x_1}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\therefore \quad x_1 = x\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad y_1 = y - x\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}$$

此値ヲ用ヒテ相乘面率ガ零トナル爲メノ條件ヲ記セバ

$$Z_{x_1y_1} = \int x_1y_1\,df = \int \frac{x\sin\alpha}{\sin\beta}\left(y - x\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}\right)df = 0$$

或ハ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\left\{\int x\,y.df - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}\int x^2df\right\} = 0$$

或ハ

$$Z_{xy} - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}I_y = 0$$

書キ直シテ

$$\sin\beta.Z_{xy} = \sin(\alpha-\beta).I_y$$
$$= (\sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta)I_y$$

$$\therefore \quad \cot\beta = \frac{Z_{xy} + \cos\alpha I_y}{\sin\alpha I_y} \qquad \cdots\cdots(122)$$

此角 β ヲ含ム如キ X_1Y_1 軸ニ對シテ其相乘面率 $Z_{x_1y_1}=0$ トナル。

モシ始メニ與ヘラレタ XY 軸ガ直座標 (Fig. 132) デアツタナラバ $\alpha=90°$ デアル故ニ

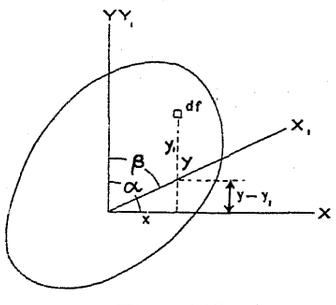


Fig. 132.

$$\cot\beta = \frac{Z_{xy}}{I_y} \qquad \cdots\cdots(123)$$

(III)　直座標軸及斜座標軸ニ對スル慣性能率ノ關係

任意ノ斷面ヲ直座標軸 XY 及斜座標軸 X_1Y_1 ニ對シテ考ヘ其何レモ共通原點 0 ヲ有シ且ツX軸ト X_1 軸トハ一致スルモノトシ X_1Y_1 軸ノ含ム角ヲ β トス,然ル時ハ

$I_x = \int y.^2df$: X 軸ニ對スル慣性能率

$I_{x_1} = \int y_1^2.df$: X_1 軸　〃　〃　〃　〃

コノ二ツノ慣性能率ノ關係ヲ求ムルニハ $y=y_1sin\beta$ ヲ挿入シ

$$I_x=\int y_1^2.sin^2\beta.df=sin^2\beta\int y_1^2df=sin^2\beta.I_{x_1}$$

故ニ求ムル關係ハ

$$I_x=sin^2\beta.I_{x_1} \quad \cdots\cdots(124)$$

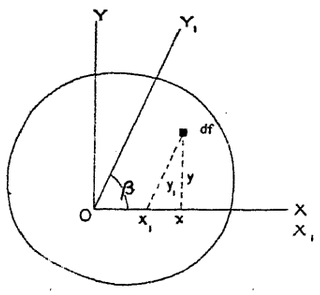


Fig. 133.

(IV) 共通原點ヲ有スル二對ノ直座標軸ニ對スル斷面率ノ關係

Fig. 134 ニ示ス如ク直座標軸 XY 及 X_1Y_1 ガ角 α ヲ含ム時此二對ノ座標軸ニ對スル斷面率ノ關係ヲ求メンニ各軸ニ對スル斷面率ハ

$$I_x=\int y^2.df,\quad I_y=\int x^2.df,\quad Z_{xy}=\int x.y.df;$$

$$I_{x_1}=\int y_1^2.df,\quad I_{y_1}=\int x_1^2.df,\quad Z_{x_1y_1}=\int x_1.y_1.df$$

此六個ノ値ノ内 I_x, I_y 及 Z_{xy} ガ與ヘラレ居リテ他ノ軸ニ對スル三個ノ値ヲ求メヤウト思フ。

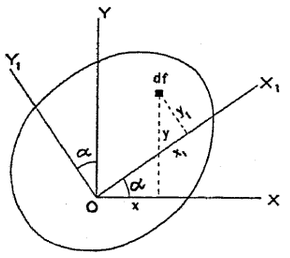


Fig. 134.

此二對ノ座標間ノ關係

$$x_1=x.cos\alpha+ysin\alpha$$

$$y_1=y.cos\alpha-xsin\alpha$$

ヲ挿入シテ

$$I_{x_1}=\int(y.cos\alpha-x.sin\alpha)^2df=\int(y.^2cos^2\alpha-2x.y\ sin\alpha.cos\alpha+x.^2sin^2\alpha).df$$

$$=cos^2\alpha\int y.^2df+sin^2\alpha\int x^2df-2sin\alpha.cos\alpha\int x.y.df$$

$$=I_xcos^2\alpha+I_ysin^2\alpha.-Z_{xy}sin2\alpha. \quad \cdots\cdots(125)$$

$$I_{y_1}=\int(xcos\alpha+ysin\alpha)^2df=\int(x^2cos^2\alpha+2xysin\alpha cos\alpha+y^2sin^2\alpha)df$$

$$=I_ycos^2\alpha+I_xsin^2\alpha+Z_{xy}sin2\alpha \quad \cdots\cdots(126)$$

$$Z_{x_1y_1}=\int(xcos\alpha+ysin\alpha)(ycos\alpha-xsin\alpha)df$$

$$=\int\left\{xy(cos^2\alpha-sin^2\alpha)+sin\alpha cos\alpha(y^2-x^2)\right\}df$$

$$=Z_{xy}cos2\alpha+\frac{1}{2}(I_x-I_y)sin2\alpha \quad \cdots\cdots(127)$$

(125) 式及 (126) 式ヲ加フレバ

$$I_{x_1}+I_{y_1}=I_x+I_y \quad \cdots\cdots(128)$$

即チ同ジ原點ヲ有スル直座標軸ノ慣性能率ノ和ハ常ニ一定デアル。

(V) 共通原點ヲ有スル二對ノ直座標軸ニ對スル慣性能率ノ圖式解法

前項ニ於テ求メタ公式ニヨリ圖式的ニ慣性能率 I_{x_1}, I_{y_1} 及相乘面率 $Z_{x_1y_1}$ ヲ決定スル事ガ出來ル。

先ヅ慣性能率ノ大ナル方ニ相當スル軸ヲ X トス,即チ $I_x>I_y$ ナルモノトスル。

次ニ Fig. 135 ニ於テ X 軸ニ沿ヒ O ヨリ任意縮尺ヲ以テ I_x 及 I_y ヲ記入シ $OT_x=I_x$, $OT_y=I_y$ トシ T_x 及 T_y ノ二點ニ於テ X 軸ニ垂線ヲ立テ圖示ノ如ク X 軸ノ反對側ニ $AT_y=BT_x=Z_{xy}$ ナル如ク A 及 B ヲ置キ AB ヲ直徑トスル圓ヲ畫ク,A ヨリ X_1 軸ニ平行線ヲ引キ圓ヲ C 點ニ切ラシムレ

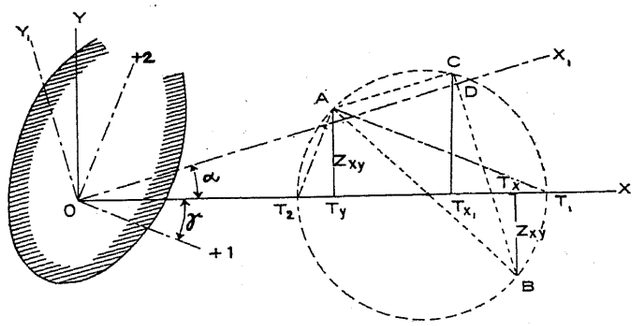


Fig. 135.

バC點ノ座標ハ求ムル斷面率ヲ與ヘル,卽チ

$$CT_{x_1} = Z_{x_1y_1}, \quad OT_{x_1} = I_{x_1}$$

尙I_{y_1}ノ價ハ(128)式ヨリ次ノ如ク求メ得ラレル

$$I_{y_1} = I_x + I_y - I_{x_1}.$$

〔證明〕CB 線ガX_1軸チD點ニ切ルモノトセバ

$$OT_{x_1} = OD.cos\alpha - CD.sin\alpha$$

$$CT_{x_1} = OD.sin\alpha + CD cos\alpha.$$

然ルニ

$$OD = OT_x cos\alpha - BT_x sin\alpha = I_x cos\alpha - Z_{xy}.sin\alpha$$

$$CD = -OT_y sin\alpha + AT_y cos\alpha = Z_{xy}.cos\alpha - I_y.sin\alpha$$

故ニ

$$OT_{x_1} = (I_x.cos\alpha - Z_{xy}.sin\alpha)cos\alpha - (Z_{xy}cos\alpha - I_y.sin\alpha)sin\alpha$$

$$= I_x.cos^2\alpha + I_y sin^2\alpha - Z_{xy}.sin2\alpha$$

$$CT_{x_1} = (I_x.cos\alpha - Z_{xy}.sin\alpha)sin\alpha - (Z_{xy}cos\alpha - I_y sin\alpha)cos\alpha$$

$$= Z_{xy}.cos2\alpha + \frac{1}{2}(I_x - I_y)sin2\alpha.$$

求メタOT_{x_1}及CT_{x_1}ノ値チ(125)式及(127)式ト比較セバ明カニ

$$OT_{x_1} = I_{x_1} \quad 及 \quad CT_{x_1} = Z_{x_1y_1}$$ ナル事チ知ル。

(VI), 主要慣性能率及主軸 (Principal moment of inertia and principal axes)

Fig. 135ニ於テX軸ト圓トノ交點T_1及T_2ハ慣性能率I_xノ採リ得ル最大及最小値ヲ與ヘル,卽チ

$$max I_{x_1} = OT_1 = I_1$$

$$min I_{x_1} = OT_2 = I_2$$

I_1及I_2ヲ**主要慣性能率** (Principal moment of inertia), コレニ相當スル軸1及2卽チAT_1及AT_2ニ平行ナル二軸ヲ**主軸** (Principal axes)ト云フ,角T_1AT_2ハ半圓ノ上ニ立ツ故ニ90°トナル,故ニ主軸ハ互ニ直角ヲナス事ヲ知ル。

T_1及T_2ノ兩點ハX軸上ニアル故ニ其縱距 (Drdinate) ハ零デアル,故ニ換言スレバ

『斷面內ノ各點ニ相當シテ一對ノ主軸ガ必ズ存在スルモノデアリ此二軸ハ常ニ直角トナリ且其相乘面率ハ零ニ等シ,卽チ

$Z_{1\cdot2}=0$』

對稱軸ニ對スル相乘面率ハ零ニ等シキガ故ニ

『直角ニ交ハル對稱軸ハ主軸デアル』

ト云ヒ得ル,主軸1ガX軸トノ間ニ挾ム角γハ(127)式ニ於テ$\alpha=\gamma$, $Z_{x_1y_1}=0$ト置キテ求メラレ

$$tan2\gamma = -\frac{2Z_{xy}}{I_x - I_y} \quad \cdots\cdots(129)$$

負値ヲ有スルハ1軸トX軸トノ間ノ角ヲ圖示ノ如ク負ニ採ルベキヲ示スモノデアル。

(128)式ハ次ノ如ク書キ換ヘラレル

$$I_x + I_y = I_1 + I_2. \quad \cdots\cdots(130)$$

卽チ共通原點ヲ有スル一對ノ直交軸ニ對スル慣性能率ノ和ハ不變デアリ常ニ主要慣性能率ノ和ニ等シ。

(VII), 慣性楕圓 (Ellipse of inertia),

或斷面ノ慣性能率及環動半徑ガ其軸ノ採リ方ニ從ツテ如何ニ變化スルカヲ調ベテ見ヤウ。主軸ヲ座標軸ニ採ツタ時ノ任意軸ノ慣性能率ハ(125)乃至(127)式ニ於テ$Z_{xy}=0$ト置ケバ求メラレ

$$I_{x_1} = I_x cos^2\alpha + I_y sin^2\alpha \quad \cdots\cdots(a)$$

$$I_{y_1} = I_x sin^2\alpha + I_y cos^2\alpha \quad \cdots\cdots(b)$$

然ルニ一般ニ$I=Fr^2$ (F=面積, r=環動半徑)ト置ク事ヲ得ルガ故ニ(a)式ハ

$$Fr_{x_1}^2 = Fr_x^2 cos^2\alpha + Fr_y^2 sin^2\alpha$$

或ハ

$$r_{x_1}^2 = r_x^2 cos^2\alpha + r_y^2 sin^2\alpha \quad \cdots\cdots(c)$$

(c)式ハ r_x 及 r_y ヲ長軸及短軸トスル楕圓ノ式ニ外ナラナイ,卽チ主軸トαヲナス軸ニ對スル環動半徑 r_{x_1} ハ(c)式ニ與ヘラルル如クニツノ楕圓上ニ存在スル事ヲ知ル,コノ楕圓ヲ**慣性楕圓** (Ellipse of inertie 或ハ Momental ellipse) ト云フ。

慣性楕圓ノ詳細ニ就イテハ左記書籍ヲ參考セラレ度イ。

Mehrtens—Statik der Baukonstruktionen I

例題第十三, Fig. 137 ニ示ス獨逸標準不等邊山形鋼 Nr. 5/10 卽チ邊長 10*cm* 及 5*cm*, 厚 1*cm* テ有シ半徑 0.45*cm* 及 0.9*cm* ノ四分圓ニテ隅角テ丸メラレタル斷面ニ就キテ主軸ノ位置及ビ慣性楕圓テ求ム。

答, 先ヅ此斷面ノ面積,重心ノ位置其他テ求メル爲メニ必要ナル數値テ Fig. 136 ニ就イテ列擧スル事トスル。

Fig 136 ⓐ 梯形斷面ガX軸(底邊)ニ對スル靜力率及慣性能率ハ

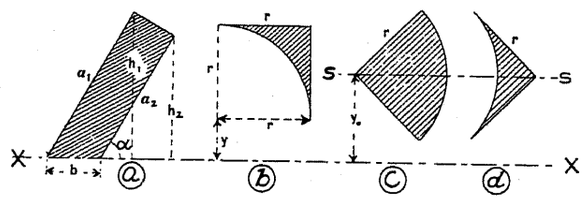


Fig. 136.

$$S_x = \frac{b}{6}(h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2)$$

$$I_x = \frac{b}{12}(h_1 + h_2)(h_1^2 + h_2^2)$$

$$= \frac{b}{12}(a_1 + a_2)(a_1^2 + a_2^2)\sin^3\alpha$$

Fig. 136 ⓑ 四分圓外形(四分圓ト正方形トノ間ニ挿マレタ圖形)ニツキ

$$F = r^2 - \frac{\pi r^2}{4} = 0.215r^2$$

$$S_x = r^2(0.215y + 0.167r)$$

$$I_x = r^2(0.215y^2 + 0.333yr + 0.137r^2)$$

Fig. 136 ⓒ 四分圓ガX軸ト45°テ爲スモノニツキ

$$I_x = r^2(0.0714r^2 + 0.785y_o^2)$$

Fig. 136 ⓓ 四分圓外形ガX軸ト45°テ爲スモノニ就キ

$$I_x = r^2(0.0119r^2 + 0.215y_o^2)$$

扨本論ニ戻ツテ與ヘラレタ山形鋼斷面ニ就イテ

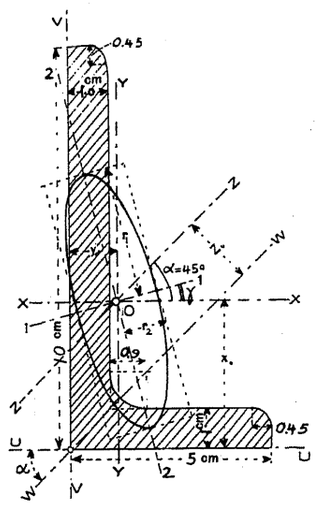


Fig. 137.

$$F = 10\times1+4\times1+0.215\times0.9^2-2\times0.215\times0.45^2$$
$$= 14.087cm^2$$

$$S_u = \frac{1}{2}\times10^2+\frac{4}{2}\times1^2+0.9^2\times(0.215\times1.9-0.167\times0.9)$$
$$-0.45^2\times[0.215\times(10-0.45)+0.167\times0.45]$$
$$-0.45^2\times(0.215\times0.55+0.167\times0.45)=51.74cm^3$$

$$S_v = \frac{1}{2}\times5^2+\frac{9}{2}\times1^2+0.9^2\times(0.215\times1.9-0.167\times0.9)$$
$$-0.45^2\times[0.215\times(5-0.45)+016.7\times0.45]$$
$$-0.45^2\times(0.215\times0.55+0.167\times0.45)=16.96cm^3$$

$$x_o = \frac{S_u}{F} = 3.673cm$$

$$y_o = \frac{S_v}{F} = 1.204cm$$

更ニU,V軸ニ對スル慣性能率ハ

$$I_u = \frac{1}{3}(1\times10^3+4\times1^3)+0.9^2\times(0.215\times1.9^2-0.333\times1.9\times0.9+0.137\times0.9^2)$$
$$-0.45^2\times[0.215\times(10-0.45)^2+0.333\times(10-0.45)\times0.45+0.137\times0.45^2]$$
$$-0.45^2\times(0.215\times0.55^2+0.333\times0.55\times0.45+0.137\times0.45^2)=330.62cm^4,$$

$$I_v = \frac{1}{3}\times(1\times5^3+9\times1^3)+0.9^2\times(0.215\times1.9^2-0.333\times1.9\times0.9+0.137\times0.9^2)$$
$$-0.45\times[0.215\times(5-0.45)^2+0.333\times(5-0.45)\times0.45+0.137\times0.45^2]$$
$$-0.45^2\times(0.215\times0.55^2+0.333\times0.55\times0.45+0.137\times0.45^2)=43.84cm^4.$$

重心軸テX,Yトスレバ

$$I_x = I_u - Fx_o^2 = 140.58cm^4$$

$$I_y = I_v - Fy_o^2 = 23.42cm^4$$

今茲ニ Z_{xy} テ求メ得タナラバ(129)式ニヨリ容易ニ主軸ノ位置ガ決定セラレル,此 Z_{xy} テ求メルニハ次ノ如クスルガ最モ便利デアル.卽チ(125)式ニ於テ α=45° テ挿入スレバ

$$I_x = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - Z_{xy}\sin2\alpha$$ ヨリ

$$Z_{xy}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)-I_z$$

此式ニ於ケル I_z 即チ重心チ通ジX軸ト45°チ爲スZ軸ニ對スル慣性能率チ求メ得レバ從ツテ Z_{xy} ガ計算サレルノデアル。I_z チ求メル爲メニZ軸ニ平行ニU, V軸原點チ通ズルW軸チ考ヘ

$$I_w=\frac{1\times1}{12sin45°}\Big[(10sin45°+9sin45°)(10^2sin^245°+9^2sin^245°)$$
$$+(5sin\alpha+4sin\alpha)(5^2sin^2\alpha+4^2sin^2\alpha)\Big]-0.45^2(0.0119\times0.45^2+0.215\times9^2\times0.5)$$
$$-0.45^2(0.0119\times0.45^2+0.215\times4^2\times0.5)+0.9^2(0.0119\times0.9^2)=156.56cm^4$$

W軸トZ軸トノ距離チ z_o トセバ

$$z_o=(x_o-y_o)sin45°=1.746cm$$

故ニ $$I_z=I_w-F.z_o^2=113.62cm^4$$

從ツテ上揭ノ式チ用ヒ

$$Z_{xy}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)-I_z=-31.62cm^4$$

故ニ主軸ノ位置ハ(129)式ニ據リ

$$tan2\gamma=-\frac{2Z_{xy}}{I_x-I_y}=+0.5397S$$
$$\gamma=14°11'$$

(上揭計算ニ於テ山形鋼隅角ノ丸味チ無視スレバ $\gamma=13°1'$ チ得ル)斯クテ(125)及(126)式ニ據リ

$$I_1=I_xcos^214°11'+I_ysin^214°11'-Z_{xy}sin28°22'=148.57cm^4$$
$$I_2=I_ycos^214°11'+I_xsin^214°11'+Z_{xy}sin28°22'=15.43cm^4$$

是レ主要慣性能率デアル,慣性楕圓長短軸ノ長サハ

$$r_1=\sqrt{\frac{I_1}{F}}3.245cm \qquad r_2=\sqrt{\frac{I_2}{F}}=1.046cm$$

此値チ用ヒテ楕圓チ作圖スル事Fig. 137ノ如シ。

第六節 直桁ニ於ケル支點反力

(Reaction at Supports of a Straight Beam)

桁(Beam)ハ或二定點間ニ之ヲ架渡シテ其間ニ作用スル力ヲ負ヒ又ハコレヲ通過セシムル構造物デアル,此二點ノ距離ヲ徑間(Span)ト云ヒ荷重ガ最後ニ傳達セラルベキ固定點ヲ稱シテ**支點**

(Support)ト云フ,桁ニ作用スル**外力** (External force) ノ內其一部ハ與ヘラルルモノデコレヲ**荷重** (Load) ト云ヒ他ノ一部ハ卽チ此桁ヲ支持スル**支點ノ反力** (Reaction) デアツテコレハ計算ヨリ求メネバナラヌモノデアル,茲ニハ反力ノ狀態ニ就キ暫ク研究シヤウ。

支點ノ構造ニハ三種アリ,**可動** (Movable), **鉸** (Hinged) 及**固定** (Fixed) 卽チ是レデアル.Fig. 138ハ之レヲ示スモノデⓐ圖ハ所謂**可動支點** (Movable support)デアツテ反力ハ單ニ垂直ノ方向ニ働キ得ルノミデアル,ⓑ圖ハ**鉸支點** (Hinged support) デアツテ錚 (Pin) ノ挿入セラレタモノニ相當シ垂直及水平ノ方向ニ抵抗力ヲ發揮シ得ル,併シ此支點ニ於テハ桁ノ廻轉ハ可能デアル,ⓒ圖ハ固定支點 (Fixed support) デアツテ垂直水平ノ直壓ニ抵抗スルノミナラズ廻轉力ニモ抵抗シ得ル。

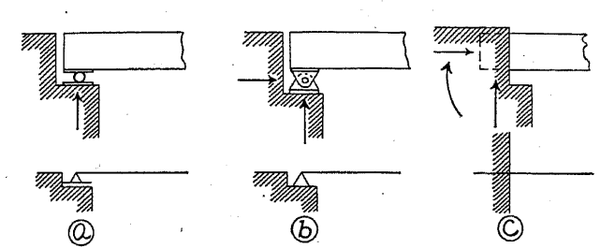


Fig. 138.

茲ニ直桁アリテFig. 139ノ如クA, B, C, Dノ四點ニ支ヘラレ其內Bガⓐⓑ支點デアリA,C,Dガ可動支點ナリトス,今モシ可動支點ニ於ケル摩擦ガ皆無ナルモノトスレバ可動支點ニ於ケル反力ハ唯單ニ垂直ニノミ働キ得ル,モシ荷重ガ圖示ノ如ク總テ垂直荷重許リデアツタナラバ總テノ支點A, B, C, D共反力ハ垂直トナル,モシ何レカ一ツノ荷重ガ傾斜シ

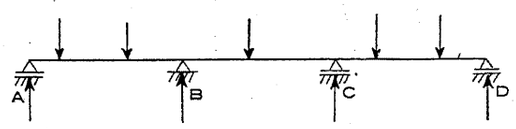


Fig. 139.

テ居ツタナラバ此傾斜外力ハ水平分力ヲ有スベクコレニ抵抗スルノハBノ鉸支點ノミデアル。

次ニ桁 AB ガFig. 140ノ如ク二支點ニテ支ヘラレ其一支點Bガ *ab* ノ方向ニ可動デアリ他支點Aハ鉸構造ヲ有スル時桁上ニ任意ノ傾斜力Pノ作用スルモノトス,然ル時ハBノ反力ハ *ab* ニ直角ニ働キ得ルノミデアツテ其方向ヲ延長セバ荷重Pノ方向ト *s* 點ニテ交ル,然レバ反力A,荷重P,反力Bノ三力ガ平衡ニアル爲メニハ三ツノ力ガ一點ニ集マラネバナラヌ,故ニ反力Aハ *s* ノ方向ニ向フ事ヲ知ル,從テ其量ハ容易ニ力ノ三角形ニヨツテ求メラレル事,ⓑ圖ニ示ス如クデアル。

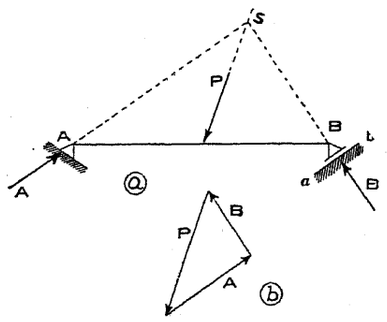


Fig. 140.

更ニFig. 141ノ如ク一ツノ桁ガ三支點A,B,C ニテ支ヘラレ其各支點材ノ端ハ摩擦ナキ鉸ニテ止メラレ居ルモノトス,此時ニ支點材A,B,Cノ受ケ得ル力ノ方向ハ勿論其軸ノ方向ノミデアル故ニカクノ如キ三支點ニ於テハ反力ノ方向ハ豫メ既知デアル,而シテ其位置方向ノ與ヘラレタ三ツノ反力ガ荷重Pト平衡ニアル事ヲ要スルノデアル

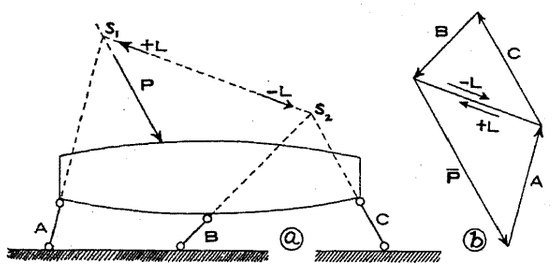


Fig. 141.

カラ反力A,B,Cノ量ノ決定ハ第一章第三節(IX)ニ說明シタ方法ニテ簡單ニ之ヲ決定スル事ヲ得ル,今其解法ヲ詳說センニ此四ツノ力ノ內何レカ任意ノ二力宛ノ交點 s_1 及 s_2 ヲ求メ之ヲ假ニ結ビテ玆ニLナル假想力ヲ作リⓑ圖ニ於テPヲAト+Lトニ分解シ−LヲBトCトニ分解スレバPハA,B,Cニ分解セラレタ事トナリAトCトニ於ケル反力ハ此桁ノ方ニ向ツテ作用スルガ故ニ壓力トナル事ヲ知リBニ於ケル反力ハ桁ト反對ノ方卽チ下向キニ作用スル故ニ張力トナル事ヲ知ル,此場合Bノ反力ハ負反力(Negative reaction)ト稱シ其支點ハ所謂鎭錠(Anchor)セラルベキ事ヲ示ス,此狀態ヲ圖示スレバFig. 142ノ如クナル。

Fig. 143ニ於テ左端ニ荷重Pガ作用スレバ左廻リノ偶力 P.*p* ヲ

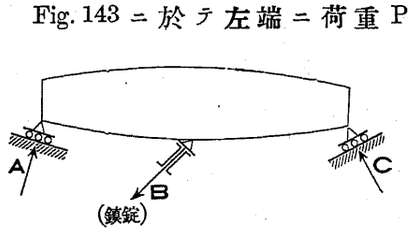


Fig. 142.

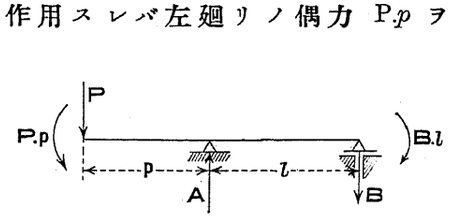


Fig. 143.

生ジコレニ抵抗スルタメニハ支點反力Bハ負トナリ右廻リノ偶力 B.*l* トナル事ヲ要ス,Bハ負反力デアツテ鎭錠サルル事ヲ要スルヲ見ル。

最モ普通ニ存スル桁ハFig. 144ニ示ス如ク水平桁ガ一鉸支點ト一可動支點(桁ノ方向ニ可動)トヲ有スル場合デアツテ是ヲ單桁(Simple beam)ト云フ。

桁ノ一端ガ緊定(Clasp)サレ他端ガ自由(Free)ナル場合Fig. 145ノ如キモ多ク見ル例デアツテコレヲ肱木(Cantilever)ト稱ス,肱木ニ於

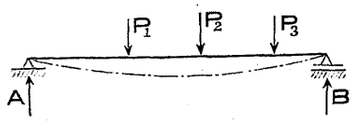


Fig. 144.

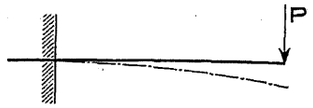


Fig. 145.

ケル反力ヲ考フル爲メニFig. 146 ⓐノ如ク其支點ニPト等シクシテ反對ニ向フ二ツノPヲ考ヘル,然ル時ハ荷重Pハ力率M=P.aト支點ニ於ケルPトニヨツテ表ハサレル事ヲ知ル,卽チコレニ抵抗スルタメニハ反力R=Pノ外ニ支點ニ抵抗力率(Resisting momen‘) Mガⓒ圖ノ如ク存在シナケレバナラヌ,此場合支點ニ生ジタ抵抗力率ハ如何ナル應力ヲ生ズルカト云フニFig. 146 ⓓニ示ス如ク一樣ナラザル分布ノ應力ヲ支點ニ生ジ是レニ據ツテ抵抗力率ヲ發生スルノデアル,此場合若シ外力ガ傾斜シテ作用スルモノトスレバ其水平分力ニ相應シタ水平反力ガ支點ニ加ハルヲ見ル(Fig. 147參照)要スルニ固定支點ニハ一般ニ三反力ガ呼起サルルモノデアツテ一ハ垂直,一ハ水平,他ノ一ハ抵抗力率デアル。

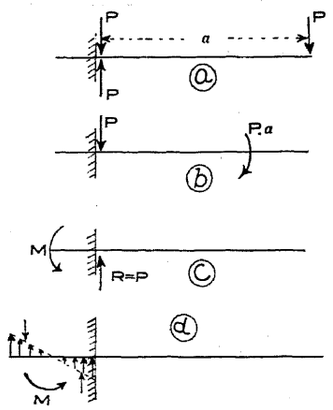


Fig. 146.

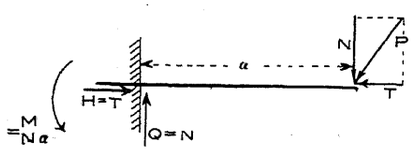


Fig. 147.

一般ニ靜力的(Statically)ニ考察シテ任意ノ桁ノ反力ヲ決定スルニハ平衡ノ三條件

$$\sum H=0 \qquad \sum V=0 \qquad \sum M=0$$

ガ存スルノミデアルカラ未知數ガ三個デアレバコレハ靜力的ニ決定セラレ得ル,若シ三ツ以上ノ未知數ガアツタナラバ此三條件ノミデハ不定デアル,三個以上ノ未知數ヲ有スル桁ヲ**不靜定桁**(Statically indeterminate beam)ト云ヒ三個以下ナルモノヲ**靜定桁**(Statically determinate beam)ト云フ,卽チ一般ニ桁ヲ分チテ靜定ト不靜定トニスルノデアル。

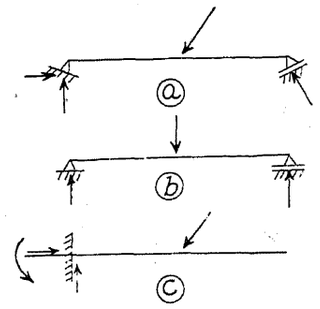


Fig. 148.

靜定桁ハ次ノ三種ニ限ラレテ居ル,Fig. 148 ⓐハ任意ノ方向ニ於テ一端ガ鉸,他端ガ可動ノモノ,コノ時反力ハ三個デアル,ⓑ圖ハ單桁デⓐ圖ノ簡單ナモノニ過ギナイ,勿論反力ハ三個ヲ出デル事ハナイ,ⓒ圖ハ肱木デ其緊定端ニ三反力ヲ有スルノミノ靜定桁デアル。

不靜定桁ハ其數極メテ多イ。

(1) 一次不靜定桁 (Simply statically indeterminate beams)

Fig. 149 ⓐハ一端ニ緊定サレ他端ハ可動支點トナル,故ニ反力ハ四個デアル,ⓑ圖ハ三支點ヲ有スル連續桁(Continuous beam)ノ簡單ナル一例デアツテ一鉸支點ト二可動支點トヲ有シ反力ハ四個デアル。

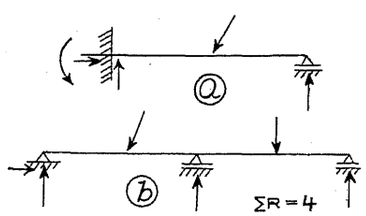


Fig. 149.

(2) 二次不靜定桁 (Two-fold statically indeterminate beams)

Fig. 150 ⓐハ一端緊定他端鉸支點,ⓑ圖ハ一鉸支點ト三可動支點

トヲ有スル四支點ノ連續桁デ何レモ反力五個卽チ二次不靜定狀態ニアル。

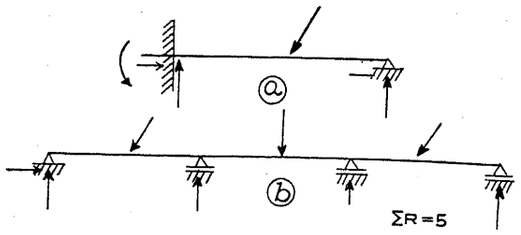


Fig. 150.

(3) 三次不靜定桁 (Three-fold statically indeterminate beams)

Fig. 151 ⓐハ兩端緊定サレタ桁デアツテ普通是レヲ**固定桁**(Fixed beam)ト云フ,ⓑ圖ハ五支點ノ連續桁デアツテ一鉸支點,四可動支點ヲ有シ反力六個卽チ平衡條件ノミニテハ解キ得ザル餘分ノ未知數三個ヲ有ス。

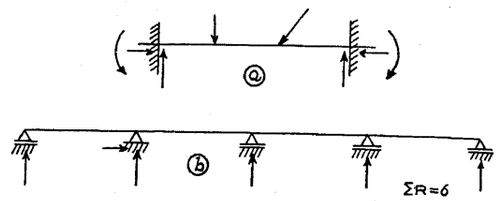


Fig. 151.

以上述ベタ連續桁ガ今 n 支點ヲ有シ其內一ツノミガ鉸デ他ガ可動ナリトスレバコレハ (n−2) 次不靜定 ((n-2)-fold statically indeterminate) トナル。

以上桁ノ分類ニ就キ說明シタ,更ニ單桁ヨリ始メテ順序ヲ追ヒ荷重ヲ與ヘテ反力,剪力及彎曲力率ヲ求ムル方法ヲ說明シヤウ。

第七節　集中荷重ヲ受クル單桁

(Sinple Beam with Concentrated Loads)

Fig. 152 ニ示ス如ク單桁 AB ガ徑間 l ヲ有シ垂直集中荷重 P_1,P_2,P_3,P_4 ヲ負ヒ各荷重ノ距離ハコレヲ左支點 A ヨリ $a_1, a_2,\cdots\cdots$ 又同ジク右支點 B ヨリ $b_1, b_2,\cdots\cdots$ トス,斯クノ如キ荷重ヲ與ヘテ A 及 B 支

點ノ反力ヲ夫々 A 及 B デ表セバ先ヅ平衡條件カラ

$$\Sigma V=0 \quad \text{ヨリ} \quad A+B=P_1+P_2+P_3+P_4=\sum P$$

ヲ得ベク更ニ $\sum M=0$ ヨリ各其量 A 及 B ヲ求メ得ラレル,卽チ力率ノ中心ヲ B ニ採レバ A ガ求メラレ A ニ採レバ B ガ求メラレル,今先ヅ A ヲ求ムル爲メニ B 支點ニ對スル力率ノ式ヲ立テ

$$\sum M=Al-P_1b_1-P_2b_2-P_3b_3-P_4b_4=0$$

$$\therefore \quad A=\frac{P_1b_1+P_2b_2+P_3b_3+P_4b_4}{l}=\frac{\sum(Pb)}{l}$$

同樣ニ

$$B=\frac{P_1a_1+P_2a_2+P_3a_3+P_4a_4}{l}=\frac{\sum(Pa)}{l} \qquad \cdots\cdots(131)$$

或ハ　　$B=\sum P-A$

斯クノ如クシテ外力(荷重及反力)ガ總テ既知トナル故ニ更ニ內的平衡ヲ檢スル爲メニ任意斷面ニ對スル外力合成力ノ作用ヲ研究シヤウ。

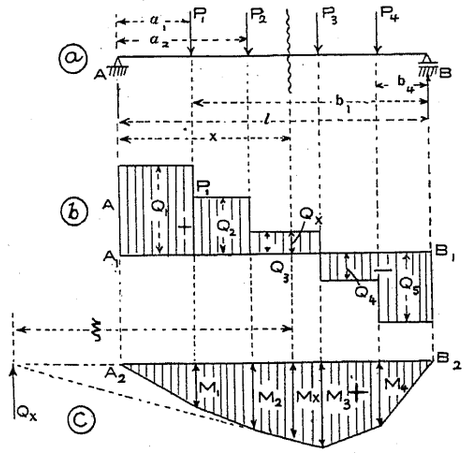


Fig. 152.

左支點ヨリ x ナル距離ニ任意斷面ヲ採リ其斷面ニ於ケル剪力ハ其斷面ノ左側又ハ右側ニ働ク外力ノ合成力(第一節參照)ヲ求ムレバ得ラレ

$$Q_x=A-P_1-P_2=A-\sum_0^x P \qquad \cdots(132)$$

此剪力ノ符號ニ關シテハ斷面ノ左側ニ就イテ考ヘル場合ニ上向キノ Q ヲ正トスルモノトス,

然レバ斷面ノ右側ヲ考ヘレバ此反對トスベキヲ知ル,何トナレバ平衡條件ノ $\sum V=0$ ノ式カラ

$$A-P_1-P_2=-B+P_3+P_4$$

ヲ得テ (132)式ニ據リ

$$Q=-B+P_3+P_4$$

＝斷面右側ノ外力ノ和

卽チ右側デハ上向キノBヲ負トシ下向キノPヲ正トシテ總計シタモノガ剪力Qデアル,換言スレバ任意斷面ノ剪力ハ其斷面ノ左側又ハ右側ニ於ケル外力ノ代數和ニ等シク左側ヲ考ヘル時ハ上向キノ力ヲ正ト考ヘ下向キノ力ヲ負ト考ヘレバヨロシク右側ヲ考ヘル時ニハ上向キノ力ヲ負,下向キノ力ヲ正ト考ヘレバ同ジ結果ニ到達スル。

今玆ニ Fig. 152 ⓑ ニ A_1B_1 ナル水平線ヲ引キ各斷面ニ於テ其斷面ノ剪力ヲ縱距トシテ立テレバⓑ圖ノ如キ一ツノ圖表ヲ得,コレヲ**剪力圖** (Shearing force diagram) ト云フ,剪力圖ヲ(132)式ト比較シテ明カナル如ク左支點ニ於テハ反力AガQ_1ナル剪力トナリ其支點ヨリP_1迄ノ間ハ剪力ハ一定卽チAト等値ヲ有ス,更ニP_1トP_2トノ間ニ於テモ剪力 $Q_2=Q_1-P_1$ ハ一定トナルベク從ツテ剪力圖ハⓑ圖ノ如ク階段形ニ依リテ成ルヲ見ル,此 Q_1, Q_2 等ノ量ハ(132)式ヨリ直チニ求メラレ

A ト P_1 トノ間　剪力 $Q_1=A$

P_1 ト P_2 トノ間　$Q_2=Q_1-P_1=A-P_1$

P_2 ト P_3 トノ間　$Q_3=Q_2-P_2=A-P_1-P_2$

P_3 ト P_4 トノ間　$Q_4=Q_3-P_3=A-P_1-P_2-P_3$

或ハ　$=-B+P_4$

P_4 ト B トノ間　$Q_5=Q_4-P_4=A-P_1-P_2-P_3-P_4$

或ハ　$=-B$

A_1B_1 線ヨリ上方ニ圖表ニ表ハレタ面積ガ正剪力ニ相當シ下方ニ表ハレタモノガ負剪力ニ相當ス,其符號ヲ變ズル所ハP_3ナル荷重ノ作用スル斷面ニアルヲ見ル。

次ニx斷面ニ對スル剪力Q_xノ作用スル位置ハⓒ圖ノ如ク斷面ヨリ左方ξノ距離ニアルモノトス,然レバ本章第三節ニ說明シタ通リ此斷面ノ彎曲力率ハ

$$M_x=Q_x.\xi$$

此彎曲力率ハ勿論斷面ヨリ左ニアル各々ノ力ノ此斷面ニ對スル力率ノ和ニ等シキ故ニ書キ直シテ

$$M_x=Q_x.\xi=A.x-P_1(x-a_1)-P_2(x-a_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(133)$$

此關係ヨリ見テ明カナル如ク彎曲力率ヲ解析的ニ求ムルニハ敢テ斷面ヨリ左側ニ働ク全外力ノ合成力Rヲ求メ且ツ其作用點ヲ示スξヲ計算スルノ手數ヲ行フノ要ハナク寧ロ各々ノ力ニ就イテ各別ニ力率ヲ計算シテ和ヲ求メタ方ガ簡單デアル,彎曲力率ヲ剪力ニ於ケル如ク圖表ニ作ル時ハ**彎曲力率圖** (Bending moment diagram) ヲ得ル,(133)式ヨリ見ル如クM_xハxノ一次式デアル故ニ荷重ノ作用點ニ就キテ一々其彎曲力率ヲ求メコレヲ各々縱距トシテ圖上ニ置キ此點ヲ直線ニテ結ビツケル時ハ容易ニ彎曲力率圖ヲ得ル,卽チ Fig. 152 ⓒ ノ如ク P_1 ノ下ニ M_1,P_2 ノ下ニ M_2 ヲ置キ直線デ結ベバヨイ,(133)式ニ從ツテ彎曲力率ヲ求ムルハ極メテ簡單デアツテ斷面ノ左右何レノ側ニ就イテ計算シテモ同ジ結果ヲ得ルノ

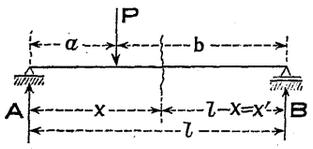


Fig. 153.

デアルガ荷重ノ少キ側ヲ考ヘタ方ガ計算ガ容易デアル,例ヘバFig. 153ニ於テ x 點ノ彎曲力率ヲ求ムルニハ其左側ニハ二ツノ外力ガアリ右側ニハ一力ヨリ無イ,卽チ右側ヲ考ヘタ方ガ計算ガ簡單デアル,唯コノ時其符號ニツイテ注意ヲ要ス,卽チ剪力ニ於ケル場合トハ其趣ヲ異ニシ平衡條件ヨリ

$$\sum M=0=A.x-P(x-a)-B.x'$$

然ルニ x 斷面ノ彎曲力率ハ

$$M_x=A.x-P(x-a)$$

上式ヨリ $\quad=+B.x'$

仍之Bナル力モ亦 M_x ニ對シテ正ノ影響ヲ有スル事ヲ知ル,卽チ彎曲力率ノ算定ニツキテハ一般的ニ次ノ如ク云ヒ得ル。

任意斷面ノ彎曲力率ハ其斷面ノ左又ハ右ノ部分ニ働ク外力ノ其斷面ニ對スル靜力率ノ代數和ニ等シク且ツ左側ニ於テモ右側ニ於テモ上向キノ力ハ常ニ正號彎曲力率ヲ生ズル。

第八節 連續荷重ヲ受クル單桁

(Simple Beam with Continuous Loads)

Fig. 154ニ示ス如クABナル單桁ガ一定ナラザル連續垂直荷重ヲ受クルモノトシテ其任意斷面Iニ於ケル荷重强度ヲ q_x トシ此斷面ヨリ dx ノ距離ニ斷面IIヲ考ヘル,然レバ斷面I及IIノ間ノ荷重ハ $q_x.dx$ デアル。

次ニ此極微荷重 $q_x.dx$ ガ支點A及Bニ次ノ如キ反力ヲ生ズル。

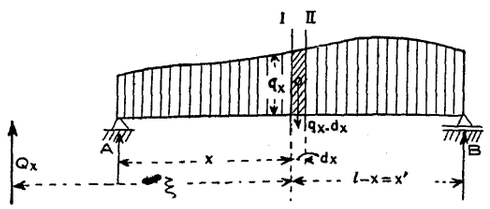


Fig. 154.

$$dA=q_x.dx\,\frac{x'}{l}$$

$$dB=q_x.dx.\frac{x}{l}$$

全荷重ニ對スル反力總量ハ

$$A=\int_o^l \frac{x'.q_x}{l}\,dx$$

$$B=\int_o \frac{x\,q_x}{l}\,dx$$

次ニ斷面Iニ於ケル剪力 Q_x ハ

$$Q_x=A-\int_o^x q_x.dx=-B+\int_o^{x'} q_x.dx$$

今 dQ_x ヲ以テ斷面IヨリIIニ至ル間ノ剪力ノ變化 (Increment) トスレバ斷面IIニ於ケル剪力ハ

$$Q_x+dQ_x=A-\int_o^x q_x.dx-q_x dx$$

$$\therefore\quad dQ_x=-q_x\,dx$$

$$\frac{dQ_x}{dx}=-q_x \qquad \cdots\cdots(134)$$

桁ノ一點ニ於ケル剪力ノ微分係數 (Differentiál coefficient) ハ其點ニ於ケル荷重ノ負强度 (Negative intensity) ニ等シキヲ見ル。

次ニ彎曲力率ニツキテ考ヘンニ

斷面Iニ對シ $\quad M_x=Q_x\xi$

斷面IIニ對シ $\quad M_x+dM_x=Q_x(\xi+dx)-q_x.dx.\frac{dx}{2}$

式中 dM_x ハ兩斷面I及IIノ間ノ力率ノ變化ヲ示ス,而シテ此第二式ノ最後ノ項 $q_x\frac{dx^2}{2}$ ハ極微荷重ノ斷面IIニ對スル力率デアツテ二次的ノ極微量 (Infinitesimal) デアル故ニコレヲ無視シ此二式ヲ差

引ケバ

$$dM_x = Q_x(\xi + dx) - Q_x\xi = Q_x dx$$

$$\therefore \quad \frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad \cdots\cdots(135)$$

更ニコレヲ微分シテ

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} = \frac{dQ_x}{dx} = -q_x \quad \cdots\cdots(136)$$

此結果ヨリ見テ任意斷面ノ剪力ハ其斷面ノ彎曲力率ノ一次微分係數ニ等シク其二次微分係數ハ荷重ノ負强度ニ等シ,故ニモシ彎曲力率ガ一定ナレバ其場合剪力ハ零トナル,此條件卽チ

$$\frac{dM_x}{dx} = 0$$

ハ M_x ナル彎曲力率ノ最大又ハ最小ノ條件ヲ示スモノデアツテ **彎曲力率ノ最大又ハ最小ノ點デハ剪力ハ零トナリ反對ニ剪力零ノ點デハ彎曲力率ハ最大トナルカ又ハ最小トナル**事ヲ知ル,然ルニ單桁ニ於テハ彎曲力率ハ兩端デ零デアル故ニ零剪(Zero shear)ノ點デハ彎曲力率ハ常ニ最大ヲ示スモノデアル,卽チ零剪ノ生ズル斷面ニ於テ最大彎曲力率ガ起ルベク此點ヲ稱シテ **危險斷面** (Dangerous section)ト云フ。

上述ノ關係ハ危險斷面ノ位置及最大彎曲力率ノ値ヲ決定スルニ當ツテ特ニ重要ナル意義ヲ有スルモノデアル。

前ニ說明シタ集中荷重ノ場合ニハ剪力ハ階段的ニ變化スル故ニ一般的ニ云ヒテ剪力零ノ點ハ存在セズ,此場合ニハ最大彎曲力率ハ剪力ガ符號ヲ變ズル點卽チ剪力ガ正ヨリ負ニ移ル點ニ於テ生ズルノデアル,(Fig. 152 參照)併シ連續荷重ノ場合ニ於テハ此點

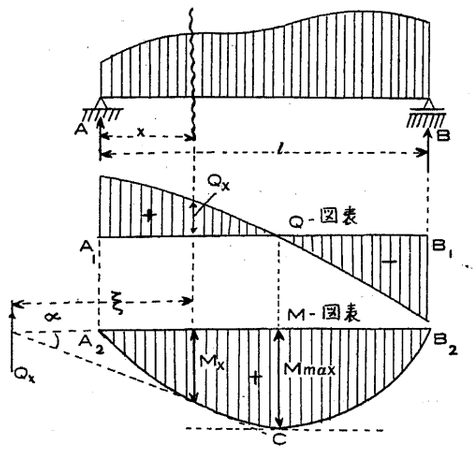


Fig. 155.

ガ特ニ明瞭ニ認メラレル。

Fig. 155 ハ連續荷重ニ對スル剪力及彎曲力率ヲ圖示シタモノデアツテ任意點 x ニ於テハ

$$tan\alpha = \frac{dM_x}{dx} = Q_x = \frac{M_x}{\xi}$$

C 點ニ於テハ $\alpha=0$ トナリ

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x = 0$$

M_x ハ此點ニ於テ最大トナル。

第九節 種々ノ荷重狀態ニ於ケル剪力及ビ彎曲力率

(1)全徑間ニ等布荷重ヲ受クル單桁 (Simple beam uniformly loaded over its entire length)

AB 單桁ガ强度 q ナル等布荷重ヲ全徑間ニ有スル場合ヲ考ヘンニ荷重ハ左右對稱デアルカラ全荷重 ql ハ支點 A 及 B ニ等分セラレ

$$A = B = \frac{ql}{2}$$

支點反力ヲ求メタル後剪力及彎曲力率ヲ計算センニ左支點ヨリ x ノ距離ニ斷面ヲ採ルモノトセバ剪力ハ

$$Q_x = A - qx = \frac{ql}{2} - qx = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \cdots\cdots(137)$$

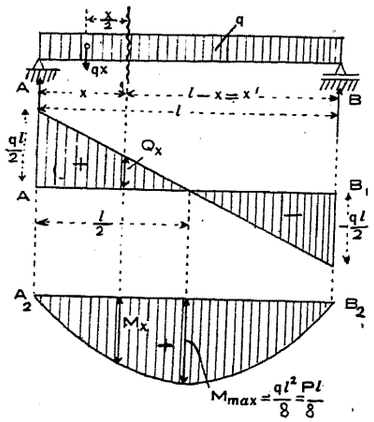


Fig. 156.

彎曲力率ハ(133)式ト同様ニ

$$M_x = A.x - q.x\frac{x}{2} = \frac{ql}{2}.x - \frac{qx^2}{2}$$

$$= \frac{qx(l-x)}{2} = q\frac{x.x'}{2} \quad \cdots\cdots(138)$$

此二式ヲ見テ(137)式ハ直線ヨリ成リ(138)式ハ拋物線ヨリ成ルヲ知ル,故ニ剪力ハコレヲ圖表ニ作レバ直線ト成リ彎曲力率ハ拋物線ニテ圍マルル圖表トナルヲ知ル。

最大彎曲力率ノ起ル點ヲ求メンニハ $\frac{dM_x}{dx}=Q_x=0$ ナル條件ヲ滿足スル點ナル事ヲ知ル故ニ

$$q\left(\frac{l}{2}-x\right)=0$$

ト置キテ $x=\frac{l}{2}$.

故ニ最大彎曲力率ハ徑間中央點ニ起ルヲ知ル,其量ハ(138)式ニ $x=\frac{l}{2}$ ヲ挿入シ

$$\left.{}_{max}M_{x=\frac{l}{2}} = q\frac{\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}}{2} = \frac{ql^2}{8} = \frac{Pl}{8}\right\} \quad \cdots\cdots(139)$$

式中 $P=ql$ 桁上ニ存スル全荷重,

(2)徑間中央ニ集中荷重ヲ有スル單桁

荷重ハ左右對稱的ナル故ニ

$$A = B = \frac{P}{2}$$

Fig. 152ニ研究シタルト同理ニヨリQ_xハ荷重間ハ一定ナル故ニ剪力圖表ハA_1B_1線ニ平行ナ直線デ表ハサレ得ベク左端ヨリxノ點ニ於テハ

$$Q_x = A = \frac{P}{2}$$

$$M_x = A.x = \frac{P}{2}.x$$

徑間中央卽チ $x=\frac{l}{2}$ ノ點ニ於テ最大彎曲力率ヲ生ジ

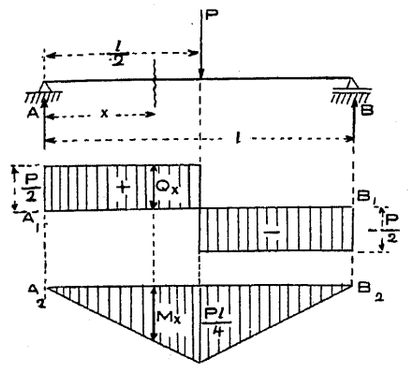


Fig. 157.

$$_{max}M_{x=\frac{l}{2}} = \frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} \quad \cdots\cdots(140)$$

(139)式ト(140)式トヲ比較スルニ徑間中央ニ集中荷重ヲ有スル場合ノ最大彎曲力率ハ等量ノ等布荷重ヲ有スル場合ノ二倍トナル事ヲ知ル。

等布荷重ニ對スル諸式ハ集中荷重ニ對スル公式ニ於テPノ代リニ qdx ヲ代入シ積分シテ之ヲ求メル事ガ出來ル。

(3)右半徑間ニ於テ左半ニ於ケル二倍ノ等布荷重ヲ受クル單桁

(Simple beam carrying twice as much uniform load on the right half as on the left)

Fig. 158ノ如ク單桁ガ左半分ニ强度q,右半分ニ强度$2q$ノ荷重ヲ受クル時支點反力ハ(131)式ニテ算定シタル如ク

$$A = \frac{\sum Pb}{l} = \frac{1}{l}\left(\frac{q.l}{2}\frac{3l}{4} - \frac{2ql}{2}\frac{l}{4}\right) = \frac{5}{8}ql$$

$$B = \sum P - A = q\frac{l}{2} + 2q\frac{l}{2} - \frac{5}{8}ql = \frac{7}{8}ql$$

剪力:—

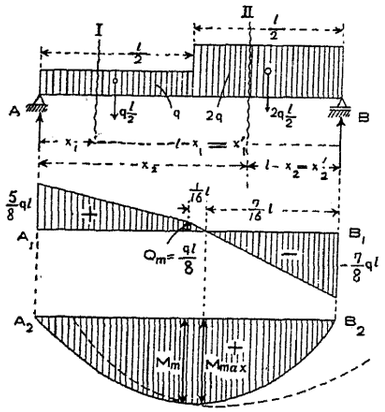


Fig. 158.

斷面Ⅰニ於テ

$$Q_{x_1}=A-q.x_1=\frac{5}{8}ql-qx_1$$

斷面IIニ於テ

$$Q_{x_2}=-B+2qx_2'=-\frac{7}{8}ql+2qx_2'$$

}…(141)

(左側ヨリモ右側テ考ヘル方ガ簡單デアルカラ右側テ考ヘ荷重ノ方向ガ上向キナルテ負トシテ算定ス)

此二式共直線ニテ表ハサレル。

徑間中央 $x_1=\frac{l}{2}$ ニテハ

$$Q_m=\frac{5}{8}ql-q\frac{l}{2}=\frac{ql}{8}$$

剪力圖ハ兩端及中央ノ値ヲ縱距ニ置キテ其點ヲ直線ニテ結ベバ容易ニ求メラレル,零剪 (Zero shear) ノ點ハ右半徑間ニアリ其位置ヲ求メンニハ斷面IIニ對スル式ヲ零ニ置キ

$$Q_{x_2}=-\frac{7}{8}ql+2qx_2'=0$$

故ニ　　$x_2'=\frac{7}{16}l$

此零剪ノ點ニ最大彎曲力率ガ生ズルノデアル。

彎曲力率:—

斷面Ⅰニ於テ　$M_{x_1}=Ax_1-qx_1\frac{x_1}{2}=\frac{1}{8}qx_1(5l-4x_1)$

斷面IIニ於テ　$M_{x_2}=Bx_2'-2qx_2'\frac{x_2'}{2}=\frac{1}{8}qx_2'(7l-8x_2')$

}……(142)

(右側テ考ヘタ方ガ簡單デアル。符號ハ上向キガ正デアル)。

此二式ハ共ニ拋物線トナリ且ツ桁ノ中央ニ於テ共通切線(Common tangent) ヲ有スルヲ知ル。

桁中央點ノ彎曲力率ヲ求メンニハ M_{x_1} ノ式ニ於テ $x_1=\frac{l}{2}$ ト置キ

$$M_m=\frac{5}{8}ql.\frac{l}{2}-q.\frac{l}{2}.\frac{l}{4}=\frac{3}{16}ql^2$$

最大彎曲力率ヲ得ンニハ M_{x_2} ノ式ニ於テ $x_2'=\frac{7}{16}l$ ヲ置キ

$$M_{max}=\frac{7}{8}ql.\frac{7}{16}l-2q.\frac{7}{16}l.\frac{7}{16}.\frac{l}{2}=\frac{49}{256}ql^2\cdots\cdots\cdots\cdots(143)$$

(4)突出端ニ二個ノ集中荷重ヲ有スル單桁 (Simple beam with two equal concentrated loads at its overhanging ends)

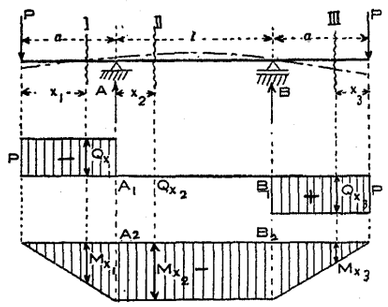


Fig. 159.

荷重ハ對稱的デアル故ニ

$$A=B=P$$

剪力:—

斷面Ⅰ　$Q_{x_1}=-P$

斷面II　$Q_{x_2}=-P+A=-P+P=0$

斷面III　$Q_{x_3}=+P$　(右側テ考ヘ)

彎曲力率:—

斷面Ⅰ　$M_{x_1}=-Px_1$

斷面II　$M_{x_2}=-P(x_2+a)+A.x_2=-P.a$

斷面III　$M_{x_3}=-P.x_3$　(右側テ考ヘ)

彎曲力率圖ハ Fig. 159 ニ示ス如ク全桁ヲ通ジテ負トナリ桁ハ上側ニ於テ應張力ヲ下側ニ於テ應壓力ヲ受ケル如キ狀態トナリ從ツテ桁ハ左右ノ突出端ニ於テ下リ中央ニ於テ隆起スル如キ曲線ヲ呈スルノデアル, AB 間ニ於テハ $\frac{dM}{dx}=Q=0$ トナル故ニ彎曲力率

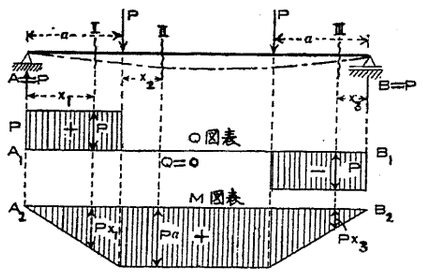


Fig. 160.

ハ定値ヲ有シ且ツコレガ最大彎曲力率トナル。

圖形上極メテ類似スルモ Fig. 160 ニ示スモノハ兩端ニ支ヘラレタ單桁デアツテ彎曲力率ハ正トナリ Fig. 159 ニ示シタモノト其趣ヲ異ニス,此場合桁ハ中央ニ下ル如キ曲線ヲ呈スルノデアル。

(5)突出端ヲ有スル單桁ニ等布荷重ノ作用スル場合

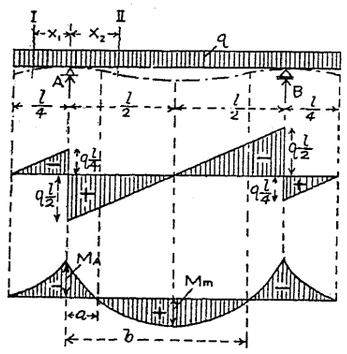


Fig. 161.

荷重強度ヲ q トセバ

$$A=B=\frac{3}{4}ql$$

剪力:—

斷面 I　$Q_{x_1}=-q\left(\frac{l}{4}-x_1\right)$

斷面 II　$Q_{x_2}=A-q\left(\frac{l}{4}+x_2\right)$

A ノ直左側ニ於テハ $x_1=0$ ニテ

$$Q_{x_1}=-\frac{ql}{4}$$

A ノ直右側ニテハ $x_2=0$ トナリ

$$Q_{x_2}=\frac{3}{4}ql-\frac{ql}{4}=\frac{ql}{2}$$

B ノ直左側ニテハ $x_2=l$,　$Q_{x_2}=\frac{3}{4}ql-q\left(\frac{l}{4}+l\right)=-\frac{ql}{2}$

徑間中央ニテハ $x_2=\frac{l}{2}$, $Q_{x_2}=\frac{3}{4}ql-q\left(\frac{l}{4}+\frac{l}{2}\right)=0$

(Fig. 161 參照)

彎曲力率:—

斷面 I　$M_{x_1}=-\frac{q}{2}\left(\frac{l}{4}-x_1\right)^2$

斷面 II　$M_{x_2}=A.x_2-\frac{q}{2}\left(\frac{l}{4}+x_2\right)^2$

}可レモ拋物線

A 點ニ於ケル支點彎曲力率 (Moment at support) ハ $x_1=0$ ト置キテ得ベク

$$M_A=-\frac{ql^2}{32}$$

徑間中央ニ於テハ $x_2=\frac{l}{2}$, $M_m=\frac{3}{4}ql.\frac{l}{2}-\frac{q}{2}\left(\frac{l}{4}+\frac{l}{2}\right)^2=\frac{3}{32}ql^2$(最大)

零力率ノ點ニ對スル a 及 b ハ $M_{x_2}=0=\frac{3}{4}qlx_2-\frac{q}{2}\left(\frac{l}{4}+x_2\right)^2$ ヲ解キテ求メラレ

$$x_2=\frac{l}{2}\pm\sqrt{-\frac{l^2}{16}+\frac{l^2}{4}}$$

$$\therefore\quad a=\frac{l}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=0.067\,l \text{ 及 } b=\frac{l}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=0.933\,l$$

(6)等變荷重 (Uniformly varying load) ヲ受クル單桁

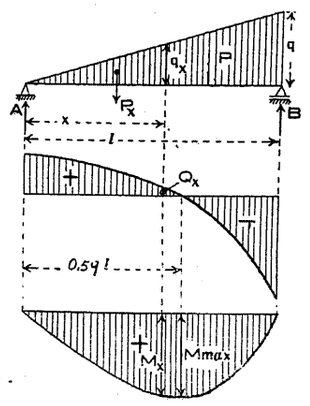


Fig. 162.

q = B 點ニ於ケル荷重強度

q_x= 任意斷面ノ荷重強度トスレバ

$$q_x:q=x:l$$

$$q_x=q\frac{x}{l}$$

全徑間ノ荷重ハ

$$P=q\frac{l}{2}$$

支點反力ハ

$$A=\frac{q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{3}}{l}=\frac{ql}{6}$$

$$B=\frac{ql}{2}-\frac{ql}{6}=\frac{ql}{3}$$

斷面 x ノ左側ニ於ケル荷重ハ

$$P_x=q_x\frac{x}{2}=q\frac{x^2}{2l}$$

同斷面ノ剪力ハ

$$Q_x=A-P_x=\frac{ql}{6}-q\frac{x^2}{2l}\text{ (抛物線)}\cdots\cdots(144)$$

零剪ノ位置卽チ最大彎曲力率ノ生ズル點ハ次式ヨリ求メラレ

$$Q_x=\frac{ql}{6}-q\frac{x^2}{2l}=0\text{ ヨリ }x^2=\frac{l^2}{3}\text{ 或ハ }x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}.l$$

卽チ正値ヲ採リ　$x=+0.59\,l$

任意斷面ノ彎曲力率ハ

$$M_x=A.x-P_x.\frac{x}{3}=\frac{ql}{6}x-q\frac{x^2}{2l}.\frac{x}{3}=\frac{ql}{6}x-q\frac{x^3}{6l}\cdots\cdots(145)$$

$x=0.59\,l$　ナル點ニ於ケル最大彎曲力率ハ

$$M_{max}=0.0655\,ql^2=\frac{1}{15.3}\,ql^2\cdots\cdots(146)$$

(7) 集中荷重ヲ有スル肱木桁 (Cantilever with one concentrated load)

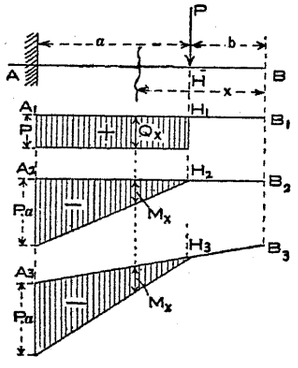


Fig. 163.

荷重Pノ右側ニハPノ影響ナキヲ以テ剪力彎曲力率共ニ零デアル。

圖示ノ斷面ニ於テハ

$$Q_x=P\quad\text{(常數)}$$

$$M_x=-P(x-b)$$

固定端ニ於テ最大彎曲力率ヲ生ジ

$$M_{max}=-P.a$$

彎曲力率圖表ハ水平線 A_2B_2 ノ上又ハ任意ノ傾斜線 A_3B_3 ノ上ニ作ラレ得ル。

荷重P ガ桁ノ右端ニ作用スル時ハ $a=l, b=0$ トナリ

$$Q_x=P$$

$$M_x=-P.x$$

$$M_{max}=-P.l\text{ (最大)}$$

(8) 數個ノ集中荷重ヲ有スル肱木桁

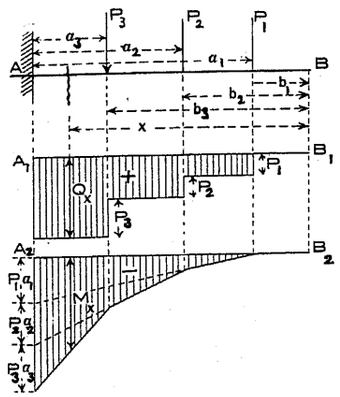


Fig. 164.

各荷重ニ因ツテ生ズル影響ノ和ニ等シキガ故ニ任意斷面ニ於テ

$$Q_x=P_1+P_2+P_3=\sum_0^x P\cdots\cdots(147)$$

$$M_x=-P_1(x-b_1)-P_2(x-b_2)-P_3(x-b_3)$$

$$=-\sum_0^x\left\{P(x-b)\right\}\cdots\cdots(148)$$

$$M_{max}=-\sum(P.a)\cdots\cdots(149)$$

Fig. 164 ニ示ス如ク彎曲力率圖ハ容易ニ作ル事ヲ得。

(9) 等布部分荷重 (Partial uniform load) **ヲ受クル肱木桁**

剪力：—

斷面 I　$Q_{x_1}=q(x_1-c)$

斷面 II　$Q_{x_2}=qb$　(常數)

彎曲力率：—

$$M_{x_1}=-\frac{q}{2}(x_1-c)^2\quad\text{(抛物線)}$$

$$M_{x_2}=-qb\left(x_2-c-\frac{b}{2}\right)\quad\text{(直線)}$$

C 點ニ於テハ $x_1=b+c$ ナルヲ以テ

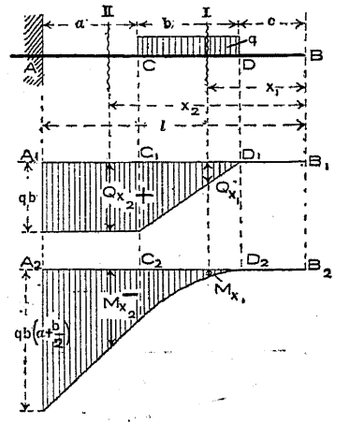


Fig. 165.

$$M_{x_1}=-q\frac{b^2}{2}$$

A 點ニ於テハ $x_2=l$ ニテ最大値ヲ有シ

$$M_{max}=-qb\left(l-c-\frac{b}{2}\right)=-qb\left(a+\frac{b}{2}\right)$$

桁ガ Fig. 166 ニ示ス如ク全桁長ニ荷重サルレバ $a=0, b=l, c=0$ ト置キ

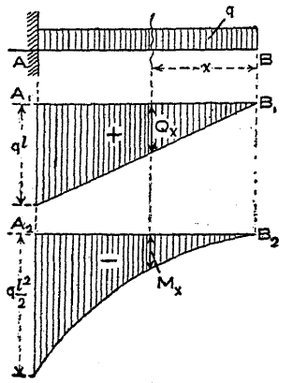


Fig. 166.

$$Q_x=q.x \quad \cdots\cdots(150)$$

$$M_x=-q\frac{x^2}{2} \quad \cdots\cdots(151)$$

固定端ニ於テハ

$$M_{max}=-q\frac{l^2}{2} \quad \cdots\cdots(152)$$

例題第十四. Fig. 167 ニ示ス如キ荷重ヲ受クル桁アリ是ヲ檜ニテ作リ其斷面ヲ矩形ト假定セバ幅ヲ 20*cm* トシテ高ヲ何程トスベキカ.但シ檜ノ彎曲强度 $k_b=60kg/cm^2$ トス。

答 $A=\frac{\Sigma Pb}{l}=\frac{0.8^t\times 3^m+1.6\times 1.5+2.4\times 0.5}{4}=1.5tons.$

$B=\Sigma P-A=0.8+1.6+2.4-1.5=3.3tons.$

外力ノ決定後危險斷面ヲ求ムル爲メニ零剪ノ點ヲ求メンニ

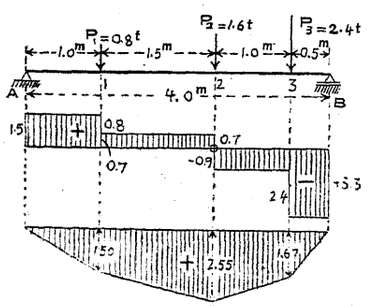


Fig. 167.

P_1 ノ右側 $Q_1=A-P_1=+0.7^t$

P_2 ノ右側 $Q_2=A-P_1-P_2=-0.9^t$

即チ符號ヲ變ズルハ P_2 ノ働ク點 2 デアッテ茲ニ最大彎曲力率ガ生ジ

$$_{max}M_2=A\times 2.5-P_1\times 1.5=1.5\times 2.5-0.8\times 1.5$$

$$=2.55ton\text{-}m.$$

此最大彎曲力率ニ耐エルダケノ斷面ヲ採用スレバヨイノデアッテ必要ナル斷面係數ハ

$$W=\frac{M_{max}}{k_b}=\frac{2.55\times 100\times 1000}{60}\quad\left(但\ \begin{matrix}1m=100cms\\1ton=1000kgs\end{matrix}\right)$$

然ルニ矩形桁ノ斷面係數ハ

$$W=\frac{bh^2}{6}=\frac{20.h^2}{6}$$

此ノ兩値ヲ等シク置キ

$$\therefore\quad h^2=\frac{2.55\times 100\times 1000\times 6}{60\times 20}=1275cm^2$$

$$\therefore\quad h=35.7cm$$

故ニ幅 20*cm* 高 35.7*cm* ノ檜桁ヲ採用スレバ充分デアル。

例題第十五. 徑間 11′ ノ單桁ガ 64350*lbs* ノ荷重ヲ全徑間ニ均等的ニ分布シテ負フトキ此桁ヲ工字鋼 (I-Beam) ニテ作ルモノトシテ如何ナル斷面ヲ採ルベキカ,但シ $k_b=15000\ \#/□''$ ト假定ス。

答 對稱荷重ヲ受クルモノナルガ故ニ危險斷面ハ中央ニアリ(139)式ニヨッテ最大彎曲力率ハ

$$M_{max}=\frac{P.l}{8}=\frac{1}{8}\times 64350\times 11\ ft\text{-}lbs$$

$$=\frac{1}{8}\times 64350\times 11\times 12=1061775\ in\text{-}lbs.$$

必要斷面係數ハ

$$W=\frac{M_{max}}{k_b}=\frac{1061775}{15000}=70.78\ in^3,$$

斷面係數ガ 70.78 in^3 又ハ以上ナル如キモノヲ採用スレバヨイノデアッテ附錄第十二表 (Carnegie steel Co. 製工字鋼)ヲ見レバ

番號 B5 高 15″ 工字鋼 @ 60 *lbs/lin.ft.*

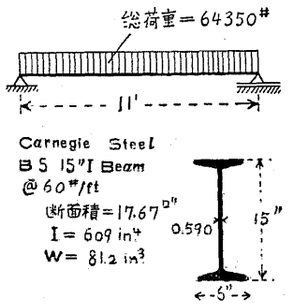


Fig. 168.

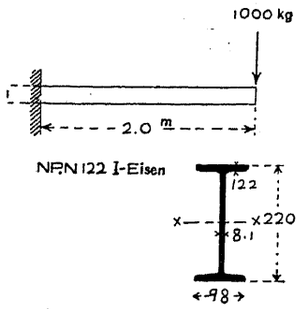
ナル斷面ハ其慣性能率及斷面係數

$$I_x=609.0in^4,\qquad W_x=81.2\ in^3$$

ヲ有スルガ故ニ本題ノ要求ニ對シ適當ナルヲ見ル。

例題第十六. Fig. 169 ニ示ス如キ肱木桁ヲ獨逸型標準斷面 (Normalprofil) ニテ決定スルニ. $k_b=750\ kg/cm^2$ ヲ採ルモノトシ,其斷面ヲ求ム。

答 最大彎曲力率ニ對シテ斷面ヲ決定スレバヨイノデアル,即チ



$M_{max}=Pl=1000\times2{,}0=2000 kg\text{-}m$

$=200\,000\ kg\text{-}cm$

故ニ所要斷面係數ハ

$$W=\frac{M_{max}}{k_b}=\frac{200\,000}{750}=266.6\ cm^3$$

Fig. 169.

附錄第十三表ヲ見レバ此所要斷面係數ヲ有スル斷面ハ NP.Nr. 22 デアッテ其性質ハ

面積 $=39.5cm^2$, 重量 $=30.8kg/m$,

$I_x=3055cm^4$, $W=278cm^3$

第十節 間接荷重ヲ受クル桁

(Beams under Indirect Loading)

(I) 彎曲力率.

首題ノ意ハ主桁 (Main beam) 二個ノ上ニ小桁 (Cross girder) ガ或間隔ニ置カレ此小桁ノ上ニ更ニ桁ヲ乘セテ荷重ヲ受ケルモノヲ云フノデアッテ荷重ハ小桁ヲ經テ間接ニ主桁ニ傳ハル,此場合ノ主桁ニ於ケル彎曲力率及剪力ニ關シ研究ヲ進メヤウ。

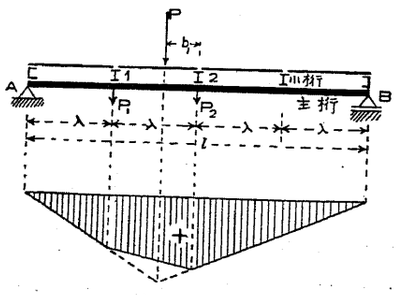


Fig. 170.

今小桁ノ間隔ヲ λ トシ荷重 P ハ小桁 1 及 2 ヲ經テ主桁ニ働キ其分力 P_1 及 P_2 ヲ生ズルモノトス。先ヅ左右支點ニ於ケル反力ヲ求メンニハ途中ノ荷重傳導ノ方法ニハ關係ナク單桁ノ場合ト全ク同樣ニ之ヲ計算スル事ヲ得ル,今此理由ヲ證明センニ P ノ分力 P_1 及 P_2 ガ荷重トシテ作用スルモノト考ヘテ此場合ノ反力ヲ求ムレバ

$$A=\frac{P_1.3\lambda+P_2.2\lambda}{4\lambda}$$

然ルニ $P_1=\frac{Pb_1}{\lambda}$, $P_2=\frac{P(\lambda-b_1)}{\lambda}$ ナル故ニ

$$A=\frac{\frac{Pb_1}{\lambda}.3\lambda+\frac{P(\lambda-b_1)}{\lambda}.2\lambda}{4\lambda}=\frac{P(2\lambda+b_1)}{4\lambda}$$

此値ハ P ナル荷重ニ對シテ普通單桁ノ如ク考ヘテ反力ヲ計算シタモノト同ジデアル,從ッテ反力ハ荷重狀態ノ直接間接ナルニ拘ラズ單桁ニ於ケルト同樣ニ與ヘラレタ外力其物ニ對シテ計算シテ誤リデナイ事ヲ示スモノデアル。

更ニ彎曲力率ニ就キテ考ヘンニ總ジテ合成力ニヨリテ生ズル力率ハ各其分力ニヨッテ生ズルモノノ和ニ等シキガ故ニ P ニ對スルモ其分力ナル P_1,P_2 ニ對スルモ其彎曲力率ハ同値トナル,故ニ今或格點 (Panel point) 卽チ小桁ノアル位置ニ於ケル彎曲力率ハ與ヘラレタ原荷重ニ對スルモ又夫レノ分力デアル各力ニ對スルモ變化ハ無イノデアル,例ヘバ格點 2 ニ對シ其左ノ荷重ハ原力トシテハ P デアリ又分力トシテ P_1 デアル,故ニ P ニ因ルモ P_1 ニ因ルモ等シキ彎曲力率ヲ得ルノデアル,何トナレバ

P ノ力率 $=P.b_1$, P_1 ノ力率 $=P_1\lambda$

デアッテ然カモ $P_1=\frac{Pb_1}{\lambda}$ ナル故ニ

P ノ力率 $=P_1$ ノ力率

上述ノ如ク格點ヲ通ジテノ總テノ斷面ノ彎曲力率ハ直接荷重ニ

對シテ算定スルモ間接荷重ニ對シテ算定スルモ何等變化ナキヲ見ルノデアル。

次ニ間接荷重ノ場合ノ小桁ト小桁トノ間ニ於ケル主桁ノ彎曲力率ハ小桁間ニ何等荷重ナキガ故ニ漸次 (Uniformly) ニ變化スベク從ツテ其圖表ハ集中荷重ノ場合ト同ジク小桁間ハ直線ニテ表ハサレナケレバナラヌ.卽チ作圖ニ當ツテハ先ヅ與ヘラレタ荷重ヲ直接荷重トシテノ彎曲力率圖ヲ作リ其格點ニ相當スル點ヲ直線ニテ結ブ時ハ間接荷重ニ對スル彎曲力率圖ヲ容易ニ作ル事ヲ得ル.

Fig. 171ハ集中荷重ニ對スル彎曲力率圖デアツテ其點線ハ直接荷重トシテ求メタモノ,其格點ニ相當スル點ヲ結ンダ實線ハ間接

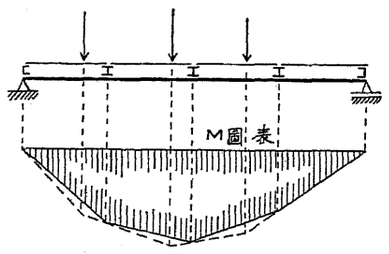


Fig. 171.

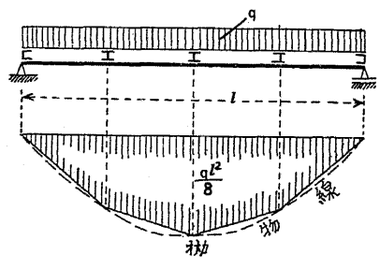


Fig. 172.

荷重ニ對スルモノデアルFig. 172ハ等布荷重ニ對スルモノデ先ヅ點線ニ示ス如ク直接荷重トシテノ彎曲力率圖卽チ拋物線ヲ作ツタ後各格點間ニハ荷重ナキ故格點ニ相當スル値ヲ直線ニテ結ビ求ムル間接荷重ニ對スルモノヲ得ル。

(II)剪力

今等布荷重ヲ間接ニ負フ桁ヲ考ヘ其m番目ノ格間(Field)ノ中

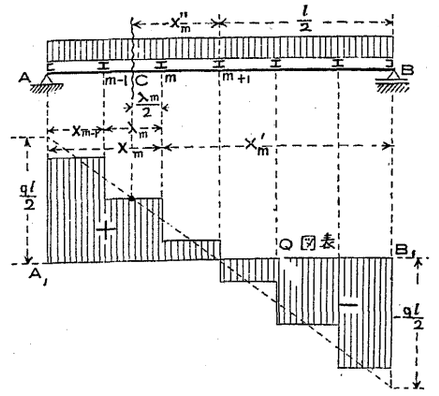


Fig. 173.

央ニC點ヲ考フ,然ル時ハ此格間ノ全荷重ハ $q\lambda_m$ デアツテ其半分ダケハ左ノ$m-1$番目ノ格點ニ作用シ半分ハ右ノm番目ノ格點ニ作用スル理デアル,故ニ今主桁ノC點ヨリ左側ヲ考フレバ外力ハ

反力　$A=\frac{1}{2}ql$(上向キ)

外荷重　$qx_{m-1}+\frac{1}{2}q\lambda_m$(下向キ)

其差トシテC點ノ剪力ヲ得ベク。

$$Q_C=\frac{ql}{2}-qx_{m-1}-\frac{1}{2}q\lambda_m=q\left(\frac{l}{2}-x_{m-1}-\frac{\lambda_m}{2}\right)=qx''_m$$

此値ハm番目格間內ナレバ何レノ點ニ於テモ相等シ,故ニ此ノ關係ヲ知レバ直接荷重ノ剪力圖カラ間接荷重ニ對スル剪力圖ヲ容易ニ作リ得ル、

先ヅ左端ニ $\frac{ql}{2}$, 右端ニ $-\frac{ql}{2}$ ヲ置イテコレヲ點線デ結べバ直接荷重ニ對スル剪力圖トナル,次ニ各格點ノ中央ニ相當スル點ノ縱距ヲ求ムレバコレガ其格間全體ニ渉ツテ同ジ値デアル故ニFig. 173ニ示ス如ク此縱距ヲ以テ其格間ニ水平線ヲ引キ同ジ作圖ヲ各格間ニ對シテ反復スレバ全體ノ剪力圖ヲ作ル事ヲ得ル。

此事實ハ集中荷重ノ場合ニモ全ク同樣デアツテFig. 174ニ示ス如ク今或荷重P_1ノ左右分格點ニ對スル分力P_1'及P_1''ヲ求メ得レバ格點1ニ於テP_1'ガ作用シ格點2ニ於テP_1''ガ作用スルモノトシテ剪力圖ヲ作ル事ヲ得ルノデアル,P_1'及P_1''ノ算定ハ

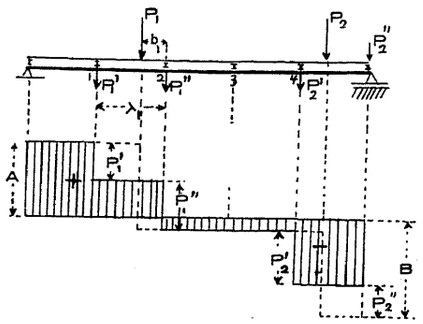


Fig. 174.

$$P_1'=\frac{P_1 b}{\lambda},\quad P_1''=P_1-P_1'$$

トシテモ求メラレ又作圖上ニテFig. 175ノ如クシテモ求メラレル,卽チ先ヅ荷重Pニ對スル直接荷重トシテノ剪力圖*abcd*ヲ引キタル後*ab*及*cd*線ヲ延長シテ*m*及*m*−1番格點ニ相當スル垂直線トK及*l*ニ交ラシメK*l*ヲ結ビツケル時ハ其*bc*トノ交點*m*ハ*m*番目格間ニ於ケル剪力ノ量ヲ與ヘルモノデアル,卽チ*m*ヲ通ジテ引カレタル水平線ハ求ムル剪力圖ノ一邊デアル,此作圖ニ對スル證明ハ簡單ニ*m*−1番格點ヘノ分力$P'=\frac{Pb}{\lambda}$ナル條件ガ作圖上作ラレテ居ル事ニ依ツテ明カデアル,今モシ格點*m*−1ト*m*トノ間ニ二個又ハ二個以上ノ荷重ガ作用スル場合ニハ此解法ハ用ヒ得ラレナイノデアツテカカル場合ニハ第一章第三節ニ說明シタ方法卽チ與ヘラレタ荷重ヲ與ヘラレタ二點

Fig. 175.

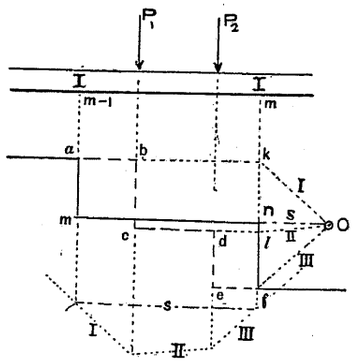


Fig. 176.

m−1ト*m*トニ働ク二力ニ分解スル方法ヲ應用スレバ容易ニ解キ得ルノデアル, Fig. 176ニ示ス如ク先ヅ直接荷重ニ於ケルモノトシテ剪力圖*abcdef*ヲ求メタル後*bc*=P_1及*de*=P_2ナル外力ヲ*m*−1及*m*ノ二點ニ作用スル分力ニ分ツ作圖ヲ行ヘバヨイノデアル,卽チ此外力ヲK*l*及*lf*ニ採リ任意ノ極Oヲ設ケテコレニ對スル極射線I, II, IIIニ平行ニ平衡多邊形ヲ作ル,其平衡多邊形ノ*m*−1及*m*點ニ相當スル點ヲ結ブ閉合線*s*ニ平行ニ極OヨリOnヲ引ケバ其*n*點ヲ通ジテ畫イタ水平線*mn*ハ求ムル剪力圖ノ一邊デアル。

第十一節　彎曲力率及剪力圖式算定法

(I)集中荷重

Fig. 177ハ單桁ABニ三ツノ集中荷重P_1, P_2, P_3ガ働ク場合ニ其彎曲力率及剪力ヲ圖式的ニ求ムル方法ヲ示ス。

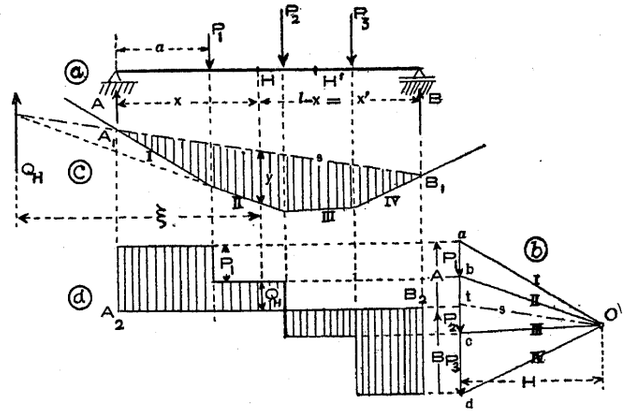


Fig. 177.

單桁ノ集中荷重ニ對スル支點反力ノ求メ方ハ既ニ第一章第三節(IX)ニ於テ說明シタ事デアツテ先ヅⓑ圖ニ示ス示力線ニ*ab*=P_1, *bc*=P_2, *cd*=P_3ヲ採リ極距Hヲ有スル任意極Oニ對スル極射線I, II, III, IVニ平行ニⓒ圖ノ平衡多邊形I, II, III,

IV, ヲ作リ其A,B支點ニ相當スルA$_1$及B$_1$ヲ結ブ閉合線sニ平行ニ極Oヲ通ズルOtヲ引ケバtハ示力線adヲA及Bノ反力ニ分ツモノデアツテta=A, dt=Bトナル。

反力A,Bサヘ求メラルレバ圖上ニ外力(反力ヲ含ミ)ガ總テ與ヘラレタ事トナリⓐⓑ圖ヲ參照スレバ任意點ノ剪力ハ皆圖上ニ量及位置ガ與ヘラレルガ故ニ圖表ヲ作ル事ハ容易デアル,今茲ニ任意點Hヲ採ツテ考ヘルニ此點ノ剪力ハ其左又ハ右ニ働ク外力ノ合成力デアリ左側デハ反力A及荷重P$_1$ヲ有スルガ故ニ圖上ニテハ

$$Q_H = A - P_1 = ta - ab = tb$$

ニテ示サレ上向キ卽チ正剪 (Positive shear) ナル事ヲ知ル,更ニ斷面ヲH′卽チP$_2$トP$_3$トノ間ニ採ツテ考ヘレバ

$$Q_{H'} = A - P_1 - P_2 = ta - ab - bc = tc$$

此tcナル長サニテ表ハサレル剪力ハ下向キ卽チ負剪 (Negative shear) デアル。斯クテ何レノ點ニ就イテ考ヘテモ外力ハ皆圖上ニアル故ニt點カラ水平線ヲ引キ徑間ニ相當スルA$_2$B$_2$ヲ作リ此A$_2$B$_2$カラ上方ニ正剪下方ニ負剪ヲ表ハス時ハ其剪力ノ量ヲ直接ⓑ圖ニ求メ力ノ位置ヲⓐ圖ヨリ移シテ此右方ト上方トヨリ來ル二線ノ交點ニヨツテ剪力圖ⓓヲ得,尙上ニ出來タ平衡多邊形ノ縱距yガ增加シツツアル間ハ剪力ハ正,yガ減少シツツアル間ハ剪力ハ負ナル事ヲ見ル。

彎曲力率ニ就イテ考ヘンニ既ニ第一章第五節ニ於テ說明シタ如ク任意點Hヲ採リHノ左ニ働ク力ハAトP$_1$トデアル故ニ其二ツノ力ガH點ニ對シテ有スル靜力率ハ卽チH點ノ彎曲力率デアツテ其AトP$_1$トニ對スル平衡多邊形ヲⓒ圖ノ如ク作圖シ,H點ヲ通ジ垂直ニ(卽チ外力ニ平行ニ)引イタ線ガ此平衡多邊形ノ兩端邊sトIIトノ間ニ切ラレタ縱距yニ極距Hヲ乘ズレバヨイ事トナル,故ニ

$$M_H = H.y$$

此場合Hヲ力ノ尺度yヲ長サノ尺度(又ハ其反對)ニテ測ツテ乘ズレバヨシ,モシHガ長サノ尺度デ1ニ採ラルレバyハ力ノ尺度デ測ツテ力率ノ値ヲ示ス事トナル,故ニ此場合平衡多邊形ト閉合線トノ間ニ含マレタル面積ハ其縱距ガ常ニ彎曲力率ヲ示スガ故ニ**彎曲力率圖** (Bending moment diagram) ト稱セラル,其最大彎曲力率ハ最大縱距ノ點卽チ平衡多邊形ノ切線ガ閉合線ニ平行トナル點(P$_2$ノ働ク點)ニ生ズル事ヲ知ル,コレハ剪力ガ符號ヲ變化スル點デアル。

尙Hノ左ノ力AトP$_1$トノ合成力卽チ剪力Q_Hガ何處ニ働クカト云フニコレハ平衡多邊形ノ兩端邊sトIIトノ交點ニ働クヲ知ル,此點迄ノ斷面カラノ距離ヲξトスレバ

$$M_H = Q_H.\xi$$
$$= A.x - P_1(x - a) = H.y$$

(II)等布荷重

等布荷重ハ之ヲ互ニ密接シテ採ラレタル垂直斷面ニヨツテ數多ノ部分(Strip)ニ分ツ時ハ其一ツ一ツヲ集中荷重ト考ヘル事ガ出來ル故ニ其作圖方法ハ集中荷重ニ於ケルト同樣ニ行フ事ヲ得ル,卽チ各微小部分ノ重心ニ其部分ノ力ガ働クモノトシテ力邊形及平衡多邊形ヲ作レバ彎曲力率及剪力ヲ求ムル事ガ出來ルノデアル。

Fig. 178ハ桁 AB ノ上ニ EF ノ距離ダケ等布荷重ヲ有スル場合デアツテ今 EF ヲ例ヘバ三ツノ部分ニ分チ各其重心ニ $\frac{P}{3}$ ガ働クモノト考ヘテ力邊形及平衡多邊形ヲ作レバ其閉合線 s ニ平行ニ O カラ Ot ヲ引イテ ta=A, dt=B ヲ得ル,茲ニ於テ荷重ノ端 E 及 F カラ垂線ヲ下シ平衡多邊形上ニ E_1,F_1 ヲ決定スレバ E_1F_1 間ニアル平衡多邊形ハ(此場合ハ荷重ヲ三ツニ切ツタカラ四邊トナルガ)分劃ノ數ヲ多ク採ル程其邊數ヲ增加シ極限ニ於テ一ツノ曲線トナル,其曲線ト多邊形トノ關係ハ分劃線ニ相當スル點ニ於テ曲線ガ多邊形ニ切線トナルヲ知ル,故ニ E_1, F_1 及分劃線ニ相當スル二點トヲ通ズル曲線(拋物線)ヲ引ケバコレガ求ムル彎曲力率圖トナル,故ニ任意點 H ニ於ケル彎曲力率ヲ求メンニハ其 H 點カラ垂線ヲ下シ其縱距ヲ y トセバ其點ノ彎曲力率 $M_H=H.y$ トシテ求メラレル。

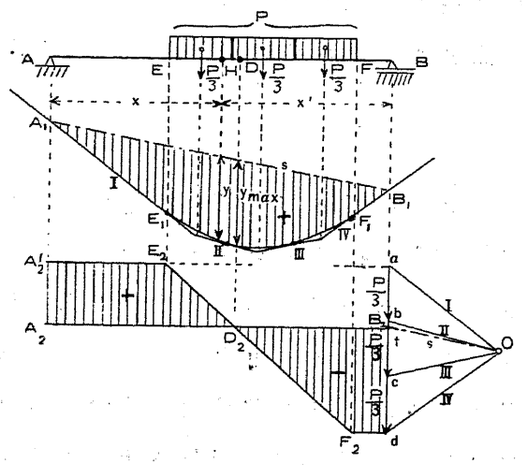


Fig. 178.

次ニ剪力ニ關シテハ支點 A ヨリ荷重ノ端 E 迄ハ定數デアル故ニ t ニ相當スル A_2B_2 ヲ引キ A_2 點ニ於テハ縱距 $A_2A_2'=ta$=A ヲ採リコレヨリ E 點迄ノ間ニ A_2B_2 ニ平行線 $A_2'E_2$ ヲ引イテ剪力ガ表サレル,同樣ノ理デ F ヨリ右方ニ於テハ B 點ニ生ズル負反力 $-dt$=−B

ガ剪力トナルガ故ニ定數デアツテ A_2B_2 ニ平行ナ線デ表ハサレル,次ニ EF 間ニアル荷重ハ等布的デアル故ニ E_2F_2 間ノ剪力ハ均等的ニ減少シ直線ニテ表ハサレルベク從ツテ E_2F_2 線ヲ得ル,其零剪ヲ生ズル點 D_2 ニ相當スル彎曲力率圖上ノ縱距 y_{max} ガ最大トナリコレニ相當スル D 點ガ危險斷面トナル。

荷重ガ徑間全體ニ分布サルル場合ヲ考察スルニ任意點 H ニ就キテハ荷重ヲ H 點ニテ二ツノ部分ニ分ツテ考ヘ H ヨリ左ハ qx,右ハ qx' トスル,此二ツノ集中荷重ガ働クモノト考ヘテモ反力等ニハ變化無クコレニ對シテ平衡多邊形ヲ作圖スル時ハ Fig. 179 ヲ得ル。H 點ノ彎曲力率ハ $M_H=H.y$ トナリ,モシ H=1 ナレバ $M_H=y$ ヲ得。

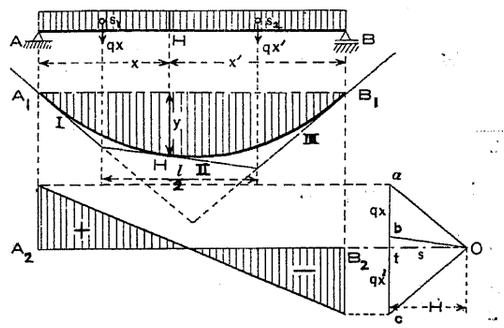


Fig. 179.

今若シ H 點ヲ移動シ x ヲ變化スルモノトセバ勿論多邊形ノ形ヲ變ズルモ此場合ニ變化スルモノハ II ノ極射線及之ニ相當スル平衡多邊形ノ邊 II ノミデアル,故ニ何程位置ヲ變ヘテモ II ナル邊ノ水平投影ハ一定不變デアル,何トナレバコレハ s_1 ト s_2 トノ距離デアルカラ $\frac{x}{2}+\frac{x'}{2}=\frac{l}{2}$ トナルカラデアル,故ニ斯クノ如ク II ノ邊ノ位置ガアラユル變化ヲシタ場合ニ A_1B_1 ナル閉合線ノ間ニ生ジタ曲線卽チ II ノ邊ニ對スル包絡線 (Envelope) トナル樣ナ曲線ハ求ムル彎曲力率圖トナルノデアル,此曲線ハ A_1, H_1 及 B_1 ヲ通ズル如キ拋物線ヲ引ケバヨイノデアツテ作圖上ニハ II ノ邊ノ水平投

影ガ $\frac{l}{2}$ トナル事ヲ利用シ二ツノ切線長ヲ等シキ數ニ等分シテ Fig. 180 ニ示ス如ク 1ト1, 2ト2, 3ト3,…… ヲ結ベバ玆ニ生ジタ曲線ガ求ムル抛物線トナルノデアル,カクスレバ其何レノ邊モ水平長 $\frac{l}{2}$ ヲ有スル事トナル。尙 Fig. 179 ニ於テ極 O ヲ選ブニ當ツテ Oa=Oc ナル樣ニ採レバ閉合線ハ水平トナル。

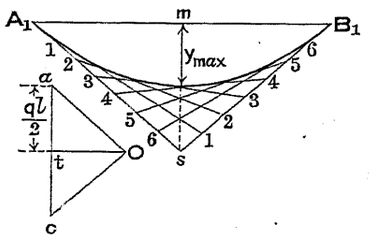


Fig. 180.

變曲力率ノ最大ハ縱距ノ最大ナル所卽チ徑間ノ中央ニ起リ(Fig. 180 參照)

$$M_{max} = H.y_{max} = \frac{1}{2}.ms.H$$

然ルニ $\triangle A_1ms$ ト $\triangle Ota$ トハ相似デアル故ニ

$$ms : A_1m = at : Ot$$

或ハ

$$ms : \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}ql : H$$

故ニ

$$ms = \frac{1}{H}.\frac{ql^2}{4}$$

從ツテ

$$M_{max} = H.y_{max} = \frac{1}{2}.ms.H = \frac{ql^2}{8}$$ ……(139)式參照

H=1 ノ時ハ

$$M_{max} = y_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

次ニ剪力ヲ求メンニ

$$Q_H = A - qx = \frac{ql}{2} - qx = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

コレハ x ノ一次式デアル,故ニ圖式的ニ剪力ハ直線ニテ表ハサレル,桁ノ兩端ニ於ケル剪力卽チ反力 A 及 B ハ力邊形ニ於テ求メラレ居ルガ故ニコレヲ置キ其兩端ヲ直線デ結ベバ Fig. 179 ノ如ク剪力圖ヲ作ル事ヲ得ルノデアル。

(III) 等布荷重及集中荷重

桁ガ等布荷重ヲ全徑間ニ有スル外ニ數個ノ集中荷重ヲ負フ場合ニハ其彎曲力率圖ヲ閉合線ノ兩側ニ別々ニ作ルガ便利デアル, Fig. 181 ニ於テハ閉合線ノ下側ニ等布荷重ニ屬スル平衡曲線ヲ(II)ノ方法ニヨツテ作リ其閉合線 s ノ上側ヘ集中荷重ニ屬スル分ヲ添加シタモノデアツテ等布荷重ニ對スル分ハ說明スル迄モ無ク

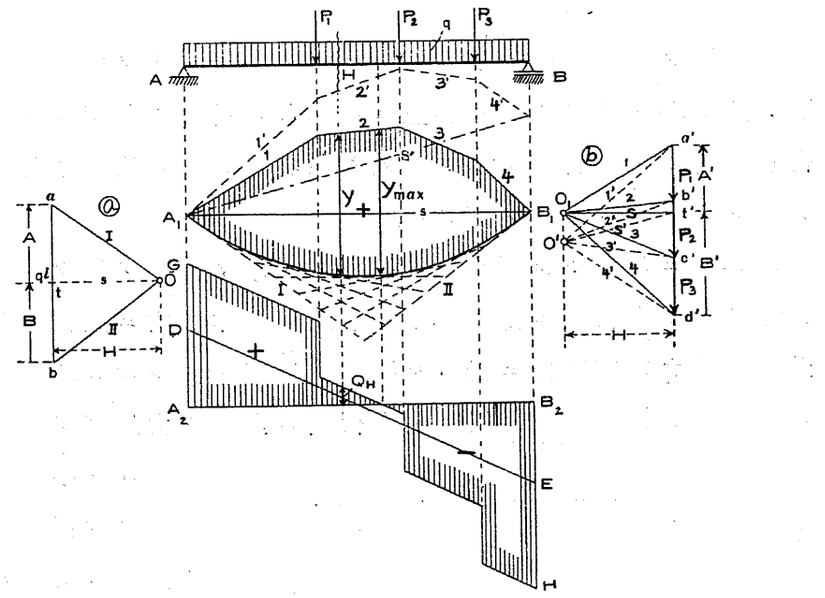


Fig. 181.

極距H ヲ有スル力邊形ⓐニ相當シテ抛物線ヲ書ケバヨイノデアル,集中荷重ニ對スル分ハ先ヅ力邊形ⓑニ於ケル極 O′ ヲⓐ圖ニ於ケルト等シキ極距H ヲ有セシメ之ニ對スル平衡多邊形ヲ A_1 ヲ共通ニ持ツ如ク作レバ其時ニハ閉合線ガ s' ノ如クナリ前ノ閉合線 s トハ一致シナイ,コレヲ一致セシメル事ガ必要デアツテ其ノ爲

メニハ⑥圖ニ於テO′カラs′ナル閉合線ニ平行線ヲ引イテ出來タt′點カラ既ニ出來テ居ルsニ平行ニ卽チ水平ニt′O₁ヲ引キ極距Hヲ有セシメ此O₁ノ極カラ引イタ極射線 1,2,3,4 ニ相當シタ平衡多邊形ヲA₁ヨリ始メテ引ケバ其閉合線ハsト一致スルノデアル,閉合線ヲ一致セシメタ後ハ上下ノ多邊形ヲ通ジテノ縱距yヲ一ツノ尺度デ測ル事ガ出來H點ニ於テノ縱距ヲyトスレバ

$$M_H = H.y$$

剪力圖ノ作圖ハ先ヅ等布荷重ニ對スルDE線ヲ⑥圖ノ如ク作圖シ此DEヲ基線ト考ヘ其上ニFig. 177ニ於ケル如クDGヲ集中荷重ニ對スル反力A′ニ等シク置キ順次右方ヘ基線ニ平行ニ作圖ヲ進メテ行ケバヨイノデアル。

Fig. 181ニ說明シタ閉合線ヲ變形スル事ノ面倒ヲ避ケンニハ先ヅ始メニ集中荷重ニ對スル平衡多邊形ヲ作リ次ニ此閉合線ト一致スル樣ナ等布荷重ニ對スル平衡多邊形ヲ作レバヨイ,卽チ Fig. 182 ニ示ス如ク先ヅ@圖ニ集中荷重ニ對スル力邊形ヲ作リ之ニ相當スル平衡多邊形ヲ引ケバ閉合線A₁B₁ヲ得,次ニ⑥圖ニ於テ等布荷重ニ對スル力邊形A₁E=qlヲ採リコレヲt′ニテ二等分スル,カクテt′カラ既ニ出來テ居ル閉合線sニ平行ニt′O₁ヲ引キ

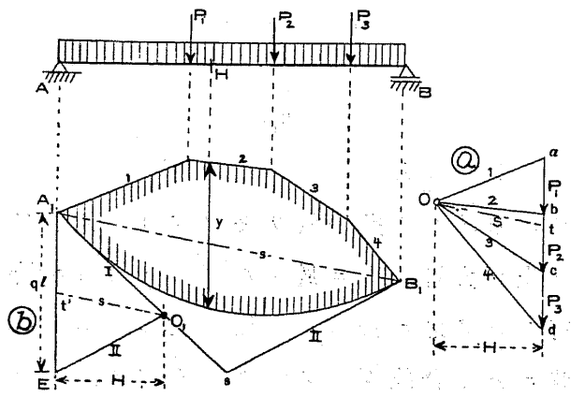


Fig. 182.

其極距ヲ@圖ニ於ケルト等シクHナラシメル,カクテ得タ極O₁トA₁及Eヲ結ブI及IIガ等布荷重ニ對スル極射線ノ最初及最後トナル,故ニコレニ對スル平衡多邊形ヲ作リ拋物線ヲ引ケバヨロシイ,任意點Hニ對スル彎曲力率ハ明カニ$M_H = H.y$トナル,茲ニ注意スベキハ@及⑥ノ二圖ニ於ケル極距Hヲ等シカラシムベキ事デアル。

(IV) 間接荷重。

第十節(I)ニ述ベタ如ク小桁ノアル點卽チ格點(Panel point)ヲ通ジテノ斷面ニ對シテハ彎曲力率ハ直接荷重ナルト間接荷重ナルト何等變化ハナイ,故ニ格點ノミニ就イテ云ヘバ間接荷重ノ場合其格點ニ働ク荷重ノ分力ヲ調ベズトモ直接荷重トシテノ作圖カラ其點ノ彎曲力率ハ知リ得ラレル筈デアル,次ニ小桁ト小桁トノ間ニ於テハ彎曲力率ノ量ハ距離ニ比例シテ變化シ直線トナル事ヲ知ルガ故ニコノ二ツノ事實ヨリ直接荷重トシテノ圖表カラ間接荷重ニ對スル圖表ヲ作リ得ラレル。

又其剪力ニ關シテハ第十節(II)ニ說明シタ如ク格點ノ間ニテハ剪力ハ定數デアリ且ツ力邊形ニヨツテ各格點ニ働ク分荷重ヲ知ルガ故ニ間接荷重

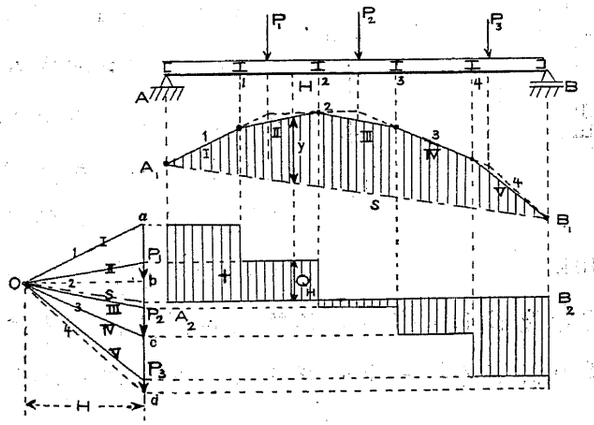


Fig. 183.

ニ對スル剪力圖ハ其直接荷重ニ對スル圖表カラ容易ニ作圖シ得ラレルノデアル。

Fig. 183ハ間接集中荷重ニ對スル彎曲力率圖及剪力圖ヲ作圖シタモノデアツテ先ヅ力邊形ニ於テHナル極距ヲ以テ極Oヲ採リ直接荷重トシテノ平衡多邊形 1,2,3,4 ヲ得,次ニ格點間ハ直線トナルノ理ニヨリテ今求メタ多邊形ノ相當點ヲ直線デ結ビ I, II, III, IV,V ヲ得Oヲ通ジテコレニ平行ナル極射線 I,II,III …… ヲ作圖セバコレト垂直示力線 ad トノ交點ニヨリテ各格點ニ働ク荷重分力ヲ求メ得ルガ故ニ此點ヲ通ズル水平線ト各格點ヨリ下セル垂線トニヨリテ圖示ノ如ク求ムル剪力圖ヲ作圖スルコトガ出來ル。

Fig. 184ハ間接等布荷重ニ對スルモノデアツテ先ヅ直接等布荷重ト考ヘテ拋物線ノ彎曲力率圖ヲ作リ各格點ニ於テ之ニ內接スル多邊形 I, II, III, IV, V ヲ作レバ求ムル彎曲力率圖トナル,剪力圖ヲ作ルニハOヲ通ジ多邊形ノ各邊ニ平行ナル極射線 I, II,III,IV,V ヲ作レバ其力邊形トノ交點ハ各格點ニ働ク荷重ノ分力ヲ與フル故ニ剪力圖ハ前述ノ場合ト同ジク容易ニ作圖シ得ルノデアル。

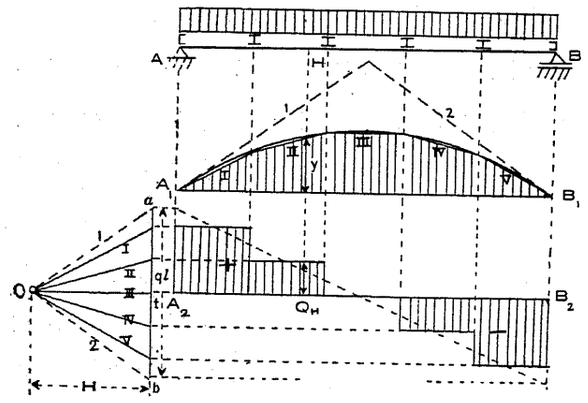


Fig. 184.

第 十 二 節

影響線ニヨル彎曲力率及剪力算定法

(Solution of Bending Moment and Shearing Force by means of Influence Line)

影響線 (Influence Line) ハ「ヴィンクラー」氏 (Winkler 獨)ガ之ヲ創設シ其後「ヴァイラウフ」氏 (Weyrauch 獨) 「ミュツラー.ブレスラウ」氏 (Müller-Breslau 獨)等ノ諸氏ニ依ツテ更ニ廣ク用ヒラレタモノデアツテ未知數殊ニ其極限値ヲ求ムルニ用ヒテ都合ヨキ方法デアル,コレハ桁ノ任意斷面又ハ結構ノ任意部材ニ對シ異ナル點ニアル荷重ガ如何ナル影響ヲ與フルカヲ線ヲ以テ示スノデアツテ桁上ノ特定點ヲ採リ此點ノ彎曲力率,剪力等ガ桁上ノ任意點ニアル荷重或ハ移動荷重(Moving load) ニヨツテ受クル變化ヲ示ス曲線デアル,影響線ノ說明トシテ先ヅ支點反力ノ影響線ヲ圖示シヤウ。

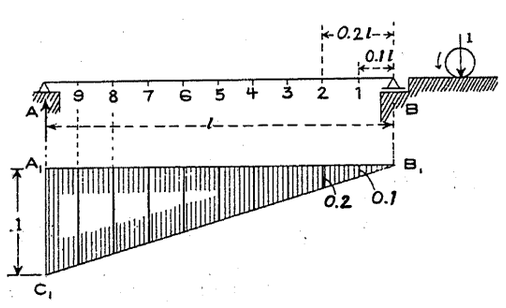


Fig. 185.

今單位荷重1ガ此桁ノ上ヲ右カラ左ニ進ム時ノ左支點反力Aノ變化ヲ考フルニ荷重ガB點ニ達スル前ニハ反力ハ勿論零デアリB點ニ乘ツタ場合ニモBニハ反力アルモAニハ反力ナシ,荷重ガ1ニ達シタ時ニハ反力Aハ

$$A=\frac{1\times 0.1l}{l}=0.1$$

同樣ニ荷重ガ2ニ達シタ時ニハ

$$A=\frac{1\times 0.2l}{l}=0.2$$

故ニ茲ニ水平線 A_1B_1 ヲ引キ右端ニ O, 左端ニ 1 ナル縦距ヲ有スル如キ直線 C_1B_1 ハ桁ノ上任意點ニ來タ單位荷重ニ對スル反力 A ノ量ヲ與ヘルモノデアル,卽チ任意荷重ガ任意點ニ來タ時ニ其點ノ縦距ト荷重トノ積ハ荷重ガ其點ニアル時ノ反力 A ヲ示ス事トナル,故ニ $\triangle A_1B_1C_1$ ヲ示ス直線 B_1C_1 ハ反力 A ノ影響線デアル Fig. 186 ニ示ス如キ場合反力 A ノ影響線ニ於テ荷重 P_1,P_2 及 P_3 ニ對スル縦距ヲ y_1,y_2,y_3 トスレバ

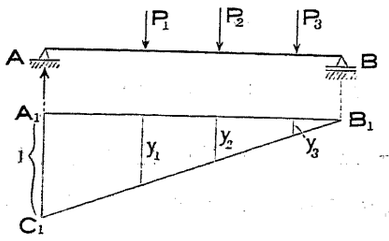


Fig. 186.

$$A=P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3$$

ナル事ヲ知ル。

(I) 彎曲力率。

(A) 集中荷重。

集中荷重ヲ有スル桁ノ任意點 H ニ對スル彎曲力率ノ影響線ヲ知ラントスルニハ先ヅ AB ナル桁ニ荷重 P_1,P_2 ガ作用シ此荷重ニ因ツテ H 點ニ生ズル彎曲力率ヲ求ムルニ

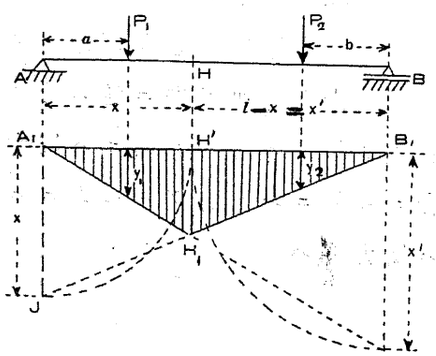


Fig. 187.

$$M_H=Ax-P_1'(x-a)$$

然ルニ $A=\frac{P_2b}{l}+P_1\frac{(l-a)}{l}$

$$=P_2\cdot\frac{b}{l}+P_1-P_1\frac{a}{l}$$

ナル故ニ此値ヲ挿入シ

$$M_H=P_2\frac{bx}{l}-P_1\frac{ax}{l}+P_1x-P_1x+P_1a$$

$$=P_1\frac{a(l-x)}{l}+P_2\frac{bx}{l}=P_1\frac{ax'}{l}+P_2\frac{bx}{l}$$

故ニ此式ヲ

$$M_H=P_1y_1+P_2y_2$$

ナル形ニ置キ此時ニ

$$y_1=\frac{ax'}{l},\quad y_2=\frac{bx}{l}$$

ナラシムレバ卽チ P_1 ノ下ニ於テ y_1 ナル縦距ヲ與ヘ又 P_2 ノ下ニ於テ y_2 ヲ與ヘル樣ナ曲線ヲ引キ得タナラバコレガ H 點ニ於ケル彎曲力率ニ對スル影響線トナリ荷重ト縦距トノ夫々ノ積ヲ加ヘ合セル事ニヨツテ彎曲力率ガ得ラルル筈デアル。

此目的ニ協フ曲線ハ容易ニ引キ得ラレル.Fig. 187 ニ示ス如ク先ヅ徑間ニ相當スル A_1B_1 ヲ引キ左端ニ $A_1J=x$ ナル縦距ヲ置ク,此 J ヲ右端 B_1 ニ結ンダ線ガ H 點ヨリ下ゲタ垂線ヲ H_1 ニテ切ツタモノトス H_1 ヲ A_1 ニ結ビ生ジタ $A_1H_1B_1$ ナル線ハ上ニ求メタ條件ニ協フ線デアツテ此線ノ縦距ヲ各荷重ノ下デ測リ荷重ト此縦距トノ積ノ和ハ H 點ノ彎曲力率ヲ與ヘル,卽チ $A_1H_1B_1$ ハ H 點ニ對スル彎曲力率ノ影響線デアル。

此證明テナス爲メニ P_1,P_2 ノ位置ニ相當シタ縦距 y_1 及 y_2 ヲ計算シテ見レバ夫夫 $y_1=\frac{ax'}{l}$, $y_2=\frac{bx}{l}$ 卽チ求ムル條件ヲ滿足スル縦距トナル。

(B) 等布荷重。

部分荷重ヲ受ケタ桁ノ H 點ニ於ケル彎曲力率ヲ求メンニハ先ヅ其影響線ヲ引キ荷重ノ兩端ニ於ケル縦距 y' ト y'' トノ間ニ生ジタ面積 $abcd$ ニ對シ荷重强度 q ヲ乘ズレバ求ムル H 點ノ彎曲力率

ヲ得ル,何トナレバ荷重極微量 (Load element) qdx ガ H 點ニ對スル影響ハ圖上ヨリ

$$dM_H = q.dx.y$$

デナケレバナラヌ,故ニ斯クノ如キ荷重ガ存在スル全範圍ノ積分ニヨツテ H 點ニ對スル彎曲力率ヲ知リ得ベク

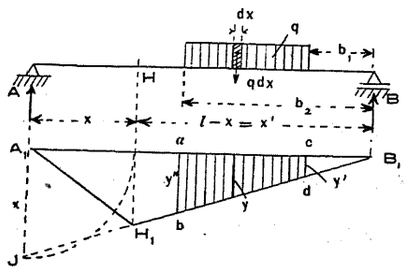


Fig. 188.

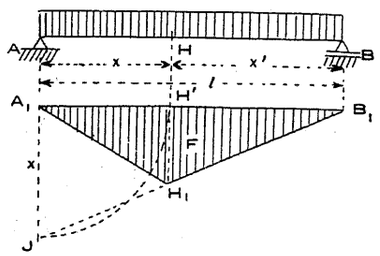


Fig. 189.

$$M_H = \int dM_H = q\int y.dx = q\times(\text{面積 } a\,b\,c\,d)$$

モシ桁 AB ガ徑間全體ニ等布荷重ヲ負フ事 Fig. 189 ノ如キ場合ニハ

$$M_H = q\times\text{面積 } A_1H_1B_1 = qF$$

而シテ $F = H'H_1\dfrac{l}{2}$

然ルニ $H'H_1 = A_1J\dfrac{x'}{l} = \dfrac{xx'}{l}$

$\therefore\quad F = \dfrac{xx'}{l}\cdot\dfrac{l}{2} = \dfrac{xx'}{2}$

$\therefore\quad M_H = qF = q\dfrac{xx'}{2}$ ……(138)式參照,

今モシ H 點ガ徑間中央ニ採ラレタナラバ $x=x'=\dfrac{l}{2}$ トナリ

$$_{max}M_{x=\frac{l}{2}} = \frac{ql^2}{8}$$ ……(139)式參照,

(C) 間接荷重。

茲ニ間接荷重 P_1,P_2 ヲ有スル桁 AB アリテ其 T_1,T_2 ナル小桁ノ間ニアル H 點ノ彎曲力率ヲ考ヘンニ先ヅ直接荷重ニ於ケルト同樣ノ方法ニテ此 H 點ニ對スル影響線 $A_1H_1B_1$ ヲ畫キタル後,其小桁 T_1 ト T_2 トカラ下シタ垂線ト交ツタ點ヲ L_1,L_2 トシ此 L_1, L_2 ヲ結ンデ生ジタ $A_1L_1L_2B_1$ ハ間接荷重ヲ受ケル時ノ H 點ノ彎曲力率ニ對スル影響線トナル.故ニ荷重ガ T_1 ヨリ左ニアルカ T_2 ヨリ右ニアル場合ニハ其 H 點ニ對スル影響ニハ間接直接ノ間ニ差異ヲ認メナイ,唯 T_1,T_2 ナル小桁ノ間ニ働ク場合ニ其影響線ハ小桁間ハ直線トナル故ニ直接荷重ニ於ケルト差違アルヲ見ルノデアル。

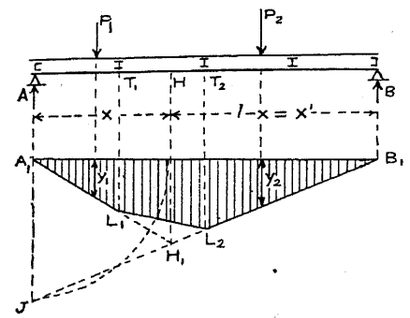


Fig. 190.

何故 T_1T_2 間ニ於ケル影響線ガ直線デナケレバナラヌカト云フニ Fig. 191 ニ於テ P ナル荷重ガ小桁 $m-1$ ト m トヲ經テ主桁ニ傳ヘラルルモノトセバ此 P ガ此二個ノ小桁ニ配分セラルル分力ハ

$$P_{m-1} = \frac{P.x}{\lambda},\quad P_m = \frac{P(\lambda-x)}{\lambda}$$

今影響線ノ縱距ヲ $(m-1)$ 小桁ノ下ニ於テ y_{m-1}, m 小桁ノ下ニ於テ y_m トシ荷重 P ノ直下ニ於ケルモノヲ y トスレバ影響線ノ性質トシテ

$$P.y = P_{m-1}.y_{m-1} + P_m.y_m$$

ナル條件ガ滿足セラレネバナラヌ.故ニ

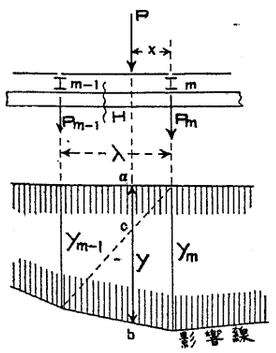


Fig. 191.

$$y=\frac{P_{m-1}}{P}y_{m-1}+\frac{P_m}{P}y_m$$
$$=\frac{x}{\lambda}y_{m-1}+\frac{\lambda-x}{\lambda}y_m$$

卽チ y ノ式ハ x ノ一次式デアル故ニH點ニ對スル影響ハH點ヲ挾ム小桁ト小桁トノ間ニ於テハ直線トナル事ヲ知ル,尙 Fig. 191 ニ示ス如ク y ノ縱距ヲ二分シテ ac ト cb トヨリ成ルモノト考フレバ上式ニ於ケル右邊ノ第一項ハ ac ニ相當シ第二項ハ cb ニ相當スルヲ見ル。

[II] 剪力。

(A) 集中荷重。

Fig. 192 ハ AB 桁ガ P_1,P_2 ナル荷重ヲ有スルモノトシ其H點ニ於ケル剪力ヲ影響線ニ據ツテ求メントス。

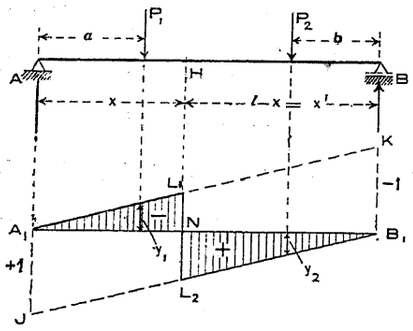


Fig. 192.

今 P_1 ハ H ノ左側ニ働キ P_2 ハ右側ニ働クモノトセバ B ヲ原點トシテ荷重及反力ノ力率ヲ求メ

$$A.l-P_2b-P_1(l-a)=0$$

從ツテ

$$A=P_2\frac{b}{l}-P_1\frac{a}{l}+P_1$$

此結果斷面H ノ剪力ハ明カニ

$$Q_H=A-P_1=P_2\frac{b}{l}-P_1\frac{a}{l}$$

此式ヲ

$$Q_H=P_1y_1+P_2y_2$$

式中　$y_1=-\frac{a}{l}$, $y_2=\frac{b}{l}$

ナル形ニ表ハシ得,卽チ今 P_1 ノ下ニ於テ y_1 ヲ與ヘ P_2 ノ下ニ於テ y_2

ヲ與ヘル如キ線ヲ引キ得タナラバコレハ求ムル影響線デアル。

此影響線ヲ作圖スルニハ先ヅ Fig. 192 ニ示ス如ク A_1B_1 ナル水平線ヲ引キ $A_1J=+1$, $B_1K=-1$ ナル縱距ヲ置キ A_1K, B_1J ヲ結ブ事圖示ノ如クシテ問題ノH點カラ垂線ヲ下シ此二線ヲ L_1,L_2 ニテ切ルモノトスレバ $A_1L_1L_2B_1$ ハH點ニ對スル剪力ノ影響線デアル,何トナレバ

P_2 ノ下ニ於テ　$y_2=A_1J\frac{b}{l}=+\frac{b}{l}$

P_1 ノ下ニ於テ　$y_1=B_1K\frac{a}{l}=-\frac{a}{l}$

ヲ與ヘル故ニ求ムル影響線デアル事ヲ知ル。

從ツテ各荷重ノ下ニ於ケル縱距ヲ測レバ(荷重×縱距)ノ和トシテ剪力ヲ得ル,此圖ニ見ル如クH點ノ右ノ部分ニ於ケル荷重ハ總テH斷面ニ正剪力ヲ生ジ左ノ部分ニアル荷重ハ總テ負剪力ヲ生ズルノデアル。

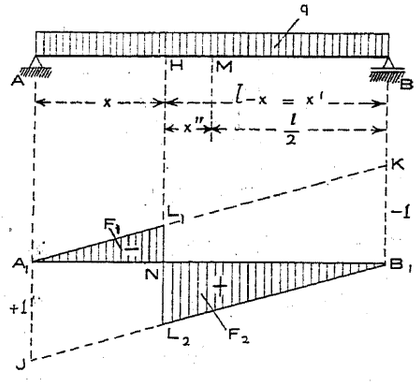


Fig. 193.

(B) 等布荷重.

今 Fig. 193 ニ於テ全徑間ニ等布荷重ヲ有スル場合ノH點ノ剪力ヲ影響線ヲ用ヒテ計算センニ先ヅH點ニ對スル剪力ノ影響線ヲ引ケバ此正ト負ノ境界點N ニ於ケル正縱距及負縱距ハ夫々

$$NL_2=A_1J\frac{x'}{l}=\frac{x'}{l}\qquad NL_1=B_1K\frac{x}{l}=-\frac{x}{l}$$

故ニ圖示ノ NL_2 ヨリ右側卽チ正ノ部分ノ面積ハ

$$F_2=\triangle B_1NL_2=NL_2\frac{x'}{2}=\frac{x'^2}{2l}$$

又 NL_1 ヨリ左側ノ負面積ハ

$$F_1=\triangle A_1NL_1=NL_1\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2l}$$

然ル時ハ H斷面ノ剪力ハ其面積ノ差ニ强度 q ヲ乘ジタルモノニ等シキガ故ニ

$$Q_H=q(F_2-F_1)=q\frac{x'^2-x^2}{2l}=q\frac{(x'+x)(x'-x)}{2l}$$

$$=qx''=q\left(\frac{l}{2}-x\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(137)\text{式參照}$$

既ニ前ニ述ベタル如ク影響線ハ極限値ヲ求ムルニハ極メテ都合ノヨキモノデアル,例ヘバ H點ノ剪力ヲ最大ナラシメル如キ荷重ノ配置ヲ求メンニハ Fig. 194 ニ示ス如ク正部分ノミガ荷重セラレ負部分ニ荷重ナキ場合ナル事ヲ知リ得ルガ故ニ

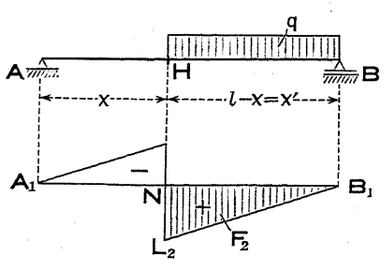


Fig. 194.

$$_{max}Q_H=qF_2=q\frac{x'^2}{2l}$$

全ク同樣ニ H點ニ於ケル最大負剪力ハ負部分 AH ノミガ荷重セラレタ場合ニ起ルノデアツテ

$$_{min}Q_H=qF_1=-q\frac{x^2}{2l}$$

(C) 間接荷重。

Fig. 195 ニ示ス小桁 T_1,T_2 ノ間ニ任意點 H ヲ採リ此 H 點ニ對スル剪力ヲ考ヘテ見ル,今小桁 T_1 ノ左ニ荷重 P_1 小桁 T_2 ノ右ニ荷重 P_2 ガ働クモノトセバ此場合ノ支點反力ハ前述ノ如ク間接荷重ナルト

直接荷重ナルトニ變化ナキガ故ニ

$$A=P_2\frac{b}{l}+P_1\frac{l-a}{l}$$

從ツテ $$Q_H=A-P_1=P_2\frac{b}{l}+P_1\frac{l-a}{l}-P_1=P_2\frac{b}{l}-P_1\frac{a}{l}$$

卽チ $$Q_H=P_1y_1+P_2y_2$$

式中 $$y_1=-\frac{a}{l},\ y_2=\frac{b}{l}$$

ト置キ得ル,故ニ前ニ直接荷重ニ就イテ說明シタ影響線ト此場合ノ P_1,P_2 ニ對スル影響線トハ同ジ關係ニアル,卽チ格間 T_1T_2 ノ外側ニ於テハ影響線ハ直接荷重ニ對スルモノト一致スルモノデアル事ヲ知ル,次ニ格間ノ內側ニ於テハ影響線ハ直線ヲ以テ表ハサルルノデアツテ圖上 T_1,T_2 ノ下ニ於テ決定サルル L_1,L_2 ヲ直線デ結ビツケタモノデアル,此事實ハ既ニ本節 [I] (C) ニ於テ彎曲力率ニ對シテ證明セラレタト全ク同樣ニ之ヲ證明スル事ヲ得ル,從ツテ H點或ハ格間 T_1T_2 ニ對スル影響線ハ面積 $A_1L_1L_2B_1$ ニヨツテ與ヘラレルベク是ニ依テ如何ナル點ニ如何ナル荷重ガ作用スルモ其縱距ノ符號ヲ考慮シテ(荷重×縱距)ノ和ヲ求ムレバ H點ノ剪力ヲ得ル。

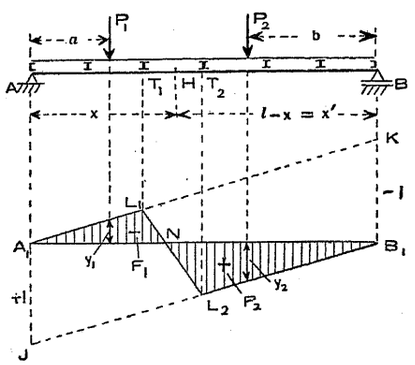
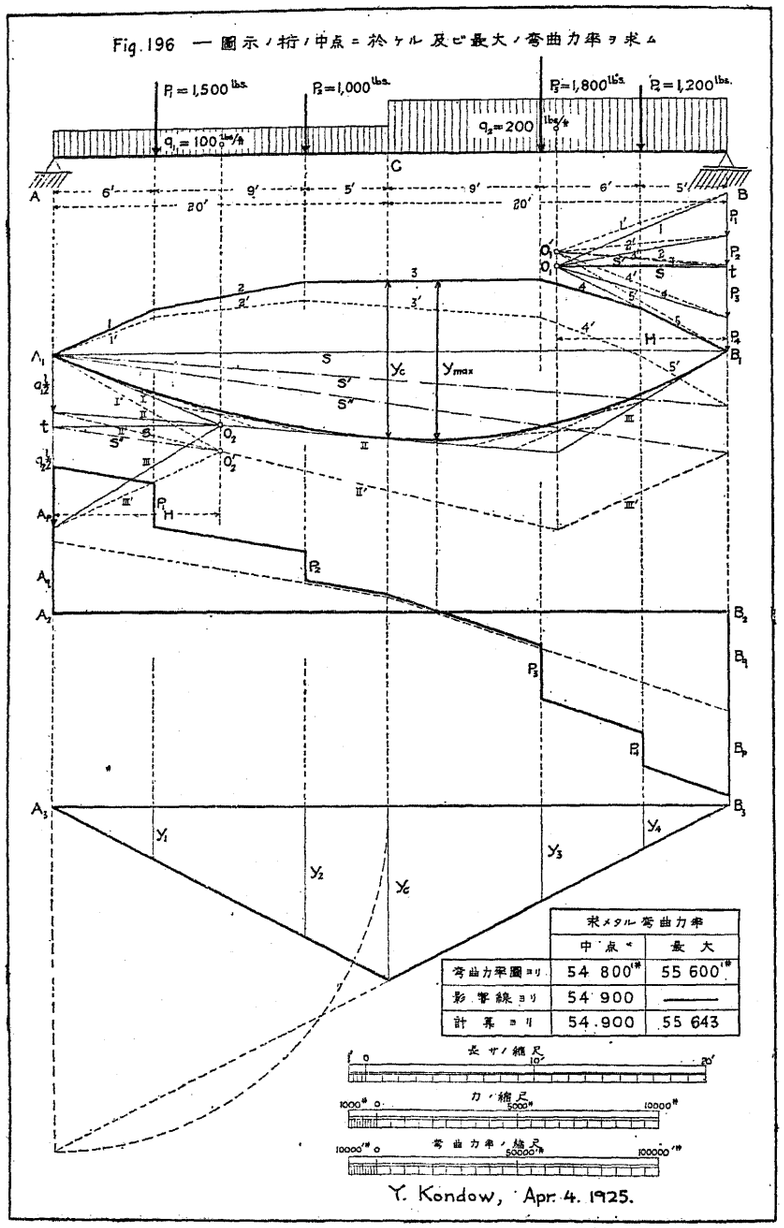


Fig. 195.

今荷重ガ强度 q ナル等布荷重デアツテ徑間全體ニ行涉レル場合トスレバ H點ノ剪力ハ

$$Q_H=q(F_2-F_1)$$

Fig. 196 — 圖示ノ桁ノ中点ニ於ケル及ビ最大ノ彎曲力率ヲ求ム



求メタル彎曲力率	中点ニ	最大
彎曲力率圖ヨリ	54 800 ft-lbs	55 600 ft-lbs
影響線ヨリ	54 900	——
計算ヨリ	54.900	55 643

長サノ縮尺 0 10′ 20′

力ノ縮尺 1000# 0 5000# 10000#

彎曲力率ノ縮尺 10000 ft-lbs. 0 50000 ft-lbs. 100000 ft-lbs.

Y. Kondow, Apr. 4. 1925.

但 $F_2=\triangle B_1NL_2$ ノ面積

$F_1=\triangle A_1NL_1$ ノ面積。

例題第十七. Fig. 196 ニ示ス如キ荷重ヲ與ヘテ最大彎曲力率ヲ求メ更ニ中點ノ彎曲力率ヲ影響線ニヨツテ檢セヨ。

答 Fig. 196 參照。作圖ノ詳細ニ就キテハ省略スル事トシ用ヒタル數値及結果ヲ列擧スレバ次ノ如シ。

極距 $H=10'$

荷重ハ左右對稱的ナラザル爲メ假ニ O_1' 及 O_2' ノ極ヲ假定シテ平衡多邊形ヲ作圖シ次ニ閉合線ガ水平トナル樣極ヲ更メテ O_1 及 O_2 トス,求メタル縱距ハ

$$y_c=5480\ \#\quad \therefore\quad H.y_c=54800\ ft\text{-}lbs$$

最大彎曲力率ノ生ズル點ヲ求ムル爲メニ剪力圖ヲ作リテ零剪ノ位置ヲ求メ其レニ相當スル彎曲力率圖ノ縱距ハ

$$y_{max}=5560\ \#\quad \therefore\quad M_{max}=Hy_{max}=55600\ ft\text{-}lbs.$$

桁中點ノ彎曲力率ニ對スル影響線縱距ヲ各荷重位置ニ就イテ求メ

$$y_1=3.00',\ y_2=7.50',\ y_c=10.00',\ y_3=5.50',\ y_4=2.50'$$

$$\therefore\ M_c=P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3+P_4y_4+q_1\frac{1}{2}\frac{l}{2}y_c+q_2\frac{1}{2}\frac{l}{2}y_c$$

$$=1500\times3+1000\times7.5+1800\times5{,}5+1200\times2{,}5+100\times\frac{1}{2}\times20\times10+200\times\frac{1}{2}\times20\times10=54900\ ft\text{-}lbs.$$

尙計算カラ此數値ノ正否ヲ調ベテ見ヤウ。

$$A=\frac{1}{40}\times(1500\times34+1000\times25+1800\times11+1200\times5+100\times20\times30+200\times20\times10)=5045\ \#$$

$$B=1500+1000+1800+1200+100\times20+200\times20-5045=6455\ \#$$

故ニ桁中點ノ彎曲力率ハ

$$M_c=5045\times20-1500\times14-1000\times5-100\times20\times10=54900\ ft\text{-}lbs.$$

最大彎曲力率ノ生ズル位置ハ零剪ノ點ナルテ以テ其右支點カラノ距離ヲ x トシ斷面ノ右側ヲ考ヘレバ

$$6455-1200-1800-200x=0$$

$$\therefore\quad x=17.275\ ft$$

此點ノ彎曲力率卽チ最大彎曲力率ノ値ハ

$$M_{max}=6455\times17.275-1200\times12.275-1800\times6.275-200\times17.275\times\frac{17.275}{2}=55643\ ft\text{-}lbs.$$

第十三節　移動荷重ニヨル彎曲力率

桁ニ沿フテ異ナル時間ニ異ナル點ヲ占ムル如キ荷重ヲ稱シテ移動荷重(Moving load)ト云フノデアツテ次ノ三種類ガアル。

(a) 進行荷重 (Advancing load)

(b) 轉行荷重 (Rolling load)

(c) 聯行荷重列 (Travelling load system)

進行荷重トハ等布强度ヲ有スル移動荷重デアツテ始メ徑間ノ端ヨリ進出シテ漸次徑間上ノ多クノ部分ヲ覆ヒ他ノ端ニ通過スルモノデアル,Fig. 197 ⓐハ之ヲ示ス,轉行荷重トハ一點ニ集中シタル移動荷重デアツテ桁ノ上ヲ轉行スル車輪ノ如キ又輾壓機(Road roller)ノ如キハ此適例デアル,Fig. 197 ⓑノ如ク圖示スル,聯行荷重列トハ集中荷重ノ幾ツカガ互ニ相聯結サレ桁ノ上ヲ通過スル如キ荷重デアル,換言スレバ固定シタ間隔ニ於テ定マリタル量ノ荷重ヲ傳達シツツ進行スルモノデアツテ機關車荷重ノ如キハ此實例デアル,而シテ其最モ簡單ナルモノガ轉行荷重ニ相當スルノデアルFig. 197 ⓒハ其一例ヲ示ス。

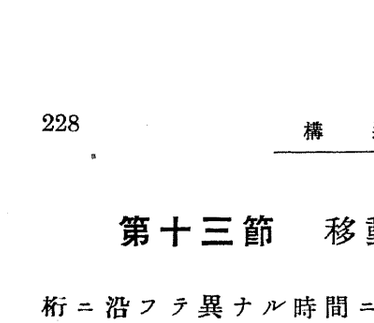


Fig. 197.

公道橋設計ニ際シテ假定セラルル活荷重(Live load)ハ進行荷重トシテ群衆ヲ採リ轉行及聯行荷重トシテ輾壓機 (Road roller), 自動車(Motor Truck)又ハ市街電車ヲ採ル,又鐵道橋ニ於ケル活荷重トシテハ一般ニ聯行荷重トシテ聯結サレタル二臺ノ機關車及貨車ヲ採ル,機關車トシテハ現在使用セラルル最大型ノモノヲ採用スル事モアルガ普通ニハ車軸間隔及荷重配置ノ簡單ナル假定機關車ヲ採用スルノデアル,茲ニ其數例ヲ示ス。

Fig. 198ハ北米合衆國「ペンシルバニア」鐵道(Pennsylvania Railroad)ニ採用セル標準四軸機關車 (Typical consolidation locomotive)

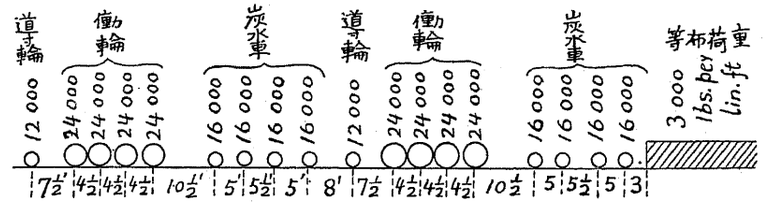


Fig. 198.

Fig. 199 ハ「ワッデル」博士 (Dr. waddell 米) ノ提案セル標準荷重 (Compromise standard system), 此レハ車軸間隔ヲ等シクスル七級ニ分チ其路線ノ重要度ニ應ジテ適宜其何レカヲ擇ブ事ニシテアル。

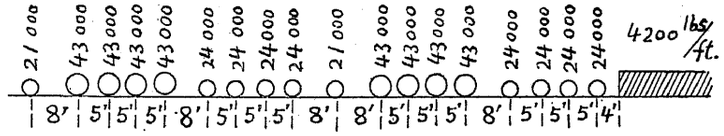


Fig. 199.

等級	一軸ニ對スル荷重 (#)			機關車一臺ノ總重量	等布荷重 #/lin.ft.
	導輪	働輪	炭水車		
Z	15000	25000	18000	187000	3000
Y	16000	28000	19000	204000	3200
X	17000	31000	20000	221000	3400
W	18000	34000	21000	238000	3600
V	19000	37000	22000	255000	3800
U	20000	40000	23000	292000	4000
T	21000	43000	24000	289000	4200

Fig. 200ハ普國國有鐵道ニ採用セラレテ居ル機關車荷重デアッテ若シ其橋梁ノ徑間ガ短クテ一機關車ノ五車軸ガ乘リ得ナイ場

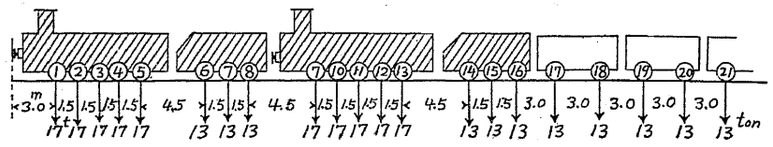


Fig. 200.

合ニハ下記ノ如ク其車軸荷重ヲ增ス事トシテアル。

四軸ヨリ乘リ得ナイ場合ニハ其一軸ニツキ 18 *t*.

三軸 〃 〃 〃 〃 〃 19 *t*.

一軸又ハ二軸 〃 〃 〃 〃 20 *t*.

Fig. 201ハ埃國鐵道ニ於ケル標準荷重。

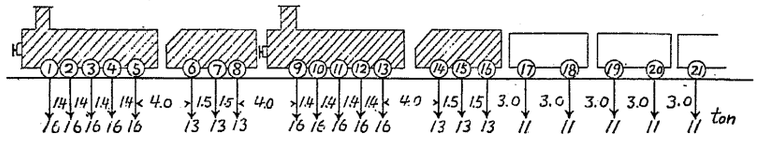


Fig. 201.

Fig. 202ハ「クーパー」氏標準荷重 (Cooper's specification) デアッテ我鐵道省ニ採用セラレテ居ルハ其E 40其他デアル。

移動荷重ハ桁上ヲ動クモノデアルカラ任意點ノ彎曲力率ハ荷重ノ位置ニヨッテ變化スル筈デアル,若シ或瞬間ニ於ケル荷重ノ位置ガ與ヘラレタナラバ此場合ニ對スル任意點ノ彎曲力率ハ容易ニ調ベ得ルモノデアル,故ニ移動荷重ノ場合ニ調査スベキ事項ハ次ノ二點ニ歸スル。

等級	8′ 5′ 5′ 5′ 9′ 5′ 6′ 5′ 8′ 8′ 5′ 5′ 5′ 9′ 5′ 6′ 5′ 5′ 等布荷重	
E27	18500 27000 27000 27000 27000 17550 17550 17550 17550 13500 27000 27000 27000 27000 17550 17550 17550 17550	2700 lbs. PerLin.ft.
E30	15000 30000 30000 30000 30000 19500 19500 19500 19500 15000 30000 30000 30000 30000 19500 19500 19500 19500	3000 lbs. PerLin.ft.
E35	17500 35000 35000 35000 35000 22750 22750 22750 22750 17500 35000 35000 35000 35000 22750 22750 22750 22750	3500 lbs. PerLin.ft.
E40	20000 40000 40000 40000 40000 26000 26000 26000 26000 20000 40000 40000 40000 40000 26000 26000 26000 26000	4000 lbs. PerLin.ft.
E50	25000 50000 50000 50000 50000 32500 32500 32500 32500 25000 50000 50000 50000 50000 32500 32500 32500 32500	5000 lbs. PerLin.ft.

Fig. 202.

[I] 與ヘラレタ點ニ最大彎曲力率ヲ生ズベキ荷重ノ位置ヲ求ムル事。

[II] 桁上ニ於ケル絶對最大彎曲力率ノ生ズベキ點ヲ求ムル事。

今茲ニハ最モ一般的ニ考ヘ荷重トシテ聯行荷重列ヲ採リテ其說明ヲ進メヤウ。

[I]與ヘラレタ點ニ最大彎曲力率ヲ生ズベキ荷重ノ位置。

Fig. 203ニ示スハ桁 AB 上ニ於ケル移動荷重ノ或瞬間ニ於ケル位置トシ此瞬間ニ於テ R_1 ハAヨリH迄ノ間ニアル荷重ノ合成力デアリ R_2 ハBヨリH

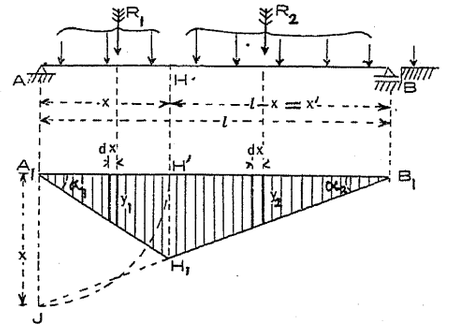


Fig. 203.

迄ノ間ニアル荷重ノ合成力トスル。

既ニ述ベタ如クH點ノ彎曲力率ハ各個ノ力ニツイテ計算ヲ行ツテモ又ハコレヲ代表スルR₁及R₂ニ就イテ調ベテモ同ジデアル,故ニ今Fig. 203ニ示スA₁H₁B₁ヲH點ノ彎曲力率ニ對スル影響線トスレバ

$$M_H = R_1 y_1 + R_2 y_2$$

今此荷重列ガ極微距離dxダケ左ニ移動シタ場合ヲ考ヘル.勿論ソレガ爲メニ全體ノ荷重ノ數ニハ變化ハナク何レノ荷重モA點及B點ヲ通過シナイモノト考ヘル,然ル時ハ荷重ノ位置ノ變化ニヨツテ彎曲力率ニモ變化ヲ生ジ

$$M_H + dM_H = R_1(y_1 - dx.tan\alpha_1) + R_2(y_2 + dx.tan\alpha_2)$$

前式トノ差ヲ求メレバ

$$dM_H = R_2.dx.tan\alpha_2 - R_1.dx.tan\alpha_1$$

$$\therefore \quad \frac{dM_H}{dx} = R_2.tan\alpha_2 - R_1 tan\alpha_1$$

$$= H'H_1\left(\frac{R_2}{x'} - \frac{R_1}{x}\right)$$

扨此結果ヨリ見テ M_H ガ最大デアル爲メニハ $\frac{dM_H}{dx}=0$ トナル事ヲ要スルガ故ニ此條件ハ次ノ如ク書キ表ハサレル。

$$\frac{R_2}{x'} - \frac{R_1}{x} = 0 \quad \cdots\cdots(\alpha)$$

(α)式ハ M_H ノ最大彎曲力率ニ對スル條件ヲ示ス,換言スレバ荷重ガ極微距離dx左ニ進ミタルタメニ(α)式ノ左邊ガ正ヨリ負ニ移リ變リ此間ニ零ヲ通過スル事ヲ必要トスル,此$\frac{R_2}{x'} - \frac{R_1}{x}$ガ正カラ負ニ變ズルト云フ事ハ分母ガ定マリタル數値ナル以上分子ガ變化セネバナラヌ卽チR_2ガ減ズルカR_1ガ增スカニ非レバ此變化ヲ生ジ得ナイ,此R_2ガ減ジR_1ガ增ス事ハ或荷重ガH點ニアリテコノ荷重ガR_2ニ屬スルト考ヘレバ此式ガ正トナリR_1ニ屬スルト考ヘレバ此式ガ負トナル,丁度此荷重ノ一部ガR_2ニ屬シ一部ガR_1ニ屬スト考ヘテ(α)式ガ滿足セラレル如キ關係ニアルノデアツテ M_H ガ最大デアル爲メニハ是非一ツノ荷重ガHニアツテ(α)式ヲ滿足スベキ事ヲ要ス,此關係ハ等布荷重ノ如キ連續荷重ニ於テハ完全ニ滿足セラレ得ベキ事ハ明瞭デアル。

(α)式ヲ變ジテ $\frac{R_2}{x'} = \frac{R_1}{x}$ ヲ得ルヲ以テ

$$\frac{R_1 + R_2}{x + x'} = \frac{R_1}{x}$$

或ハ $R_1 + R_2 = R$ ト置ケバ

$$\boxed{\frac{R_1}{x} = \frac{R}{l}} \quad \cdots\cdots(153)$$

此(153)式ハ M_H ノ最大ナル爲メノ荷重位置ヲ求ムル式デアル。

以上述ベタ結果ヲ約言スレバ今考察スル點ノ左ニ於ケル平均單位荷重(Average unit load)ガ全徑間ニ於ケル平均單位荷重ニ等シクナケレバナラヌ,此條件ガ此H點ニ最大彎曲力率ヲ生ズル荷重狀態デアル,平均荷重ヲ計算スルタメノ長サノ單位ハ普通桁ニテハ米又ハ呎ヲ採レバヨイノデアルガ間接荷重ノ場合ニテハ格間長(Panel length)ヲ採ルベキモノデアル。

此條件ヲ滿足スル荷重位置ハ或荷重列ニ對シテ二ツ又ハヨリ以上アル事モアル,此場合ニハ此各位置ニ對シテ彎曲力率ヲ計算シテ其最モ大ナルモノヲ採用シナケレバナラヌ。

此一般法則ニヨリ次ニ特種荷重ニ對スル二三ノ例ヲ示サウ。

(1) 進行荷重 (Advancing load)

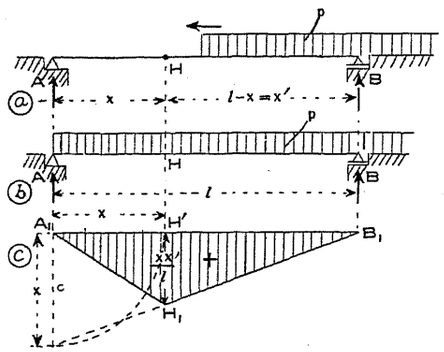


Fig. 204.

進行荷重ニヨツテH點ニ生ズル最大彎曲力率ハFig. 204 ⓑニ示ス如ク全徑間ABニ荷重ノ滿載セラレタ時ニ生ズル事ハ明デアツテ其量ハ面積$A_1H_1B_1$ト荷重强度pトノ積ニ等シイ,然ルニ面積

$$A_1H_1B_1=\frac{1}{2}l\frac{xx'}{l}=\frac{1}{2}xx'$$

ナル故ニH點ノ最大彎曲力率ハ

$$_{max}M_H=p\frac{xx'}{2} \quad \cdots\cdots(154)$$

此場合ニハ$\frac{R_1}{x}=\frac{R}{l}$ノ式ニ於テ

$$\frac{px}{x}=p=\frac{pl}{l}$$

卽チ(153)式ヲ滿足スル事ヲ知ル。

(2) 轉行荷重 (Rolling load)

影響線ヲ用フレバ明カナル如ク轉行荷重ノ任意ノ位置ニ對スルH點ノ彎曲力率ハ此荷重ガH點ニアル時ニ最大デアツテ

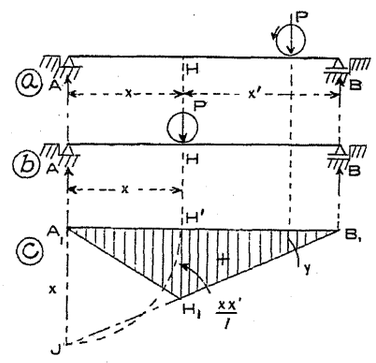


Fig. 205.

$$_{max}M_H=P\frac{xx'}{l} \quad \cdots\cdots(155)$$

此荷重狀態ハ(153)式ヲ滿足ス.卽チ

$$\frac{Pノ一部}{x}=\frac{P}{l}$$

トナリ　$\frac{R_1}{x}=\frac{R}{l}$ト一致ス。

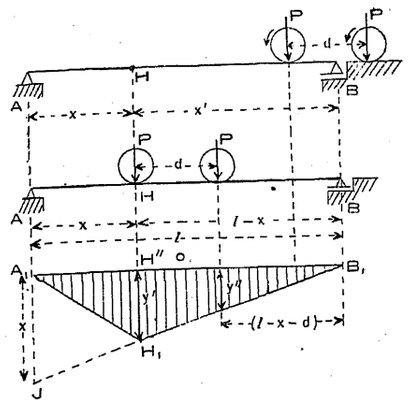


Fig. 206.

(3) 二個ノ等量聯行荷重。

dナル定距離隔リタル二個ノ等シキ荷重ニ對シHニ生ズル彎曲力率ハ其一ツガH點ニアリ他ノ一ツガ桁ノ長キ部分ニアル時ニ最大トナル事ハ明カデアツテ此場合ニハ二個ノ荷重ガ等量デアリ$y'+y''$ガ最大トナルカラデアル,尙

$$y'=\frac{xx'}{l},\quad y''=\frac{xx'}{l}\frac{l-x-d}{x'}$$

$$\therefore\quad _{max}M_H=P(y'+y'')=P\left(\frac{xx'}{l}+\frac{x(x'-d)}{l}\right)$$

$$=P\frac{2xx'-xd}{l} \quad \cdots\cdots(156)$$

此場合ニ於テモ(153)式ノ條件ヲ滿足ス。

[II] 絕對最大彎曲力率ノ生ズベキ點 (The point of absolute max. bending moment in a beam under a given system of load)。

移動荷重ガ與ヘラレ此荷重ガ他ノ何レノ點ヨリモ大ナル絕對最大ノ彎曲力率ヲ生ズベキ點ハ何レニアルカヲ調ベントス。

既ニ固定荷重ニ就イテ說明セシ通リ荷重位置ガ與ヘラレ居ル場合ニ其最大彎曲力率ノ生ズル點ハ剪力ノ零ナル點ナル事ヲ知ル,其剪力ガ零トナリ從テ彎曲力率ガ最大トナルベキ點ガ時々刻刻荷重ノ移動ニ從ツテ變化スルダケノ差ガアルノミデアツテ其零剪トナルベキ條件ニハ變化ハナイノデアル,此絕ヘズ動ク點ノ

內デ其何レノ點ヨリモ大ナル彎曲力率ヲ生ズル點ヲ求メ樣トスルノデアル,コレハ [I] ニ調ベタ事實ト零剪ノ點ヲ求ムル事實トヲ併セ考ヘレバ容易ニ求メ得ラレル。

Fig.207 ニ於テ桁 AB 上ニアル全荷重ノ合成力ヲ R トシ其位置ハ右ノ支點ヨリ b ノ距離ニアルモノトス,而シテ圖上ノ H 點ガ最大彎曲力率ノ生ズベキ點デアリ R_1 ハ其 H 點ノ左ニ於ケル荷重ノ和トス,然レバ H 點ガ最大彎曲力率ノ點トナリ零剪ヲ生ズベキ爲メニハ

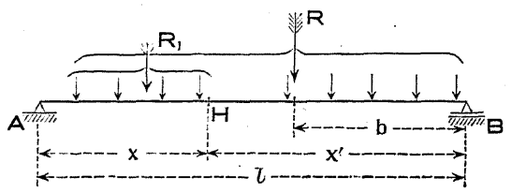


Fig. 207.

$$A - R_1 = 0$$

且ツ $A = \frac{R.b}{l}$ ナルガ故ニ前式ハ $\frac{R.b}{l} - R_1 = 0$ トナリ

$$\frac{R}{l} = \frac{R_1}{b} \quad \cdots\cdots(a)$$

又一方 H 點ガ絶對最大彎曲力率ニ對シテ求メタ點デアル爲メニハ H 點ノ彎曲力率ガ桁中ノ何レノ點ヨリモ大ナル事ヲ要スルト同時ニ H 點ニ起リ得ル最大彎曲力率デアル事ヲ要スル,既ニ [I] ニ於テ說明シタル如ク任意點ノ最大彎曲力率ノ條件ハ (153) 式ヨリ

$$\frac{R_1}{x} = \frac{R}{l} \quad \cdots\cdots(b)$$

今茲ニ考ヘテ居ル H 點ガ絶對最大彎曲力率ノ點デアル爲メニハ此 (b) 式ノ條件ヲ滿足スルト同時ニ (a) 式ヲ滿足セネバナラヌ,從テ此二式ヲ滿足スベキ事ハ H 點ガ求ムル點デアル爲メニ必要ノ條件デアツテ此二式ヲ纏メテ表ハセバ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{R}{l} = \frac{R_1}{b} = \frac{R_1}{x} \\ \therefore\quad &x = b \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(157)$$

卽チ絶對最大彎曲力率ノ生ズル點ガ桁ノ一端ヲ去ル事桁上ノ總荷重ノ重心ガ他ノ端ヲ去ル距離ト同一デアル事ヲ條件トス,此條件ト (153) 式ト合セ用フレバ容易ニ絶對最大彎曲力率ノ起ル點及荷重配置ヲ決定スル事ヲ得ル。

更ニ換言スレバ任意ノ與ヘラレタ荷重列ニ對スル絶對最大彎曲力率ノ生ズル點ト其全體ノ荷重列ノ重心トノ距離ガ徑間ノ中央ニテ二等分セラルル事ヲ必要條件トス,然ルニ (153) 式ノ條件ヲ滿ス爲メニハ絶對最大彎曲力率ノ點ニハ何レカ一ツノ荷重ガ存在スル事ヲ要スルガ故ニ本題ノ解法ハ次ノ如ク之ヲ行ヒ得ル,卽チ先ヅ Fig.208 ニ示ス如ク荷重列ノ內同時ニ徑間ニ乘リ得ルダケノ荷重ヲ排列シテ其重心ヲ求メコレトコレニ近イ荷重トノ距離 d ヲ桁ノ中央點 m ニテ二等分スル如ク荷重ヲ配置スレバ其荷量ノ働イテ居ル點 H ガ求ムル絶對最大彎曲力率ノ點トナル(第十五節(II)(A)參照)。

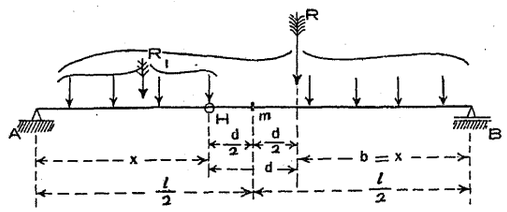


Fig. 208.

第十四節　移動荷重ニヨル剪力

荷重ガ移動スル故ニ任意點ノ剪力ハ時々刻々變化スル,其變化

スル狀態ハ影響線ヲ用フレバ容易ニ了解スル事ヲ得ル。

今 Fig. 209 ニ於テ $A_1L_1L_2B_1$ ヲH點ノ剪力ニ對スル影響線トスレバ

$$NL_1=-\frac{x}{l},\quad NL_2=\frac{x'}{l}$$

H點ノ剪力ハ單位荷重(Unit load)ガ右カラ左ヘ進ムモノト考ヘレバB點ニ荷重アル時ハOデアリ左ニ進ムニ從ツテ增加シ遂ニH點ノ直右側(Just at the right of H)ニ達シタ時ニH點ノ剪力ハ最大値$\frac{x'}{l}$トナル,H點ヲ越ユレバ忽チ減ジテH點ノ直左側ニ於テ$-\frac{x}{l}$トナリコレガ左ニ進ムニ從ツテ漸次增加シ(負値ヲ減少シ)遂ニA點ニ達シテOトナル,故ニ與ヘラレタ荷重ガ單位荷重デナク圖示ノPナル荷重ナレバ上述ノ剪力ニPヲ乘ズレバ求メラレ

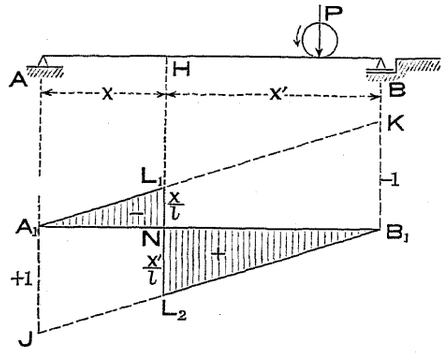


Fig. 209.

PガBニアル時 $Q_H=0$

PガHノ直右側ニアル時

$$Q_H=P\frac{x'}{l}$$

PガHノ直左側ニアル時

$$Q_H=-P\frac{x}{l}$$

PガAニアル時 $Q_H=0$

從ツテ荷重ガBヨリHニ到ル間ハ其左ニ動クニ從ツテH點ノ正剪力ヲ增加シHヲ越ユレバ剪力ハ一度ニ$P\left(\frac{l-x}{l}+\frac{x}{l}\right)=P$ダケ減少シ更ニ左ニ動クニ從ツテ負剪力ヲ減少ス。

[A]與ヘラレタ點ニ最大剪力ヲ生ズベキ荷重ノ位置.

(1)聯行荷重列。

前述ノ理ニヨリ知ラルル通リ與ヘラレタル點Hノ剪力ヲ考ヘンニ聯行荷重列ガ右ヨリ左ニ進ム時其荷重列ノ一ツノ荷重ガH點ニ達スル度毎ニH點ノ剪力ハ一ツノ最大ニ達スル,其多クノ最大値ノ內ノ絕對最大ノモノハ何レニ起ルカト云フニコレハ明カニ荷重列ノ先頭ニ近キ何レカノ荷重ガ丁度此H點ノ直右側ニ達シタ時デアル,卽チFig. 210 ⓐノ如キ時カⓑノ如キ時カデアル,此ⓐ又ハⓑノ何レガH點ノ剪力トシテ大ナル値ヲ與ヘルカヲ調ベヤウ,此場合桁AB上ニアル總荷重ヲRトシ圖示ノ位置ニアルモノトス。

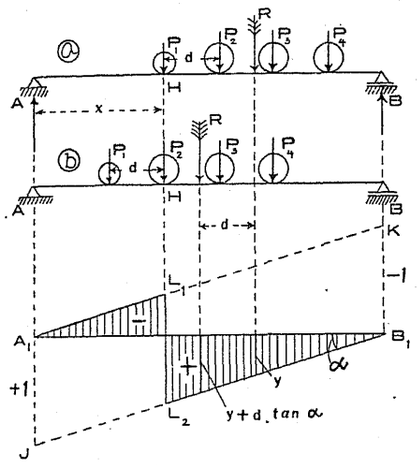


Fig. 210.

先ヅ始メニⓐ圖ノ如クP₁ガHニアリ總テノ荷重ガ皆正剪力ノ影響ヲ生ズル範圍內ニアルモノトス,次ニ其荷重列ガ距離dダケ左ニ進ミテP₂ガH點ノ直右側ニ達シタモノトス,此位置ニ達スル迄ニ爲シタ變化ハP₁ガH點ヲ越エタ時P₁ダケ減ジ更ニ增加シテⓑ圖ノ位置ニ達シタノデアツテ其增加シタ量ハ明カニ

$$R.d.\tan\alpha=\frac{R.d}{l}$$

故ニ此結果增加總量ハ$\frac{Rd}{l}-P_1$トナルガ故ニ

$$\frac{Rd}{l}-P_1\leqq 0 \quad\cdots\cdots(158)$$

ナルニ從ツテ第一ノ位置ⓐガ大ナル剪力ヲ與ヘルカ又ハ第二ノ

位置ⓑガ大ナル剪力ヲ與ヘル,モシ此式ガ零トナリ。

$$\frac{R}{l}=\frac{P_1}{d} \quad \cdots\cdots(159)$$

トナラバ何レノ剪力モ等シキ事ヲ意味スル。

今迄ノ說明ニハ第一ノ位置ヨリ第二ノ位置ニ移ル間ニ總荷重ノ量ニハ變化ナキモノト假定シタノデアルガ然シ事實聯行荷重列ガ進行スル場合ニハ距離 d ノ前進ニヨツテ總荷重ノ數ガ增加スル事ガアリ得ル,此增加荷重ノ爲メニ剪力ニ變化ヲ生ズル筈デアル,今此影響ニ就イテ考ヘテ見ヤウ。

今 P_1 ガ H ニアル時ノ總荷重ヲ R,P_2 ガ H ニアル時ノ總荷重ヲ R′トセバⓐノ位置カラⓑノ位置ニ進ンダ爲メノ剪力ノ增加ハ荷重ガ增加シタノデアルカラ $\frac{Rd}{l}-P_1$ ヨリ大デアル筈デアルガ然シ總荷重ノ重心ガ少シ右ノ方ヘ動イタ筈デアルカラ $\frac{R'd}{l}-P_1$ ヨリモ少ナイ筈デアル,卽チ剪力ノ增加量ハ

$$\frac{Rd}{l}-P_1 \quad 及 \quad \frac{R'd}{l}-P_1$$

ナル二式ノ中間デアル事ヲ知ル,故ニ此二式ノ內前式ガ負デアリ後式ガ正デアル時ニハ第一第二ノ二ツノ荷重位置ニ就イテ精細ナ計算ヲ行ツテ比較スル事ヲ要ス,モシ此二式ノ値ガ共ニ負ナル時ニハ第一ノ位置ガヨリ大ナル剪力ヲ H 點ニ與ヘルベク,モシ此二式ノ値ガ共ニ正ナル時ニハ第二ノ位置ガヨリ大ナル剪力ヲ H 點ニ與ヘル事ヲ知ル。

(2) 進行荷重。

定荷重ノ强度 (Intensity of fixed load) ヲ q,進行荷重强度ヲ p トス。

進行荷重ニヨル H 點ノ剪力ノ最大ハ影響線ノ正ノ部分ノミガ

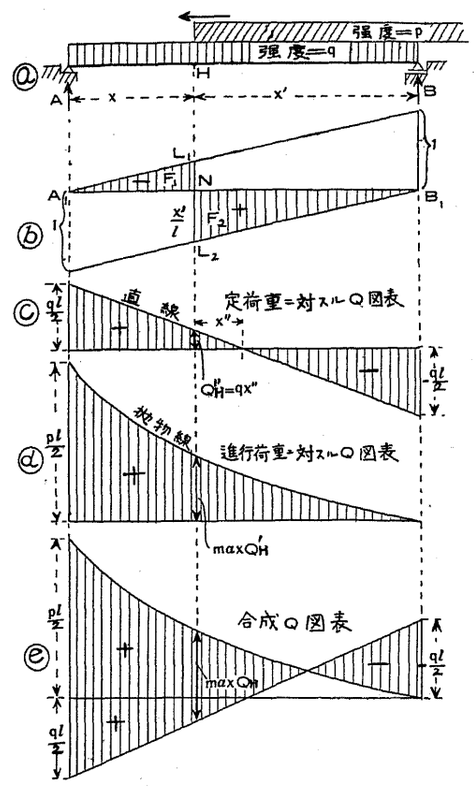


Fig. 211.

合シテ

$$_{max}Q_H={}_{max}Q'_H+Q''_H=\frac{px'^2}{2l}+qx''$$

Fig. 211 ⓔ 參照。

次ニ進行荷重 p ニヨル H 點ノ負剪力ハ

$$_{min}Q'_H=-p\,\frac{x^2}{2l} \quad \cdots\cdots \text{Fig. 212 ⓐ 參照。}$$

p ニテ滿タサレタ時ニ起リ

$$_{max}Q'_H=pF_2=p\,\frac{x'^2}{2l}\text{(拋物線)}$$

$x'=0$ 卽 B ニ於テ $_{max}Q'=0$

$x'=l$ 卽 A ニ於テ $_{max}Q'=\frac{pl}{2}$

Fig. 211 ⓓ 參照。

定荷重ニヨル剪力ハ第十二節 [II](B) ニヨリ

$$Q''_H=q(F_2-F_1)=qx'' \quad \text{(直線)}$$

Fig. 211 ⓒ 參照。

此定荷重ニ對スルモノ及ビ進行荷重ニ對スルモノヲ

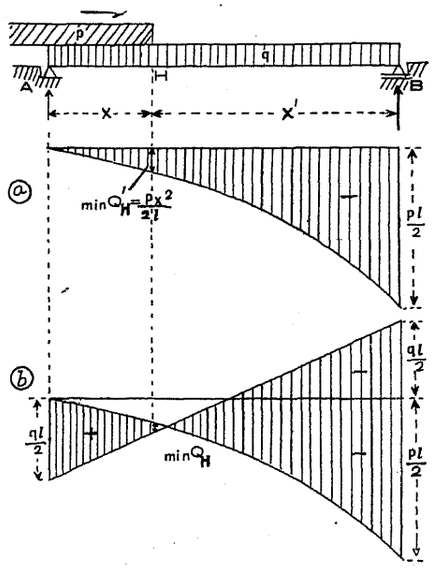


Fig. 212.

同時ニ定荷重ニヨルH點ノ正剪力ハ前揭ノ如ク qx'' デアル,故ニH點ノ最小剪力ハ

$$_{min}Q_H=qx''-p\frac{x^2}{2l}$$ …… Fig. 212 ⓑ 參照。

Fig. 211 ⓔ ト Fig. 212 ⓑ トガH點ニ於ケル最大及最小剪力ヲ與ヘルモノデアル。

[B] 間接荷重ニ於テ與ヘラレタル格間ニ最大剪力ヲ生ズベキ荷重ノ位置。

(1) 聯行荷重。

T_1T_2 ヲ問題ノ格間トシ此格間ニ於ケル剪力ヲ調ベントス,今

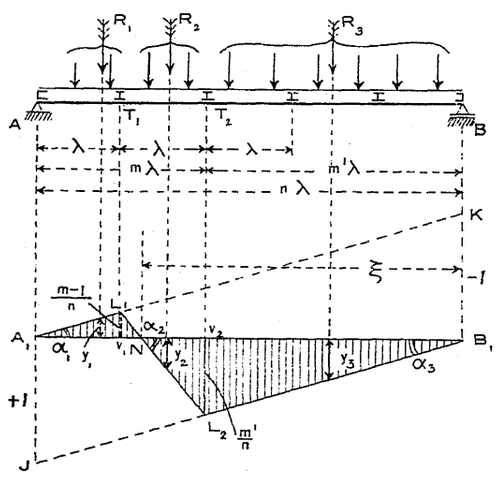


Fig. 213.

$R_1=A$ ヨリ T_1 迄ノ間ノ合成荷重。

$R_2=T_1T_2$ 格間ニ於ケル合成荷重。

$R_3=T_2$ ヨリ右側ノ合成荷重。

トスレバ茲ニ影響線 A_1L_1 L_2B_1 ヲ引キコレニヨリ格間 T_1T_2 ニ於ケル剪力ヲ求ムレバ

$$Q=R_3y_3+R_2y_2-R_1y_1$$

次ニ此荷重列ガ極微距離 dx 左ニ進ミタルモノトセバ荷重總量ニハ變化ナキモノトシテ此時ノ剪力ハ

$$Q+dQ=R_3(y_3+dx.tan\,\alpha_3)+R_2(y_2-dx.tan\,\alpha_2)-R_1(y_1-dx.tan\,\alpha_1)$$

二式ヨリ

$$\frac{dQ}{dx}=R_3.tan\,\alpha_3-R_2.tan\,\alpha_2+R_1tan\,\alpha_1$$

$$=R_3\frac{1}{n\lambda}-R_2\frac{n-1}{n\lambda}+R_1\frac{1}{n\lambda}$$

此場合ニQガ最大デアルタメニハ $\frac{dQ}{dx}=0$ ト置キ

$$R_3-(n-1)R_2+R_1=0 \quad\cdots\cdots(\alpha)$$

$$R_3-nR_2+R_2+R_1=0$$

或ハ

$$R_2=\frac{R_1+R_2+R_3}{n}$$

$$=\frac{R}{n} \quad\cdots\cdots(160)$$

之ヲ約言スレバ任意格間ニ於ケル剪力ガ最大デアルタメニハ其格間ニアル荷重ガ桁上ニアル全荷重ヲ格間ノ數ニテ割ツタモノニ等シクナケレバナラヌ,尙荷重ガ左ニ動ク事ニヨツテ(α)式ノ左邊ガ正ヨリ負ニ變化シ從ツテ此格間ノ剪力ガ最大トナル爲メニハ R_1 又ハ R_3 ガ減ジルカ或ハ R_2 ガ增スカ換言スレバ荷重ガ T_2 ヲ通過スルカ又ハ支點A ヲ通過スルカデナケレバ出來ナイ事デアル,然ルニ一般的法則トシテAカラ T_1 迄ノ間ニハ荷重ノナイ事ガ最大正剪力ノ條件デアルカラ荷重ガA ヲ通過スル事ハ事實上無イ事デアル,故ニ荷重ガ T_2 ヲ通過スル事ニヨツテ(α)式ガ正カラ負ニ移リ其間ニ零ヲ採ルヨリ外ニ仕方ガナイ,換言スレバ聯行荷重ノ先頭ニ近イ何レカノ荷重ガ T_2 ノ上ニアツテコレガ一部分 R_2 ニ屬シ一部分 R_3 ニ屬スルト考ヘル事ニヨツテ(α)式ヲ成立セシメ(160)式ヲ滿足スル事ガ最大剪力ニ對スル必要條件デアル。

(2) 轉行荷重。

$R_2=\frac{R}{n}$ ナル條件ヲ滿足スルニハ此場合ニ荷重P ガ小桁 T_2 ノ上ニ置カレナケレバナラヌ,卽チ

P ノ一部 $=\frac{P}{n}$

ナル條件ヲ滿足ス。

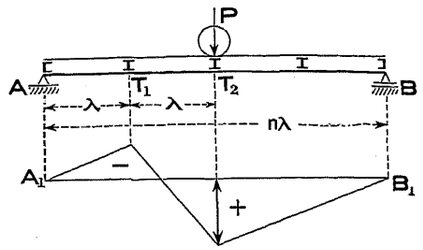


Fig. 214.

此位置ニテハ影響線上ニ於テ最大縱距ヲ與ヘル事實ニヨツテモ最大剪力ヲ生ズル事ヲ知リ得ル。

(3) 進行荷重。

影響線ヨリ明カナル如ク荷重ガ右支點カラ影響線ノ正部分全部ヲ滿ス時卽チ Fig. 215 ニ於テ B_1 ヨリ N 迄荷重ノ滿チタ時 T_1T_2 格間ニ最大正剪力ヲ生ズル事ヲ知ルベク此最大剪力ノ値ハ

$$Q_{T_1T_2}=p\times(\text{面積 } NL_2B_1)$$

然ルニ

$$Nv_2 : L_2v_2=v_1v_2 : (L_1v_1+L_2v_2)$$

$$\therefore\ Nv_2=\frac{L_2v_2.v_1v_2}{L_1v_1+L_2v_2}$$

$$=\frac{m'}{n}\lambda\frac{n}{m'+m-1}=\frac{m'\lambda}{n-1}$$

故ニ

$$Q_{T_1T_2}=p.\frac{1}{2}.\frac{m'}{n}\xi$$

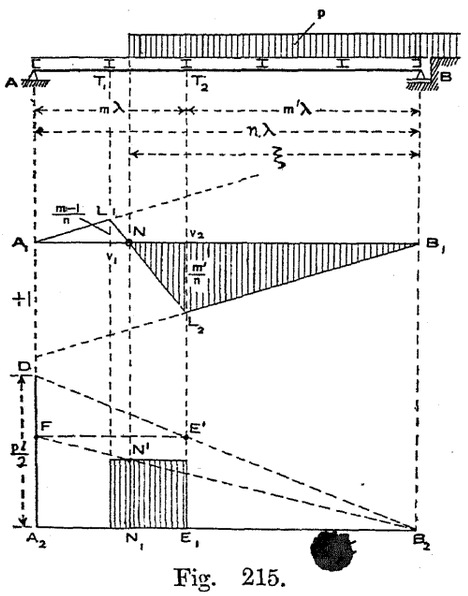


Fig. 215.

$$=p\frac{1}{2}\frac{m'}{n}\left(m'\lambda+\frac{m'\lambda}{n-1}\right)=\frac{1}{2}p\lambda\frac{m'^2}{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(161)$$

(161) 式ノ値ハ容易ニ圖上ニ之ヲ作ル事ヲ得ル,卽チ Fig. 215 ニ於テ先ヅ徑間ニ相當スル A_2B_2 線ヲ引キ A_2D ナル縱距ヲ $\frac{pl}{2}$ ト採リコノ D ヲ B_2 ニ結ブ,而シテ T_2 ヨリノ垂線トE′ニ交ラシメE′ヲ通ジテ A_2B_2 ニ平行ニ E′F ヲ引イテ F ヲ作リコレヲ B_2 ニ結ベバコノ B_2F ガ N ヨリ下シタ線トノ交點ニヨツテ與ヘラレル N_1N' ガ求ムル T_1T_2 徑間ニ於ケル最大剪力トナル。

$$N_1N'=\frac{N_1B_2\cdot A_2F}{A_2B_2}=\frac{N_1B_2}{A_2B_2}\frac{E_1B_2\cdot A_2D}{A_2B_2}$$

$$=\frac{\xi}{n\lambda}\frac{m'\lambda.\frac{pl}{2}}{l}=\frac{1}{2}p\xi\frac{m'}{n}=Q_{T_1T_2}$$

第　十　五　節

移動荷重ニ因ル彎曲力率及剪力圖式解法

[I] 轉行荷重 (Directly applied Rolling Load)

(A) 彎曲力率。

Fig. 216 ニ示シタ如キ桁 A_1B_1 ノ上ヲ轉行荷重P ガ通過スル場合其彎曲力率ガ如何ニ變化スルカヲ研究スルニハ之ヲ逆ニ考ヘテ荷重ハ動カズシテ桁ガ反對ノ方向ニ動クモノト考ヘルガ都合ガ良イ,故ニ先ヅ荷重P ニ對シ

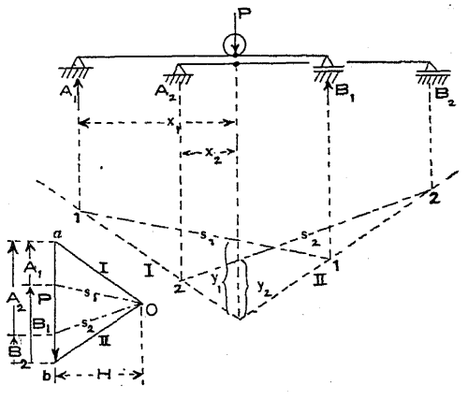


Fig. 216.

テ示力線abヲ採リ任意ノ極Oニ相當シタ極射線I及IIニ平行ニ平衡多邊形ヲ作ル,然ル時ハ平衡多邊形ノ邊I及IIハ桁ヲ動カシテモ變化ハ無イ筈デアツテ其變ルノハ桁ノ各位置ニ對シテ閉合線卽チs_1ガ 1,1 ノ點ヲカヘルタメニ變ルノミデアル,今桁ガ右ヘ(卽チ荷重ガ左ヘ)A_2B_2 迄動イタモノトスレバ此二支點ニ相當スル平衡多邊形上ノ二點 2,2 ヲ結ブs_2ガ閉合線トナルノデアル,而シテ一個ノ集中荷重ノ作用スル場合ノ最大彎曲力率ハ其荷重ノ位置ニ於テ測ラレタル平衡多邊形ノ縱距ニ比例スルガ故ニ試ミニ桁ノ色々ノ位置(卽チ荷重ノ色々ノ位置)ニ對スル此縱距ヲ求メサヘスレバ其何レガ最大ノ縱距ヲ與ヘルカヲ容易ニ知ル事ガ出來ル,茲ニ圖上11ナル桁ニ於ケル荷重ノ位置ヲ左支點ヨリx_1,22ナル桁ニ於テx_2トス,然ル時ハ11ノ位置ニ對シテ

$$M_{x_1}=A_1x_1=H.y_1$$

22ノ位置ニ對シテ

$$M_{x_2}=A_2.x_2=H.y_2$$

ヲ得ル,此方法ニヨリテ最モ危險ナル位置卽チ最大縱距ヲ與ヘル位置ヲ見出スコトガ出來從ツテ最大彎曲力率ヲ求メル事ガ出來ル。

最大彎曲力率ヲ求ムルノ解法ハ此圖式解法ニヨル外影響線ノ方法ニテモ行フ事ガ出來又計算ニヨツテ知ル事モ出來ルノデアツテ彎曲力率ヲ式ニ表ハセバ

$$M_x=A.x=\frac{P(l-x)}{l}x=\frac{P}{l}x(l-x)$$

此式ハ拋物線デアツテ此最大ハ

$$x=l-x \quad 卽チ \quad x=\frac{l}{2}$$

ノ時ニ生ズル事ヲ知ル故ニ荷重ガ桁ノ中央ニ達シタ時ニ最大ノ縱距ヲ生ジ最大ノ彎曲力率ヲ與ヘルノデアル。

圖式的ニ色々ノ位置ニ對シテ縱距ヲ求メ其最大ノモノヲ見出ス方法ハ Fig. 216 ニ說明シタ方法ヲ種々ノ點ニ對シテ行ヘバヨイノデアツテ茲ニ Fig. 217 ニ就イテ之ヲ說明シヤウ。

今 Fig. 217 AB 桁ノ徑間ヲ適當ナ數ニ等分(圖ニテハ六等分)シ 1,2,……ノ番號ヲ附ス,斯クテ荷重ガ其分割點ノ各々ニ來タ場合ノ彎曲力率ヲ求メル,例ヘバ A_5B_5 ハ荷重ガ 5 ノ點ニ來タ時デアツテ其時ノ閉合線ハ 5—5 トナリ y_5 ハ求ムル縱距デアル,更ニ荷重ガ一分割左ニ進ンダ時ニハ荷重ハ 4 ノ分割點ニ來リ桁ノ位置ハ A_4B_4 ニテ表ハサレ此時ノ閉合線ハ 4—4 トナリ,縱距 y_4 ヲ與ヘル,全ク同樣ニ荷重 3 ニアル時ニハ桁ハ A_3B_3 ノ位置トナリ縱距ハ y_3 トナル,更ニ 2 ノ分割點ニ對シテハ 4 ノ分割點ニ於ケルト全ク同ジ事トナツテ縱距 $y_2=y_4$ ヲ得ベク分割點 1 ニ對シテハ同樣 $y_1=y_5$ トナルヲ知ル,カクテ得タル $y_1,y_2,\cdots\cdots$ ヲ Fig. 217 ⓒ ニ縱距トシテ置キ其先端ヲ曲線デ結ベバ轉行荷重Pニヨル**最大彎曲力率圖** (Maximum bending moment diagram) ヲ得ル。

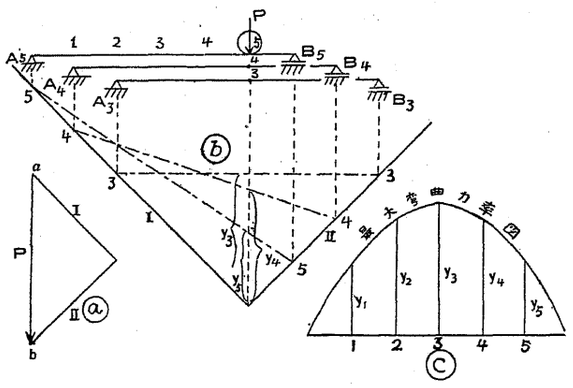


Fig. 217.

(B)剪力

剪力ハ既ニ第十四節ニ説明シタ所デアツテ轉行荷重ガ考ヘテ居ル點ノ右側ニアルカ左側ニアルカニヨツテ剪力ニ大差ヲ生ズルモノデアル。

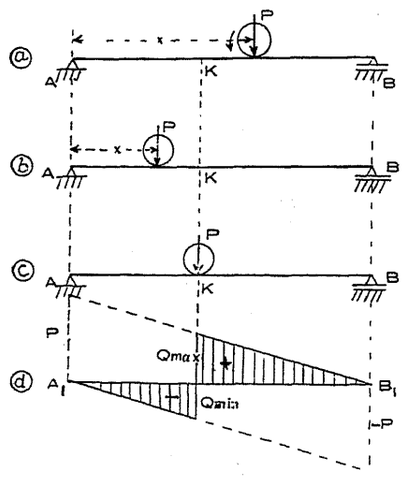


Fig. 218.

Fig 218 ニ於テK點ノ剪力ヲ考ヘテ居ルモノトスル。

ⓐノ場合, $x>AK$.

$$Q=A=\frac{P(l-x)}{l}=P\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

此値ハ常ニ正デアル,卽チ荷重ガKヨリ右ノ部分ニアル間ハ剪力ハ常ニ正デアツテⓓ圖ニ於ケル水平線A_1B_1以上ニ示シタ直線ガコレヲ示ス。

ⓑノ場合, $x<AK$.

$$Q=A-P=\frac{P(l-x)}{l}-P=-P\frac{x}{l}$$

常ニ負値ヲ有スルヲ知ル,卽チ荷重ガKヨリ左ニアル時ハ剪力ハ常ニ負デアツテ,ⓓ圖ノ水平線A_1B_1以下ノ部分ハコレヲ示ス。

此關係カラK點ノ剪力ノ最大値及最小値ハ此ⓒ圖ニ於ケル如ク荷重ガ此K點ノ上ニアツテコレガKノ直右ニアルト考ヘル時最大正縱距ヲ生ジ荷重ガKヲ越エ丁度Kノ直左ニアルト考ヘル時ニ最小値ヲ生ジ最大負縱距ヲ與ヘルノデアル。

[II] 聯行荷重 (Directly applied Travelling Load)

(A) 彎曲力率

此場合モ矢張リ荷重ノ動ク代リニ桁ガ反對ノ方向ニ動クト考

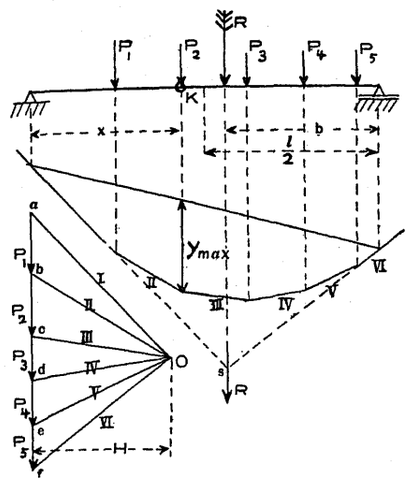


Fig. 219.

ヘルガ便デアル,茲ニ Fig. 219 ニ示ス如ク $P_1, P_2, \cdots\cdots P_5$ ナル五個ノ聯行荷重ガ桁ノ上ヲ通過スルモノトスル。

先ヅ示力線 *abcd*… ニ $P_1, P_2, \cdots\cdots$ ヲ採リ極距Hヲ置イテ極Oヲ定メI, II, III,…ノ極射線ヲ引キコレニ相當スル平衡多邊形I, II, III,……ヲ作ル,此多邊形ノ兩端邊I及VIノ延長線ノ交點 *s* ハ全荷重ノ合成力Rガ働ク點ヲ示スモノデアル。

斯クテ得タ平衡多邊形ヲ固定トシ之ニ對シ桁ヲ動カシ夫々ニ相當スル閉合線ヲ引ク事ニ依ツテ如何ナル桁ノ位置ガ最大ノ縱距ヲ與ヘル樣ナ閉合線ヲ作ルカ,卽チ最大縱距ヲ與ヘル最危險ノ荷重位置ヲ決定スル事ガ容易デアル。

(1) 絶對最大彎曲力率ヲ求ムル事。

既ニ第十三節ニ説明シタ所デアル,其絶對最大彎曲力率ハ總テノ荷重ノ合成力ノ位置ニ近イ荷重ノ下デ起ルモノト期待セラレル,其荷重ト合成力トノ間ガ徑間ノ中點デ二等分サルル樣ニ配置スレバ卽チ(157)式ニ述ベタ $x=b$ ナル樣ニセバ其桁ノ位置ニ相當スル閉合線ヲ作ツテ其期待サレタ荷重ノ下デ測ツタ縱距ガ何レヨリモ最大デアル筈デアル,斯クテ所要ノ力率ハ

$$M_{max}=H.y_{max}.$$

斯クノ如ク荷重ヲ配置スル事一二度ノ試ミデ容易ニ所要ノ最大

縱距ヲ決定スル事ヲ得ル,Fig. 219 ニ於テハ荷重P_2ト合成力Rトノ中間ガ徑間中點トナル樣ニ作圖シタガ更ニ今一ツP_3トRトノ中間ガ徑間中點トナル樣ニ配置スル方ガ大ナル縱距ヲ與ヘルカモ知レナイカラ之ヲモ調ベナケレバナラヌ。

(2)任意點ノ最大彎曲力率ヲ求ムル事

既ニ第十三節ニ述ベタ如ク左支點ヨリ距離xナル任意點ノ最大彎曲力率ハ其荷重列ノ內何レカ一ツガ其點ノ上ニアツテ此點ヨリ左側ニアル荷重ノ總和ヲR_1,徑間上ニアル全荷重ヲRトスル時次ノ條件ヲ滿足スル事ヲ必要トスル。

$$\frac{R_1}{x}=\frac{R}{l} \quad \cdots\cdots\cdots\

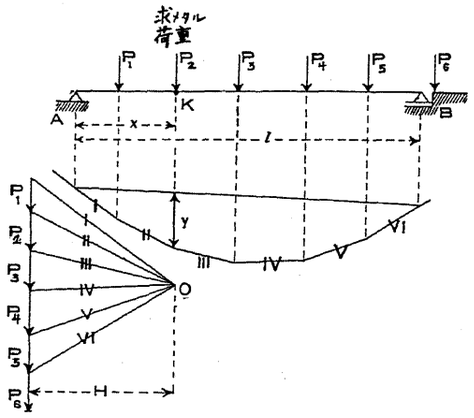


Fig. 221.

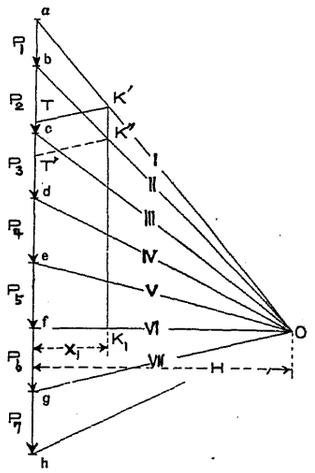


Fig. 222.

荷重ヲ求メルヨリモ次ニFig. 222ニ示ス如キ方法ニヨルガ一層便利デアル。

與ヘラレタ荷重列ヲ上カラ順次置イテ荷重線(Load line)ヲ引キ其何レカ中程ノ一ツノ射線(Ray) (Fig. 222 ニ於テハfO)ガ水平トナル樣ニ極Oヲ擇ビ,カクテ普通ノ如ク極Oヨリ他ノ射線ヲ引ク,次ニ此水平射線fOヲK$_1$ナル點ニ於テ二分スル事丁度徑間lガK點ニテ分タレタルト同樣ナラシメル,卽チ圖上

$$\frac{H}{x_1}=\frac{l}{x}$$

ナル如クK$_1$點ヲ定メK$_1$カラ垂直線ヲ立テ徑間ノ最初ノ荷重P$_1$ニ相當スル射線IヲK′ニテ切ツタモノトス,此K′カラ其時徑間上ニ乘リ得ル最後ノ荷重ニ相當シタ射線(Fig. 222ニ於テP$_6$ヲ最後荷重トセバ射線gO卽チVII) ニ平行ニK′Tヲ引キTガP$_2$ヲ切ツタモノトスレバP$_2$ガ求ムル荷重デアル,此圖ハFig. 220ト同理ニヨリ相似

三角形ノ關係ニヨリ

$$\frac{R}{R_1}=\frac{H}{x_1}=\frac{l}{x}$$

ナル條件ヲ滿足スルヲ以テ其正シキ事ヲ知ル。

此方法ノ便利ナル點ハ荷重配置ノ都合ニヨツテ最初ノ荷重P$_1$ガ徑間ノ外ニ出テシマツタ時第二荷重P$_2$カラ以後ノ徑間上ニ乘ルダケノ荷重ニ就イテ調ベル方ガヨリ大ナル變曲力率ヲ與ヘル事ガアリ得ルノデアツテ此ノ如キ場合ニFig. 220ニヨレバ基線ヲ引キカヘル事ヲ必要トスルガFig. 222ナレバ引キカヘル要ナクK′ナル點ヲ異ニスレバヨイノデアル,卽チ圖上デハIIガ始射線トナリK″ガK′ニ相當スル點トナリK″ヲ通ジテ最後ノ荷重ニ對スル射線例ヘバVIIニ平行線K″T′ヲ引ク事ヲ得ルノデアル。

(B)剪力

第十四節ニ於テ旣ニ說明シタ如ク或斷面ノ右ニアル荷重ハ正剪力ヲ生ジ其左ニアル荷重ハ負剪力ヲ生ズルガ故ニ一ツノ荷重ガ其斷面ニ達スル度毎ニ一ツノ最大値ヲ生ズルノデアル,而シテ此多クノ最大値ノ內ノ最大ナルモノハ其荷重列ノ先頭ニ近イ荷重ノ一ツガ其斷面ノ丁度右ニ達シタ時デアツテ普通ハ最初ノ荷重ガ達シタ時ニ起ル事ヲ知ル,斯クノ如キ場合此點ニ於テ如何ナル最大正剪力ヲ生ズルカヲ調ベンニハ要スルニ此荷重狀態ニ於ケル左支點ノ反力ヲ求ムレバヨイノデアル。

Fig. 223ニ於テ荷重列ヲP$_1$, P$_2$,……トシ此荷重列ニ相當シタ平衡多邊形ヲ畫キ桁ABヲ動カシテ荷重P$_1$ガ丁度與ヘラレタ點KニアルNニ配置スル,卽チKニP$_1$ヲ乘セKヨリ左ニx, 右ニ$l-x$ヲ採ツテ支點A及Bノ位置ヲ定メル,斯クテコレニ相當シタ閉合線s

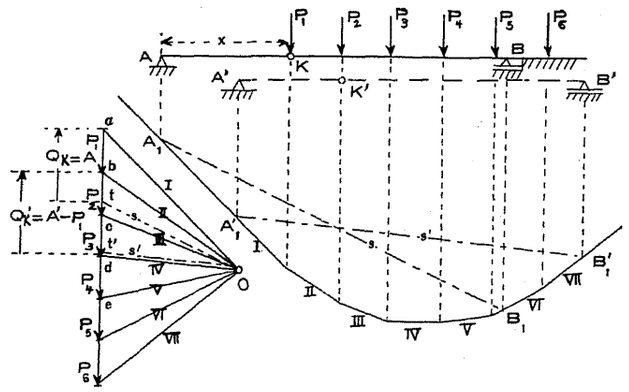


Fig. 223.

ヲ圖上ニ求メル，此荷重狀態ニ於テハKノ剪力ハ左支點ノ反力Aニ等シキ事ヲ知ルガ故ニ閉合線 s ニ平行ニ極Oカラ Ot ヲ引ケバ

$$ta = A = Q_K.$$

此レト同ジ方法ニヨリ若シ第二荷重P_2ガK點ニ達シタ時ニK點ニ最大剪力ガ生ズルカ否カヲ檢センニハK點上ニP_2ノ來タ場合ニ相當スル左右支點 A', B' ヲ配置シ其時ノ反力 $t'a = A'$ ヲ求メ此反力A'カラK點ノ左ニアルP_1ヲ引イタ

$$t'b = A' - P_1 = Q'_K$$

ガ其時ノK點ノ剪力トナル。

更ニ異ナリタル多クノ點ノ最大正剪力ヲ一ツノ圖上ニ求ムルヲ得ル方法ガアル，卽チ「ヴィンクラー」氏 (Winkler) 法デアツテ Fig. 224 ⓐニ示ス如ク支點Aニ立テタ垂線ニ沿フテ徑間上ニ乘リ得ルト考ヘラルル荷重ヲ順次$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ト置キ他端Bヲ極トシテ極射線ヲ引ク，此極射線ニ相當スル平衡多邊形ヲ作圖スルニ當ツテハ荷重列ヲ反對ニ配置シ卽チ左カラ右ニ進行スル如ク考ヘⓑ圖B_1點ニP_1ガ達シタ時ノ荷重配置ヲ作リ斯クテⓐ圖ノ極射線ニ相當シテ順次ⓑ圖ノ如キ平衡多邊形ヲ作ル，其第一邊ヲ延長シタA_1B_1ト平衡多邊形トノ間ニ挾マレタ任意點ノ縱距 y ハ其點ニ於ケル

最大正剪力ヲ與ヘル事トナル。

此事實ヲ證明センニハBヲ原點ニ採リ $\Sigma M = 0$ ノ式ヲ立テ

$$A.l - P_1.b_1 - P_2.b_2 - P_3.b_3 - P_4.b_4 = 0$$

$$Al = P_1.b_1 + P_2.b_2 + P_3.b_3 + P_4.b_4$$

然ルニ Fig. 224 ノ作圖ニ於テハ

$$b_1 = b_1', \quad b_2 = b_2', \quad b_3 = b_3' \quad b_4 = b_4'$$

デアリ更ニ反力 $A = {}_{max}Q_K$ デアル故ニ上式ヲ書直シ

$${}_{max}Q_K.l = P_1b_1' + P_2b_2' + P_3b_3' + P_4b_4' \cdots(a)$$

此右邊ハK點ニ對シⓑ圖ノ如ク配置シタ荷重列ガ有スル靜力率ニ外ナラナイ，然ルニ既ニ第一章第五節ニ說明シタ如ク此求メタ靜力率ハ圖上縱距 y ニ極距 $H = l$ ヲ乘ジタモノニ等シキ故ニ

$$y.l = P_1b_1' + P_2.b_2' + P_3b_3' + P_4.b_4' \cdots\cdots\cdots(b)$$

(a)式ト(b)式トヲ比較スレバ

$$y = {}_{max}Q_K$$

ヲ得卽チ y ガ左支點ニ於ケル反力ヲ表ハス，此意味ニ於テ此平衡多邊形ヲ

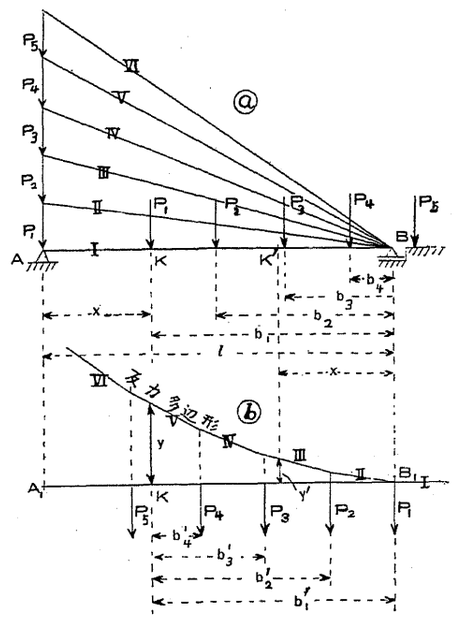


Fig. 224.

反力多邊形 (Reaction polygon) ト命名ス。

今ⓑ圖ニ於テKガA支點ヨリ隔レルト等シキ距離ダケB支點ヨリ隔ツタK'點ヲ考フレバ此K'點ノ縱距 y' ハK'點ノ最大正剪力デアリ從ツテK點ノ最大負剪力ト等シイモノデアル，故ニ此ノ一ツノ圖上ニ於テ任意點ノ最大正剪力及最大負剪力ヲ求ムル事ヲ得ル。

實際問題トシテハ以上說明シタ移動荷重ニヨル剪力ノ外ニ死重荷ニヨル剪力ヲ加算シナケレバナラヌ事ハ勿論デアル。

例題第十八，Fig. 225 ニ圖示スル如キ聯行荷重列ガ徑間 50 *ft.* ノ鈑桁(Plate girder

上ヲ通過スルモノトス,支點ヨリ20*ft.*ノ點ニ於ケル最大彎曲力率及剪力並ビニ徑間ニ於ケル絶對最大彎曲力率ヲ求ム。

(1) 圖式的解法

與ヘラレタル聯行荷重ノP_1ヨリP_9迄ガ徑間ニ乘ルモノトシテ示力線並ビニ平衡多邊形ヲ作圖シ次ニ左支點ヨリ20*ft.*ノ點ニ於ケル最大彎曲力率ハ荷重P_4ガ此點ニ乘ル時ニ生ズル事ヲ示力線上ニ於テFig. 222ニ說明セル作圖ヲ行ッテ知リ得ルガ故ニ此點ニP_4ヲ配置シテ桁ノ兩端A,Bヲ決定シ得,斯クテ求メ得タル縱距$y=37.4tons$ヲ以テ最大彎曲力率ヲ計算スレバ

$$_{max}M_{20} = Hy = 24 \times 37.4 = 897.6ft\text{-}tons$$

支點ヨリ20′ノ點ノ最大剪力ヲ求ムル爲メニFig. 224ニ說明シタルト同樣ノ作圖ニヨッテ反力多邊形ヲ作リ圖示ノ如ク$Q'=26tons$ヲ得,然ルニ第一荷重P_1ガ問題ノ點ヲ通過シテ左ニ進出シ第二荷重P_2ガ問題ノ點ニ來タ場合ニ對スル剪力$Q=A-P$ヲ求ムレバ其結果$Q=34tons$トナリコレガ求ムル最大剪力デアル。

絶對最大彎曲力率ノ生ズル點ヲ決定センニハ$\sum_1^9 P$(又ハ$\sum_2^{10} P$)ナル合成力ト其合成力ニ最モ接近シタ荷重P_5(又ハP_6)トノ距離ガ桁中點ニテ二等分セラレル樣ニ桁ヲ配置シ支點A,Bヲ定メ此場合ノ荷重下ニ於ケル縱距y_{max}(又ハy'_{max})ヲ求ムレバ絶對最大彎曲力率ガ求メラレルノデアッテ其結果

$$M_{max} = H.y_{max} = 24 \times 38.1 = 914.4ft\text{-}tons$$

(2) 解析的解法

計算カラ求メルノハ結果ハ精密デアルガ煩雜ニナルヲ免レナイ,玆ニハ單ニ其主要ナル計算ノミヲ示スニ止メル。

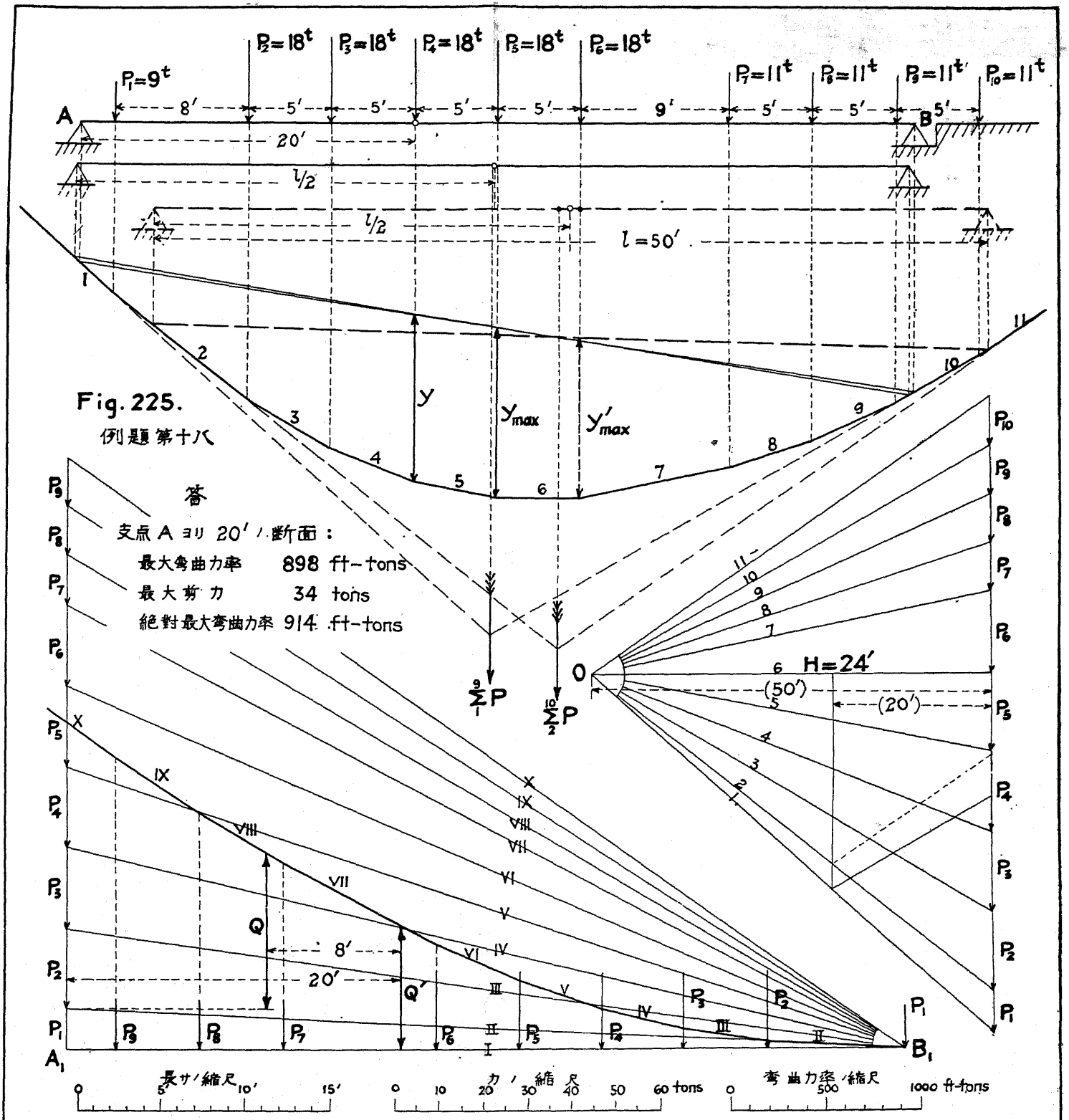
Fig. 225ニ於テ左支點ヨリ20′ノ點ニ最大彎曲力率ヲ生ズベキ荷重位置ヲ求メンニハ(153)式ニヨリ

$$\frac{R}{l} = \frac{\sum_1^9 P}{l} = \frac{132}{50} = 2.64tons/ft.$$

$$\therefore \quad R_1 = \frac{R}{l}x = 2.64 \times 20 = 52.8tons$$

然ルニ$\sum_1^3 P=45$, $\sum_1^4 P=63tons$デアル故ニ問題ノ點ニP_4ノ乘ッタ時ニ最大彎曲力率ノ生ズル事ヲ知ル,荷重位置ガ決定シタナラバ彎曲力率ノ計算ハ極メテ容易ニ行ヒ得ベク

$$反力\ A = \frac{1}{l}\Sigma Pb = \frac{1}{50} \times \Big\{9 \times 48 + 18 \times (40+35+30+25+20) + 11 \times (11+6+1)\Big\}$$


P1=9t
P2=18t
P3=18t
P4=18t
P5=18t
P6=18t
P7=11t
P8=11t
P9=11t
P10=11t
8′
5′
5′
5′
5′
9′
5′
5′
5′
A
B
20′
l/2
l/2
l=50′
y
ymax
y′max
Fig. 225.
例題第十八
答
支点 A ヨリ 20′ ノ斷面：
最大彎曲力率 898 ft-tons
最大剪力 34 tons
絶對最大彎曲力率 914 ft-tons
H=24′
(50′)
(20′)
Q
8′
20′
Q′
A1
B1
長サノ縮尺
カノ縮尺
彎曲力率ノ縮尺
0 5 10′ 15′
0 10 20 30 40 50 60 tons
0 500 1000 ft-tons

$$= \frac{1}{50} \times 3330 = 66.6 tons$$

彎曲力率 $M = Ax - \Sigma P(x-a) = 66.6 \times 20 - 9 \times 18 - 18 \times (10+5) = 900 ft\text{-}tons.$

次ニ同點ニ最大剪力ヲ生ズル荷重位置ヲ求メントス,(158)式ニ據リ荷重 P_1 ヨリ P_6 迄ニ就イテ

$$\frac{Rd}{l} - P_1 = \frac{99 \times 8}{50} - 9 = +6.84 tons$$

第二荷重 P_2 ガ問題ノ點ニ來タ時ニハ荷重ハ P_1 乃至 P_7 トナリ

$$\frac{R'd}{l} - P_1 = \frac{110 \times 8}{50} - 9 = +8.6 tons$$

故ニ第十四節[A](1)ニ說明シタ所ニ從ヒ P_2 ガ問題ノ點ニ來タ時最大剪力ノ生ズル事ヲ知ル,此場合ニ對シ

$$\text{反力 } A = \frac{1}{50} \times \left\{9 \times 38 + 18 \times (30+25+20+15+10) + 11 \times 1\right\} = 43.06 tons$$

$$\text{剪力 } Q = A - P_1 = 43.06 - 9 = 34.00 tons.$$

最後ニ絕對最大彎曲力率ヲ生ズベキ位置ヲ求メンニ $R = \sum_1^9 P$ ナル合成力ガ荷重 P_5 ヨリ隔レル距離ハ

$$\left\{9 \times 23 + 18 \times (15+10+5-5) - 11 \times (14+19+24)\right\} \div 132 = +0.2273 ft.$$

此距離ガ桁中點ニヨツテ二等分セラレルヲ要スル故ニ絕對最大彎曲力率ノ生ズル位置ハ桁中點ヨリ 0.1136*ft* 隔ツタ所デアツテ此點ニ P_5 ガ存在スル如キ荷重配置デアル,此絕對最大彎曲力率ノ値ハ容易ニ計算セラレ、

$$\text{反力 } A = \frac{1}{50} \times \left\{9 \times 47.8864 + 18 \times (39.8864 + 34.8864 + \cdots\cdots) + \cdots\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{50} \times 3315 = 66.3 tons$$

彎曲力率 $M = 66.3 \times 25.1136 - 9 \times 23 - 18 \times (15+10+5) = 918.034 ft\text{-}tons$

是レ求ムル絕對最大ノモノデアル。

[III] 進行荷重 (Advancing Load)

(A) 力率

單桁ニ生ズル彎曲力率ハ正力率ノミデアルカラ總テノ荷重ガアラユル點ノ正力率ヲ增ス事トナルガ故ニ各斷面ノ最大彎曲力率ノ生ズルハ桁ガ全徑間ニ滿載荷重ヲ受ケタ時デアル事ヲ知ル,從ツテ荷重長ガ徑間ヨリ大ナルカ又ハ等シキ時ニハ Fig. 226 ニ示ス如ク其滿載荷重ニ對シテ最大彎曲力率圖ヲ作圖シ得ル,此場合

ノ徑間中央ニ於ケル最大力率ハ

$$M_m=\frac{1}{8}(p+q)l^2$$

又支點Aヨリ x ノ距離ノ點ニ於テハ

$$M_x=\frac{1}{2}(p+q)xx',\quad x'=l-x.$$

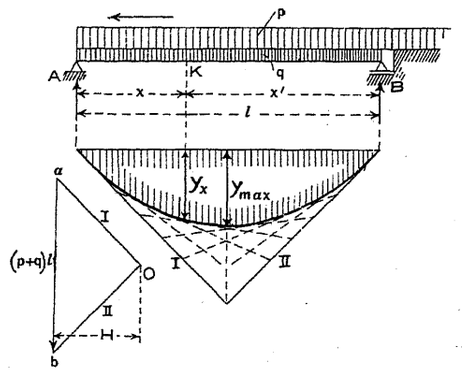


Fig. 226.

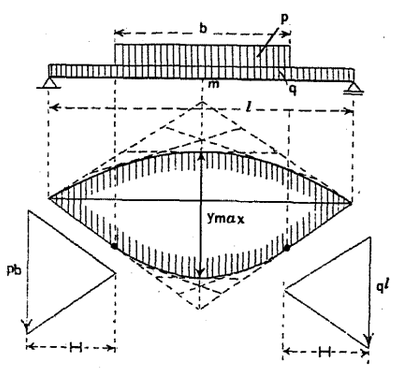


Fig. 227.

若シ荷重長ガ徑間ヨリ小ナル場合ニハ死活兩荷重ニ對スル圖ヲ一ツニ作ル事ヲ得ナイノデアツテFig. 227ニ示ス如ク先ヅ死荷重ニ對スル力率圖ヲ作リ次ニ進行荷重ガ桁中央部ニ存在スルモノトシテ別ニ力率圖ヲ作レバ此兩者ノ合縱距 y_{max} ヲ中央ニ於テ測ル事ニヨツテ絕對最大彎曲力率ヲ求メ得ベク

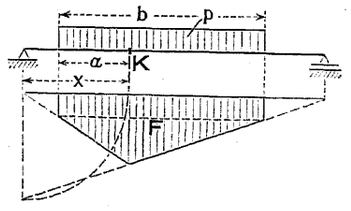


Fig. 228.

$$_{max}M_m=H.y_{max}.$$

此場合ニ任意點Kノ最大彎曲力率ヲ求メントト欲スルナラバ先ヅFig. 228ノ如クK點ノ彎曲力率ニ對スル影響線ヲ引キ其縱距ノ

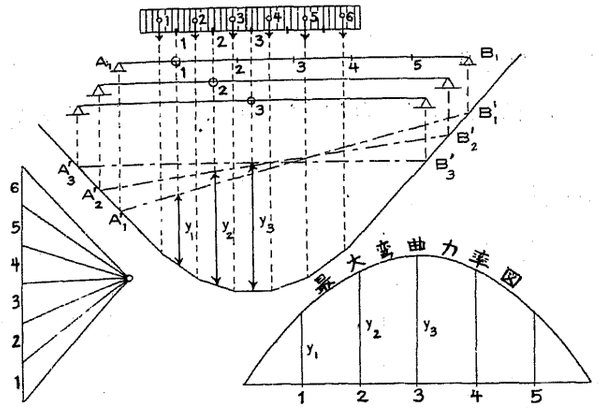


Fig. 229.

ナルベク大ナル部分ニ於テ此進行荷重ヲ配置スレバ可ナルヲ知ル,此荷重配置ハ(253)式ヨリモ明カナ如ク

$$\frac{pa}{x}=\frac{pb}{l}$$

或ハ

$$a=b\frac{x}{l}$$

ニ據ツテモコレヲ決定シ得ル。

Fig. 229ハ上述ノ場合ニ對スル桁上各點ノ最大彎曲力率ヲ求ムル爲メノ作圖デアツテ其方法ハ既ニFig. 217ニ就キテ說明シタルト大差ナク唯(253)式ヲ滿足スル樣ナ荷重配置ヲ決定スル爲メノFig. 220ノ作圖ヲ省略スル事ガ出來ルノデアツテ桁ヲ等分シタ數(Fig. 229ニ於テハ六等分)ト同數ニ荷重ヲ等分シ其分劃點ト桁ノ分格點トガ一致スル樣ニ荷重ヲ配置スレバヨイノデアル。

(B)剪力。

第十四節ニFig. 211ヲ以テ述ベタ如ク任意點ノ最大正剪力ハ進行荷重ガ右カラ左ヘ進ムト考ヘテ其先頭ガKニ達シタ時卽チ影響線ニ於ケル正面積ノ部分ノミヲ覆ヒタル時デアル事ヲ知ル,其値ハ

$$_{max}Q_K=\frac{px'^2}{2l}=\frac{p(l-x)^2}{2l}$$

此拋物線ハ $x=0$ ノ點卽左支點ニ於テ

$$_{max}Q_A=\frac{1}{2}pl$$

$x=l$ ノ點卽右端ニ於テ $_{max}Q_B=0$

卽最大正剪力圖ハ Fig. 230 ⓑ ニ示ス抛物線デアル,其任意點Kニ於

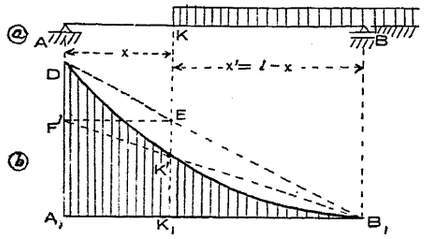


Fig. 230.

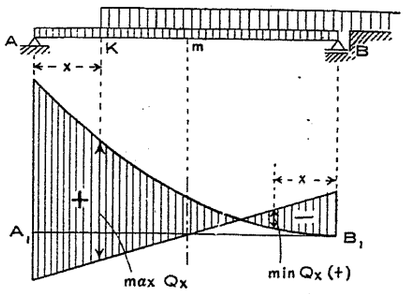


Fig. 231.

ケル縦距ヲ求ムル作圖ニ就イテハ既ニ第十四節ニ説明シタ所ト同ジデアル。

Fig. 231ハ進行荷重ニ對スルモノニ死荷重ニ對スルモノヲ加ヘタ最大正剪力圖デアツテ若シ同圖ヲ利用シテ最小正剪力卽最大負剪力ヲ求メントセバ徑間中點ヨリ右半ヲ採リ其符號ヲ變ジタモノト考ヘテ任意點Kノ A 支點ヨリノ距離 x ヲ B_1 點ヨリ測ツタ點ノ縦距ヲ求ムレバソレガK點ノ最小正剪力 $_{min}Q_x$ デアル。

第十六節　間接移動荷重ニ因ル彎曲力率及剪力圖式解法

[I]間接轉行荷重。

(A)彎曲力率。

間接荷重ノ時ニハ小桁ノ間卽格間 (Panel) ニ於テハ彎曲力率圖

ハ直線デアル,而シテ又各格點 (Panel point) ニ就イテハ直接間接共ニ同一ノ彎曲力率ヲ與フル事ヲ知ルガ故ニ其作圖法ハ

各格點ニ就イテ其斷面ノ最大彎曲力率ヲ前節ニ説明シタ方法ニヨツテ求メ此値ヲ各相當點ニ縦距トシテ立テ其端ヲ直線デ結ベバ求ムル最大彎曲力率圖ヲ得ル。

Fig. 232ハ轉行荷重ニ對スル作圖ヲ示スモノデアツテ各格點ニ於ケル最大彎曲力率ハ其格點ニ荷重ガ乘ツタ場合ニ生ズル事ヲ知ルガ故ニⓐ圖ニ於テ桁ノ位置ヲ變ジ格點1ニ荷重アル時卽チ A_1B_1 ニ於ケル縦距ヲ y_1,同ジク2ニ對スル A_2B_2 ニ於ケル

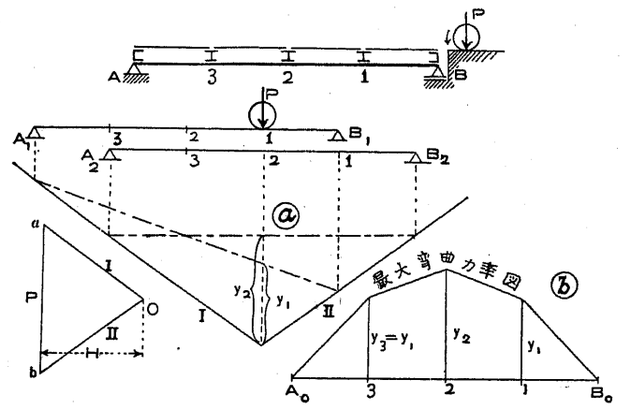


Fig. 232.

縦距ヲ y_2 トセバ

$$M_1=H.y_1,\ M_2=H.y_2$$

$$M_3=H.y_3=H.y_1$$

ⓑ圖ハコレヲ圖示スルモノデアル。

(B)剪力。

Fig. 233ニ示シタ T_1T_2 格間ニ對スル剪力ノ影響線ハ圖示ノ如ク

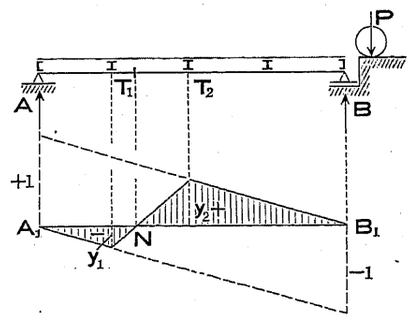


Fig. 233.

容易ニ求メラレル,轉行荷重PガBカラAニ進ム途中ニ小桁T_2ニ達シタ時ニT_1T_2格間ノ最大正剪力$P.y_2$ヲ得,更ニ荷重ノ進ムニ從ヒ剪力ハ減ジPガ或瞬間ニNニ相當シタ點ニ來タ時ニ此格間ノ剪力ハ零トナル,此Nヲ**分劃點** (Point of division) ト云フ,Nヲ越セバ負剪力ヲ生ジ最大負剪力ハPガT_1ニ達シタ時ニ起リ其値ハ$P.y_1$デアル,任意點ヲ採ツタ場合其縱距ト荷重トノ積ヲ求ムレバコレガ格間T_1T_2ノ剪力ヲ與ヘルモノデアル。

[II]間接聯行荷重。

(A)彎曲率力。

荷重ガ聯行卽チ轉行荷重ノ集合ナル場合モ同樣デアツテ小桁ノ點ニ於テハ荷重ガ直接ニ主桁ニ働イテモ又小桁ヲ傳ハツテ働イテモ全ク差異ナキヲ見ル,故ニ小桁ノ點卽格點ニ對シテ直接聯行荷重トシテ最大彎曲力率ヲ求メコレヲ各相當點ニ縱距ニ立テテ直線デ結ビツケレバ玆ニ求ムル最大彎曲力率圖ヲ得ルノデアツテ此圖カラ格間任意點ノ最大彎曲力率ヲモ得ラレル譯デアル,而シテ各格點ニ最大力率ヲ生ズル樣ナ荷重位置ノ求メ方ハFig. 220又ハFig. 222ニ說明シタ方法ニ據ルベク其ノ力率ノ量ノ求

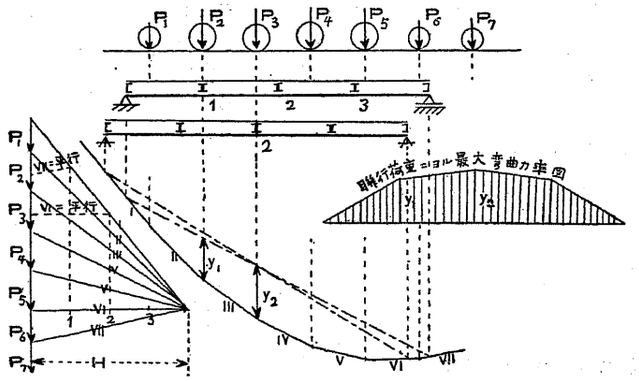


Fig. 234.

メ方ハFig. 221ニ據ツテ與ヘラレルベク又Fig. 225ヲ參照スルモ可ナリデアル。

Fig. 234ハ作圖ノ一例ヲ示ス,其詳細ナル說明ハFig. 222及221ニ就イテ參考セラレタイ。

(B)剪力。

前ニ[I]ニ說明シタ如ク分劃點ヨリ右ニアル各荷重ハ其格間ニ正剪力ヲ生ジ又分劃點ヨリ左ニアル各荷重ハ負剪力ヲ生ズル故ニ今考ヘテ居ル格間ニ最大正剪力ヲ生ズルハ荷重列ガ右カラ左ニ進ムト假定シテ其第一荷重ガ其格間ノ分劃點ニ達シタ時デアル事ヲ知ル,同樣ニ最大負荷重ハ荷重列ガ左カラ右ニ進ムト考ヘテ其第一荷重ガ其格間ノ分劃點ニ達シタ時ニ生ズル譯デアル,然シ荷重ノ配置大サニヨツテ多クノ場合ニハ最大正剪力ハ荷重列ガ右カラ左ニ進ムトシテ第一荷重ガ考ヘテ居ル格間T_1T_2ノT_2ノ上ニ達シタ時ニ生ズルノデアル,荷重ノ此位置ヲ**正規位置** (Normal position) ト命名スル,併シ時トシテハ第一荷重ガ今少シ格間內ニ進入シテ第二荷重ガT_2ノ上ニ來タ時ニ其格間ニヨリ大ナル剪力ヲ生ズル事モアル,此第二ノ位置ヲ**第二位置** (Second position) ト云フ,此正規位置ト第二位置トノ何レガ大ナル剪力ヲ生ズルカハP_1トP_2トノ荷重ノ大キサノ割合及其距離dニ因ツテ差ガアルノデアツテ旣ニ第十四節(158)式ニ於テ研究シタ如ク

$$\frac{Rd}{l}-P_1 \begin{cases} <0 & \text{ノ時　正規位置} \\ >0 & \text{ノ時　第二位置} \end{cases}$$

ガヨリ大ナル剪力ヲ與ヘルモノデアル。

今正規位置ガ其格間ニ最大剪力ヲ生ズル事ガ明カナ時ニハ其

格間ノ最大剪力ハ Fig. 224 及 225 デ說明シタ方法卽反力多邊形 (Reaction polygon) ヲ作圖シテ P_1 ガ T_2 ニ來タ時ノ剪力ヲ調ベレバヨイノデアルガ若シ正規位置ト第二位置トノ何レガ大ナル剪力ヲ生ズルカヲ知ランニハ Fig. 235 ニ示ス方法ニ據ラネバナラヌ。

Fig. 235 ノ作圖法ハ前ニ Fig. 224 及 225 ニ說明シタ通リ所謂反力多邊形ヲ引イタノデアツテ T_1T_2 ヲ考ヘテ居ル格間トシ P_1 ガ T_2 ノ上ニアル時卽チ正規位置ニ於ケル反力或ハ此格間 T_1T_2 ノ最大正剪力ハ cd ニテ表ハサレ

$$Q_2 = cd$$　　正規位置ニ於ケル格間 T_1T_2 ノ最大正剪力

次ニ第二位置ニ於ケル剪力ヲ求メルタメニハ Fig. 236 ニ於テ P_1 ガ此格間內ニ進入シ P_2 ガ T_2 ノ上ニアル時ニ於テ荷重 P_1 ハ小桁 T_1 ニモ壓力ヲ與ヘル事トナリ其量ハ負剪力トシテ作用スベク此壓力卽チ小桁 T_1 ニ生ズル反力 P_1' ハ

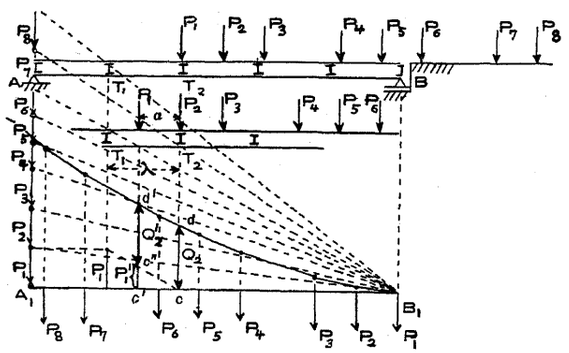


Fig. 235.

$$P_1' = \frac{P_1 d}{\lambda}$$

$$\therefore \frac{P_1'}{P_1} = \frac{d}{\lambda}$$

今假ニ Fig. 236 ニ於テ $a\alpha' = P_1$ ニ採リ α' ト b トヲ結ベバ P_1 ノ下ノ縱距 $c'c''$ ガ P_1' ヲ與ヘル事トナル,此 P_1' ハ格間ノ左ニ働ク故ニ負トナリ從ツテ第二位置ニ相當スル剪力ハ此第二位置ニ對スル左支點ノ反力ヨリ P_1' ヲ引イタモノデナケレバナラヌ,而シテ其時ノ反力ハ Fig. 235 ニ於テ P_1 ノ下デ測ツタ縱距 $c'd'$ デ與ヘラレル故ニコレカラ Fig. 236 ニ求メタ $c'c''$ ヲ引ケバ

$$Q_2' = c'd' - c'c'' = c''d' = R - P_1'$$

コレト前ニ調ベタ $Q_2 = cd$ トヲ比較シテ其何レガ大ナルカヲ知レバコノ大ナル方ガ求ムル最大剪力ニ外ナラヌ。

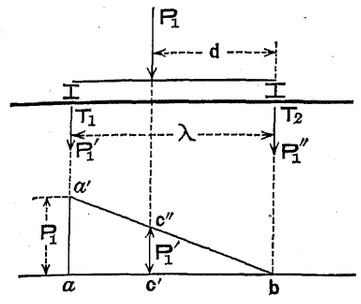


Fig. 236.

以上ハ格間 T_1T_2 ヲ採ツテノ說明デアルガ同樣ニシテ他ノ格間ニ對シテモ其格間ノ最大剪力ヲ決定スル事ハ容易デアル,今正剪力ヲ求メルニ行ツタ方法ハ負剪力ヲ求メルニ對シテモ同樣ニ行ハレルカラ死荷重ノ剪力ヲモ考ヘニ入レテ各格間ノ最大及最小剪力ハ容易ニ圖上ニ決定シ得ル。

[III] 間接進行荷重。

(A) 彎曲力率。

最大彎曲力率ハ等布進行荷重ガ全徑間ヲ滿タス時ニ生ズル事ハ明カデアツテ其彎曲力率圖ハ Fig. 184 ニ說明シタト同樣ニ求メラレル Fig. 237 ハ其作圖ノ一例ヲ示ス。

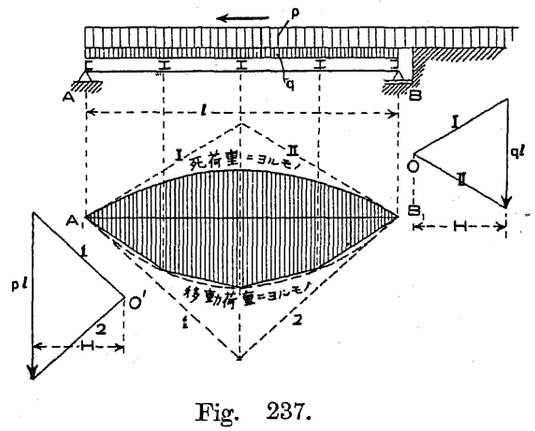


Fig. 237.

(B) 剪力。

任意格間ノ最大正剪力ハ荷重列ガ右カヲ左ニ進ムトシテ其格間ノ丁度分劃點迄達シタ時ニ生ズル,而シテ其分劃點ノ決定方法

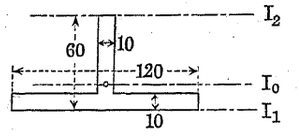
及相當剪力ノ解法ハ第十四節ニ既ニ Fig. 215 ヲ以テ說明シタ所デアルガ故ニ茲ニハ之ヲ繰返ス事ヲ略ス。

問　題　集　第　六

(1) 圓形及方形斷面ヲ有スル二個ノ桁アリ,其徑間等シクシテ同一ノ荷重ヲ受ク,此二桁ガ等シキ强度ヲ有スル場合ノ直徑ト正方形邊長トノ比ヲ求ム。

答　$\dfrac{\text{直徑}}{\text{邊長}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\pi}}$

(2) 正方形斷面ノ對角線ヲ垂直ニ用ヒタル桁ニ於テ其上下端ヲ削取リテ斷面係數ヲ增加セントス,其最大ナル爲メニ切取ラルベキ三角形ノ寸法ヲ求ム。



答　一邊ノ九分ノ一

(3) 圖示ノ斷面ニ對スル慣性能率 I_0, I_1 及 I_2 ヲ求ム,但 I_0 ハ重心軸ニ對スルモノトス。

答　$I_0=43{,}3cm^4$,　$I_1=75{,}7cm^4$,　$I_2=144{,}4cm^4$.

(4) 直座標軸 XY ニ對スル慣性能率及相乘面率ガ I_x, I_y 及 Z_{xy} ナル場合此原點ヲ通ズル主軸ノ方向及主要慣性能率ノ値ハ次式ニテ與ヘラルル事ヲ證明セヨ。

$$\tan 2\gamma = \frac{2Z_{xy}}{I_y - I_x},$$

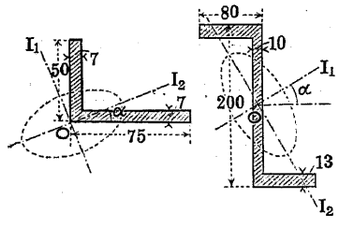
$$I_1 = \frac{I_x+I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y-I_x}{2}\right)^2 + Z_{xy}^2}, \quad I_2 = \frac{I_x+I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y-I_x}{2}\right)^2 + Z_{xy}^2}$$

(5) 重心Sヲ通ズル軸 X_1, Y_1 ニ對スル相乘面率ヲ $Z_{x_1y_1}$ トセバコレニ平行ナル任意軸ニ對スル相乘面率 Z_{xy} ハ

$$Z_{xy} = Z_{x_1y_1} + F.\xi.\eta$$

ニテ與ヘラルル事ヲ證セヨ,但 F= 面積, ξ 及 η= 二對ノ軸ノ間ノ距離。

(6) 圖示ノ山形鋼及乙字鋼ニ就イテ其一點Oニ對スル主軸ノ方向及主要慣性能率ヲ求ム。



答　$I_1=100.32cm^4$,　$I_2=28.55cm^4$

$\alpha = 8°0'7''$

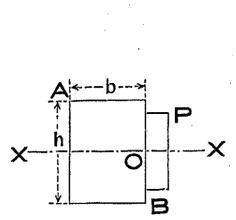
$I_1=2480cm^4$,　$I_2=748cm^4$

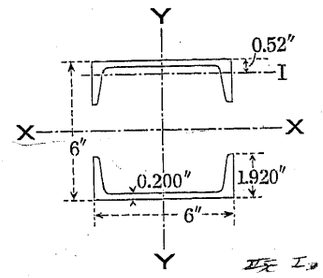
$\alpha = 17°51'36''$

(7) 矩形斷面 AB=bh アリ,其斷面係數ヲ變ズル事ナクシテ他ノ矩形ヲ同一X軸ニ對稱ニ接合シタル場合其矩形隅點Pノ軌跡及其矩形ノ最大幅ヲ求ム。

答　Oヲ原點トスル時Pノ軌跡

$$8xy^3 - 2bh^2y + bh^3 = 0$$





最大幅 $= \frac{4}{27}b$,　此時ノ高 $= \frac{3}{4}h$.

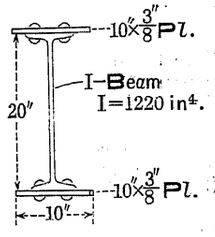
(8) 圖示斷面ハX軸ヲ水平ニ使用スルトY軸ヲ水平ニ使用スルト何レガ桁トシテ其强度大ナルカ,但一個ニ付 $I=0.70in^4$,　$I_Y=13.0in^4$,　$F=2.38in^2$,　答　X軸ヲ水平ニ

(9) 桁高 12″, $I_x=228.3in^4$ ナル工字桁ヲ徑間20′ノ單桁トシテ使用セントス,鋼材ノ許容應力ヲ 14000#/□″ トシテ此桁ガ安全ニ耐エ得ル等布荷重ヲ求ム。

答　8878#/ft.

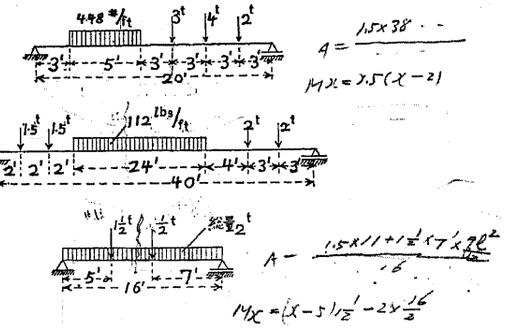
(10) 桁高 50cm, $I_x=68750cm^4$ ナルI字鋼ガ徑間中央ニ 11ton ノ集中荷重ヲ受ク,最大徑間何程ニ使用シ得ベキカ,但シ許容應力ヲ $1000kg/cm^2$ ト採ルベシ。　答　10m

(11) 圖示ノ如キ合成桁ヲ徑間 30ft. ノ桁トシテ使用スル時 400lbs/ft. ノ等布荷重ト 20,000lbs ノ徑間中央集中荷重トヲ受ケテ安全ナリヤ,但シ鋲孔ニヨル面積ノ損失ヲ考慮セザルモノトス。



答　安全

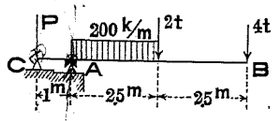
(12) 桁ニ於ケル最大彎曲力率ヲ生ズル點ヨリ左及右ニアル荷重ノ重心ガ各其端ヨリノ距離ヲ a, b トシ桁上ノ總荷重ヲWトセバ最大彎曲力率ハ $W \div \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ ナリ。



(13) 圖示ノ桁ニ就キテ最大彎曲力率量及危險斷面ノ位置ヲ求ム。

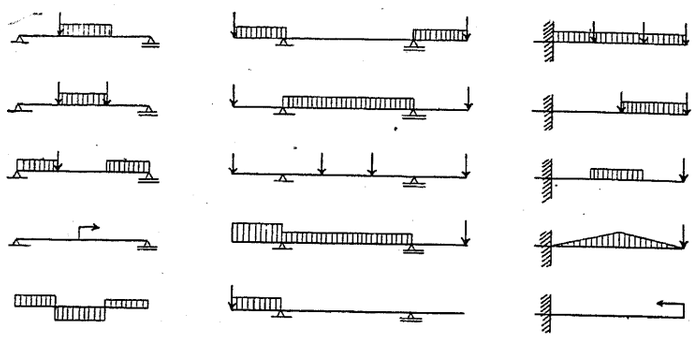
答　33.825ft-tons, 左支點ヨリ 11ft; 22.142 ft-tons, 左支點ヨリ 23.7ft ; 9.75ft-ton , 左支點ヨリ 6ft.

(14) 旋開橋ノ桁A點ニ支ヘラレ圖示ノ如キ荷重ヲ受ク,其C點ニ作用セシムベキ荷重Pヲ求ム,更ニ此場合ノ剪力圖及彎曲力率圖ヲ作レ。

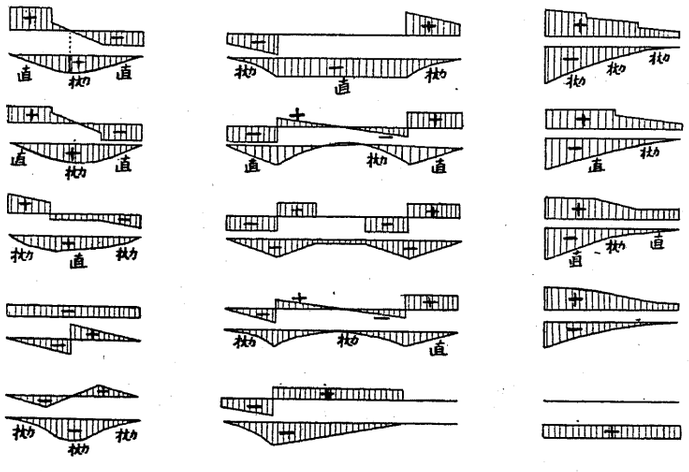


答　$P = 25.625t$,　$M_A = -25.625m\text{-}t$,　$M_D = -10m\text{-}t$

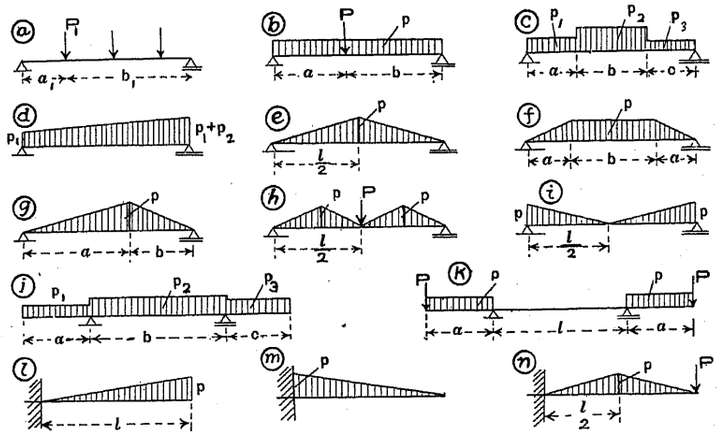
(15) 次ノ荷重ヲ受クル桁ノ剪力圖及彎曲力率圖ヲ求ム。



答　次圖ニ於テ直ハ直線,拋ハ拋物線ヲ意味ス。



(16) 次ニ示ス桁ニ就キ支點反力,彎曲力率,最大彎曲力率及其生ズル位置ヲ求ム。



(答)

	支點反力	任意斷面ノ彎曲力率	最大彎曲力率	危險斷面
ⓐ	$A=\frac{\Sigma Pb}{l}$ $B=\frac{\Sigma Pa}{l}$	$M=Ax-\Sigma P(x-a)$ x ハ左支點ヨリ	危險斷面ニ對スル x ヲ用ヒ左式ニヨル	垂直力ノ合成力ガ符號ヲ變ズル點(荷重點)
ⓑ	$A=\frac{Pb}{l}+\frac{pl}{2}$ $B=\frac{Pa}{l}+\frac{pl}{2}$	P ノ左側 $M=Ax-\frac{1}{2}px^2$ P ノ右側 $M=Bx'-\frac{1}{2}px'^2$	$A\leqq pa$ ノトキ $M=\frac{A^2}{2p}$ $A\geqq pa$ ノトキ $M=\frac{B^2}{2p}$	$A\leqq pa$ ノトキ $x=\frac{A}{p}$ $A\geqq pa$ ノトキ $x'=\frac{B}{p}$
ⓒ	$A=\frac{1}{2l}\left\{p_1(a+2b+2c)+p_2(b+2c)+p_3c\right\}$ $B=p_1a+p_2b+p_3c-A$	a ノ內 $M=Ax-\frac{1}{2}p_1x^2$ b ノ內 $M=Ax-p_1a\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{p_2}{2}(x-a)^2$	危險斷面ノ x ヲ用ヒ左式ニヨル	$A\leqq p_1a$ ノ時 $x=\frac{A}{p_1}$ $p_1a\leqq A\leqq p_1a+p_2b$ ノトキ $x=a+\frac{1}{p_2}(A-p_1a)$
ⓓ	$A=\frac{1}{2}p_1l+\frac{1}{6}p_2l$ $B=\frac{1}{2}p_1l+\frac{1}{3}p_2l$	$M=\frac{p_1xx'}{2}+\frac{p_2xx'}{6l}(l+x)$ $x'=l-x$	危險斷面ノ x ヲ用ヒ左式ニヨル	$x=-\frac{p_1}{p_2}l+\sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2}l^2+\frac{2Al}{p_2}}$
ⓔ	$A=B=\frac{1}{4}pl$	$M=\frac{pl}{2}x\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$	$M_{max}=\frac{1}{12}pl^2$	$x=\frac{l}{2}$
ⓕ	$A=B=\frac{1}{2}p(a+b)$		$M_{max}=\frac{p}{24}\left\{8a^2+12ab+3b^2\right\}$	$x=\frac{l}{2}$

ⓖ $A=\frac{1}{6}p(a+2b)$ $M=\frac{px}{6a}(a^2+2ab-x^2)$ $M_{max}=\frac{p}{3a}\left(\frac{a^2+2ab}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ $x=\sqrt{\frac{a^2+2ab}{3}}$
$B=\frac{1}{6}p(2a+b)$

ⓗ $A=B=\frac{1}{4}(2P+pl)$ $M_{max}=\frac{1}{4}Pl+\frac{1}{16}pl^2$ $x=\frac{l}{2}$

ⓘ $A=B=\frac{1}{2}pl$ $M=\frac{pl}{2}x\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}+\frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_{max}=\frac{1}{24}pl^2$ $x=\frac{l}{2}$

ⓙ $A=\frac{1}{2b}\left\{p_1a(a+2b)+p_2b^2-p_3c^2\right\}$
a ノ內 $M=-\frac{1}{2}p_1x^2$ 危險斷面ノ x テ左式ニ用フ $x=\frac{1}{p_2}(A-p_1a)$
x ハ左端ヨリ 絕對値トシテハ支點ニ起レル x ハ左支點ヨリ
b ノ內
$B=p_1a+p_2b+p_3c-A$ $M=-p_1a\left(x+\frac{a}{2}\right)+Ax$ $M=-\frac{1}{2}p_1a^2$
$-\frac{1}{2}p_2x^2$ ト比較スルコト
x ハ左支點ヨリ

ⓚ $A=B=P+pa$ a ノ內 $M_{max}=-Pa-\frac{1}{2}pa^2$ 中央徑間
$M=-Px-\frac{1}{2}px^2$
l ノ內
$M=-Pa-\frac{1}{2}pa^2$

Ⓛ $A=\frac{1}{2}pl$ $M=Ax-\frac{1}{6}px^2$ $M_{max}=-\frac{1}{3}pl^2$ 支點
x ハ支點ヨリ

ⓜ $A=\frac{1}{2}pl$ $M=-\frac{1}{6}px^2$ $M_{max}=-\frac{1}{6}pl^2$ 支點
x ハ自由端ヨリ

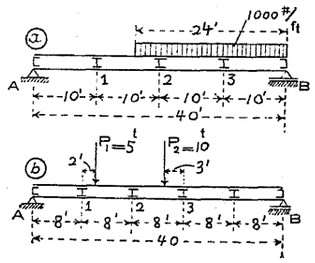
ⓝ $A=P+\frac{1}{2}pl$ $M_{max}=-Pl-\frac{1}{4}pl^2$ 支點

(17) 等布荷重ヲ受クル長 l ノ桁ヲ二點ニ支ヘテ其生ズル應力ヲ最小ナラシメントス,二支點ノ距離 a ヲ求ム。 答 $a=0.586l$

(18) 間接荷重ヲ受クル桁 AB アリ,小桁 2 ノ下ニ於ケル彎曲力率及剪力ヲ求ム。

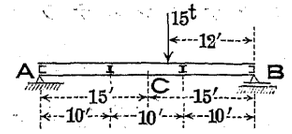
答 (a) 136000 *ft-lbs*, +6400～−1800 *lbs*
(b) 106 *ft-ton*, +4.25～−0.75 *tons*

(19) 圖示ノ如ク 15*ton* ノ集中間接荷重ヲ受クル



場合 C 點ノ彎曲力率及剪力ヲ求ム。

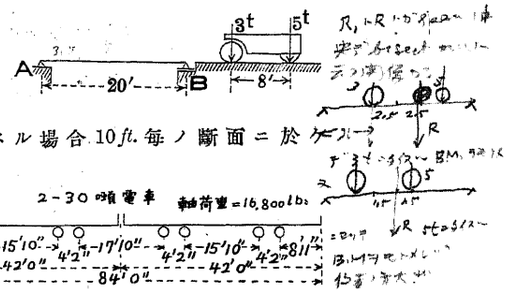
答 75 *ft-tons*, 3 *tons*.



(20) 桁ガ聯行荷重ヲ受ケタル時最大彎曲力率ヲ生ズベキ荷重配置ヲ決定スル圖式的方法如何。

(21) 八噸輾壓機ガ徑間 20 *ft.* ノ桁橋ヲ通過スル場合ニ最大彎曲力率ヲ生ズベキ斷面及其値ヲ求ム。

答 前車ガ左支點ヨリ 3.5', 28.9 *ft-tons*.



(22) 東京市ニ於ケル市街電車標準荷重大約圖示ノ如シ,其徑間 60 *ft.* ノ鈑桁 (Plate girder) 上ヲ通過スル場合 10 *ft.* 毎ノ斷面ニ於ケル最大彎曲力率ヲ圖示シ且ツ最大支點反力及絕對最大彎曲力率ヲ求ム。

(22) 長 10 *m* ノ木製電柱アリ 125*kg/m*² ノ風壓ヲ受ケテ安全率 10 ヲ有スル爲メニハ其徑何程ナレバ可ナルカ,但 K_b= 420 *kg/cm*² トシ風壓ハ柱ノ縱斷面積ニ對スル 0.785 倍(R. von Lößl ニ據ル)ニ採レ。

答 d=34.5*cm*.

第十七節

桁斷面ノ剪力抵抗及應剪力ノ分布

曩キニ本章第一節ニ於テ任意ノ外力ハ之ヲ分解シテ直應力N, 彎曲力率M及剪力Qトナル事ヲ說明シ引續キMトQトハ荷重ノ與ヘラレタル時如何ニ之ヲ求ムルカヲ說明シ(第七節乃至第十五節)更ニ彎曲力率Mノ內應力 (Internal stress) ニ對スル影響ニ就キ研究シタガ(第二節及第三節)本節ニ於テハ未ダ取扱ハレナカツタ剪力Qノ內應力ニ對スル影響ヲ說明シヤウ。

任意斷面ニ存スル剪力Qニヨツテ桁ノ內部ニ生ズル應剪力ハ剪力トハ反對ニ向フベク斷面全體ノ應剪力ノ總和ハ外剪力ニ等

シクナケレバナラヌ,卽チ

$$Q=\int \tau.df$$

以下此τガ斷面內ニ如何ニ分布セラレルカヲ調ベテ見ヤウ。

既ニ第五章第一節ニ於テ數學的ニ研究シタル如ク垂直應剪力ハ必ズ水平應剪力ヲ伴ツテ發生スルモノデアツテ此垂直ト水平トノ二ツノ應剪力ハ其强度互ニ相等シキ事ヲ知ツタノデアル,此垂直應剪力ノ外ニ水平應剪力ノ存スル事實ハ Fig. 238 ニ於テ之ヲ見ル事ガ出來ル,卽チ其ⓐ圖ノ如ク數枚ノ板ガ重ネラレタモノガ荷重ヲ受ケテ彎曲シタ場合ニハⓑ圖ノ如ク其接觸面ニ沿フテ滑ルヲ見ル,コレハ桁ガ數多ノ部分ニ切ラレテ居ナイ場合ニモ同樣ニ滑ラウトスル傾向ヲ有スル事ハ明カデアツテ從ツテ之ニ相當スル應力ガ發生シテ居ル筈デアル,コレ卽チ水平應剪力ニ外ナラナイ。

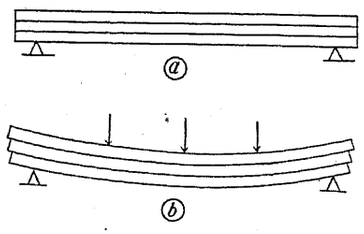


Fig. 238.

茲ニ均等斷面(Uniform section)ヲ有シ荷重ヲ受ケテ彎曲セル桁ヲ採リ其剪力ノ分布ヲ調ベル,此桁ノ內ニ Fig 239 ニ示ス *mnkl* ナル一ツノ矩形缺込(Rectangular notch)ヲ想像シ斯クテ生ジタ矩形 *nmkl* ノ平衡ニ就イテ考ヘル,今此應力狀態ニ於テ彎曲ノ爲メニ *mn* 面ニ

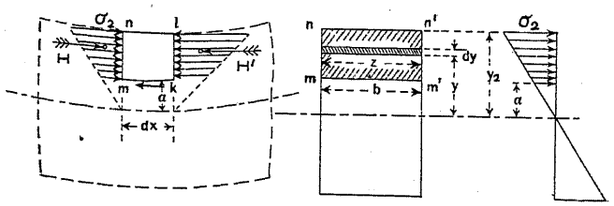


Fig. 239.

直角ニ働ク應力ノ和ヲ H トシ又此面ヨリ *dx* 隔レル *kl* 面ニ於ケル應力ノ和ヲ H′トス,コノ H′ハ前ノ H ヨリ大ナルカ又ハ小トナリ此差ヲ H′−H=T ト置キテ *mnklm′n′k′l′* ナル矩形角塡ノ平衡條件ヲ考ヘテ見ルニ此差 T ハ何ニ依ツテ抵抗セラレルカト云フニ是レハ *mk* 面ニ沿フテ働ク水平應剪力ニ依ツテ抵抗セラレルヨリ外ニ方法ガ無イノデアル,卽チ任意水平斷面 *mkk′m′* ニ沿フテ生ズル應剪力ハ彎曲應力 H 及 H′ノ差 T ニ等シクナケレバナラヌ,今 *mk* ノ距離ヲ *dx*,問題ノ水平面 *mkk′m′* ノ此桁ノ中立軸カラノ距離ヲ *a*, 同面ニ於テノ桁ノ幅 *mm′* ヲ *b* トスル,然ル時ハ最遠纖維應力 σ_2 ハ中立軸ヨリ y_2 ヲ隔ツタ點ニ働クガ故ニ *mn* 斷面ニ於テ中立軸カラ *y* ノ距離ニアル層ノ應力 $\sigma=\frac{\sigma_2}{y_2}.y$ トナル,コレニ其層ノ面積 *z.dy* (任意點ノ幅ヲ *z* トス)ヲ乘ジテ *mn* 面ニ對シテ合計スレバ H ヲ得ベク

$$H=\int_a^{y_2}\sigma.z.dy=\frac{\sigma_2}{y_2}\int_a^{y_2}z.y.dy$$

然ルニ $\frac{\sigma_2}{y_2}=\frac{M}{I}$ デアル故ニ

$$H=\frac{M}{I}\int_a^{y_2}z.y.dy$$

mn 面ヨリ *dx* 隔ツタ *kl* 面ノ彎曲力率ヲ M′トセバ全ク同樣ニシテ *k* 面ニ於ケル彎曲應力ハ

$$H'=\frac{M'}{I}\int_a^{y_2}z.y.dy$$

然ル時ハ前ニ水平剪力ニヨツテ抵抗セラレルト云フタ T ノ値ハ

$$T=H'-H=\frac{M'-M}{I}\int_a^{y_2}z.y.dy$$

今 *dx* 隔ツタ二ツノ斷面ノ彎曲力率ノ差 M′−M=*d*M ト置キ

$$T=\frac{dM}{I}\int_a^{y_2} z.y.dy$$

茲ニ mk ナル面即チ $b.dx$, ノ面積ヲ有スル面ノ應剪力度ヲ τ_a トスレバ前述ノ理ニヨツテ

$$T=H'-H=\tau_a.b.dx$$

故ニ　$\tau_a=\frac{dM}{I.b.dx}\int_a^{y_2} z.y.dy$

然ルニ $\frac{dM}{dx}=Q$ ナルガ故ニ

$$\tau_a=\frac{Q}{Ib}\int_a^{y_2} z.y.dy \quad \cdots\cdots(162)$$

此(162)式ガ剪力Qヲ有スル桁ノ任意斷面ニ於ケル水平應剪力度(Horizontal shearing unit stress)ヲ與ヘルモノデアツテ同時ニ垂直應剪力(Vertical shearing stress)モコレト等シキ强度ヲ有スル事ハ既ニ第五章第一節ニ(75)式ヲ以テ說明シFig. 94ヲ以テ圖示シタ所デアルガ故ニ(152)式ハ此垂直應剪力ヲ與ヘルモノニ外ナラナイ。

(162)式ノ積分値ハ $mm'n'n$ ナル面積ノ中立軸ニ對スル靜力率(Statical moment)即チ mk 面以上ノ斷面部分ノ中立軸ニ對スル靜力率ヲ表ハスモノデアル,モシ $a=y_2$ ナル時ニハ靜力率ハ零トナリ $\tau_a=0$ 即チ最遠纖維ニ於テハ應剪力ハ零トナル,又 $a=0$ ナル時ニハ此積分値ハ中立軸以上ニアル全斷面ノ靜力率トナルガ故ニ最大トナリ從ツテ中立軸ニ於テハ最大應剪力ヲ生ズルヲ見ル。

今一般的ニ(162)式ノ積分値ヲ S_a ニテ表ハス時ハコレハ mk 線以上ノ部分ノ中立軸ニ對スル靜力率トナリ

$$\tau_a=\frac{QS_a}{Ib} \quad \cdots\cdots(163)$$

均等斷面ヲ有スル桁ニ於テ與ヘラレタ層ニ於ケル應剪力ヲ考ヘテ見ルニ此式ニ於ケルQヲ除イタ外ハ皆定數ナルガ故ニ應剪力ハ剪力Qニ正比例スルヲ知ル,故ニ應剪力ノ値ノ最大ハQノ最大ナル所即チ支點ニ於テ起ルベク應剪力ノ最小即チ零ハQノ零ノ點即チ桁ノ危險斷面ニ於テ生ズルヲ見ル。

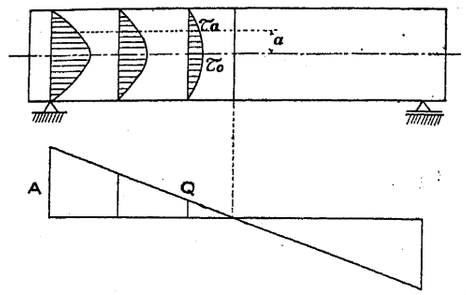


Fig. 240.

次ニ與ヘラレタ一ツノ斷面ニ對シテハ剪力Qハ一定デアルガ故ニ層ノ位置ニヨツテ S_a 及 b ガ變化スル,而シテ幅 b ガ一定ナル場合ニハ應剪力 τ_a ハ靜力率 S_a ノミニヨツテ變化シ最遠纖維ニテ零中立軸ニ於テ最大トナル,斯クテ任意斷面ニ於ケル最大應剪力ノ値ハ中立軸上ノ點ニ對シ

$$\left.\begin{aligned}{}_{max}\tau_o&=\frac{Q}{Ib}\int_o^{y_2} z.y.dy\\&=\frac{QS_o}{Ib}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(164)$$

式中　S_o = 中立軸ノ一側ノミニアル斷面部分ノ中立軸ニ對スル靜力率

I = 全斷面ノ中立軸ニ對スル慣性能率

b = 中立軸ニ於ケル斷面ノ幅

今若シFig. 241ニ示ス如ク

F' = 中立軸ノ一側ニ於ケル斷面積

$\bar{y}$ = 中立軸ヨリ F' ノ重心迄ノ距離

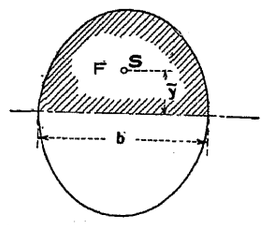


Fig. 241.

ト置ケバ　$S_o=\int_o^{y_2} z.y.dy = F'\bar{y}$

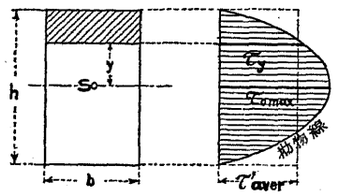
故ニ

$$_{max}\tau_o=\frac{QF'.\bar{y}}{I.b} \quad \cdots\cdots(165)$$

此値ハ中立軸ニ於ケル應剪力デアツテ既ニ第五章第一節ニ於テ研究シタル如ク水平應剪力及垂直應剪力共ニ此同一値ヲ有シコレガ斷面内ノ最大ノモノデアル。

應剪力分布ノ算定例

(1) 矩形斷面 (Fig. 242 參照)



Fgi. 242.

幅 b 高 h ノ矩形斷面ヲ有スル桁ニ於テハ $I=\frac{1}{12}bh^3$ 及　$F'\bar{y}=\frac{bh}{2}.\frac{h}{4}=\frac{bh^2}{8}$ ナルガ故ニ (165) 式ニヨリ

$$\tau_{omax}=\frac{Q\frac{bh^2}{8}}{\frac{1}{12}bh^3.b}=\frac{3}{2}\frac{Q}{bh}$$

今若シ全斷面ノ平均應剪力度テ　$\tau_{aver.}=\frac{Q}{bh}$ トスレバ

$$\frac{\tau_{omax}}{\tau_{aver.}}=\frac{3}{2}$$

應剪力圖ヲ作圖センニハ (162) 式ヨリ

$$\tau_y=\frac{Q}{Ib}\int_y^{\frac{h}{2}} bydy=\frac{Q}{Ib}.b.\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{h}{2}\right)^2-y^2\right\}\quad\text{(抛物線)}$$

即チ抛物線ニヨリテ圖示サルル事ヲ知ル。

(2) 中空矩形又ハ工字形斷面

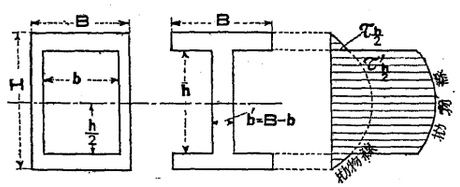


Fig. 243.

(Fig. 243 參照)

中立軸ヨリ y ノ距離ノ突緣 (Flange) 内ニ於テ

$$\tau_y=\frac{Q}{Ib}\int_y^{\frac{H}{2}} Bydy=\frac{Q}{2I}\left(\frac{H^2}{4}-y^2\right)$$

$y=\frac{h}{2}$ ナル時即チ突緣ノ内側ニ於テ

$$\tau_{\frac{h}{2}}=\frac{Q}{I}\frac{H^2-h^2}{8}$$

次ニ腹部 (Web) ニ於テ $\tau=\frac{Q}{Ib'}\int zydy$ ヲ計算センニ突緣部ニ對シテ $z=B$, 腹部ニ對シテ $z=b'$ ト採ル事ヲ必要トスル故ニ積分ヲ二段ニ分チ

$$\tau=\frac{Q}{Ib'}\left\{B\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} ydy+b'\int_y^{\frac{h}{2}} ydy\right\}=\frac{Q}{I}\left(\frac{B}{b'}\frac{H^2-h^2}{8}+\frac{h^2}{8}-\frac{y^2}{2}\right)$$

$y=\frac{h}{2}$ ナル時即チ突緣ノ内側ニ於テ

$$\tau'_{\frac{h}{2}}=\frac{Q}{I}\frac{H^2-h^2}{8}\frac{B}{b'}$$

即チ前ニ計算シタル同點ノ應剪力 $\tau_{\frac{h}{2}}$ ニ比シテ $\frac{B}{b'}$ 倍トナル。

$y=0$ ノ時即チ中立軸ニ於ケル最大應剪力ハ

$$\tau_{omax}=\frac{Q}{I}\left(\frac{B}{b'}\frac{H^2-h^2}{8}+\frac{h^2}{8}\right)$$

此式ニ $I=\frac{1}{12}(BH^3-bh^3)$ ヲ挿入スレバ

$$\tau_{omax}=\frac{3}{2}\frac{Q(BH^2-bh^2)}{(BH^3-bh^3)(B-b)}$$

(3) 三角形斷面

Fig. 244 ニ於ケル斜線部ノ中立軸(重心軸)ニ對スル靜力率ハ

$$S=\int_y^{\frac{2}{3}h} zydy=\int_y^{\frac{2}{3}h}\frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h-y\right)ydy=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}h-y\right)z\left\{y+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}h-y\right)\right\}$$

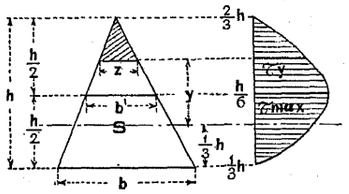


Fig. 244.

$$=\frac{z}{27}(2h-3y)(h+3y)$$

故ニ　$\tau_y=\frac{QS}{Iz}$ ニ挿入シ

$$\tau_y=\frac{1}{27}\frac{Q}{I}(2h-3y)(h+3y)$$

然ルニ $\frac{Q}{I}$ ハ定數ナルガ故ニ

$$\tau_y\propto\frac{S}{z}$$

$$\propto(2h-3y)(h+3y)$$

此二項ノ和 $(2h-3y)+(h+3y)=3h$ ハ定數ナルガ故ニ此二項ガ相等シキ時ニ於テ其積ハ最大トナル,即チ最大ナル爲メノ條件ハ

$$(2h-3y)=(h+3y)\quad\text{或ハ}\quad y=\frac{h}{6}.$$

故ニ桁高 h ノ中點ニ於テ τ ハ最大トナル,此中點以上ノ部分ニ對シ

$$F' = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{bh}{8},\quad \bar{y} = \frac{h}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

故ニ(165)式即チ $\tau_{\frac{h}{6},max} = \frac{Q}{I}\cdot\frac{F'\bar{y}}{b'}$ ニ於テ

$$I = \frac{bh^3}{36},\quad b' = \frac{b}{2},\quad F' = \frac{bh}{8},\quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$ チ用ヒ

$$\tau_{\frac{h}{6},max} = \frac{Q}{\frac{bh^3}{36}}\,\frac{\frac{bh^2}{24}}{\frac{b}{2}} = \frac{3Q}{bh}$$

尙 $\tau'_{aver} = \frac{Q}{\frac{1}{2}bh}$ ナルガ故ニ

$$\frac{\tau_{max}}{\tau'_{aver}} = \frac{3}{2}.$$

(4) 圓形斷面

Fig. 245 ニ示ス斜線部ノ重心軸 00 ニ對スル靜力率ハ

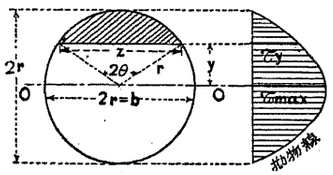


Fig. 245.

$$S = 2\int_y^r y\sqrt{r^2-y^2}\,dy = \frac{2}{3}(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

然ルニ $y = r\cos\theta$ ナルガ故ニ

$$S = \frac{2}{3}\left\{r^2 - r^2\cos^2\theta\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}r^3\sin^3\theta$$

尙 $z = 2r\sin\theta$, $\cos\theta = \frac{y}{r}$, $\sin^2\theta = \frac{r^2-y^2}{r^2}$ ナルガ故ニ

$$\frac{S}{z} = \frac{r^2\sin^2\theta}{3} = \frac{r^2-y^2}{3}$$

$$\therefore\quad \tau_y = \frac{Q}{I}\cdot\frac{1}{3}(r^2-y^2) = \frac{4Q}{3\pi}\,\frac{r^2-y^2}{r^4}\ (\text{拋物線})$$

最大剪力ハ中立軸ニ起リ $S_o = \frac{2}{3}r^3$, $I = \frac{\pi r^4}{4}$, $b = 2r$ トナリ

$$\tau_{omax} = \frac{Q}{I}\,\frac{S_o}{b} = \frac{Q}{\frac{\pi r^4}{4}}\,\frac{\frac{2r^3}{3}}{2r} = \frac{4}{3}\,\frac{Q}{\pi r^2}.$$

然ルニ $\tau'_{aver} = \frac{Q}{\pi r^2}$ ナルヲ以テ

$$\frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}} = \frac{4}{3}.$$

茲ニ一言セナケレバナラナイノハZ軸ノ方向ニ向フ剪力ノ存在デアル,即チ Fig. 246 ニ於ケル任意層ノ周邊部A及B點ニ於ケル應剪力ハ垂直ニ向ハズシテ寧ロ周邊(Perimeter)ニ切線的ニ働クモノト考ヘルガ穩當デアル,何トナレバモシ

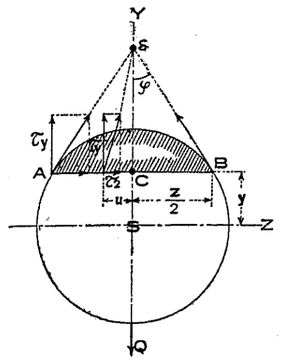


Fig. 246.

切線的デ無イモノトスレバ茲ニ何程カノ周邊ニ直角ナル分剪力(Component shear)ガ生ズル事トナリ,從ツテ平衡條件ガ成立シ得ナイノデアル。

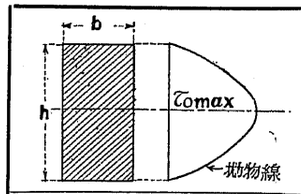
周邊上ノ點A,B ノ應剪力ガS點ニ向フモノトスレバY軸上ノC點ノ垂直應剪力ガS點ニ向フ事ハ勿論デアルカラ AB 線上ニ於ケルアラユル點ノ應剪力ガ何レモS點ニ向フモノト假定シヤウ,斯クテ AB 線上ノ任意點ニ於ケル應剪力ノ水平分力チ τ_z トスレバ

垂直分力 $\tau_y = \frac{Q}{I}\frac{Sy}{z}$.

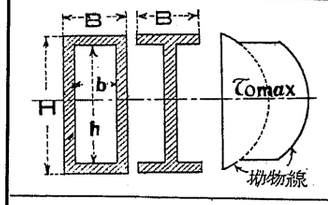
水平分力 $\tau_z = \tau_y \tan\varphi\cdot\frac{u}{\frac{z}{2}}$.

各種斷面ニ於ケル應剪力ノ分布ヲ蒐集シテ第七表ニ之ヲ示ス。

第七表 各種斷面ニ於ケル應剪力ノ分布

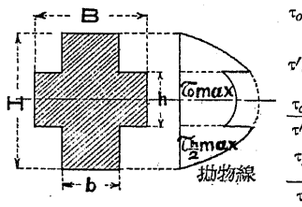


$$\tau_{omax} = \frac{3Q}{2bh},\qquad \tau'_{aver} = \frac{Q}{bh},\qquad \frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}} = \frac{3}{2}$$



$$\tau_{omax} = \frac{BH^2-bh^2}{(BH^3-bh^3)(B-b)}\times\frac{3Q}{2},\qquad \frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}} = \frac{3(BH^2-bh^2)(BH-6h)}{2(BH^3-bh^3)(B-b)}$$

$$\tau'_{aver} = \frac{Q}{(BH-bh)}$$

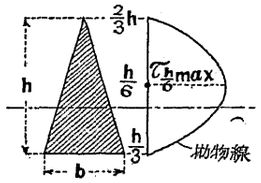


$$\tau_{omax} = \frac{3Q}{2B}\,\frac{bH^2+(B-b)h^2}{bH^3+(B-b)h^3};\qquad \tau_{\frac{h}{2}max} = \frac{3Q}{2}\,\frac{H^2-h^2}{bH^3+(B-b)h^3}$$

$$\tau'_{aver} = \frac{Q}{bH+(B-b)h}$$

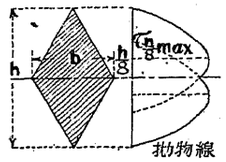
$$\frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}}\ \frac{3}{2}\ \frac{\{bH^2+(B-b)h^2\}\{bH+(B-b)h\}}{B\{bH^3+(B-b)h^3\}}$$

$$\frac{\tau_{\frac{h}{2}max}}{\tau'_{aver}} = \frac{3}{2}\,\frac{(H^2-h^2)\{bH+(B-b)h\}}{bH^3+(B-b)h^3}$$



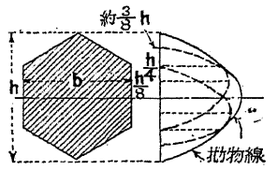
$$\tau_{\frac{h}{6}max}=\frac{3Q}{bh} \qquad \frac{\tau_{\frac{h}{6}max}}{\tau'_{aver}}=\frac{3}{2}$$

$$\tau'_{aver}=\frac{2Q}{bh}$$



$$\tau_{\frac{h}{8}max}=\frac{9Q}{4bh} \qquad \frac{\tau_{\frac{h}{8}max}}{\tau'_{aver}}=\frac{9}{8}$$

$$\tau'_{aver}=\frac{2Q}{bh}$$



正六角形斷面(對角線垂直ナル場合)

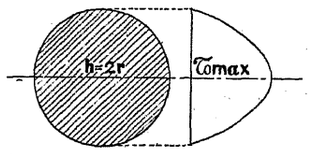
$$\tau_{omax}=\frac{28}{15}\times\frac{Q}{bh} \qquad \frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}}=\frac{7}{5}$$

$$\tau'_{aver}=\frac{4}{3}\frac{Q}{bh}$$

正六角形斷面(對角線水平ナル場合)

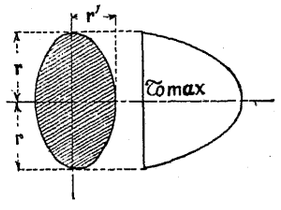
$$\tau_{\frac{h}{10}max}=\frac{1888}{1125}\times\frac{Q}{bh}$$

$$\tau'_{aver}=\frac{4}{3}\times\frac{Q}{bh}; \qquad \frac{\tau_{\frac{h}{10}max}}{\tau'_{aver}}=1.26$$



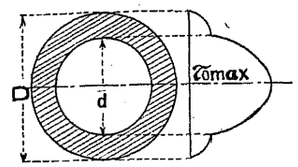
$$\tau_{omax}=\frac{4}{3}\times\frac{Q}{\pi r^2}$$

$$\tau'_{aver}=\frac{Q}{\pi r^2}; \qquad \frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}}=\frac{4}{3}$$



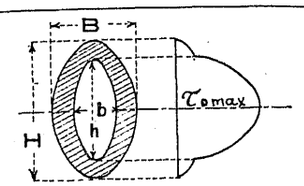
$$\tau_{omax}=\frac{4}{3}\times\frac{Q}{\pi rr'}$$

$$\tau'_{aver}=\frac{Q}{\pi rr'}; \qquad \frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}}=\frac{4}{3}$$



$$\tau_{omax}=\frac{16}{3}\times\frac{(D^2+Dd+d^2)}{\pi(D^4-d^4)}$$

$$\tau'_{aver}=\frac{4Q}{\pi(D^2-d^2)}; \qquad \frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}}=\frac{4}{3}\left(1+\frac{Dd}{D^2+d^2}\right)$$



$$\tau_{omax}=\frac{16}{3}\times\frac{Q(BH^2-bh^2)}{\pi(BH^3-bh^3)(B-b)}$$

$$\tau'_{aver}=\frac{4Q}{\pi(BH-bh)}$$

$$\frac{\tau_{omax}}{\tau'_{aver}}=\frac{4}{3}\times\frac{(BH-bh)(BH^2-bh^2)}{(B-b)(BH^3-bh^3)}$$

第十八節 桁ニ於ケル最大內應力

(Maximum Internal Stresses in a Beam)

既ニ第五章第一節ニ說明シタ所ニヨリ桁內ノ各點ニハ水平應力及ビコレト等シイ強度ノ垂直應力ガ生ジ此値ハ前節ニ求メタ (162) 及 (163) 式ニヨリ知ル事ヲ得タノデアル,卽チ

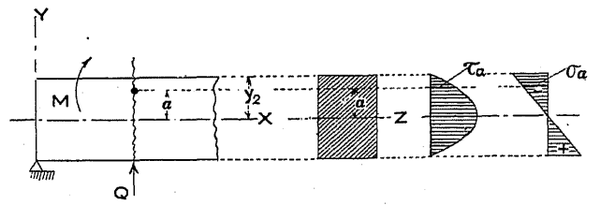


Fig. 247.

$$\tau_a=\frac{Q}{Ib}\int_a^{y_2}z.y.dy=\frac{QS_a}{Ib}$$

(Fig. 247 參照)

又一方カラ考ヘテ桁ノ內ニハ彎曲力率ニヨツテ生ズル彎曲應力卽チ斷面ニ直角ニ働ク應張力及ビ應壓力ガ存在スル,コノ應力ハ一般的ニ $\sigma=\frac{M}{I}y$ ニテ求メラレ

$$\sigma_a=\frac{M}{I}a$$

(Fig. 247 參照)

然ル時ハ桁中ノ一點P ニ於テハ前述ノ剪力カラ生ズル應剪力τガアリ又彎曲力率カラ生ズル應張力又ハ應壓力σガアルワケデコレヲ第五章第四節ノ場合ニ當嵌メテ考フレバ Fig. 248 ニ示ス如クナルノデアル,卽チ(81)式及(83)式ニ於ケル

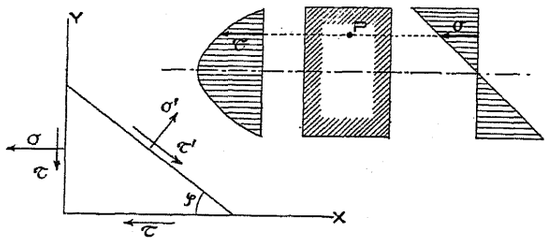


Fig. 248.

$$\sigma_y=0,\quad \sigma_x=\sigma$$

ナル事ヲ知ル故ニ此二式ハ次ノ如ク表サレル。

$$\sigma'_{\substack{max\\min}}=\frac{\sigma}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+\sigma^2}\quad\cdots\cdots(166)$$

$$\tau'_{\substack{max\\min}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+\sigma^2}\quad\cdots\cdots(167)$$

此場合若シ右邊ノσガ應張力ナラバσ'_{max}モ亦應張力トナリσガ應壓力ナラバσ'_{max}モ亦應壓力デアル,更ニσガ應張力デアツテ此式ノ平方根ノ前ノ正負號(±)ノ內負號(−)ヲ採ツタ場合ニハ其結果σ'_{min}ガ負トナツテ最大應壓力ヲ意味スル事トナリ反之σガ應壓力デアツテ負號ヲ採ツタ場合ニハσ'_{min}ハ負トナリ最大應張力ヲ示ス事トナル。

更ニ此最大及最小應力ノ存スル平面ノ傾斜モ第五章第四節ニ得タ(80)及(82)式ヨリ求メラレ

最大及最小剪力τ′ノ生ズル方向

$$\tan 2\varphi=\frac{\sigma}{2\tau}\quad\cdots\cdots(168)$$

最大及最小直應力σノ作用スル平面ノ方向

$$\tan 2\theta=-\frac{2\tau}{\sigma}\quad\cdots\cdots(169)$$

ナル事ヲ知ルガ故ニ桁中任意點ノ最大應力ノ方向線ヲ圖上ニ引ク事ガ出來ル。

最大剪力:—

最大剪力ノ量及方向ハ

$$\tau'=\sqrt{\tau^2+\frac{1}{4}\sigma^2}$$

$$\tan 2\varphi=\frac{\sigma}{2\tau}$$

桁ノ一ツノ斷面ニ於テ生ズル直應力σ及應剪力τヲ圖示スレバ Fig. 249 ニ示ス如クナル,而シテ其中立軸ニ於テ直應力σハ零トナリ從ツテ最大應剪力ノ生ズル方向ガX軸トナス角φハ前式ニσ=0ヲ挿入シ

$$\tau'=\tau,\quad \varphi=0^\circ$$

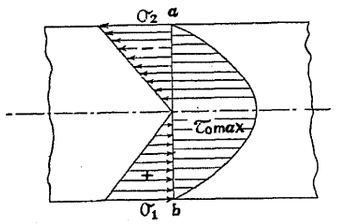


Fig. 249.

卽チ最大應剪力ノ生ズル平面ハ中立軸ト一致スルヲ見ル,次ニ中立軸ヨリ上又ハ下ニ進ムニ從ヒσガ增加シτガ減少シテ行キ遂ニ最遠纖維 (Extreme fibre) ニ於テσハ最大トナリτ=0トナルガ故ニ

$$\tau'=\frac{1}{2}\sigma\qquad\varphi=45^\circ$$

最大應張力:—

一般式ハ (166) 式 (169) 式ニ示ス如ク

$$\sigma'=\frac{1}{2}\sigma+\sqrt{\tau^2+\frac{1}{4}\sigma^2}$$

$$tan\,2\theta=-\frac{2\tau}{\sigma}$$

デアツテ桁ノ凸面 (Convex surface) ニ於テハ σ ハ最大デ τ=0 トナルガ故ニ

$$\sigma'=\sigma,\qquad \theta=90^\circ$$

故ニ σ 自身ガ主軸ト一致スルヲ見ル,更ニ中立軸ニ近ヨルニ從ツテ τ ハ增加シ σ ハ減少シテ遂ニ中立軸ニ到ツテハ τ ガ最大トナリ σ=0 トナル,卽チ中立軸ニ於テハ

$$\sigma'=\tau,\qquad \theta=45^\circ$$

最大應壓力:—

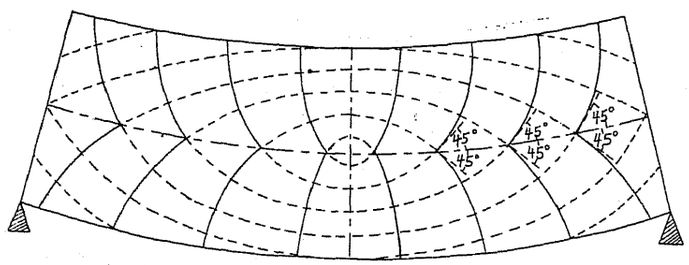
最大應張力ニ於ケルト同ジク凹面 (Concave surface) ニ於テハ

$$\sigma'=\sigma,\qquad \theta=90^\circ$$

中立軸ニ於テハ

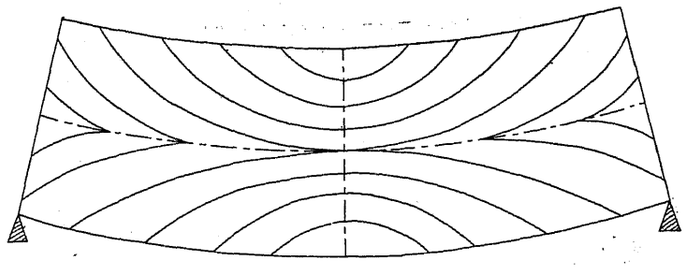
$$\sigma'=\tau,\qquad \theta=45^\circ$$

以上ノ結果ヲ單桁ニ就イテ圖示スル時ハ Fig. 250 及 Fig. 251 ヲ得ル,卽チ Fg. 250 ハ最大應張力應壓力ノ生ズル平面ノ方向線 Fig. 251 ハ最大應剪力ノ生ズル平面ノ方向線ヲ示スモノデアル,其應力度ハ上述シタル如ク線ノ傾斜ニヨリテ變化シテ居ルノデアツテ直應力ハ線ガ垂直ヲナス所デ最大,水平ヲナス所デ最小トナリ應剪力ハ水平ヲナス所デ最大,45°ノ傾斜ヲナス所デ最小トナルヲ見ル。



主應力ヲ生ズル平面ノ方向線

Fig. 250.



最大應剪力ノ方向線

Fig. 251.

此二圖ヲ重ネテ見レバ判ル如ク最大應剪力ノ線ハ最大直應力ノ線ヲ 45°ニテ切ルヲ見ル,尙最大應張力ノ線ヲ中立線以上ニ延長セシメテ見ル時ハ(圖上點線ニテ示ス)最大應壓力ノ線ヲ 90°ニテ切リ遂ニ上端凹面ニ至ツテ水平トナル。

以上ノ推論ニヨツテ見ルト普通彎曲ノ理論デ調ベタ應力ハ單桁ノ場合ニ(肱木桁ハ然ラズ)其危險斷面ニ於テノミ精確ナル應力ヲ與ヘルノデアツテ他ノ斷面デハコレガ最大ナルモノデハナイ,何トナレバ單桁ノ危險斷面ニ於テハ剪力ハ零トナルガ故ニ剪力ノ影響ハ無ク彎曲ノミニヨツテ求メタ σ ガ正シク σ' トナルノデアル,他ノ斷面ニハ剪力ガアル故ニ彎曲理論ノミカラ出シタ σ ダケデハ正シク無イノデアル,尤モ他ノ斷面デモ緣維應力 (Extreme fibre stress) ニ就イテハ應剪力ガ零デアルカラ

$$\sigma_1=\frac{M}{I}y_1,\qquad \sigma_2=\frac{M}{I}y_2$$

ナル式ガ正シイノデアルガ其他ノ纖維ニ對シテハ其纖維ニ於テ彎曲力率ヨリ求メタ直應力ヨリモ大キイ合成應力ノ生ズル事ヲ知ルノデアツテ

$$\sigma'_{max}=\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+\sigma^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(166)$$

式參照或ハ嚴密ニ橫縮ノ影響ヲ考慮ニ加ヘレバ第五章第六節ニ(87)式デ說明シタ如ク

$$_{red}\sigma_{max}=\frac{m-1}{2m}\sigma+\frac{m+1}{2m}\sqrt{4\tau^2+\sigma^2}$$

$m=\frac{10}{3}$ト假定スレバ

$$_{red}\sigma_{max}=0.35\,\sigma+0.65\sqrt{4\tau^2+\sigma^2}$$

然シ乍ラ普通ノ場合ニハ唯直應力ノミデ計算ヲ行ツテモ格別不都合ノ結果ヲ見ナイ,何トナレバ剪力ノ影響ハ極メテ少ナイカラデアル,然シ何時モ左樣許リデハナイノデ應剪力ガ直應力ニ比シテ比較的大ナル場合ニハ矢張リ無視スル事ヲ得ナイ,剪力Qガ大キクテ彎曲力率Mノ小サイ場合ニハMカラ計算サレルσハ小サクQカラ算出サレルτハ大キクナリ後者ヲ無視スル事ハ出來ナイ,コレハ斷面ノ大キナ徑間ノ短イ場合ニ起コルコトデ特ニ注意ヲ要スルノデアル,徑間ノ短イ事ハ彎曲力率ノ小サイ事ヲ示スト同時ニ斯樣ナ桁ハ大ナル荷重ヲ負ヒ得ル故ニ剪力ハ大トナルカラデアツテ且ツ肱木桁ノ如ク支點彎曲力率ヲ生ズル桁デハ最大彎曲力率ト最大剪力トガ常ニ同一斷面ニ於テ發生スルカラデアル。

以上述ベタ理由ニ因ツテ工字形鐵桁 (Rolled I-beam) ノ或點ノ應力ニ就イテハ主應力ヲ考ヘル必要ノアル事ガアル,卽チ此工字形

鐵ノ突緣ノ丁度內側ノ點ニ就イテ考フレバ其點以上ノ面積ノ中立軸ニ對スル靜力率Sハ其工字形鐵ノ半分ノ斷面ニ就イテ計算スルモノト大差ハナク從ツテ$\tau=\frac{QS}{Ib}$ニテ與ヘラレルτハ問題ノ點ニ於テ相當大ナル値ヲ有シテ居ル,然ルニ一方其點ノ直應力ハ緣維應力ト大シタ差ハ無イノデアルカラ緣維應力ト大差ナキσト中立軸ニ於テ生ズルト大差ナキτトヲ同時ニ受クル事トナル,故ニ其合成應力ハ突緣ノ應力ヨリモ大トナル事ガアリ得ル,此關係ハ徑間ガ短ク桁高ガ大ナレバ一層此傾向ヲ有スルノデアツテ注意ヲ要スルノデアル。

尙材料ノ强度ノ點カラ考ヘテ抗剪强ガ非常ニ弱イ材料ニ於テハイツモ應剪力ハ之ヲ輕視スル事ハ出來ナイ,例ヘバ木材ノ如キハ木理 (grain) ニ沿フテ非常ニ裂ケ易イノデアツテ實際ノ場合ニ徑間ガ桁高ノ十倍位ノ木桁ガ中心荷重ヲ受ケテソレガ直應力デ破壞セズシテ中立線ニ沿フテノ剪力ニ因ツテ壞レタ場合ガ珍シク無イ,如斯剪力ニ因ツテ破壞スル危險ハ徑間ニ對スル桁高ノ比ガ小ナレバ小ナル程愈々增加スルノデアル。

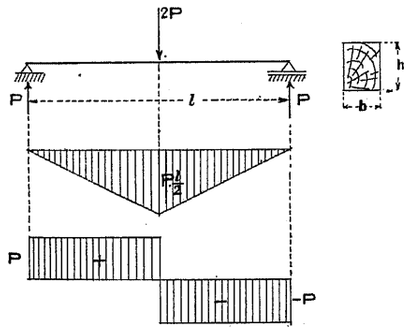


Fig. 252.

今木桁ニ就イテ$\frac{徑間}{桁高}\left(=\frac{l}{h}\right)$ノ如何ナル比ガ直應力ニヨル破壞ト應剪力ニヨル破壞トノ限界トナルカヲ調ベンニFig.252ニ示ス單桁ヲ採リ其中央ニ集中荷重2Pヲヲヲケタヲヲヲ

$$_{max}\sigma=\frac{M}{W}=\frac{3Pl}{bh^2}$$

且ツ最大應剪力

$$_{max}\tau_o=\frac{P\frac{bh^2}{8}}{Ib}=\frac{3}{2}\frac{P}{bh}$$

今若シ抗壓強ト木理ニ沿フ抗剪強トノ比ヲ n ニテ表ハセバ $k_c=nk_s$ デアルガ故ニ破壞限界ヲ求メル爲メノ條件ハ明カニ

$$\left.\begin{aligned}&_{max}\sigma=n_{max}\tau_o\\ \therefore\quad&\frac{3Pl}{bh^2}=n\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\\ \therefore\quad&\frac{l}{h}=\frac{n}{2}\\ &l=\frac{n}{2}h\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(170)$$

卽チ或材料ニ就イテ其材料ノ抗壓強ト抗剪強トノ比ガ判レバ上揭條件ニ對スル徑間ト桁高トノ比ガ計算セラレルベク徑間ガ上揭公式ニテ與ヘラレル値ヨリ大ナレバ此桁ガ應剪力デ破壞スル事ハ無イノデアル,例ヘバ第四表 [A] ニ一般的木材ノ抗壓強ヲ 8000 ₩/□″, 木理ニ沿フ抗剪強ヲ 600 ₩/□″ トセシガ故ニ

$$n=\frac{8000}{600}=13.3$$

$$\frac{l}{h}=\frac{13\,3}{2}=6.7$$

コレガ求ムル限界デアル,木材程剪力ニ對シテ弱イモノハ他ニ無イカラ木材以外ニ對シテハ多ク注意スルヲ要シナイ。

例題第二十。 圖示ノ如キ斷面ヲ有スル工字形鐵桁アリ其一端緊定セラレ他端ニ荷重 5000*kgs* ヲ受クル時最大應力ヲ求ム。

答

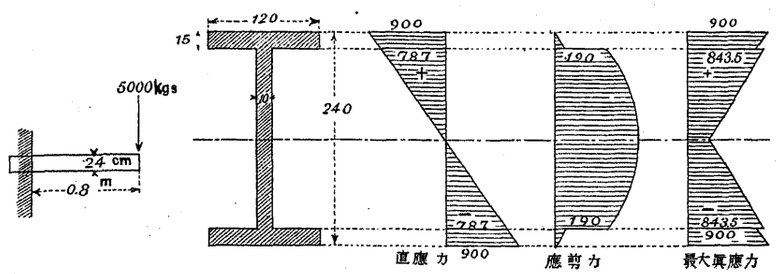


Fig. 253.

斷面ノ慣性能率ハ

$$I=\frac{12\times24^3}{12}-\frac{11\times21^3}{12}=5335cm^4$$

重心軸ニ對スル突緣面積ノ靜力率ハ

$$S=\int_{10.5}^{12}y.df=1.5\times12\times11.25=202.5cm$$

固定端ニ於ケル斷面ノ直應力ハ

$$\sigma=\frac{M_{max}}{I}y=\frac{5000\times80}{5335}y=75y$$

從ツテ上端及下端纖維ニ於ケル直應力ハ $y=12cm$ ナレバ

$$\sigma_1=\sigma_2=75\times12=900\ kg/cm^2$$

突緣內側ノ點ノ直應力ハ $y=10.5cm$ トナリ

$$\sigma=75\times10.5=787\ kg/cm^2$$

同點ニ於ケル應剪力 τ ハ (163) 式ヨリ

$$\tau=\frac{QS}{Ib}=\frac{5000\times202.5}{5335\times1}=190\ kg/cm^2$$

求メタル $\sigma=787, \tau=190$ ヨリ此點ノ主應力ハ (166) 式ヨリ

$$\sigma'_{max}=\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+\sigma^2}=\frac{787}{2}+\sqrt{190^2+\left(\frac{787}{2}\right)^2}=830\ kg/cm^2$$

或ハ更ニ精密ニ計算シテ(87)式ヨリ

$$_{real}\sigma_{max}=0.35\sigma+0.65\sqrt{4\tau^2+\sigma^2}=0.35\times787+0.65\sqrt{4\times190^2+(787)^2}=843.5\ kg/cm^2$$

卽チ此場合ニハ突緣內側ノ點ノ主應力及眞應力ハ共ニ纖維應力ヨリ小ナルテ見ル。

例題第二十一. 工字形桁ノ高 20″, 幅 $7\frac{1}{2}$″ 突緣厚 1″, 腹厚 0.6″ ナルモノアリ,其或垂直斷面ニ於テ剪力 Q=40 *tons* 及ビ彎曲力率 M=800 *ton-inches* ヲ受クル時 (a) 最

遠纖維(b)斷面中央及(c)最遠纖維ヨリ $1\frac{1''}{2}$ ノ點ニ於ケル主應力ヲ算定セヨ。

答　中立軸ニ對スル慣性能率ハ

$$I=\frac{1}{12}(7.5\times20^3-6.9\times18^3)=1647in^4$$

(a) 最遠纖維ニ於テハ

$$\sigma=\frac{800\times10}{1647}=4.86\ tons/\square''$$

コレハ純應張力又ハ純應壓力デアツテ他ノ主應力ハ零トナル。

(b) 斷面ノ中點ニ於ケル垂直及水平應剪力ハ

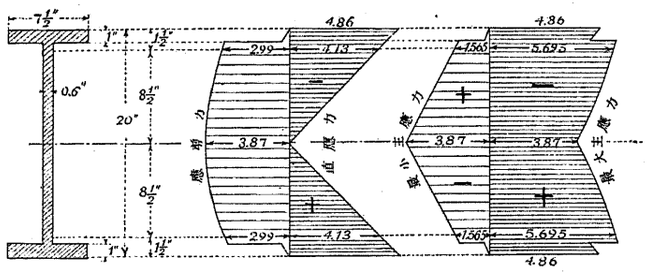


Fig. 254.

$$\tau_{max}=\frac{40}{1647\times0.6}\left(7.5\int_9^{10}y\,dy+0.6\int_0^9 y\,dy\right)=3.87\ tons/\square''$$

此純剪力ノ外ニ等量ノ應張力及應壓力ガアツテ45°ノ傾斜ヲ爲シ其強度3.87 *tons*/□″ デアル。

(c) 上下端ヨリ $1\frac{1}{2}''$ 內側ノ點ノ直應力ハ

$$\sigma=\frac{800}{1647}\times8.5=4.13\ tons/\square''$$

同點ノ垂直及水平應剪力ハ

$$\tau=\frac{40}{1647\times0.6}\left(7.5\int_9^{10}y\,dy+0.6\int_{8.5}^{9}y\,dy\right)=2.99\ tons/\square''$$

同點ノ主應力ハ從ツテ

$$\sigma'_{\substack{max\\min}}=\frac{\sigma}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+\sigma^2}=\frac{4.13}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\times(2.99)^2+(4.13)^2}$$

$$=2.065\pm3.63=+5.695\ 或ハ\ -1.565\ tons/\square''$$

最大主應力 $+5.695\ t/\square''$ ノ働ク平面ガX軸トナス傾斜ハ

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{2\tau}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{2\times2.99}{4.13}\right)=62°11'$$

卽チ最大主應力ノ働ク方向ハ此平面ニ直角卽チX軸ニ對シテ 27°49′, 斷面ニ對シテ 62°11′ ノ傾斜ヲ爲ス事ヲ知ル。

此場合ノ如ク極メテ大ナル彎曲力率及剪力ヲ同時ニ受クル工字形桁ノ突緣內側ニ於テハ其主應力(5.695)ハ斷面ノ緣維應力(4.86)ヲ凌駕スルヲ見ル。

第十九節　綴鋲桁或ハ鈑桁

(Riveted Girder or Plate Girder)

工字斷面ノ大型ノモノノ必要ナ場合ニハ複成斷面(Compound section)ニ作リ突緣(Flange), 腹部(Web)共ニ鋼鈑ニテ作リコレヲ山形鐵(Angle iron)ニテ結合シテ一部材ニ作リ上ゲル,卽チ突緣ト腹部トノ間ニ山形鐵ヲ入レ綴鋲(Rivet)デ接合スル事Fig. 255ノ如クスルノデアル。

(a)綴鋲ノ計算

鈑桁ノ腹部ト山形鐵トヲ結合スル綴鋲ハ突緣ト腹部トノ間ノ縱剪(Longitudinal shear)ヲ傳達スル役目ヲスルモノデアツテ鋲距(Pitch)ヲ e トスレバ一本ノ綴鋲Nハ距離 e ヲ隔テテ採ラレタ二ツノ斷面ノ直應力ノ差ヲ傳達スル事ハ既ニ第十七節ニ說明シタト全ク同理デアル,同節ニ於テハFig. 239ニ荷重ヲ負ヒ彎曲シタル桁ニ矩形缺込(Rectangular notch)ヲ假定シテ此縱剪ヲ計算シタノデアツテ唯異ナル點ハ前ニハ缺込ノ軸ニ沿フテノ距離ヲ dx トシタノガ此場合ニハ或有限距離(Finite distance) e デアルダケデアル,今此Nナル綴鋲ノ位置ニ於ケル直應力ハ $\sigma=\frac{M}{I}y$ デアルカラ距離 e ダケ隔ツタ二ツノ斷面間ノ直應力ノ差ハ

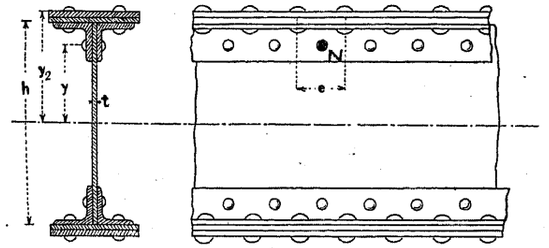


Fig. 255.

$$\triangle\sigma = \frac{\triangle M}{I}y = \frac{Qe}{I}y$$

故ニ綴鋲Nガ傳達スベキ力Tハ

$$T = \int_y^{y_2} \triangle\sigma\, df = \frac{Qe}{I}\int_y^{y_2} y\,df = \frac{Qe\,S_y}{I} \quad \cdots\cdots(171)$$

式中　S_y＝綴鋲Nデ結合サレタル點ヨリ上方ノ斷面部ノ中立軸ニ對スル靜力率(Statical moment)

Tハ一本ノ綴鋲ガ傳達スベキ力デアルカラ綴鋲其物ノ强度モ亦Tニ等シクナケレバナラヌ,故ニ(171)式ニ於テTニ綴鋲强度ヲ挿入スレバeナル鋲距ガ計算セラレ得ベク又eヲ既知トスレバ綴鋲一本ノ强度何程ナルヲ要スルカニヨツテ其寸法ヲ決定スル事ヲ得ル。

全ク同ジ原理ガ木材ヲ二本又ハ三本結合シテ一本ノ桁ニ用ヒル複成木桁(Composite wooden beam)ニ於テ其楔(Key)ノ距離ヲ求ムル計算ニモ適用セラレ得ルノデアル。(Fig. 256 參照)

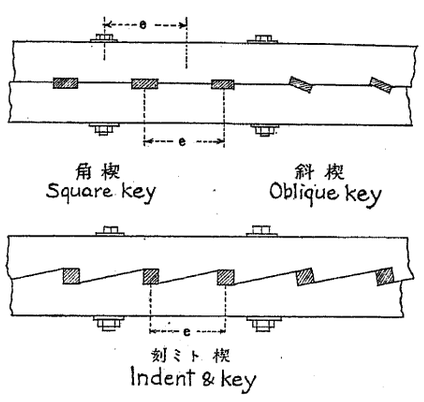


Fig. 256.

(b)突緣面積ノ計算

今　F＝突緣一個ノ斷面積,但腹鈑ノ部分ヲ考慮ニ入レズ

h＝突緣ノ重心點間ノ距離(約桁高トナル)

t＝腹鈑(Web plate)ノ厚

σ＝突緣單位面積ニ於ケル許容應力,但突緣全體ニツキ其

應力ハ略一定ト考フ。

トスレバ斷面ノ抵抗力率ハ約　$\sigma\left(Fh + \frac{th^2}{6}\right)$　トナル,此抵抗力率ヲ外力ニ因ル彎曲力率ニ等シトセバ

$$M = \sigma\left(Fh + \frac{th^2}{6}\right)$$

今腹鈑面積ヲ $F_w(=th)$ トスレバ

$$M = \sigma\left(Fh + \frac{F_w h}{6}\right)$$

然ルニ此式ハ腹鈑ニ鋲孔ノ無イ工字鐵ノ如キモノトシテノ値デアツテ實際ニ於テハ鋲孔ダケノ材料ノ損失ヲ考ニ入レネバナラヌ,卽チ腹鈑ノ抵抗力率ヲ考ヘル場合ニ前式デハ腹鈑面積ノ$\frac{1}{6}$ガ有效ニ働ク如ク表レテ居ルノデアルガ實際ニハ夫レダケノ効力ハ無イノデアツテ種々ノ實例ヲ見ルニ$\frac{1}{6}$ノ代リニ$\frac{1}{8}$ヲ用フレバ大シタ誤差ナキヲ知ルガ故ニ前式ヲ書直シ

$$M = \sigma\left(Fh + \frac{F_w}{8}h\right) = \sigma h\left(F + \frac{F_w}{8}\right) \quad \cdots\cdots(172)$$

此式ハ腹鈑モ矢張リ彎曲力率ニ抵抗スルトシテ考ヘタノデアル,故ニ突緣ノ面積ヲ計算スル爲メニハ形ヲ變ジ

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{\sigma h}\left(M - \frac{\sigma t h^2}{8}\right) \\ \text{或ハ突緣應力ハ} \\ \sigma F &= \frac{8M - \sigma t h^2}{8h} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(173)$$

以上說明シタト異ナル計算方法デ實際ニヨク用ヒラルルモノハ腹鈑ノ彎曲力率ニ對スル抵抗ヲ無視スル方法デアル,卽チ腹鈑ハ彎曲力率ニ抵抗シナイモノト假定シ彎曲力率ハ單ニ突緣ノミニヨツテ抵抗セラレ腹鈑ハ剪力ノミニ抵抗スルト考ヘルノデアツテ此場合ニハ

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{M}{\sigma h} \\ \sigma F &= \frac{M}{h} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(174)$$

(c)突緣應力ノ圖式計算

既ニ第十五節ニ於テ說明シタ如ク移動荷重ニ因ツテ桁ノ任意點ニ生ズル最大彎曲力率ハ Fig. 234 ニ就イテ說明シタ如ク作圖スル事ニヨツテ求メラレルノデアツテ今求メ得タル最大彎曲力率圖ノ縱距ヲ y_x トスレバ其點ノ最大彎曲力率ハ明カニ

$$M_x = H.y_x$$

斯クノ如クニシテ任意點ノ最大彎曲力率ヲ求メタル後ハ上述シタル何レカノ方法ヲ用ヒテ必要ナル突緣面積ヲ計算スル事ヲ得ルノデアル,今腹鈑ガ彎曲力率ニ抵抗セズト假定スル時ハ (174) 式ニヨリ

$$\sigma F_x = \frac{M_x}{h}$$

式中　h = 桁高, F_x = 任意點ノ突緣面積, σ = 突緣單位應力,

圖式的ニ突緣ノ總應力ヲ算定センニハ前述シタ最大彎曲力率ヲ求ムル作圖ヲ行フニ當ツテ極距 H ヲ桁高 h ノ或倍數ニ採リ

$$H = mh$$

ナラシムルモノトセバ其求メタ彎曲力率ハ明カニ

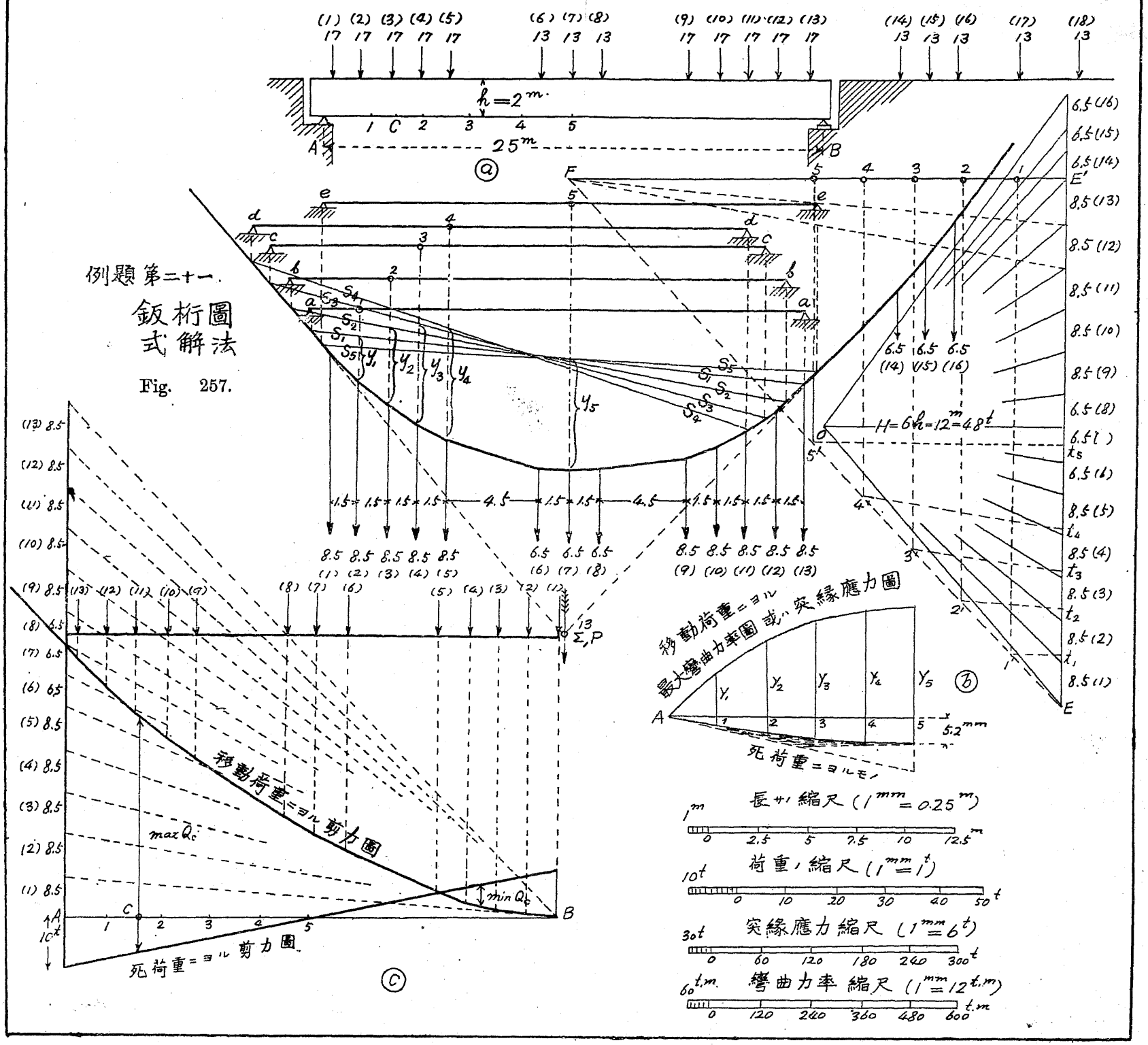
$$\left.\begin{aligned} M_x &= H.y_x = m.h.y_x \\ \therefore\quad \sigma F_x &= \frac{M_x}{h} = m.y_x \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(175)$$

故ニ突緣總應力ハ最大彎曲力率圖ノ縱距 y ニ極距ヲ選定スル時ニ用ヒタ倍數 m ヲ乘ジテ得ラレルノデアル,圖式的ニ m ヲ乘ズル

例題第二十一.

鈑桁圖式解法

Fig. 257.



ト云フ事ハ y ヲ測ルベキ其縮尺ヲ變更シ$\frac{1}{m}$ヲ單位トスル(卽チ答ガ m 倍トナル)縮尺デ測レバヨイ事トナル。

例題第二十二, 徑間 25^m, 桁高 2^m, 自重 $1600\ kg.\ per\ m.$ ナル鈑桁アリ,移動荷重トシテ Fig. 200 ニ示ス普國鐵道標準荷重ヲ採ルモノトシ徑間ヲ十等分セル分格點 $2.5m$ 毎ニ就イテ突縁應力ヲ求メ更ニ最大及最小剪力ヲ圖示セヨ。

答　Fig. 257 ハ本題ノ解法ヲ示ス,同圖ニ就イテ說明スル事トスル,用ヒタル縮尺ハ長サニ對シ $1^m=4^{mm}$,荷重ニ對シ $1^t=1^{mm}$ トス。

(1) 彎曲力率(Fig. 257 ⓐ ⓑ 參照)

本題ニ於ケル橋梁ハ鈑桁二連ヲ併置シテ成ルモノト假定シ與ヘラレタ車軸荷重(Axle load)ノ二分ノ一ガ車輪荷重(Wheel load)トシテ一個ノ桁ニ作用スルモノトス,先ヅ Fig. 257 ⓐ 圖右端ニ示ス如ク力線 EE′ ニ車輪荷重(1), (2), ……ヲ排列シ極距ヲ定ムルニ當ツテ $m=6$ ト採リ

$$H = mh = 6 \times 2^m = 12^m = 48\ tons\ (48^{mm}\text{ニ相當ス})$$

次ニ各斷面ニ最大彎曲力率ノ生ズル荷重ノ位置ハ第十五節ニ說明シタ方法デ Fig. 222 ニ行ツタト同樣ニ行ヘバ求メラレル,卽チ

斷面 1 ニ於テハ荷重(1)—(13)ガ桁上ニ乘ツタ場合ニ對シ作圖線 $1't_1$ ヲ引ク事ニヨツテ其點ニ荷重(2)ノ存スル時,

斷面 2 〃 荷荷(1)—(12) 〃 〃 $2't_2$ 〃 〃 荷重(3) 〃 〃

斷面 3 〃 荷荷(1)—(11) 〃 〃 $3't_3$ 〃 〃 〃 荷重(4) 〃 〃

斷面 4 〃 荷重(1)—(11) 〃 〃 $4't_4$ 〃 〃 荷重(5) 〃 〃

斷面 5 〃 荷重(1)—(13) 〃 〃 $5't_5$ 〃 〃 荷重(7)ノ存スル時

ニ最大彎曲力率ノ生ズル事ヲ知ル,斯クテ此位置ヘ桁ヲ動カシテ Fig. 216 ニ行ツタト同樣ノ作圖ヲ行ヘバ

斷面 1 ニ荷重(2)ノアル時卽チ桁 aa ニ對シテハ斷面 1 ニ對スル縱距 y_1 ヲ得,

斷面 2 ニ荷重(3) 〃 〃 桁 bb 〃 〃 斷面 2 〃 縱距 y_2 〃,

斷面 3 ニ荷重(4) 〃 〃 桁 cc 〃 〃 斷面 3 〃 縱距 y_3 〃,

斷面 4 ニ荷重(5) 〃 〃 桁 dd 〃 〃 斷面 4 〃 縱距 y_4 〃

斷面 5 ニ荷重(7) 〃 〃 桁 ee 〃 〃 斷面 5 〃 縱距 y_5 〃.

求メタ縱距 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_5$ ヲ排列シテ Fig. 257 ⓑ ノ最大彎曲力率圖ガ作ラレル,其値ハ例ヘバ y_1 ニ就キテ說明スレバ y_1 ノ圖上實長 $9.5mm$ アルカラ長サノ縮尺ニヨ

ツテ H=12m ト測レバ y_1 チ荷重縮尺デ $y_1=9.5t$ ト測リ其積 $M_1=H.y_1=12\times9.5=114ton\text{-}m$ トナル,或ハ若シ荷重縮尺チ用ヒテ H=48t ト測ツタナラバ y_1 ハ必ズ長サノ縮尺デ測リ $y_1=\frac{9.5}{4}=2.375m$ チ得其積 $M_1=48t\times2.375m=114t\text{-}m$ トナル,斯クノ如クシテ各斷面ニ就イテ求メタ結果チ擧ゲレバ

$M_1=12m\times9.5t=114\ t\text{-}m.$　　$M_2=12m\times16t=192\ t-m$

$M_3=12\times20=240$　　$M_4=12\times21.5=258$

$M_5=12\times22.5=270$

此Hノ12チ乘ズル手數ハ彎曲力率縮尺チ $1mm=12ton\text{-}m$ ト定メル事ニ因ツテ省略スル事ガ出來ル。

此彎曲力率圖ハ又突緣應力圖トモ見做サレル, $\sigma F_x=my_x$ ニ於テ $m=6$ ト採ツタノデアルカラ y チ荷重縮尺デ測ツテ突緣應力ハ $\sigma F_x=6y$ デ與ヘラレル,此6チ乘ズル代リニ縮尺チ $\frac{1}{6}$ ニ採リ卽チ $1mm=6tons$ ト云フ縮尺デ彎曲力率圖チ測レバ其レガ直接突緣總應力チ示ス事トナル,ⓐ又ハⓑ圖ニ就イテ測ツタ結果ハ

$\sigma F_1=6\times9.5t=57t$　　コレハ $\frac{M_1}{h}=\frac{114}{2}=57t$ ト一致スル。

$\sigma F_2=6\times16=96t$　　$\frac{M_2}{h}=\frac{192}{2}=96t$　〃

$\sigma F_3=6\times20=120t$　　$\frac{M_3}{h}=\frac{240}{2}=120t$　〃

$\sigma F_4=6\times21.5=129t$　　$\frac{M_4}{h}=\frac{258}{2}=129t$　〃

$\sigma F_5=6\times22.5=135t$　　$\frac{M_5}{h}=\frac{270}{2}=135t$　〃

斯ク突緣總應力ガ求メラレタナラバコレヲ其許容應力σデ割ツテ各斷面ノ突緣面積ガ計算セラレル。

死荷重(Dead load)ノ影響チ考ヘンニ q=1600 kg/m ガ與ヘラレテ居ル故ニ一本ノ桁ノ總重量ハ

$$\frac{1}{2}\times1600\times25=20{,}000\ kgs=20\ tons$$

此 20t ガ桁全體ニ等布的ニ働ク故ニ Fig. 257 ⓑ ニ示ス如ク彎曲力率圖ガ作ラレ其桁中央ニ於ケル最大縱距實長 5.2mm チ得ル,故ニ死荷重ニヨル桁中央點ノ最大彎曲力率ハ

$$_{max}M'_5=H.y'_5=12m\times5.2t=62.4\ t\text{-}m.$$

$$\sigma F'_5=6\times5.2t=31.2\ tons.$$

此作圖ハ又次ノ如ク行フ方ガ便利ナ事ガアル,卽チ先ヅ桁中央ノ最大彎曲力率

チ計算シ

$$_{max}M'_5=\frac{1}{8}P.l=\frac{1}{8}\times20\times25=62.5\ ton\text{-}m.$$

故ニ中央點ノ彎曲力率圖縱距ハ

$$y'_5=\frac{M}{H}=\frac{62.5}{12}=5.2t=5.2\ mm$$

此 5.2mm ノ縱距チ有スル拋物線チⓑ圖ニ書キ添ヘレバヨイ。

實際ニ起ル最大彎曲力率チ求メンニハ移動荷重ニ對スル縱距ト死荷重ニ對スル縱距トチ上下一緒ニ測ツテ上述ノ計算チ行フノデアル。

Fig. 257 ⓒ ハ剪力圖デアッテ AB 線ノ上側ニ移動荷重ニ對スル反力多邊形(Reaction polygon) 卽チ最大剪力圖チ Fig. 224 ニ說明シタ方法ニヨッテ作圖シ更ニ其下側ニ死荷重ニ對スル剪力圖チ添ヘテアル,後者ハ A 點ノ下ヘ總死荷重ノ半分10tチ採リ B ノ上ニ同ジク−10tチ採リコレヲ直線デ結ンデ求メラレル,今A支點カラ 3.75m 距離ニアル C 點ノ最大剪力ハ

$$_{max}Q_c=+47.5\ t$$

同點ノ最小剪力ハ B 點カラ 3.75m ノ點ニ於ケル縱距チ測リ其符號チ變ズレバ與ヘラレルベク其値ハ

$$_{min}Q_c=+4.5\ t$$

第二十節　彈性線 (Elastic Line of Loaded Beam)

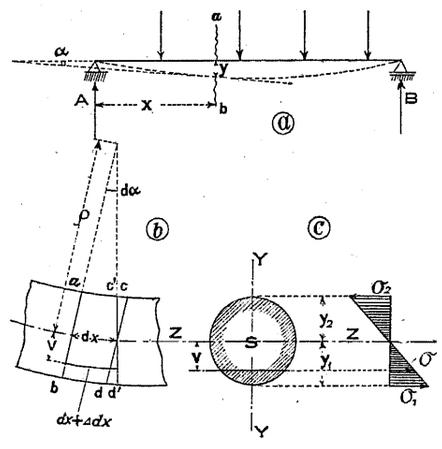


Fig. 258.

茲ニ Fig. 258 ノ直桁 AB ガ任意ノ荷重ヲ受ケルモノトシソレヲ直座標軸 XY ニ對シテ考ヘル卽チ任意斷面 ab ガ支點 A カラ x ノ距離ニ採ラレタモノト考ヘ其點ノ撓度(Deflection)ヲ y トスル,然ル時ハ ab 斷面ノ彎曲力率ヲ M_x トシソノ ab 斷面ノ中立軸カラ v ノ距離ニ採ラレタ一ツノ層ニ於ケル直應力ヲ

σトスレバ

$$\sigma=\frac{M_x}{I}v$$

次ニab斷面ト距離dxヲ隔テテcd斷面ヲ考ヘ此ab,cdノ二斷面ハ荷重ヲ受ケル前ニハ互ニ平行デアツタモノトスレバ荷重ヲ受ケタ爲メニ桁ガ彎曲シテ二斷面ガ交叉スル樣ニナル,卽チ⑥圖ノ如ク軸カラvノ距離ヲ隔ツタ點ニ於ケル纖維ハσト云フ應力ヲ受ケテ居ル爲メニ伸張スベク其量ハ

$$\triangle dx_v=\frac{\sigma}{E}dx$$

ナル事ヲ知ル,故ニ原長dxヲ加ヘテ其總長ハ$dx+\triangle dx_v$

トナル,然ルニ桁ノ軸ニ於テハσ=0デアル故ニ伸縮共ニ零デアリ從ツテ軸ハ彎曲應力ニ對シテ中立ナリト云ヘル,卽チ此事實カラ此軸ヲ中立線(Neutral line)ト云ヒ又ハ之ヲ彈性線(Elastic line)トモ云フ,此中立線又ハ彈性線ガ荷重ヲ受ケ彎曲シテ⑧圖點線ノ如キ形ヲ採ツタモノトスル,則チ斷面abニ於ケル撓度yガ彎曲力率M_xトノ間ニ存スル關係ヲ求メントスルノデアル,先ヅ

ρ = 斷面abニ於ケル彈性線ノ曲率半徑(Radius of curvature)

$d\alpha$= ab,cdノ二斷面ノ交點ニ於ケル角トスレバ明カニ

$dx+\triangle dx_v=(\rho+v)d\alpha$

然ルニ$dx=\rho\,d\alpha$　デアル故ニ

$$\triangle dx_v=v.d\alpha=\frac{\sigma}{E}dx$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{dx}{d\alpha}=\frac{vE}{\sigma}=\frac{vEI}{M_x.v}=\frac{EI}{M_x}\qquad\cdots\cdots(176)$$

此式ニ於ケルM_xハ其斷面ノ彎曲力率デアリIハ慣性能率デアル,

次ニ微分學ニ於テ

$$\rho=-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ナル事ヲ知ル,然ルニ⑧圖ニ示ス如クαハ其斷面ニ於テ彈性線ニ引カレタ切線ガX軸ト爲ス角デアツテ$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha$　デアリ其彈性線ノ撓度ハ實際ニハ極メテ小ナルモノデアツテρノ式ニ於ケル$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ハ是ヲ無視シテモ差支ナイ,故ニ

$$\rho=-\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

故ニρヲ此値ニ採リ(176)式ニ挿入シテ求ムル彈性線方程式ヲ得ル。

$$-\frac{EI}{\rho}=EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M_x$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\rho}=-\frac{M_x}{EI}}\qquad\cdots\cdots(177)$$

此(177)式ガ彈性線ノ微分方程式デアツテ此式ニヨツテ荷重ヲ受ケテ居ル桁ノ傾斜(Slope)及ビ撓度(Deflection)ヲ容易ニ決定シ得ルノデアル,卽チ此方程式ノ一度積分シタモノハ傾斜ヲ與ヘ再度積分シタモノハ撓度ヲ與ヘルノデアル。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{傾斜} & \dfrac{dy}{dx}=-\int\frac{1}{\rho}dx=-\int\frac{M_x}{EI}dx\\ \text{撓度} & y=-\iint\frac{1}{\rho}dx^2=-\iint\frac{M_x}{EI}dx^2\end{array}\right\}\qquad\cdots\cdots(177)$$

尙一步ヲ進メ本式ヲ應用シテ不靜定桁(Statically indeterminate beams)ノ支點反力ヲモ決定シ得ルノデアルガ實際ニ於テハ單ニ解キ得

ルト云フニ止マリ其方法ハ相當不便デ實用ニハナラナイ,此ノ便ナラザル理由ハ微分方程式ヲ用フル場合ニ二ツノ荷重ノ間ニ於テ一ツ宛ノ彈性線方程式ヲ作ラネバナラズ多クノ荷重ノアル場合ニハ多クノ方程式ガ出來テ其積分定數ノ決定ガ非常ニ面倒ナカラデアル,ソレヨリハ第二十二節ニ述ベル方法又ハ第二十三節ニ說明スル圖式解法ヲ用フル方ガ一層便利デアル。

尙前ニ第八節 (135) 及 (136) 式デ以テ

$$\frac{dM}{dx}=Q$$

$$\frac{dQ}{dx}=-q=\frac{d^2M}{dx^2}$$

ナル事ヲ說明シタ,故ニ此場合ニ適用シ

$$Q=\frac{dM}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-EI\frac{d^3y}{dx^3} \quad \cdots\cdots(178)$$

$$\frac{dQ}{dx}=-q=-EI\frac{d^4y}{dx^4}$$

或ハ

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{q}{EI} \quad \cdots\cdots(179)$$

是レニ依ツテ若シモ q ナルモノガ定數ナルカ又ハ積分シ得ベキ x ノ函數デアル場合ニ桁ノ任意點ノ剪力Q,彎曲力率M,傾斜 α,撓度 y ヲ表ハス一般方程式ハ (179) 式ノ一度,二度三度,四度ノ積分ニテ見出サレ得ル事ヲ知ルノデアル。

第二十一節

彈性線微分方程式應用計算例

(1) 荷重Pヲ受ケ均等斷面ヲ有スル肱木桁

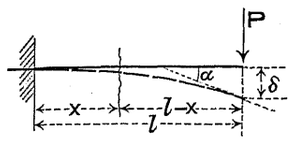


Fig. 259

今 E= 彈性係數, I= 慣性能率, l= 徑間, M_x= 或斷面ニ於ケル彎曲力率トセバ一般方程式

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M_x$$

ニ於テ $M_x=-P(l-x)$ デアル故ニ

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M_x=P(l-x)=Pl-Px$$

積分シテ $$EI\frac{dy}{dx}=Plx-P\frac{x^2}{2}+C$$

Cヲ決定スル爲メ $x=0$ ノ時 $\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=0$ ナル條件ヲ用フレバ C=0 ヲ得.

今 α ヲ $x=l$ ナル點ノ傾斜トセバ

$$EI\alpha=Pl^2-\frac{1}{2}Pl^2=\frac{1}{2}Pl^2$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{Pl^2}{2EI} \quad \cdots\cdots(180)$$

再度積分シテ $$EIy=Pl\frac{x^2}{2}-P\frac{x^3}{6}+C_1$$

$x=0$ ニ對シ $y=0$ $\quad\therefore\ C_1=0$

$$EIy=\frac{1}{2}Plx^2-\frac{1}{6}Px^3$$

$$\therefore \quad y=\frac{P}{6EI}(3lx^2-x^3) \quad \cdots\cdots(181)$$

コレガ求メ得タル彈性線方程式デアル,自由端ニ於ケル最大撓度ヲ δ トセバ (181) 式中ニ $x=l$, $y=\delta$ ト置キ

$$\delta=\frac{Pl^3}{3EI} \quad \cdots\cdots(182)$$

斯クテ傾斜及撓度ヲ與ヘラレタ荷重ノ函數トシテ求メタノデアルガ今緣維應力 σ ノ函數トシテ表ハサンニハ

$$Pl=M_{max}=\frac{\sigma I}{\frac{h}{2}}$$

h ハ對稱斷面ノ場合ノ桁高

ヲ用ヒPヲ消去シテ

$$\alpha=\frac{\sigma l}{Eh} \quad \cdots\cdots(183)$$

$$\delta=\frac{2\sigma l^2}{3Eh} \quad \cdots\cdots(184)$$

(2) 等布荷重ヲ受クル均等斷面ノ肱木桁

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M_x=\frac{q}{2}(l-x)^2=\frac{q}{2}(l^2-2lx+x^2)$$

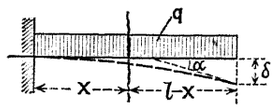


Fig. 260.

積分シテ

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{q}{2}\left(lx-2l\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+C_1$$

$x=0$ ノ時 $\frac{dy}{dx}=0$　　$\therefore\ C_1=0$

自由端ニテハ $x=l,\ \frac{dy}{dx}=\alpha$ ト置キ

$$EI\alpha=\frac{ql^3}{6}\qquad \alpha=\frac{ql^3}{6EI}\quad\cdots\cdots(185)$$

再度積分シテ　　$EIy=\frac{q}{2}\left(l^2\frac{x^2}{2}-2l\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}\right)+C_2$

$x=0$ ノ時 $y=0$,　　$\therefore\ C_2=0$

求メタル彈性線方程式ハ

$$y=\frac{q}{2EI}\left(\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{1}{3}lx^3+\frac{1}{12}x^4\right)\quad\cdots\cdots(186)$$

$x=l$ ノ時ノ $y=\delta$ トセバ

$$\delta=\frac{ql^4}{8EI}\quad\cdots\cdots(187)$$

或ハ繊維應力ノ函數トシテ

$$\delta=\frac{\sigma l^2}{2Eh}\quad\cdots\cdots(188)$$

(3) 全徑間等布荷重ヲ有スル均等斷面ノ單桁

$$A=B=\frac{ql}{2}$$

$$M_x=Ax-q\frac{x^2}{2}=\frac{ql}{2}x-q\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore\ EI\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{ql}{2}x+\frac{q}{2}x^2$$

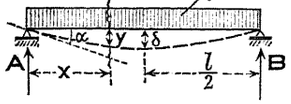


Fig. 261.

積分シテ

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{ql}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{q}{2}\frac{x^3}{3}+C_1$$

對稱荷重ナル故桁ノ最低點ハ徑間中央ニアリ,卽チ $x=\frac{l}{2}$ ノ時

$$\frac{dy}{dx}=0=-\frac{1}{16}ql^3+\frac{1}{48}ql^3+C_1\qquad\therefore\ C_1=\frac{1}{24}ql^3$$

從ッテ　　$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{ql}{4}x^2+\frac{q}{6}x^3+\frac{ql^3}{24}$

支點ニ於ケル傾斜ハ $x=0,\ \frac{dy}{dx}=\alpha$ ト置キ

$$\alpha=\frac{ql^3}{24EI}\quad\cdots\cdots(189)$$

再度積分シテ　　$EIy=-\frac{ql}{4}\frac{x^3}{3}+\frac{q}{6}\frac{x^4}{4}+\frac{ql^3}{24}x+C_2$

A 支點ニテハ $x=0$ ノ時 $y=0$,　　$\therefore\ C_2=0$.

故ニ彈性線方程式ハ

$$y=\frac{qx}{24EI}(x^3-2lx^2+l^3)\quad\cdots\cdots(190)$$

徑間中央ニ於ケル最大撓度ハ $x=\frac{l}{2}$ ニ對シ

$$\delta=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}\quad\cdots\cdots(191)$$

繊維應力ニテ表ハセバ

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{\sigma I}{\frac{h}{2}},\qquad ql^2=\frac{16\sigma I}{h}$$

$$\therefore\qquad \alpha=\frac{2}{3}\frac{\sigma l}{Eh}\quad\cdots\cdots(192)$$

$$\delta=\frac{5}{24}\frac{\sigma l^2}{Eh}\quad\cdots\cdots(193)$$

(4) 一個ノ集中荷重ヲ有スル均等斷面ノ單桁。

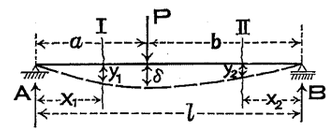


Fig. 262.

$$A=\frac{P.b}{l}\qquad B=\frac{P.a}{l}$$

荷重 P ノ左側卽チ A ヨリ P 迄ノ部分ニ對シテハ

$$EI\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=-Ax_1=-\frac{P.b}{l}x_1$$

$$EI\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{Pb}{l}\frac{x_1^2}{2}+C_1$$

$$EIy_1=-\frac{Pb}{2l}\frac{x_1^3}{3}+C_1x_1+C_2$$

荷重 P ノ右側 B ヨリ P 迄ノ部分ニ對シテハ

$$EI\frac{d^2y_2}{dx_2^2}=-Mx=-Bx_2=-\frac{Pa}{l}x_2$$

$$EI\frac{dy_2}{dx_2}=-\frac{Pa}{l}\frac{x^2{}_2}{2}+C_3$$

$$EIy_2=-\frac{Pa}{2l}\frac{x_2^3}{3}+C_3x_2+C_4$$

積分定數ヲ求ムルタメニ

A 點ニテハ $x_1=0$ ニ對シ $y_1=0$,　　$\therefore\ C_2=0$

B 點ニテハ $x_2=0$ ニ對シ $y_2=0$,　　$\therefore\ C_4=0$

荷重 P ノ下ニ於テハ $x_1=a,\ x_2=b$ ニ對シ

$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{dy_2}{dx_2}$ 及ビ $y_1=y_2=\delta$ 故ニ次ノ二式ヲ得

$$-\frac{Pba^2}{2l}+C_1=-\left(-\frac{Pab^2}{2l}+C_2\right)$$

$$-\frac{Pba^3}{6l}+C_1a=-\frac{Pab^3}{6l}+C_2b$$

從ツテ $$C_1=\frac{Pab(a+2b)}{6l}=\frac{Pab(l+b)}{6l}$$

$$C_2=\frac{Pab(b+2a)}{6l}=\frac{Pab(l+a)}{6l}$$

求メ得タル彈性方程式ハ

$$\left.\begin{aligned}EIy_1&=-\frac{Pbx_1^3}{6l}+\frac{Pab(l+b)}{6l}x_1\\EIy_2&=-\frac{Pax_2^3}{6l}+\frac{Pab(l+a)}{6l}x_2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(194)$$

荷重Pノ下ニ於ケル撓度δハ $x_1=a$ ト採リ

$$EI\delta=-\frac{Pba^3}{6l}+\frac{Pa^2b(l+b)}{6l}$$

$$\therefore\quad\delta=\frac{Pa^2b^2}{3lEI}\quad\cdots\cdots(195)$$

尤モ(194)式ノ何レヲ用フルモ同ジ結果δヲ得ル事ハ勿論デアル。

最大撓度ノ生ズル點ヲ求メンニハ $\frac{dy_1}{dx_1}=0$ 又ハ $\frac{dy_2}{dx_2}=0$ ト置キ

$$EI\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{Pbx_1^2}{2l}+\frac{Pab(l+b)}{6l}=0$$

$$\therefore\quad x_1=\sqrt{\frac{a(l+b)}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3a(2b+a)}=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$$

一般彈性線方程式

$$y_1=\frac{Pbx_1}{6EIl}(2la-a^2-x_1^2)$$

ニ求メタル x_1 ノ値ヲ挿入シ $y_1=\delta_{max}$ トセバ最大撓度ハ

$$\delta_{max}=\frac{Pb}{27EIl}\sqrt{3\{a(2b+a)\}^2}\quad\cdots\cdots(196)$$

最大彎曲力率 $M_{max}=\frac{Pab}{l}$ ナルガ故ニ

$$\sigma=\frac{M_{max}}{I}\cdot\frac{h}{2},\qquad Pb=\frac{25Il}{ah}$$

$$\therefore\quad\delta_{max}=\frac{2\sigma}{27Eh}\sqrt{3a(2b+a)^3}\quad\cdots\cdots(197)$$

若シ此單桁ガ徑間中央ニ集中荷重Pヲ受クルモノトセバ最大撓度ハ此荷重下ニ起コルベク其値ハ(195)式又ハ(196)式ニ $a=b=\frac{l}{2}$ ヲ挿入シテ得ラレ

$$\delta=\frac{Pl^3}{48EI}\quad\cdots\cdots(198)$$

(5)一端緊定他端支持サレテ全徑間ニ等布荷重ヲ受クル桁

此桁ハ不靜定デアル,先ヅ支點反力ヲ出ス事トシヤウ。

$$M_x=B(l-x)-\frac{q(l-x)^2}{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Mx=\frac{ql^2}{2}-qlx+\frac{q}{2}x^2-Bl+Bx$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{ql^2}{2}x-ql\frac{x^2}{2}+\frac{q}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-Blx+B\frac{x^2}{2}+C_1$$

$x=0$ ノ時 $\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore\quad C_1=0$

再度積分シテ $$EIy\frac{ql^2}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{ql}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{q}{6}\cdot\frac{x^4}{4}-Bl\frac{x^2}{2}+\frac{B}{2}\frac{x^3}{3}+C_2$$

$x=0$ ノ時 $y=0$, $\therefore\ C_2=0$ 同時ニ $x=l$ ノ時 $y=0$

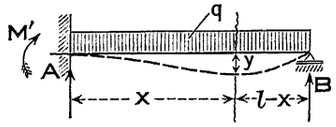


Fig. 263.

$$\therefore\quad 0=\frac{ql^4}{4}-\frac{ql^4}{6}+\frac{ql^4}{24}-\frac{Bl^3}{2}+\frac{Bl^3}{6}$$

此式ヨリ未知反力Bガ求メラレ

$$B=\frac{3}{8}ql$$

從ツテ $$A=ql-B=\frac{5}{8}ql$$

支點反力サヘ求メラルレバ其他ノ解法ハ極メテ容易デアツテ緊定端ニ於ケル未知彎曲力率ヲ求メンニハA點ニ對スル全荷重ノ力率ヲ採リ

$$M'-Bl+ql\frac{l}{2}=0$$

$$M'-\frac{3}{8}ql^2+\frac{1}{2}ql^2=0$$

$$\therefore\quad M'=-\frac{1}{8}ql^2$$

彈性線方程式ハ前式ニ $B=\frac{3}{8}ql$ ヲ挿入シ

$$EIy=\frac{ql^2}{4}x^2-\frac{ql}{6}x^3+\frac{q}{24}x^4-\frac{3}{8}ql^2\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}ql\frac{x^3}{6}.$$

$$\therefore\quad y=\frac{qx^2}{48EI}(l-x)(3l-2x)\quad\cdots\cdots(199)$$

最大撓度ノ點ニ於テ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルガ故ニ

$$\frac{dy}{dx}=0=\frac{ql^2}{2}x-\frac{ql}{2}x^2+\frac{q}{6}x^3-\frac{3}{8}ql^2x+\frac{3}{8}ql\frac{x^2}{2}$$
$$=\frac{1}{8}ql^2x-\frac{5}{16}qlx^2+\frac{1}{6}qx^3$$

此式ヨリ求メタ x ノ點ニ最大撓度ガ起リ

$$x=\frac{l}{16}(15-\sqrt{33})=0.5785\,l$$

此値ヲ用ヒ最大撓度ノ値ヲ求ムレバ

$$\delta_{max}=\frac{39+55\sqrt{33}}{16^4}\frac{ql^4}{EI}=0.0054\frac{ql^4}{EI}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(200)$$

尙任意點ニ於ケル彎曲力率ハ明カニ

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M_x=\frac{ql^2}{2}-qlx+\frac{qx^2}{2}-\frac{3}{8}ql^2+\frac{3}{8}qlx$$

$$\therefore\quad M_x=-\frac{1}{8}ql^2+\frac{5}{8}qlx-\frac{1}{2}qx^2$$

彎曲力率ノ零トナル點ヲ求メンニハ $M_x=0$ ト置キ

$$x=\frac{1}{4}l\quad 及\quad x=l.$$

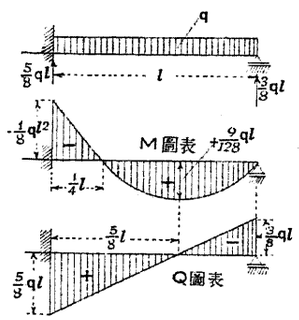


Fig. 264.

彎曲力率圖及剪力圖ハ Fig. 264 ノ如キ形狀ヲ採ル。

徑間内ニ於ケル最大彎曲力率ヲ求メンニハ

$$\frac{dM_x}{dx}=0=\frac{5}{8}ql-qx$$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{8}l$$

此 x ノ値ヲ用ヒテ徑間内ニ於ケル最大彎曲力率

$$M_{max}=-\frac{1}{8}ql^2+\frac{5}{8}ql\frac{5}{8}l-\frac{1}{2}q\left(\frac{5}{8}l\right)^2$$
$$=+\frac{9}{128}ql^2$$

第二十二節

彈性線ト彎曲力率圖トノ關係

彎曲力率圖ハ既ニ解析的ニモ圖式的ニモ容易ニ之ヲ求メル方法ヲ研究シタ,此レヲ用ヒテ彈性線即チ撓度ヲ求メル事ガ出來ルノデアル。

Fig. 265 肱木桁 AB ハ左端ニ固定サレ任意荷重ヲ受クルモノトス,其荷重ニ對スル彎曲力率圖ハ ⓐ 圖ニ之ヲ示ス,而シテ自由端 B ノ撓度 δ ヲ求メントスルノデアル。

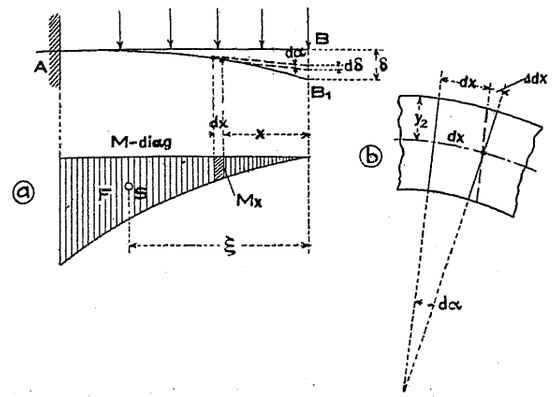


Fig. 265.

先ヅ自由端カラ x ノ距離ノ處ニ dx 隔テテ二ツノ點ヲ採リ此二點ニ於ケル彈性線ニ切線ヲ引ク,此二ツノ切線ガ自由端 B ヲ通ズル垂直線ニ於テ $d\delta$ ナル長ヲ挾ムモノトシ其二線ノ間ノ角ヲ $d\alpha$ トスル,然ル時ハ其幾何學的關係ヨリ

$$d\delta=x.d\alpha$$

$$\therefore\quad \delta=\int_0^l x.d\alpha$$

次ニ

M_x = 自由端ヨリ x ナル斷面ニ於ケル彎曲力率即チ彎曲力率圖ノ縱距

I = 此斷面ノ慣性能率

トスル時ハ此斷面ノ最遠纖維ノ應力ハ軸ヨリ y_2 ノ距離ニ於テ

$$\sigma_2=\frac{M_x}{I_x}.y_2$$

此應力アルガ爲メニ其纖維ハ原長ヨリ長クナル,此長クナル量 $\triangle dx$ ハ明カニ

$$\triangle dx = \frac{\sigma_2}{E} dx = \frac{M_x.y_2}{EI_x} dx$$

然ルニ⑪圖ヨリ

$$\triangle dx = y_2.d\alpha$$

デアル故ニ

$$d\alpha = \frac{\triangle dx}{y_2} = \frac{M_x}{EI_x} dx$$

$$\therefore \quad \alpha = \int_o^l \frac{M_x}{EI_x} dx \quad \cdots\cdots(201)$$

$$\delta = \int_o^l x\, d\alpha = \int_o^l \frac{M_x.x}{E.I_x} dx \quad \cdots\cdots(202)$$

此(201)及(202)式ニヨツテ肱木桁ノ傾斜及撓度ヲ求メル事ハ極メテ容易デアル,若シ此桁ガ不變斷面ヲ有スル場合ニハ $I_x = I$ ハ定數ト考ヘラレ

$$\alpha = \frac{1}{EI}\int_o^l M_x.dx \quad \cdots\cdots(203)$$

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_o^l M_x.x\, dx \quad \cdots\cdots(204)$$

此積分値ノ意味ヲ說明センニ Fig. 265 ⓐ ノ彎曲力率圖ノ dx ニ相當スル極微面積ヲ dF トスレバ

$$dF = M_x.dx$$

然ル時ハ(204)式ニアル

$$M_x.x.dx = dF.x$$

トナル,故ニ(203)式中ノ積分値ハ彎曲力率圖ノ面積ヲ意味シ(204)式中ノ積分値ハ同面積ノ自由端ニ對スル靜力率ヲ意味ス,故ニ此二ツノ積分ハ次ノ如クナル

$$\int M_x.dx = \int dF = F$$

$$\int M_x.x.d_x = \int x.dF = F.\xi$$

式中 F＝彎曲力率圖ノ全面積

ξ＝彎曲力率圖ノ重心ノ自由端カラノ距離

故ニ(203)及(204)式ハ次ノ如ク書換ヘラレル。

$$\alpha = \frac{1}{EI}\int_o^l M_x.dx = \frac{F}{EI}$$

$$= \frac{\text{彎曲力率圖ノ面積}}{EI} \quad \cdots\cdots(205)$$

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_o^l M_x.x.dx = \frac{F.\xi}{E.I}$$

$$= \frac{\text{彎曲力率圖ノ自由端ニ對スル靜力率}}{E.I} \quad \cdots\cdots(206)$$

實際ニ當ツテ彎曲力率圖ハ豫メ既知ナルヲ常トスルガ故ニ此解法ハ前節ニ得タル方法ニ比シテ一層容易デアル,尤モ此場合荷重ハ任意デアルガ桁ハ桁木桁ニナツテ居ル方ガ便利デアル。

撓度計算例

(1)集中荷重ヲ有スル肱木桁ノ自由端ニ於ケル撓度

(a)一個ノ集中荷重ヲ有スル場合(斷面ハ不變トス),(Fig. 266 參照)

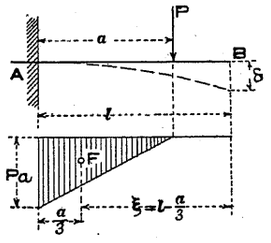


Fig. 266.

此場合ニハ彎曲力率圖ハ三角形トナリ其面積

$$F = P.a.\frac{a}{2}$$

此面積ノ重心ノ自由端カラノ距離ハ

$$\xi = l - \frac{a}{3}$$

自由端Bノ撓度 δ ハ(206)式ニヨリ

$$\delta = \frac{F.\xi}{EI} = \frac{P\frac{a^2}{2}\left(l - \frac{a}{3}\right)}{EI}$$

(b)多クノ集中荷重ヲ受クル場合,(Fig. 267 參照)

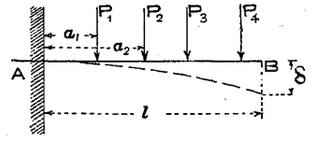


Fig. 267.

各荷重ニ相當スル撓度ヲ合計シテ

$$\delta = \Sigma \frac{P\frac{a^2}{2}\left(l - \frac{a}{3}\right)}{EI}$$

(c)荷重ガ自由端ニ作用スル場合,(Fig. 268 參照)

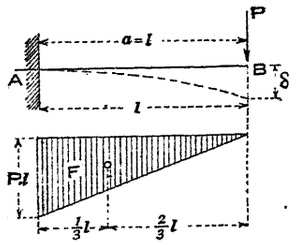


Fig. 268.

此場合ニハ $a=l$ トナリ

$$\delta=\frac{P\frac{a^2}{2}\left(l-\frac{a}{3}\right)}{EI}=\frac{P\frac{l^2}{2}\left(l-\frac{l}{3}\right)}{EI}$$

$$=\frac{Pl^3}{3EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(182)\text{式參照}$$

倘(205)式ニヨリ

$$\alpha=\frac{F}{EI}=\frac{P\frac{l^2}{2}}{EI}=\frac{Pl^2}{2EI} \quad \cdots\cdots\cdots(180)\text{式參照}$$

(d)荷重ガ肱木桁中央ニ作用スル場合,(Fig. 269參照)

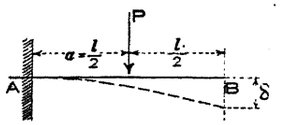


Fig. 269.

此場合ニハ $a=\frac{l}{2}$ トナリ

$$\delta=\frac{P\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\left\{l-\frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)\right\}}{EI}=\frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EI} \quad \cdots\cdots(207)$$

(2)等布荷重ヲ有スル肱木桁ノ自由端ニ於ケル撓度(Fig. 270參照)

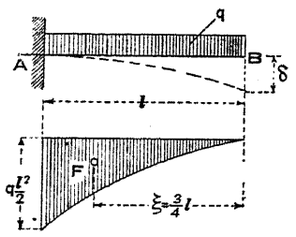


Fig. 270.

此場合ニハ彎曲力率圖ハ拋物線トナルガ故ニ

$$F=\frac{1}{6}ql^3, \quad \xi=\frac{3}{4}l$$

從ツテ

$$\delta=\frac{F.\xi}{E.I}=\frac{\frac{1}{6}ql^3.\frac{3}{4}l}{EI}=\frac{ql^4}{8EI} \quad \cdots\cdots(187)\text{式參照}$$

$$\alpha=\frac{F}{EI}=\frac{\frac{1}{6}ql^3}{EI}=\frac{ql^3}{6EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(185)\text{式參照}$$

(3)自由端ニ偶力Mノ作用スル肱木桁ノ自由端ニ於ケル撓度(Fig. 271參照)

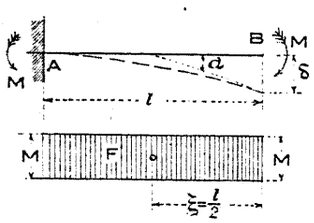


Fig. 271.

此場合ニハ彎曲力率ハ全徑間同一値ヲ有スルガ故ニ

$$F=M.l, \quad \xi=\frac{l}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{M.l}{EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(208)$$

$$\delta=\frac{M.l.\frac{l}{2}}{E.I}=\frac{M.l^2}{2E.I} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(209)$$

(4)等變荷重(三角荷重)ヲ受クル肱木桁ノ自由端ニ於ケル傾斜及撓度(Fig. 272參照)

此場合ニハ彎曲力率圖ハ三次拋物線トナルガ故ニ其面積及靜力率ヲ求メルハ面倒デアル,斯クノ如キ場合ニハ直接彎曲力率ヨリ計算シタ方ガ容易デアル。

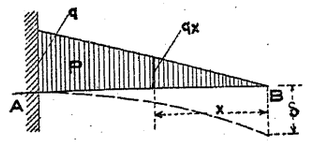


Fig. 272.

$$M_x=q_x.\frac{x}{2}.\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}q_xx^2$$

然ルニ $q_x:q=x:l \quad \therefore \quad q_x=q\frac{x}{l}$ デアル故ニ

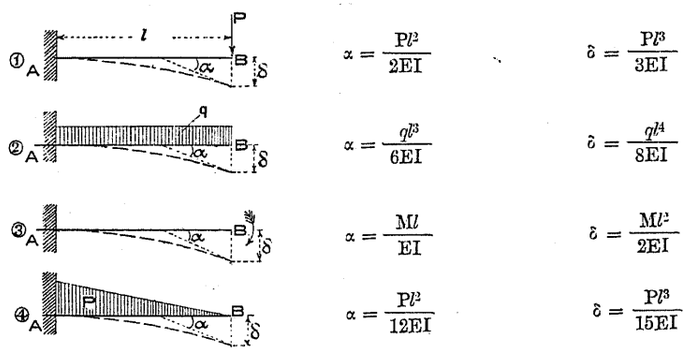
$$M_x=\frac{1}{6}q\frac{x^3}{l}$$

從ツテ

$$\alpha=\frac{1}{EI}\int_o^l M_xdx=\frac{1}{EI}\int_o^l\frac{qx^3}{6l}dx=\frac{ql^3}{24EI}\text{或ハ}=\frac{Pl^2}{12EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(210)$$

$$\delta=\frac{1}{EI}\int_o^l M_x.x.d_x=\frac{1}{EI}\int_o^l\frac{qx^4}{6l}dx=\frac{ql^4}{30EI}\text{或ハ}=\frac{Pl^3}{15EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(211)$$

以上調査シタモノノ內特ニ必要ナルモノヲ再錄スレバ



①	$\alpha=\frac{Pl^2}{2EI}$	$\delta=\frac{Pl^3}{3EI}$
②	$\alpha=\frac{ql^3}{6EI}$	$\delta=\frac{ql^4}{8EI}$
③	$\alpha=\frac{Ml}{EI}$	$\delta=\frac{Ml^2}{2EI}$
④	$\alpha=\frac{Pl^2}{12EI}$	$\delta=\frac{Pl^3}{15EI}$

Fig. 273.

此四ツノ値ヲ適當ニ應用スレバ單桁及不靜定桁ノ解法ヲ容易ニ行ヒ得ル.茲ニ其例ヲ擧ゲ樣ト思フ。

(5)等布荷重ヲ受クル單桁(Fig. 274參照)

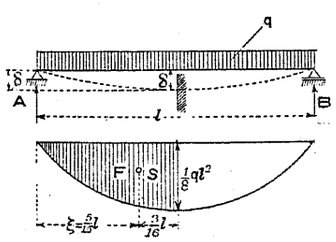


Fig. 274.

單桁ヲ中央デ緊定シタモノト考ヘルト其半分ハ肱木桁トナリ此肱木桁ノ自由端(單桁ノ支點)ノ撓度ハ卽チ單桁中點ノ撓度ニ等シキガ故ニ其彎曲力率圖(拋物線)ニ就キ

$$F=\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2}, \qquad \xi=\frac{5}{16}l$$

$$\therefore\quad \delta=\frac{F.\xi}{EI}=\frac{\frac{ql^3}{24}\cdot\frac{5}{16}l}{EI}=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(191)\text{式參照}$$

此レト同ジ結果ハ肱木桁ノ撓度ヲ應用シテモ求メラレル卽チFig. 275ニ示ス如ク單桁中點ノ撓度δハ支點反力ガ肱木桁ニ働クトシテノ撓度δ_1ト等布荷重ガ働クトシテノ撓度δ_2トノ代數和ニ等シク且ツδ_1及δ_2ハ次ノ如ク與ヘラレ得ル。

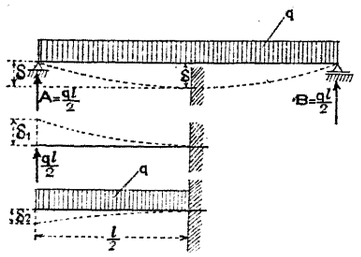


Fig. 275.

$$\delta_1=\frac{\left(\frac{ql}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(182)\text{式參照}$$

$$\delta_2=\frac{\left(\frac{ql}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^3}{8EI} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(187)\text{式參照}$$

$$\therefore\quad \delta=\delta_1-\delta_2=\frac{\frac{ql}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}{EI}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{24}\frac{ql^4}{16EI}=\frac{5}{384}\frac{ql^3}{EI}$$

(6)徑間中央ニ集中荷重ヲ受クル單桁(Fig. 276參照)

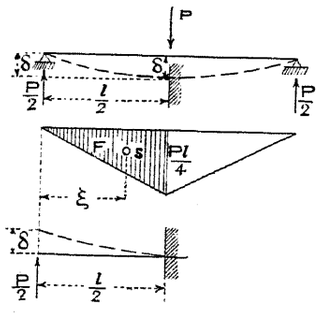


Fig. 276.

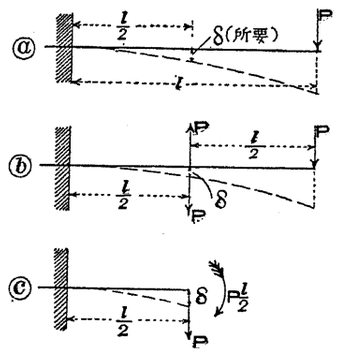


Fig. 277.

徑間中央ニ緊定シタル肱木桁ト考ヘ

$$F=\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2},\qquad \xi=\frac{2}{3}\frac{l}{2}=\frac{l}{3}$$

$$\therefore\quad \delta=\frac{F.\xi}{E.I}=\frac{\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{l}{3}}{EI}=\frac{Pl^3}{48EI} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(198)\text{式參照}$$

或ハ徑間$\frac{l}{2}$ノ肱木桁ガ$\frac{P}{2}$ナル集中荷重ヲ自由端ニ受クルモノト考ヘ

$$\delta=\frac{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

(7) 自由端ニ集中荷重ヲ受クル肱木桁ノ徑間中點ニ於ケル撓度

撓度δニ關シテハFig. 277ⓐハ全クⓒト等シキモノデアル,卽チ徑間中點ニ等シクシテ反對ニ向フ二力Pヲ假定スル事ニ依ツテ(ⓑ圖參照)自由端ニ働クPハ中點ニ働クPト$P\frac{l}{2}$ナル偶力トニ分解代表セラレル,從ツテ

$$\delta=\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI}+\frac{P\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI}=\frac{Pl^3}{24EI}+\frac{Pl^3}{16EI}=\frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EI} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(212)$$

(8) 多數ノ集中荷重ヲ受クル單桁ノ中點ニ於ケル撓度

今假ニ左右對稱ニ二個ノ荷重ヲ受クル場合ヲ考フレバ(Fig. 278 ⓑ及ⓒ)

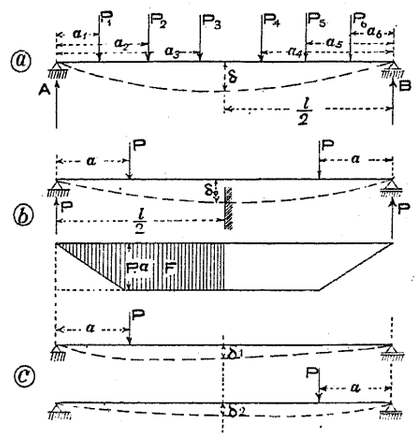


Fig. 278.

$$\delta_0=\frac{F\xi}{EI}=\frac{P.a\frac{l}{2}\frac{l}{4}-P\frac{a^2}{2}\frac{a}{3}}{EI}$$

$$=\frac{Pa}{24EI}(3l^2-4a^2)$$

然ルニ其各々ノ荷重ニヨツテ中點ニ生ズル撓度ヲδ_1及δ_2トスレバ

$$\delta_0=\delta_1+\delta_2$$

且ツ $\delta_1=\delta_2$ ナルガ故ニ

$$\delta_0=2\delta_1=2\delta_2$$

$$\therefore\quad \delta_1=\delta_2=\frac{P.a}{48EI}(3l^2-4a^2)$$

ⓐ圖ノ如ク多クノ荷重アル場合ニハ

P_1ニ對シ $\delta_1=\frac{P_1a_1}{48EI}(3l^2-4a_1^2)$

P_2ニ對シ $\delta_2=\frac{P_2a_2}{48EI}(3l^2-4a_2^2)$

…… ……

$$\therefore\quad \delta=\frac{1}{48EI}\Sigma P.a(3l^2-4a^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(213)$$

(9) 任意ノ集中荷重ヲ受クル單桁

任意荷重ヲ受ケタ單桁ノ任意點ノ撓度ヲ求メルニハ彎曲力率圖ヲ用ヒルガ便デアツテFig. 279 ⓑヲ彈性線,ⓒヲ彎曲力率圖トス,彎曲力率圖ハ$A_2B_2C_2$ナル正面積ト$B_2C_2D_2$ナル負面積トカラ成立ツモノト考フレバA_1點ニ於ケル彈性線ニ引カレタ切線A_1C_1ガB_1點上ニ挾ム縱距B_1C_1ハ次ノ如クニシテ求メラレル。Fig. 265ニ說明シタ如ク AB 桁ノ彎曲力率圖ノB點ニ對スル力率ハA點ニ於

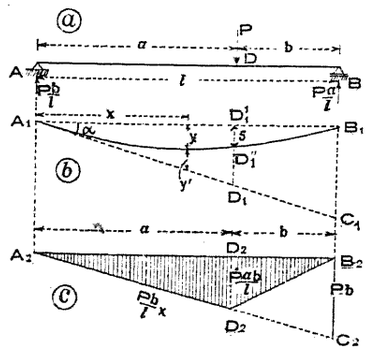


Fig. 279.

ケル彈性線ヘノ切線カラB點ガ垂直ニ何程隔ツテ居ルカ卽チB點ノ撓度ヲ與ヘルモノデアル,此原理ハ單桁ニ於テモ等シク正シイ筈デアルカラFig. 279ニ於テ轡曲力率圖$A_2B_2D_2$ノB點ニ對スル力率ヲ求ムレバ(勿論EIデ割ル事ヲ要ス)コレガ求ムル撓度卽チ縱距B_1C_1デアル。

$$B_1C_1=\frac{1}{EI}\left(A_2B_2C_2\times\frac{1}{3}l-B_2C_2D_2\times\frac{1}{3}b\right)$$

$$=\frac{1}{EI}\left(Pb\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{3}-Pb\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{3}\right)=\frac{Pb}{6EI}(l^2-b^2)$$

從ツテ$\angle B_1A_1C_1\equiv\alpha$ハ次ノ如ク求メラレル

$$\alpha=\frac{B_1C_1}{A_1B_1}=\frac{Pb}{6EIl}(l^2-b^2)$$

次ニ荷重ノ作用點Dニ於ケル撓度ヲ求メンニハ前述シタル方法ニ據ツテ先ヅD_1''點ノA_1C_1線ヨリノ縱距D_1D_1''ヲ求メ然ル後此縱距ヲ$D_1D_1'=\alpha a$カラ引ケバ求ムル$D_1'D_1''$ナルD點ノ撓度ガ發見セラレル筈デアル卽チ

$$D_1D_1''=\frac{1}{EI}\left(A_2D_2'D_2\times\frac{1}{3}a\right)=\frac{1}{EI}\left(Pb\cdot\frac{a}{l}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\right)=\frac{Pa^3b}{6EIl}$$

$$\therefore\quad \delta=D_1'D_1''=D_1D_1'-D_1D_1''=\alpha a-D_1D_1''$$

$$=\frac{Pab}{6EIl}(l^2-b^2)-\frac{Pa^3b}{6EIl}=\frac{Pa^2b^2}{3EIl}$$

左支點ヨリxノ點$(x<a)$ニ於ケル撓度ヲ求ムルニモ前同樣ノ方法ニヨリ

$$y'=\frac{1}{EI}\left(Pb\frac{x}{l}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\right)=\frac{Pbx^3}{6l}$$

$$y=\alpha x-y'=\frac{Pbx}{6EIl}(l^2-b^2)-\frac{Pbx^3}{6EIl}=\frac{Pbx}{6EIl}(l^2-b^2-x^2)$$

最大撓度ノ點ヲ求メンニハ上式ヲyニ就イテ微分シ=0ト置キ

$$-l^2+b^2+3x^2=0$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}=\sqrt{\frac{a^2+2ab}{3}}$$

$a>b$ノ時ニハ$x<a$トナリ上式ガ最大撓度ノ點ヲ與ヘルガ若シ$a<b$ノ時ニハ$x>a$トナリ最大撓度ノ點ハ荷重ノ右側ニアル事ヲ知ル,此時ニハ上式デ求メタxハ正シイ値デハナイ,何トナレバ總テ上述ノ計算ハ荷重ヨリ左側ノミニ就イテ行ツテ居ルカラ求メタ式ハ荷重ノ右側ニ對シテハ有效デ無イカラデアル。

第二十三節

「モール」氏第二平衡多邊形ニ據ル撓度解法

(Solution of Deflection by the Application of the Mohr's Law of the Second Equilibrium Polygon)

桁ノ撓度ハ前二節ニ於テ種々ノ方法デ解ク事ヲ說明シタガ何レモ桁ガ均等斷面ヲ有シ慣性能率ノ不變ナル場合ニ適用シテ便利デアツタ,其慣性能率ノ可變ナル時ハ解析的ニモ出來ルガ玆ニ述ベル圖式的方法ガ一層便利デアル。

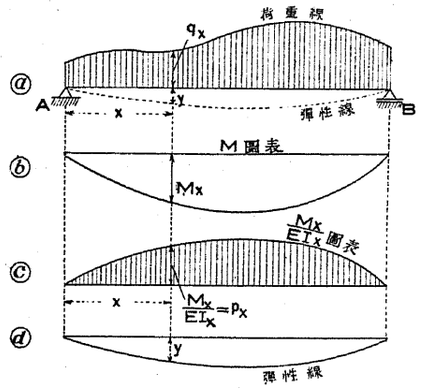


Fig. 280.

AB 桁ガ任意荷重ヲ受クルモノトシ其左支點カラ距離xノ任意點ニ對シ

I_x＝可變慣性能率

q_x＝荷重强度

M_x＝彎曲力率

y＝撓度　トシ

$\frac{M_x}{EI_x}\equiv p_x$ニテ表ス

此p_xヲxノ種々ノ値ニ對シテ縱距ニ採レバ新シキ圖表$\frac{M_x}{EI_x}$圖ヲ得ル。

既ニ第八節(136)式ニ說明シタ如ク荷重ト力率トノ關係ハ

$$\frac{d^2M_x}{dx^2}=-q_x\qquad\cdots\cdots(a)$$

デアリ第二十節(177)式ニ示シタ力率ト彈性線トノ關係ハ

$$EI_x\frac{d^2y}{dx^2}=-M_x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M_x}{EI_x}=-p_x \quad \cdots\cdots(b)$$

然ルニ彎曲力率圖ハ荷重ニ對スル平衡多邊形デアルガ故ニ(a)式ト(b)式トヲ比較シテ其相似關係カラ p_x ヲ荷重ト考ヘテ一ツノ平衡多邊形ヲ作圖スレバ夫レガ撓度 y ヲ示ス曲線トナル筈デアル,從テ先ヅ與ヘラレタ荷重ニ對スル彎曲力率圖ヲ作リ其圖表カラ ⓒ 圖ノ如ク $\frac{M_x}{EI_x}$ ヲ縱距トスル圖表ヲ作ル,コレ卽チ p_x 圖表デアル,此 p_x 圖表ヲ荷重ト考ヘテ更ニ平衡多邊形卽チ力率圖ヲ作レバ夫レガ彈性線デアル,斯ノ如ク平衡多邊形ヲ二度作圖シテ彈性線ヲ得ル法ヲ Mohr 氏第二平衡多邊形ノ法則ト云フ。

若シ桁ガ均等斷面ノ場合ナラバ EI ハ定數デアルカラ M_x ヲ EI デ割ル事ヲ後廻シニシ ⓑ 圖卽 M_x 圖ヲ荷重ト考ヘテ第二ノ平衡多邊形ヲ作圖シ其結果ヲ EI デ割レバヨロシイ。

尙荷重狀態ノ簡單ナ場合ニハ撓度ノ調ベハ計算ニ據ツテ行フガ簡單デアルガ,併シ荷重狀態從ツテ彎曲力率圖ガ非常ニ複雜ナ場合ニハ計算ニ據ル事ガ面倒トナルカラ茲ニ說明シタ圖式法ヲ用フルガ便デアル,卽チ Fig. 281 ニ示ス如ク M_x 圖或ハ $\frac{M_x}{EI_x}$ 圖ガ不規則ナレバコレヲ幾ツカニ分チ各部分ガ矩形又ハ梯形ト見做シ得ル樣ニシテ其各部分ノ面積ヲ其重心ニ働ク力ト見テ平衡多邊形ヲ書キ此多邊形ニ內接スル曲線ヲ引ケバコレガ求ムル彈性線トナル,次ニ此解法ヲ鈑桁ノ如ク異ナル I ヲ有スルモノニ適用シタル例ヲ示サウ。

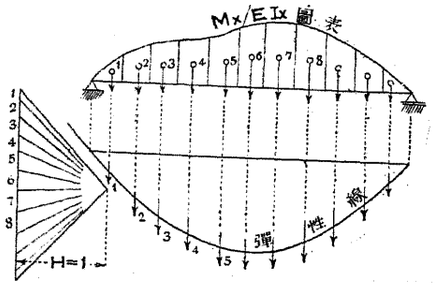


Fig. 281.

Fig. 282 突緣面積ノ變化スル鈑桁ニ就イテ其異ナリタル慣性能率ヲ A_1B_1 線ノ上側ニ記入シ更ニ其彎曲力率圖ヲ A_1B_1 線ノ下側ニ記入シ A_1CB_1 トス此二ツノ圖形カラ次ノ如キ作圖ヲ行ツテ A_1DB_1 ナル鋸齒狀ノ $\frac{M_x}{I_x}$ 圖表ヲ得更ニ此 $\frac{M_x}{I_x}$ ヲ表ハス換算荷重圖 (Reduced load diagram) ヲ細分シテ其面積ヲ荷重ト考ヘテ第二平衡多邊形ヲ作圖スレバ玆ニ彈性線ニ相當スル曲線ヲ得ルノデアル

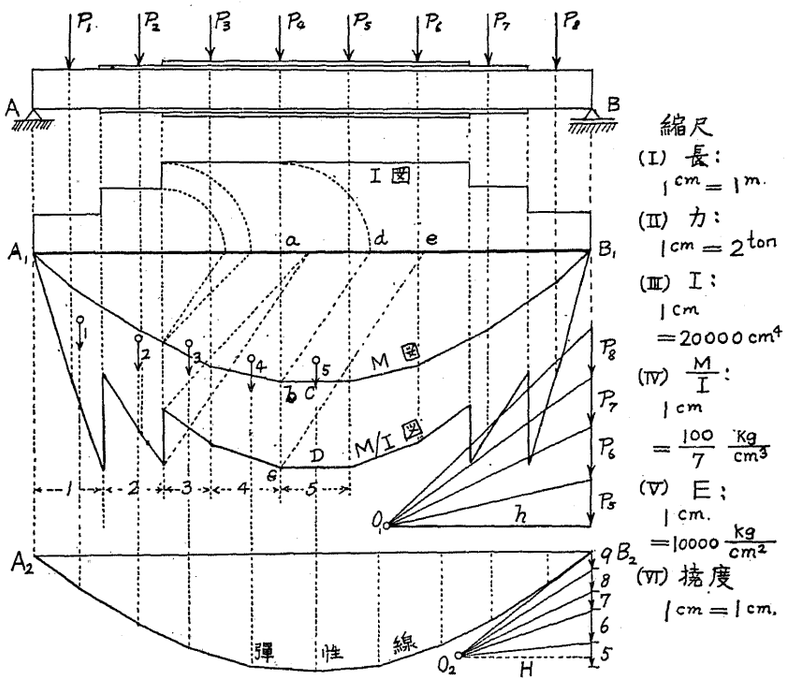


Fig. 282.

Fig. 282 ニ於テ任意點ノ換算荷重圖縱距 ac テ求メンニハ先ヅ水平線 A_1B_1 上ニ任意長 $ae=m$ ヲ (III) 縮尺ニテ置キ a ヨリ $ad=I_3$ テ A_1B_1 線ノ上側ニ記入セル I_x 圖ヨリ移ス bd テ結ビコレニ平行ニ ec テ引キ ab テ c ニ切レバ ac ハ (IV) 縮尺ニテ $\frac{M_x}{I_x}$ テ表ハス,作圖ニ於テ今 $h=3cm$ (圖上實長)$=6000kg$, $m=2{\cdot}1cm$ (實長)$=42000cm^3$ ト採レバ

$$ac=\frac{ae}{ad}\,ab=\frac{m}{I_x}\,\frac{M_x}{h}=\frac{42000}{I_x}\,\frac{M_x}{6000}=7\,\frac{M_x}{I_x}$$

$$\therefore \quad \frac{M_x}{I_x} = \frac{ac}{7} \ (ac\ ハ長サノ縮尺(I)ニテ測ル)$$

$$= \frac{100}{7} ac \ (ac\ ハ圖上實長テ\ cm\ 單位ニテ測ル).$$

卽チ ac テ $1cm = \frac{100}{7} \frac{kg\text{-}cm}{cm^4} = \frac{100}{7} \frac{kg}{cm^3}$ ナル(IV)縮尺テ用ヒテ測レバ $\frac{M_x}{I_x}$ テ得ル。

次ニ換算荷重圖面積テ求メテコレテ力ト考ヘ力線テ排列スルノデアルガ其縮尺トシテハ(V)縮尺テ用ヒル,卽チ力線ニ於ケル $1cm$ ガ換算荷重圖面積 $7cm^2$ (圖上實面積)テ表ハスモノトスレバ力線ニ於ケル $1cm$ ハ

$$1cm = 7 \times \frac{100}{7} \frac{kg}{cm^3} \times 100cm = 10\,000 \frac{kg}{cm^2}$$

卽チ(V)縮尺ニ外ナラナイ。

茲ニ於テ極距Hテ採リコレニ對スル平衡多邊形テ作圖スレバ其縱距ハ此桁ノ彈性線テ示スモノトナル,其縮尺ノ關係テ調ベンニ今換算荷重 $\frac{M_x}{I_x}$ テ荷重ト考ヘタ時ノ任意點ノ彎曲力率テMトセバ此點ノ撓度 δ ハ明カニ

$$\delta = \int \frac{M_x x}{EI_x} dx = \frac{M}{E}$$

デアル,又作圖ニ於テ採ツタ極距テHトシコレニ相當シテ得タ平衡多邊形ノ縱距テ y トセバ上揭彎曲力率ハ

$$M = H.y$$

從ツテ此値テ挿入シ撓度 δ ハ

$$\delta = \frac{M}{E} = \frac{H.y}{E}$$

今若シ極距Hテ任意長ニ採ル代リニ

$$H = nE$$

トナル樣ニ採ルモノトスレバ

$$\delta = \frac{nEy}{E} = ny$$

テ得ル, Fig. 282 ノ作圖ニ於テ極距 $H = 2cm$ (實長)$= 20{,}000\ kg/cm^2$ ト採ルモノトスレバ $E = 2{,}000{,}000\ kg/cm^2$ トシテ

$$n = \frac{H}{E} = \frac{20{,}000}{2{,}000{,}000} = \frac{1}{100}$$

テ得ル,故ニ

$$\delta = ny = \frac{1}{100} y \ (y\ テ\ (I)\ 縮尺ニテ測ル)$$

$$= \frac{100}{100} y = y \ (y\ テ圖上實長テ\ cm\ 單位ニテ測ル)$$

卽チ y テ $1cm = 1cm$ ナル(VI)縮尺テ以テ測レバ直接彈性線縱距テ得ルノデアル,

今假ニ Fig. 282 ニ於テ圖上最大縱距 $y_{max} = 1.7cm$ テ得タモノトスレバ最大撓度ハ

$$\delta_{max} = y_{max} = 1.7cm$$

トナル。

以上ハ圖式的ニ用ヒラレタ「モール」氏第二平衡多邊形ニ據ル解法デアルガ此原理ヲ解析的ニ應用スル時ハ單桁ノ撓度解法ニ對スル最モ簡單ナル解析的方法ヲ與ヘルモノデアル,卽チ與ヘラレタ荷重ニ對スル彎曲力率圖ヲ作圖シ其縱距ニ等シキ强度ノ連續荷重ヲ受クル桁トシテノ支點反力ヲ求ムレバ或點ノ撓度ハ其斷面ヨリ左又ハ右ニアル此反力ト荷重トノ此點ニ對スル靜力率又ハ彎曲力率ヲ求ムル事ニヨツテ容易ニ與ヘラレルノデアル,次ニ一二ノ計算例ヲ示ス。

(I) 集中荷重ヲ受クル單桁

單桁ハ均等斷面テ有スルモノトス,先ヅ Fig. 283 ニ示ス如キ彎曲力率圖テ作圖シ此M圖表テ荷重圖 (Load diagram) ト考ヘテ支點反力A′及B′並ビニ任意點 x (A′ヨリ)ニ於ケル彎曲力率M′テ計算スル事次ノ如シ。

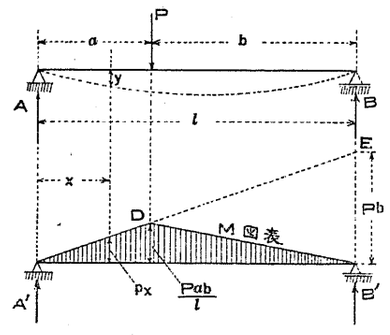


Fig. 283.

右支點B′ニ對スル靜力率テ求メ

$A'l$ = 荷重面積 A′DB′ ノ靜力率

= 面積 A′EB′ ノ靜力率 — 同 DEB′ ノ靜力率。

$$= Pb \frac{l}{2} \frac{l}{3} - Pb \frac{b}{2} \frac{b}{3}$$

$$\therefore \quad A' = \frac{1}{l} Pb \left(\frac{l^2}{6} - \frac{b^2}{6} \right) = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}$$

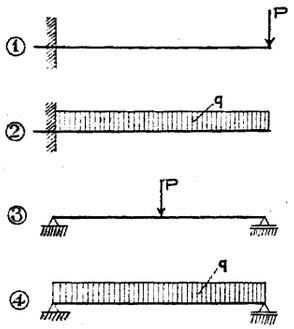
$$B' = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6l}$$

斷面 x ニ於ケル荷重强度ハ $p_x = \frac{Pb}{l} x$ トナリ

$$M_x' = A'x - p_x \frac{x}{2} \frac{x}{3} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} x - \frac{Pb}{l} x \frac{x^2}{6} = EIy$$

且ツ $l^2 - b^2 = (l-b)(l+b) = a(l+b)$ ナルガ故ニ

$$EIy=\frac{Pab(l+b)}{6l}x-\frac{Pbx^3}{6l}\cdots\cdots\cdots



① $\delta=\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}$ 或ハ $\delta=\frac{2}{3}\frac{\sigma l^2}{Eh}$

② $\delta=\frac{1}{8}\frac{ql^4}{EI}$ 或ハ $\delta=\frac{1}{2}\frac{\sigma l^2}{Eh}$

③ $\delta=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI}$ 或ハ $\delta=\frac{1}{6}\frac{\sigma l^2}{Eh}$

④ $\delta=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$　　$\delta=\frac{5}{24}\frac{\sigma l^2}{Eh}$

Fig. 285.

第二十五節

剛度ニ對シ桁高ト徑間トノ割合

材料ノ許容應力ヲ k トスレバ極限ニ於テ $\sigma=k$ ナル關係ヲ得ルガ故ニ此場合前節ノ撓度ノ一般式ハ次ノ如クナル。

$$\delta=n'\frac{kl^2}{Eh}$$

$$\frac{l}{\delta}=\frac{1}{n'}\frac{Eh}{kl}$$

$$\frac{h}{l}=\left(n'\frac{k}{E}\right)\frac{l}{\delta}\quad\cdots\cdots(216)$$

此式ノ左邊ハ桁高ノ徑間ニ對スル割合デアリ右邊ノ $\frac{l}{\delta}$ ハ前節ニ述ベタ剛度ヲ表ハス,而シテ $n'\frac{k}{E}$ ハ與ヘラレタ荷重狀態及材料ニ對シテ一定セル値デアル,然ル時ハ (216) 式ハ最大彎曲力率ノ斷面ニ於ケル桁高ノ徑間ニ對スル割合ハ其桁ノ剛度ニ比例スルモノデアル事ヲ示ス,即チ剛度ヲ多クスルニハ是非共桁高ヲ增サネバナラヌ事ヲ意味スル,之ヲ例題ニ就イテ說明シヤウ。

例題第二十二. 均等對稱斷面ヲ有スル鍊鐵桁ガ等布荷重ヲ受ケテ作用剛度ヲ 1000 タラシメンニハ其桁高ト徑間トノ割合ヲ何程ニスベキカ。

答　一般式 $\frac{h}{l}=\left(n'\frac{k}{E}\right)\frac{l}{\delta}$ ニ於テ $k=10{,}000\ lbs/in^2$, $E=28{,}500{,}000\ lbs/in^2$, $n'=\frac{5}{24}$,

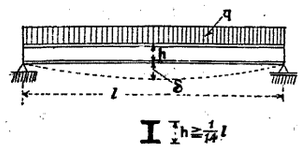


Fig. 286.

$\frac{l}{\delta}=1000$

ハ與ヘラレタモノデアル故ニ之ヲ挿入シ

$$\frac{h}{l}=\frac{5}{24}\cdot\frac{10\,000}{28\,500\,000}\cdot1000=\frac{1}{13.68}=\sim\frac{1}{14}$$

即チ鍊鐵桁ニ 1000 ノ剛度ヲ與ヘンニハ其桁高ハ徑間ノ $\frac{1}{14}$ 以上ナラシメネバナラヌ。

例題第二十三. 中心荷重ヲ受クル均等斷面ノ鋼桁ニ於ケル剛度ヲ 1000 ナラシムル時ノ $\frac{h}{l}$ ヲ求ム。

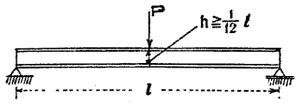


Fig. 287.

答　$n'=\frac{1}{6}$, $k=15{,}000\ lbs/in^2$, $E=30\,000\,000\ lbs/in^2$,

$\frac{l}{\delta}=1000$ ヲ用ヒ

$$\frac{h}{l}=\frac{1}{6}\cdot\frac{15\,000}{30\,000\,000}\cdot1000=\frac{1}{12}$$

例題第二十四. 欅桁ガ等布荷重ヲ受ケタ場合剛度ヲ 360 トシテ桁高ノ徑間ニ對スル比ヲ求ム。

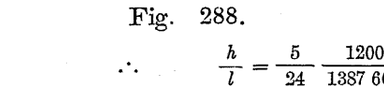


Fig. 288.

答　$n'=\frac{5}{24}$, $k=1200\ lbs/in^2$, $E=1387\,600 lbs/in^2$,

$\frac{l}{\delta}=360$

$$\therefore\quad\frac{h}{l}=\frac{5}{24}\frac{1200}{1387\,600}360=\frac{1}{15.4}=\sim\frac{1}{16}$$

第二十六節

桁ノ自重ニ對シ斷面ヲ增加スル法

(To make Allowance for the Weight of Beam)

桁ノ徑間ガ增セバ其自重ハ其桁ノ負フ外荷重ニ比シテ輕視スル事ガ出來ナイ樣ニナリ桁ノ寸法ヲ決定スルニ當ツテ必ズ其桁ノ自重ヲ考ヘニ採ラネバナラヌ,即チ始メニ桁ノ寸法及其重サヲ假定シテ此自重ト外荷重トノ二ツカラ彎曲力率及剪力ヲ計算シテ桁ノ寸法ヲ求メコレガ假定シタモノト比較シテ誤差ナケレバ

ヨシ然ラザレバ假定ヲ改メテ計算ヲ遣リ直セバヨイノデアル,今若シ始メニ自重ヲ考ヘズニ單ニ外荷重ノミデ彎曲力率ヲ出シ其斷面ヲ決定シタ後其斷面ヲ校正シテ自重ヲ考ヘニ入レタ場合ニ換算セントスルニハ如何ニセバヨイカト云フニ此方法トシテ普通出來上ツタ桁ノ高ヲ其儘トシ幅ヲ增ス事ニヨツテスルガ便デアル,コレ斷面係數ノ式ニハ桁高 h ハ自乘デ入ツテ居ルニ反シ幅 b ハ一乘デ入ツテ居ルカラデアル。

今　P' ＝外荷重

b' ＝此外荷重ノミヲ負フトシテ計畫シタ桁幅

G' ＝幅 b' ナル桁ノ自重

P ＝總荷重(桁ノ自重ヲ考ヘニ入レタモノ)

b ＝總荷重 P ヲ負フトシテ計畫セラレタル桁幅

G ＝幅 b ナル桁ノ自重

トスレバ

$$P-G=P'$$

$$\frac{b}{b'}=\frac{G}{G'}=\frac{P}{P'}=\frac{P-G}{P'-G'}=\frac{P'}{P'-G'}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} b &= \frac{P'b'}{P'-G'} \text{ 求メタル桁幅}\\ G &= \frac{P'G'}{P'-G'} \text{ 同ジク桁ノ自重}\\ P &= \frac{P'^2}{P'-G'} \text{ 總荷重}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(217)$$

始メ與ヘラレタル荷重 P' ヲ用ヒテ必要ナル幅 b' ヲ計算シ其自重 G' ヲ求メテ置ケバ此値カラ(217)式ヲ用ヒテ自重ヲ考慮ニ加ヘタル完全ニ安全ナル桁幅 b ガ求メラレル。

第二十七節　矩形桁ノ有利ナル斷面

總ジテ桁ノ計畫ヲ爲スニ當ツテ強度ガ充分アル樣ニシナケレバナラヌ事ハ勿論デアルガ更ニ剛度ト云フ事モ考ヘテ其撓度ガ或限度ヲ超過シナイ樣ニ計畫セネバナラヌ,今茲ニ有利ナル矩形桁斷面ヲ研究スルニモ此強度及剛度ノ二方面ニ就イテ之ヲ行フ。

(I) 圓形斷面ノ丸太カラ最大強度ヲ有スル矩形桁ヲ切取ル法.

今　d ＝丸太ノ直徑

b ＝求メタル矩形桁ノ幅

h ＝同ジク桁高

トスレバ其斷面係數ハ

$$W=\frac{1}{6}bh^2$$

デアツテ此 W ガ最大デアレバ其桁ハ最大強度トナル筈デアル,而シテ d ト b 及 h トノ關係ハ

$$h^2=d^2-b^2$$

デ表ハサレルガ故ニ

$$W=\frac{b}{6}(d^2-b^2)$$

此式ヲ幅 b ニ對シテ微分シテ零ニ置ケバ所要ノ關係ガ求メラレ

$$\frac{dW}{db}=\frac{1}{6}(d^2-3b^2)=0$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{\frac{1}{3}}d,\quad h=\sqrt{\frac{2}{3}}d$$

$$h:b=\sqrt{2}:1.$$

此關係ガ求ムル最大強度ヲ有スル矩形斷面トシテノ條件デア

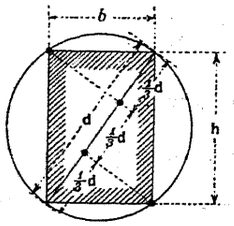


Fig. 289.

ル,此條件ヲ滿足スル如ク丸太カラ矩形斷面ヲ切取ルニハ先ヅFig 289ニ示ス如ク直徑ヲ三等分シ其點デ直徑ニ垂線ヲ立テテ圓周ト交ル點ヲ求ムレバコレガ所要ノ斷面ヲ表ハス矩形ノ隅角デアル,此場合ノ幾何學的關係ヲ調ブレバ容易ニ $b^2=\frac{1}{3}d^2$ ヲ得ルガ故ニ所要ノモノデアル事ヲ知ル。

(II) 丸太カラ最大剛度ヲ有スル矩形桁ヲ切取ル法。

今　　d ＝丸太ノ重量

　　b ＝最大剛度ヲ有スル桁ノ幅

　　h ＝其桁高

トスレバ撓度ノ一般式ハ

$$\delta=n''\frac{Pl^3}{Ebh^3}$$

ト置キ得,然ルニ撓度ノ最小ナル如キ桁ガ剛度ノ最大ノモノデアル故ニ分母ニアル bh^3 ガ最大デアル場合ニ撓度 δ ハ最小トナリ求ムル場合ニ相當スル,或ハ書キ換ヘテ

$$bh^3=\sqrt{d^2-h^2}\,h^3$$

ガ最大ナル事ヲ要スル,此式ヲ h ニ對シ微分シテ零ニ置ケバ

$$3h^2\sqrt{d^2-h^2}-h^3\frac{h}{\sqrt{d^2-h^2}}=0$$

$$3h^2(d^2-h^2)-h^4=0$$

$$4h^2-3d^2=0$$

$$h=\sqrt{\frac{3}{4}}\,d$$

此結果ヨリ見テ所要ノ矩形桁ヲ切取ル爲メニハEig. 290ニ示ス

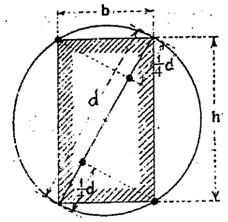


Fig. 290.

如ク直徑ヲ四等分シ其四等分點カラ直徑ニ垂線ヲ立テテ其圓周トノ交點ヲ求ムレバコレガ求ムル矩形斷面ノ隅角ヲ與ヘルモノデアル,此場合ノ幾何學的關係ヲ調査スレバ容易ニ $h^2=\frac{3}{4}d^2$ ヲ得ル。

第二十八節　等强桁 (Beam of Uniform Strength)

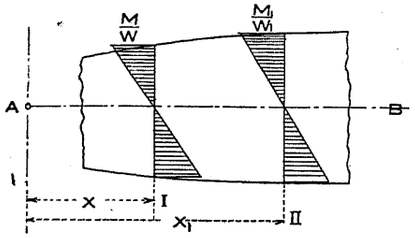


Fig. 291.

Fig. 291ニ示ス可變斷面ヲ有スル桁ABガ一定ノ荷重ニ對シテ其二ツノ異ナル斷面ニ於テ彎曲力率M及M_1ヲ受クルモノトシ此二ツノ斷面ニ於ケル斷面係數ヲ夫々W及W_1トスレバ此等ノ斷面ニ於ケル最大縁維應力ハ

斷面Ⅰニ於テ　$\sigma=\frac{M}{W}$

斷面Ⅱニ於テ　$\sigma_1=\frac{M_1}{W_1}$

今若シ此桁ガ其何レノ斷面ニ於テモ最大縁維應力ガ相等シイ樣ナ寸法ヲ有スルモノトスレバ卽チ常ニ $\sigma=\sigma_1$ ナル如キ場合ニハ此桁ヲ等强桁 (Beam of uniform strength or resistance) ト云フ。

$\sigma=\sigma_1$ ナル條件ハ書換ヘテ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{M}{W}=\frac{M_1}{W_1}\\&M:M_1=W:W_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(218)$$

卽チ等强桁ニ於テハ任意ノ二ツノ斷面ノ彎曲力率ノ比ガ其相當

斷面係數ノ比ニ等シキ事ヲ知ル,茲ニ例ヲ擧ゲテ之ヲ說明シヤウ。

(I) 自由端ニ荷重Pヲ負フ等強肱木桁。

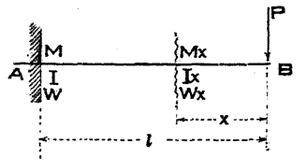


Fig. 292.

自由端ヨリxノ距離ノ一點ニ於ケル彎曲力率,慣性能率及斷面係數ヲ夫々M_x,I_x,W_xトシ緊定端ニ於ケルモノヲ夫々M,I,Wトスレバ

$M=P.l$,　$M_x=P.x$

故ニ(218)式ヨリコレガ等強桁デアル爲メニハ

$$W:W_x=M:M_x=Pl:Px=l:x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

(A) 矩形斷面ノ肱木桁。

b及h＝緊定端ノ桁幅及高

b_x及h_x＝任意點ノ桁幅及高

然ル時ハ明カニ

$$W=\frac{1}{6}bh^2,\quad W_x=\frac{1}{6}b_xh_x^2$$

(a)式ヨリ

$$\frac{bh^2}{6}:\frac{b_xh_x^2}{6}=l:x$$

$$\therefore\quad b_xh_x^2=bh^2\frac{x}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

此b_x,h_xナル二ツノ可變數ヲ決定スル爲メニハ更ニ他ノ一ツノ條件ガ必要デアル。

(1) 桁高ガ不變ナル場合,此場合ニハ$h_x=h$デアルカラコレヲ(b)式ニ挿入シ

$$b_x=b\frac{x}{l}$$

此關係ハFig. 293ニ示サルル如ク幅ガxノ一次式トナリ直線デ與ヘラルルモノデアル。

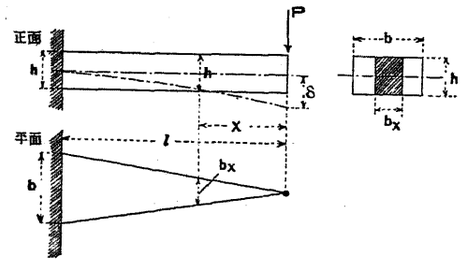


Fig. 293.

此桁ノ撓度ヲ計算センニハ(201)式ニ

$M_x=P.x$　$I=\frac{bh^3}{12}$

$$I_x=\frac{b_xh_x^3}{12}=b\frac{x}{l}\frac{h^3}{12}$$

$$=\frac{bh^3}{12}\frac{x}{l}=I\frac{x}{l}$$

ヲ挿入シ

$$\delta=\int_o^l\frac{M_xx}{EI_x}dx=\int_o^l\frac{Px.x}{EI\frac{x}{l}}dx=\frac{Pl}{EI}\int_o^l x\,dx=\frac{Pl^3}{2EI}$$

(2) 桁幅ガ不變ナル場合。　(b)式ニ$b_x=b$ト置ケバ

$$h_x^2=h^2\frac{x}{l}$$

此關係ハ正面圖(即チ桁高ノ變化)ガ拋物線トナル事ヲ示ス(Fig. 294參照)。

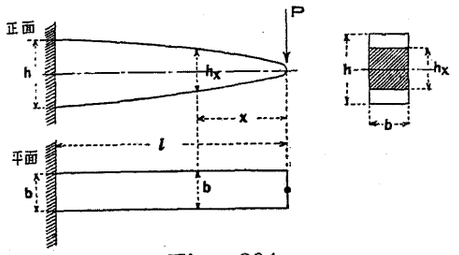


Fig. 294.

此場合ノ撓度ヲ求メンニハ

$$I_x=\frac{b_xh_x^3}{12}=\frac{bh^3}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}=I\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\quad\delta=\int_o^l\frac{Px.x}{EI\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{Pl^{\frac{3}{2}}}{EI}\int_o^l x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EI}$$

(3) 斷面形相似ナル場合。

$$b:h=b_x:h^x\qquad b_x=h_x\frac{b}{h}$$

ヲ(b)式ニ挿入セバ

$$b_x.h_x^2=\frac{b}{h}h_x^3=bh^2\frac{x}{l}$$

$$\therefore\quad h_x=h\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

同樣ニ　$b_x=b\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$

故ニ此場合ノ桁ハ軸ニ沿フ垂直及水平斷面ノ何レモ三次拋物線デアル事ヲ知ル(Fig. 295參照)。

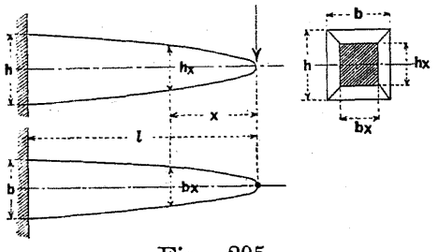


Fig. 295.

此場合ノ撓度ハ

$$I_x=\frac{b_xh_x^3}{12}=\frac{bh^3}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}}=I\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\delta=\int_o^l\frac{Px.x}{EI\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}}}dx=\frac{Pl^{\frac{4}{3}}}{EI}\int_o^l x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$=\frac{3}{5}\frac{Pl^3}{EI}$$

(B) 圓形斷面ノ肱木桁。

今　r＝緊定端ノ圓形斷面半徑

r_x＝任意點ノ圓形斷面半徑

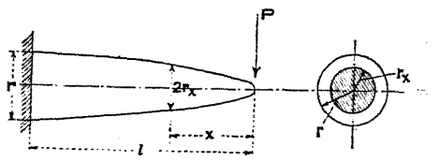


Fig. 296.

トスレバ

$$W=\frac{\pi r^3}{4}\qquad W_x=\frac{\pi r_x^3}{4}$$

故ニ(a)式ハ

$$\frac{\pi r^3}{4}:\frac{\pi r_x^3}{4}=l:x$$

$$r^3:r_x^3=l:x$$

即チ前揭相似矩形斷面ニ於ケル如ク軸ニ沿フテノ斷面形ハ三次拋物線トナル(Fig. 296參照)。

更ニ

$$I_x=\frac{\pi r_x^4}{4}=\frac{\pi r^4}{4}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}}=I\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\delta=\int_o^l\frac{P.x.x}{EI\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}}}dx=\frac{Pl^{\frac{4}{3}}}{EI}\int_o^l x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}\frac{Pl^3}{EI}$$

(C) 近似斷面 (Approximate profile)

以上等強桁ヲ決定スル一例ヲ示シタノデアルガ得タ結果ハ何レモ理論斷面デアッテ此儘デハ實際ニ應用スルコトガ出來ナイ,即チ尖端ニ於ケル幅又ハ厚ガ無限小デアル爲メニ荷重ヲ受ケルニ充分ナ强度ヲ有セナイ,即チ實際ニハコレヲ參考トシ充分ノ强度アル近似斷面ヲ決定セネバナラヌ,尤モコレハ理論斷面ニ最モ近クシテ材料ノ浪費ガ最小ナル如キモノデナケレバナラヌノデアッテ如何ニシテコレヲ決定スルカヲ例ニヨッテ說明シヤウ。

(A)(2)ニ作ッタ桁幅不變ナル等强矩形肱木桁ニ對スル近似斷面ヲ求メンニ

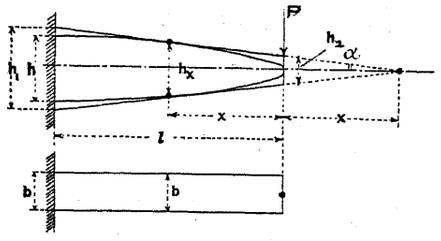


Fig. 297.

Fig. 297ニ示ス如ク緊定端ノ桁高h_1,自由端ノ桁高h_2ヲ有スル如キ桁タラシメルモノトセバ次ノ二條件ヲ滿足セシムル事ガ必要デアル。

(1) 此近似形ノ何レノ斷面ニ於ケル應力モ先キニ求メタ理論斷面ノ場合ヨリモ大ナラザル事。

(2) 材料ノ浪費ガ最少デアル事。

此前者ハ近似斷面ガ理論斷面ニ任意點ニ於テ接觸セネバナラヌ事ヲ要求シ後者ハ此接點ノ位置ヲ決定スルニ役立ツモノデアル,此場合ニ桁幅ハ一定デアルカラ桁ノ容積ハ次ノ如ク表ハサレル。

$$V=\frac{1}{2}(h_1+h_2)b.l$$

理論斷面ハ拋物線デアル故ニ

$$h_x^2=h^2\frac{x}{l}\text{ 或ハ}\qquad h_x=h\sqrt{\frac{x}{l}}$$

此曲線ニ接スル爲メニハ近似形上面ノ傾斜ハ

$$\frac{d\left(\frac{h_x}{2}\right)}{dx}=\tan\alpha=\frac{\frac{h_x}{2}}{2x}=\frac{h_x}{4x}=\frac{\frac{h_2}{2}}{x}=\frac{\frac{h_1}{2}}{l+x}$$

$$\therefore\qquad \frac{h_2}{2}=\frac{h_x}{4x}x=\frac{h_x}{4}$$

及ビ

$$\frac{h_1}{2}=\frac{h_x}{4x}(l+x)$$

$$\therefore\qquad \frac{h_1+h_2}{2}=\frac{h_x}{4x}(l+2x)=\frac{h}{4x}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}(l+2x)$$

$$\therefore\qquad V=\frac{h_1+h_2}{2}bl=\frac{h}{4x}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}(l+2x)b.l=\frac{hb\sqrt{l}}{2}\cdot\frac{l+2x}{\sqrt{x}}$$

此容積Vガ最小デアル爲メニハ此最後ノ項ガ最小デアル事ヲ要スルガ故ニコレヲ微分シテ=0ト置キ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{l+2x}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\sqrt{x}.2-(l+2x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=0$$

$$2\sqrt{x}=\frac{l+2x}{2\sqrt{x}}\qquad 4x=l+2x$$

$$\therefore\qquad x=\frac{l}{2}$$

故ニ近似斷面ガ理論斷面ニ桁ノ中點ニ於テ接線トナレバ容積最小ノ條件ヲ滿足スル,從ッテ斯ク求メラレタ近似斷面ニ於ケル最危險斷面ハ其中點ニアルヲ見ル,此求メタル桁ノ容積ハ

$$h_x=h\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{h}{2}\sqrt{2}$$

$$h_2=\frac{h_x}{2}=\frac{h}{4}\sqrt{2},\quad h_1=\frac{h_x}{l}\left(l+\frac{l}{2}\right)=\frac{3}{2}h_x=\frac{3}{4}h\sqrt{2}$$

$$\therefore\qquad V=\frac{1}{2}(h_1+h_2)bl=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,h.bl=0.707\,h.b.l$$

即チ均等斷面ヲ有スル場合(此場合ノ容積$h.b.l$)ニ比シテ其容積約71%ナル事ヲ知ルノデアル。

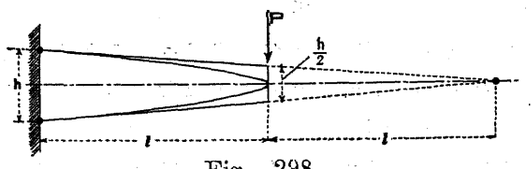


Fig. 298.

本題ニ示シタ近似斷面解法ノ他ノ一法トシテFig. 298ニ示ス如ク危險斷面ヲ緊定端ニ置ク場合ガアル,即チ近似桁ト理

論桁トノ接點ヲ緊定端ニ置ケバ

$$h_1=h,\quad h_2=\frac{h}{2}$$

$$V=\frac{3}{4}hbl=0.75\,hbl$$

即チ材料ノ浪費ハ前者ヨリ幾分大ナルヲ見ルモ尙h_1ノ小ナルヲ利用シテ其取付ノ構造其他ヨリコレヲ擇ブ事モ少クナイ。

(II) 鈑桁 (Plate girder)。

普通廣ク用ヒラルル鈑桁モ矢張リ近似等強桁ノ一種デアル,即チ桁高及桁幅ヲ一定ニシテ斷面積ノ變化ハ突緣(Flange)ノ面積ヲ變ジテ行フノデアル,即チ先ヅ與ヘラレタル荷重ニ對シテ桁上數多ノ點ニ就キテ其最大彎曲力率ヲ求メ其力率ニ適當セル突緣ノ面積ヲ決定スレバ桁ノ何レノ斷面ニ於テモ應力ヲ均等ナラシメル事ヲ得テ材料ノ節約ヲ爲シ得ルノデアル,彎曲力率ノ計算及突緣面積ノ決定方法ハ既ニ第十九節ニ於テ之ヲ說明シタノデアツテ(173)及(174)式ニ示ス如ク

$$F=\frac{M'}{\sigma h}=\frac{8M-6th^2}{8\sigma h}$$

或ハ簡單ニ

$$F=\frac{M}{\sigma h}$$

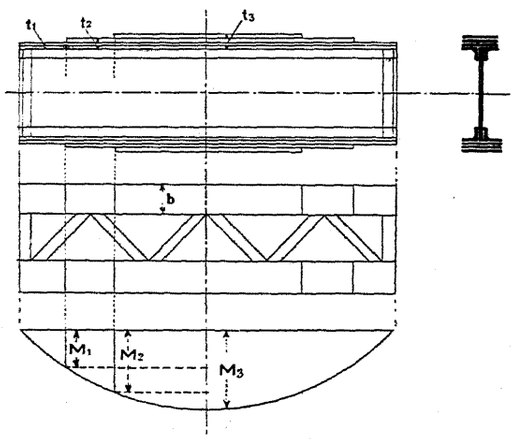


Fig. 299.

ニヨリ必要ナル突緣面積ヲ算定シ桁ノ各點ニ於ケル彎曲力率$M_1, M_2, \cdots\cdots$ニ相當スル $F_1, F_2, \cdots\cdots$ヲ

$F_1=b.t_1$ 鈑一枚

$F_2=b.t_2$ 鈑二枚

等ノ如クニシテ合成セシメルノデアル(Fig.299參照)。

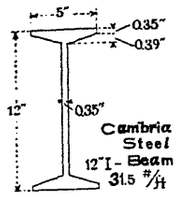
問　題　集　第　七

(1) 工字形桁ニ於ケル最大應剪力ハ其腹材 (Web) 厚ガ全桁高ニ存スルモノトシテ平均强度ヲ求メ之ニ代フル事アリ,圖示斷面ニ就キテ此計算法ト嚴密ナル計算法トヲ比較セヨ。答　0.238 Q, 0.275 Q.

(2) 梁ノ或斷面ニ於ケル一點ノ應力ガ此斷面ニ直角ナル應張力 4 *tons*/□″ ヲ有シ且ツ此面ニ沿ヘル應剪力 2 *tons*/□″ ヲ有ス,此點ニ於ケル主應力及主面ヲ求ム。

答　應張力 4.828 *t*/□″(斷面ニ 22°30′ ヲナス平面ニテ)

應壓力 0.828 *t*/□″(斷面ニ 67°30′ ヲナス平面ニテ)



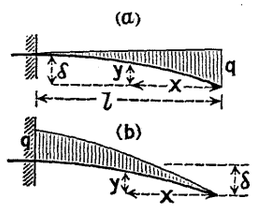
(3) 鈑桁アリ,徑間 64 *ft.*, 桁高 8 *ft.* ニシテ 2*t*/*ft* ノ等布荷重ヲ受ク,其上下突緣(Flange)ノ斷面積ハ相等シクシテ各腹鈑ノ夫レノ半バニ等シトスル時許容應力ヲ 3*t*/□″トシテ徑間中央ニ於ケル斷面積ヲ求ム,更ニ全徑間同一斷面ト假定シテ中央撓度 $\frac{3''}{8}$ ナル時ノ E 及中央點ノ曲率半徑ヲ求ム。答　136□″, 10260 *t*/□″, 16030 *ft.*

(4) 彈性線ノ變曲點ト彎曲力率零ノ點トハ一致スル事ヲ證セヨ。

(5) 任意桁ニ於テ彎曲力率ガ不變ナル部分ノ彈性線又ハ慣性能率ガ彎曲力率ニ正比例スル部分ノ彈性線ハ圓弧ナル事ヲ證明セヨ。

(6) 徑 10 *ft.* ノ煙突ヲ鋼鈑ニテ作ル場合其最大應力ガ 40,000 #/□″ ヲ超過セザル爲メノ最大鋼鈑厚ヲ求ム (E=30,000,000 #/□″)　答　0.16″

(7) 圖示ノ三角荷重ヲ受クル肱木桁ノ彈性線方程式及自由端ノ撓度傾斜ヲ求ム。

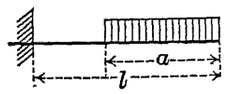


答　(a) $y=\frac{ql^4}{8EI}\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{3}\frac{x^4}{l^4}+\frac{1}{15}\frac{x^5}{l^5}\right)$

$$\delta=\frac{11}{120}\frac{ql^4}{EI},\quad \alpha=\frac{1}{8}\frac{ql^3}{EI}$$

(b) $y=\frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$

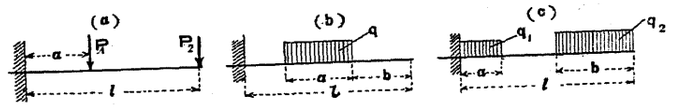
$$\delta=\frac{1}{30}\frac{ql^4}{EI},\quad \alpha=\frac{1}{24}\frac{pl^3}{EI}$$



(8) 圖示ノ部分等布荷重ヲ受クル肱木桁ノ自由端ノ撓度及傾斜ヲ求ム。

答　$\delta=\frac{qa^4}{24EI}\left(1-6\frac{l^2}{a^2}+8\frac{l^3}{a^3}\right),\quad \alpha=\frac{qa^3}{6EI}\left(1-3\frac{l}{a}+3\frac{l^2}{a^2}\right)$

(9) 以上求メタル結果ヲ應用シ次ノ荷重ニ對シ自由端ノ撓度ヲ求ム。

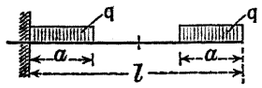


答　(a) $\frac{1}{6EI}\left[P_1a^2(3l-a)+2P_2l^3\right]$

(b) $\frac{qa}{24EI}(a^3+4a^2b-6al^2+6ab^2+8l^3-12bl^2+8b^3)$

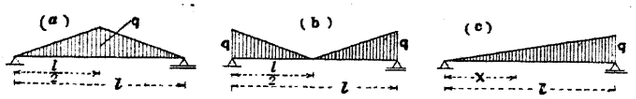
(c) $\frac{1}{24EI}[q_1a^3(4l-a)+q_2b(b^3-6b^2+8l^3)]$

(10) 圖示ノ荷重ヲ受ケタル肱木桁中點ニ於ケル撓度ヲ求ム。



答 $\frac{qa}{48EI}(5l^3-3al^2+4a^2l-2a^3)$

(11) 次ニ示ス單桁ノ彈性線方程式及最大撓度ヲ求ム。



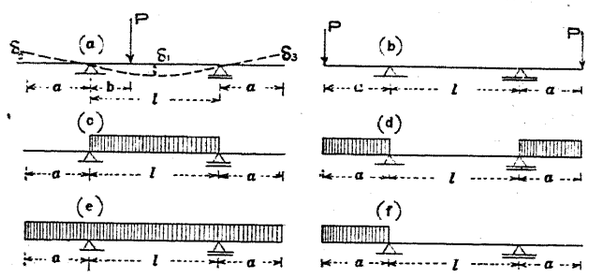
答 (a) $y=\frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{5}{8}\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}+\frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$, $\delta=\frac{1}{120}\frac{ql^4}{EI}$

(b) $y=\frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{3}{8}\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}-\frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$, $\delta=\frac{3}{640}\frac{ql^4}{EI}$

(c) $y=\frac{ql^4}{360EI}\left(7\frac{x}{l}-10\frac{x^3}{l^3}+3\frac{x^5}{l^5}\right)$, $\delta=\frac{ql^4}{EI}\frac{2+5\sqrt{\frac{8}{15}}}{450}\sqrt{1-\sqrt{\frac{8}{15}}}$

$=0.00652\frac{ql^4}{EI}$ $x=\sqrt{1-\sqrt{\frac{8}{15}}}\,l=0.5193l$

(12) 圖示ノ突出桁ノ兩端及支點間ノ最大撓度ヲ求ム。



答 (a) $\delta_1=\frac{Pb}{9\sqrt{3}EI}(l^2-b^2)^{\frac{3}{2}}$, $\delta_2=-\frac{Pab}{6EI}\left(l-b\right)\left(2+\frac{b}{l}\right)$, $\delta_3=-\frac{Pab}{6EIl}(l^2-b^2)$

(b) $\delta_1=-\frac{Pa\beta^3}{8EIl}=\frac{\beta^2}{8\rho}$ (但 $\rho=\frac{EI}{Pa}$=中央徑間彈性線曲率半徑)

$\delta_2=\delta_3=\frac{Pa^2}{6EI}(3l+2a)$

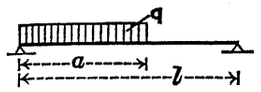
(c) $\delta_1=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$, $\delta_2=\delta_3=-\frac{qal^3}{24EI}$

(d) $\delta_1=-\frac{qa^2l^2}{16EI}=\frac{l^2}{8\rho}$, $\delta_2=\delta_3=\frac{qa^3}{8EI}(2l+a)$

(e) $\delta_1=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{FI}-\frac{qa^2l^2}{16EI}$, $\delta_2=\delta_3=\frac{qa^3}{8EI}(2l+a)-\frac{qal^3}{24EI}$

(f) $\delta_1=-\frac{qa^2l^2}{18\sqrt{3}EI}$, $\delta_2=\frac{qa^3}{24EI}(4l+3a)$, $\delta_3=\frac{qa^3l}{12EI}$

(13) 圖示ノ單桁ニ於ケル最大撓度ノ位置及量ヲ求ム。



答 $4x_1^3-6\frac{a(l-a)}{l^2}x_1^2+\frac{a^2(2l-a)^2}{l^4}=0$ ヨリ x_1 ヲ算出。

$\delta_{max}=\frac{ql^4x_1^3}{24EI}\left[\frac{4a(2l-a)}{l^2}-3x_1\right]$

(14) 長20′ノ鋼柱アリ,下半部ハ外徑4″,內徑3$\frac{1}{2}$″.上半部ハ外徑3″,內徑2$\frac{1}{2}$″ノ中空圓形斷面トス,下端ヲ固定シ上端ヨリ4′ノ點ニ水平力125#ヲ作用セシメタル時ノ上端ノ撓度ヲ求ム。(E=30,000,000 #/□″) 答 2.98″

(15) 集中荷重Pヲ中點ニ受クル單桁アリ,其慣性能率ハ中點ニ於テI_oニシテ漸次兩端ニ於ケル$\frac{1}{2}I_o$ニ變化スルトキ最大撓度ヲ求ム,若シ荷重Pガ全徑間ニ等布サルルトキハ如何。 答 $0.0241\frac{Pl^3}{EI_o}$, $0.0153\frac{Pl^3}{EI_o}$

(16) 矩形斷面ノ肱木桁ガ幅ヲ一定トシ高ヲ固定端ニテh, 自由端ニテ$\frac{1}{2}h$トス,自由端ニ荷重Pヲ受ケタルトキノ撓度ヲ求ム,固定端ノ慣性能率ヲI_oトス。

答 $0.544\frac{Pl^3}{EI_o}$

(17) 高14″ノ工形鐵徑間20′ノ兩端ニ單純ニ支持セラル,其斷面ノ慣性能率ヲ440in^4トセバ撓度$\frac{1''}{4}$ヲ超過セザル範圍ニテ作用セシメ得ベキ中點集中荷重ヲ求ム,此場合ノ最大應力如何,又同一ノ撓度ヲ生ズル全徑間等布荷重ヲ求ム,此トキノ最大應力如何. (E=13,000 *tons*/□″) 答 4.96 *tons*, 4.74 *tons*/□″, 0.397 *tons*/*ft*, 3.97*tons*/□″

(18) 外徑 10″ 厚$\frac{1''}{2}$ノ鑄鐵水管ガ徑間40′ニテ單純ニ支ヘラル,管內滿水ノ場合及無水ノ場合ニ生ズル最大應力及撓度ヲ求ム.(E=8,000 *t*/□″)

答 2.35 *t*/□″, 1.41″; 1.48 *t*/□″, 0.89″.

(19) 桁ABガ1 *ton*/*ft*ノ等布荷重ヲ受ケC,Dノ二點ニテ支ヘラル. AC=3′,CD=10′, DB=7′トス.CDノ中點ヲFトシA,B,Fノ三點ノ支點ノ水平線ヨリノ撓度ヲ求ム,但E=13,000 *tons*/□″, I=375 in^4. 最大上方撓度ノ生ズル點ノAヨリノ距離ヲ求ム。

答 0.0186″, 0.224″, 0.0181″(上方), 9.87′.

(20) 前題ノ桁ガA,F,Bノ三點ニ夫々 5,3,4 *ton* ノ荷重ノミテ受クルトキ此三點ノ

撓度及最大撓度ノ生ズル斷面ヲ求ム。

答　0.0988″, 0.073″(上方), 0.409″, 4.63′ (Dヨリ左ヘ)

(21) 幅8″,自重 50#/ft³ ナル木桁徑間30′ニ於テ支ヘラルルトキ撓度ガ $\frac{3''}{4}$ ナル爲メノ桁高ヲ求ム (E=1,200,000 #/□″), 答　9.185″

(22) 長 a 及 b ナル二個ノ桁ガ相等シキ斷面ヲ有シ兩端ニ支ヘラレ中點ニ於テ交叉ス,何レモ等布荷重 q ヲ受ケタルトキ交點ニ於ケル壓力ヲ求ム,更ニ支點反力ノ比ヲ求ム。

答　$a>b$ トシ a 材ガ上側ニアルトキ

$$壓力=\frac{5}{8}q\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3},\quad \frac{A}{B}=\frac{3a^4+8ab^3+5b^4}{5a^4+8a^3b+3b^4}$$

(23) 自由端ニ荷重Pヲ受クル肱木桁ガ其中點ニ於テ固定端ト同高ニ支ヘラルルモノトス,此支點ノ反力,固定端ノ彎曲力率及最大撓度ヲ求ム。

答　$\frac{5}{2}$P, $\frac{1}{4}$Pl, $\frac{7}{96}\frac{Pl^3}{EI}$

(24) 等布荷重ヲ受クル肱木桁ノ自由端ヲ單純ニ支持スルトキ其反力ヲ何程トスレバ桁ニ生ズル彎曲應力ヲ最小ナラシメ得ルカ,此場合ト自由端ヲ固定端ト同高ニ支ヘタル場合トノ應力ノ比ヲ求ム。答　0.414 ql, 0.68

(25) 等布荷重ヲ受クル肱木桁ノ自由端ヨリ何程ノ距離ニ於テ固定端ト同高ニ支ヘタルトキ桁ニ生ズル彎曲應力ヲ最少ナラシメ得ルカ,此應力ト自由端ヲ支ヘタルトキノ應力トノ比ヲ求メ更ニ此支點ノ反力ヲ求ム。

答　0.29l, 0.337, 0.644ql.

(26) 長20′ノ鋼桁ガ兩端及中點ニ於テ長10′ノ垂直釘ニテ懸垂セラル,兩端ノ釘ハ1□″, 中央ノ釘ハ2□″ ノ斷面ヲ有シ桁ノ慣性能率ハ 480 in^4 ヲ有ス,此桁ガ 1ton/ft ノ等布荷重ヲ受ケタルトキノ各釘ノ張力ヲ求ム。

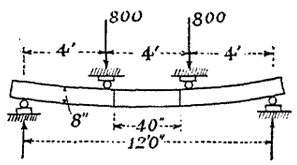
答　中央 12.083t, 兩端各 3.958t.

(27) 赤樫供試桁幅 1.75″, 厚 1.25″ ナルモノヲ 12′ 徑間ニ支ヘ中央ニ荷重シタルニ 607# ニシテ撓度 0.050″ ヲ增加シタリEヲ算出セヨ。答　1534 000#/□″

(28) 6″×8″ ノ木桁ヲ 12′ 徑間ニ支ヘ圖示ノ如ク 800# ノ荷重二個ヲ支點ヨリ 4′ ノ點ニ加ヘタリトシ

(a) E=1,200,000 #/□″ トシテ荷重點及中點ノ撓度

(b) 桁側ニ 40″ ヲ隔テテ記入シタル二本ノ垂直線ガ互ニ爲ス角



(c) 上端ニテ此二線ノ間隔ヲ銳敏ナル伸縮計 (Extensometer) ニテ測リ求メラルベキ收縮量ヲ求ム。

答　0.240″, 0.276″; 0°17′; 0.0200″

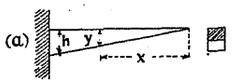
(29) 兩端ニテ支ヘラルル桁アリ,其一點Aニ荷重ヲ加ヘタルニ他ノ一點Bニ或撓度 δ ヲ生ジタルモノトス,今若シ此荷重ヲBニ作用セシムル時Aニ於テ生ズル撓度ハ δ ナル事ヲ證セヨ。

(30) 2″×12″×15′0″ ノ桁ト 2″×8″×10′0″ ノ桁トノ剛度ヲ比較セヨ,何レガ强度大ナリヤ。答　剛度 1:1, 强度 3:2

(31) 等布荷重ヲ受クル等强肱木桁ノ寸法ヲ求ム。

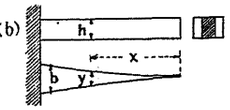
(a) 桁幅不變ノ時, (b) 桁高不變ノ時, (c) 斷面形相似的ニ變化スル時, (d) 圓形斷面ノ時。

答　(a)



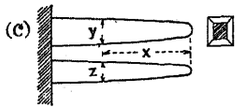
$$y=\sqrt{\frac{3q}{bk_b}}x,\quad h=\sqrt{\frac{3q}{bk_b}}l$$

(b)



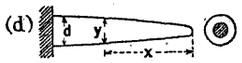
$$y=\frac{3q}{h^2k_b}x^2,\quad b=\frac{3q}{h^2k_b}l^2$$

(c)



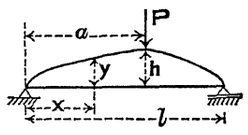
$$\begin{cases}y^3=\frac{3q}{\alpha k_b}x^2,\\ z=\alpha y,\end{cases}\quad\begin{cases}h=\sqrt[3]{\frac{3ql^2}{\alpha k_b}}\\ b=\alpha h\end{cases}$$

(d)



$$y^3=\frac{16q}{\pi k_b}x^2,\quad d=\sqrt[3]{\frac{16ql^2}{\pi k_b}}$$

(32) 一點ニ集中荷重ヲ受ケ一定幅ヲ有スル等强單桁ノ縱斷形ヲ求ム。



答　$y^2=\frac{6P(l-a)}{b.l.k_b}x$

$$h=\sqrt{\frac{6Pa(l-a)}{b.l.k_b}}$$

(33) 幅不變ニシテ等布荷重ヲ受クル等强單桁ノ縱斷形ハ橢圓ニシテ最大桁高ハ $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{q}{bk_b}}l$ ナル事ヲ證セヨ。

(34) 幅不變ニシテ一個ノ轉行荷重ヲ受クル等强單桁ノ縱斷形ハ橢圓ニシテ中點ニ於ケル最大桁高ハ $\sqrt{\frac{3}{2}\frac{Pl}{bk_b}}$ ナル事ヲ證セヨ。

(35) 徑間 l, 幅 b, 高 d ナル等强單桁ガ等布荷重 q ヲ受ク, b 不變ニシテ d 可變ナ

ルトキ中點ノ撓度ハ $\frac{\pi-2}{2}\frac{k_h^{\frac{3}{2}}}{E}\left(\frac{b}{3q}\right)^{\frac{1}{2}}l$ ニシテ d 不變ニシテ b 可變ナルトキハ $\frac{k_h l^2}{4Ed}$ ナル事ヲ證セヨ。

第二十九節 不靜定桁解法例

不靜定ノ數ノ多イ場合ノ解法ニ就イテハ更ニ章ヲ改メテ說明スル事トスルガ茲ニハ唯一個ノ不靜定項ノアル場合(一次不靜定)ニ對シ彈性撓度法則 (Elastic law of deflection) ヲ用ヒテ之ヲ解ク方法ニ就イテ例ヲ設ケテ之ヲ說明シヤウ。

(1) 一端固定サレ他端彈性柱 (Elastic column) ニテ支持サルル桁。

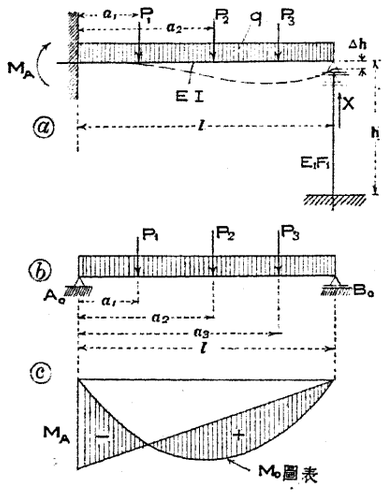


Fig. 300. A

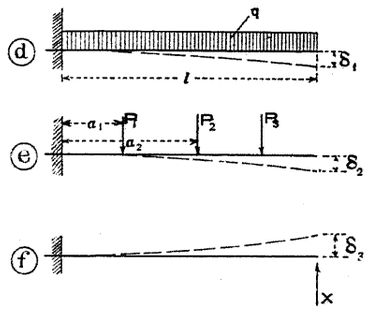


Fig. 300. B

此場合ニハ反力條件ハ $\Sigma R=3+1=4$ トナルガ故ニ一次不靜定デアル,此場合支柱ヘノ壓力テXトシコレテ計算スル事トシヤウ。

(a) 數個ノ集中荷重及全徑間等布荷重テ有スル場合,今

X = 支柱ヘノ壓力或ハ反力

E_1 = 支柱ノ彈性係數

F_1 = 支柱ノ斷面積

Δh = 支柱ノ短縮 (Shortening)

トスレバΔhノ量ハ未知壓力Xノ項デ表ハサレ

$$\Delta h=\frac{Xh}{E_1F_1}$$

此短縮ガ肱木桁トシテノ自由端Bノ沈下 (Sinking) 即チ撓度ニ等シクナケレバナラヌ,而シテ此沈下ノ量ハ Fig. 300 ⓓ,ⓔ 及ⓕニ示ス三通リノ荷重テ受ケ左端ノミ緊定サレタ肱木桁ノ自由端ニ於テ生ズルモノト考ヘ得ラレル,而シテ此三通リノ荷重ニ對スル撓度 δ_1,δ_2 及 δ_3 ハ容易ニ書キ表ハサレ

$$\delta_1=\frac{ql^4}{8EI},\quad \delta_2=\Sigma\frac{P\frac{a^2}{2}\left(l-\frac{a}{3}\right)}{EI},\quad \delta_3=\frac{Xl^3}{3EI}$$

コレラノ撓度ノ合成トシテ Δh テ得ベキガ故ニ

$$\Delta h=\delta_1+\delta_2-\delta_3$$

$$\frac{Xh}{E_1F_1}=\frac{ql^4}{8EI}+\Sigma\frac{P\frac{a^2}{2}\left(l-\frac{a}{3}\right)}{EI}-\frac{Xl^3}{3EI}$$

此式ハXノミテ未知數トスル故ニコレテ解ケバ

$$X=\frac{\frac{ql^4}{8}+\Sigma P\frac{a^2}{2}\left(l-\frac{a}{3}\right)}{\frac{l^3}{3}+\frac{EI}{E_1F_1}h}\quad\cdots\cdots(219)$$

此反力Xサヘ求メラルレバ緊定端ノ彎曲力率ハ其方向テ Fig. 300 圖示ノ如シト假定シテ

$$M_A-Xl+q\frac{l^2}{2}+\Sigma Pa=0$$

$$M_A=Xl-q\frac{l^2}{2}-\Sigma Pa$$

實際此式ニヨッテ M_A テ計算スレバ其結果ハ負トナル,故ニ實際ニハ負彎曲力率テ生ジ圖上ニ假定シタト反對ノ方向テ有スル事テ知ル。

斯クノ如ク肱木桁ガ自由端テ支持サレタ場合ニ生ズル彎曲力率圖ハ如何ト云フニⓑ圖ニ示ス如ク同ジ荷重テ有スル單桁トシテノ彎曲力率圖ト今求メタ緊定點ノ負彎曲力率ニ對スル彎曲力率圖トノ差トナルガ故ニⓒ圖ニ示シタモノガ實際ノ彎曲力率圖ナル事テ知ル。

(b) 若シ集中荷重ノミガ働クモノトセバ (219) 式ニ $q=0$ ト置キ

$$X=\frac{\Sigma P\frac{a^2}{2}\left(l-\frac{a}{3}\right)}{\frac{l^3}{3}+\frac{EI}{E_1F_1}h}\quad\cdots\cdots(220)$$

(c) 若シ等布荷重ノミノ作用スル場合ニハ P=0 ト置キ

$$X=\frac{\frac{ql^4}{8}}{\frac{l^3}{3}+\frac{EI}{E_1F_1}h} \quad \cdots\cdots(221)$$

(2) 前題ニ於テ支柱ガ剛體 (Rigid) ナル場合。

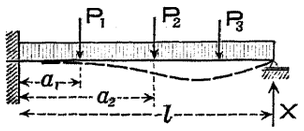


Fig. 301.

此場合ニハ $E_1=\infty$ 從ツテ $\Delta h=0$ トナリ Fig. 301 ニ示ス如ク自由端ガ單ニ支持セラルル場合ニ相當ス。

(a) 荷重ガ幾ツカノ集中荷重ト全徑間ニ渉ル等布荷重トヨリ成ル場合ニハ (219) 式ニヨリ

$$X=\frac{\frac{3}{8}ql^4+3\Sigma P\frac{a^2}{3}\left(l-\frac{a}{3}\right)}{l^3} \quad \cdots\cdots(222)$$

(b) 集中荷重ノミナルトキハ (222) 式ニ $q=0$ ト置キ

$$X=\frac{3\Sigma P\frac{a^2}{2}\left(l-\frac{a}{3}\right)}{l^3} \quad \cdots\cdots(223)$$

今若シ Fig. 302 ニ示ス如ク唯一ツノ荷重ガ桁ノ中點ニ作用スルモノトセバ $a=\frac{l}{2}$ ト置キ

$$X=\frac{\frac{3}{2}P\frac{l^2}{4}\left(l-\frac{l}{6}\right)}{l^3}=\frac{5}{16}P$$

左端緊定點ニ生ズル彎曲力率ハ

$$M_A=\frac{5}{16}Pl-P\frac{l}{2}=-\frac{3}{16}Pl.$$

(c) 等布荷重ノミガ全徑間ニアル場合ニハ (222) 式ヨリ

$$X=\frac{3}{8}ql \quad \cdots\cdots\text{第二十一節(5)參照}$$

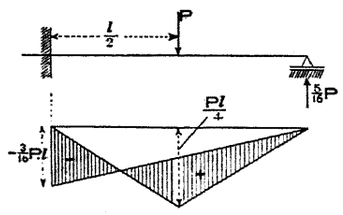


Fig. 302.

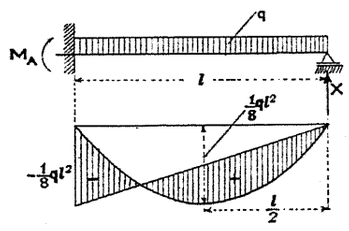


Fig. 303.

依テ固定端ニ生ズル彎曲力率ハ

$$M_A=\frac{3}{8}ql^2-ql\frac{l}{2}=-\frac{1}{8}ql^2$$

(3) 三支點ヲ有スル桁ガ中央支點ヲ彈性支柱トシ等布荷重ヲ受クル場合。

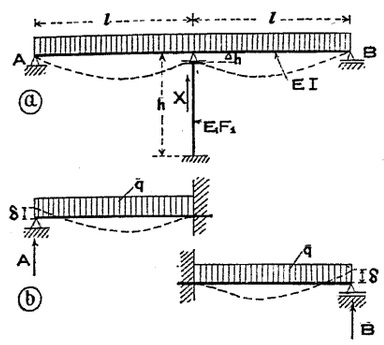


Fig. 304.

此場合ニハ $\Sigma R=4$ トナリ一次不靜定デアル,荷重ガ左右對稱デアル故ニ支柱ニ於ケル彈性線ヘノ切線ハ水平トナル,今此桁ヲ中央支柱ニ於テ二分スルモノト考ヘ中央支柱ノ所デ緊定サレタモノト假定スレバ其左側ノミヲ考ヘタ場合ニハⓑ圖ノ如ク右端固定サレ左端支持サレタ肱木桁トナリ其右側ノミ考ヘテモ同樣ニ左端固定サレ右端支持セラレタ肱木桁トナル,此二ツノ肱木桁ガ各其端ニ於ケル A 及 B ノ反力及ビ全徑間ニ渉ル等布荷重ニヨッテ δ ナル撓度ヲナシタモノトスレバコノ δ ハ中央支點ノ沈下卽チ中央支柱ノ短縮 Δh ト等シイモノデナケレバナラヌ,從ツテ

$$\delta=\frac{Al^3}{3EI}-\frac{ql^4}{8EI}$$

$$=\Delta h=\frac{Xh}{E_1F_1}$$

而シテ平衡ノ條件カラ

$$A+B+X=2ql$$

$$\therefore \quad A=B=ql-\frac{X}{2}$$

此値ヲ前式ニ挿入シ

$$\frac{\left(ql-\frac{X}{2}\right)l^3}{3EI}-\frac{ql^4}{8EI}=\frac{Xh}{E_1F_1}$$

$$\therefore \quad X=\frac{\frac{ql^4}{3EI}-\frac{ql^4}{8EI}}{\frac{l^3}{6EI}+\frac{h}{E_1F_1}}=\frac{5ql^3}{4l^3+24h\frac{EI}{E_1F_1}} \quad \cdots\cdots(224)$$

X サヘ既知トナレバ其他ノ支點反力及彎曲力率等ハ容易ニ計算シ得ラレル。

モシ中央支點ガ剛支點 (Rigid support) ナレバ $E_1=\infty$ トナルガ故ニ (224) 式ハ次ノ形ヲ採ル。

$$X=\frac{5}{4}ql \quad \cdots\cdots(225)$$

$$A=B=ql-\frac{5}{8}ql=\frac{3}{8}ql$$

中央支點ニ於ケル負彎曲力率ハ

$$M=Al-ql\frac{l}{2}=\frac{3}{8}ql\cdot l-\frac{1}{2}ql^2=-\frac{1}{8}ql^2$$

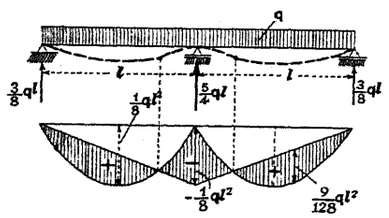


Fig. 305.

故ニ此場合ニ相當スル彎曲力率圖ハ Fig. 305 ニ示ス如クナルベク其最大正彎曲力率ノ値ヲ求メンニハ先ヅ剪力ガ零ナル點ヲ計算シ其點ニ對スル彎曲力率ヲ求ムレバヨイノデアッテ此零剪ノ點ノ左支點ヨリノ距離ヲ x トセバ

$$Q=A-qx=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{A}{q}=\frac{3}{8}l.$$

$$M_{max}=Ax-qx\frac{x}{2}=\frac{3}{8}ql\frac{3}{8}l-q\frac{\left(\frac{3}{8}l\right)^2}{2}=+\frac{9}{128}ql^2$$

(4) 三支點ヲ有スル桁ガ中央支點ヲ彈性柱トシ一個ノ集中荷重ヲ受クル場合。

全部ノ配置ヲ非對稱的トシ中央支點ニ於テ彈性線ニ引ケル切線ガ水平線トナス角ヲ α トシ A,B 二點ニ於テ垂直線上ニ挿ム長ヲ δ_1,δ_2 トスレバ

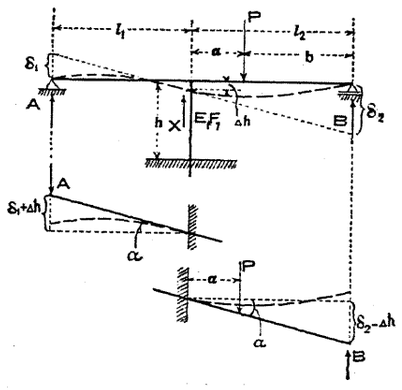


Fig. 306.

$$tan\alpha=\frac{\delta_1+\Delta h}{l_1}=\frac{\delta_2-\Delta h}{l_2} \quad \cdots\cdots \text{(i), (ii)}$$

平衡條件ヨリ B ヲ原點トスル力率ヲ求メ

$$A(l_1+l_2)+Xl_2-Pb=0$$

$$\therefore \quad A=\frac{Pb-Xl_2}{l_1+l_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

同樣ニ

$$B(l_1+l_2)+Xl_1-P(l_1+a)=0$$

$$\therefore \quad B=\frac{P(l_1+a)-Xl_1}{l_1+l_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iv)}$$

左右各半分ノ桁ガ中點ニ於テ角 α ナル傾斜ノ儘デ緊定セラレ其各部ガ原荷重ヲ受クルモノトセバ左端 A ノ沈下ハ

$$\delta_1=-\frac{Al_1^3}{3EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(v)}$$

B ニ於テモ同樣ニ

$$\delta_2=\frac{Bl_2^3}{3EI}-\frac{P\frac{a^2}{2}\left(l_2-\frac{a}{3}\right)}{EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(vi)}$$

倘中央支點ノ沈下(卽チ支柱ノ短縮)ハ前題ニ於ケル如ク

$$\Delta h=\frac{X.h}{E_1F_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(vii)}$$

$\alpha, \delta_1, \delta_2, A, B, X$ 及 Δh ナル七ツノ未知數ニ對シ七方程式ヲ得タルヲ以テ之ヲ解クコトガ出來ル。

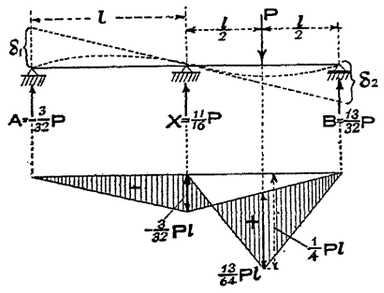


Fig. 307.

今若シ中央支點ガ剛性ニシテ左右徑間長相等シク荷重 P ガ中點ニアリトセバ $E_1=\infty$, $\Delta h=0$, $l_1=l_2=l$, $a=\frac{l}{2}$ トナリ $\delta_1=\delta_2$ ヲ得ベク (iii) 式ニヨリ

$$A=\frac{P}{4}-\frac{X}{2} \text{ (負反力)}$$

(iv) 式ニヨリ

$$B=\frac{3}{4}P-\frac{X}{2}$$

ヲ得ルガ故ニ (v) 及 (vi) 式ニ挿入シ

$$\delta_1=-\frac{\left(\frac{P}{4}-\frac{X}{2}\right)l^3}{3EI}=\delta_2=\frac{\left(\frac{3}{4}P-\frac{X}{2}\right)l^3}{3EI}-\frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EI}$$

$$\therefore \quad -16\left(\frac{P}{4}-\frac{X}{2}\right)=16\left(\frac{3}{4}P-\frac{X}{2}\right)-5P$$

$$\therefore \quad X=\frac{11}{16}P$$

$$\therefore \quad A=\frac{P}{4}-\frac{11}{32}P=-\frac{3}{32}P.$$

倘 $A+B+X=P$ ナル式ヨリ

$$B=P-A-X=\frac{13}{32}P.$$

中央支點ノ彎曲力率ハ

$$M=A.l=-\frac{3}{32}P.l$$

荷重ノ下ニ生ズル最大彎曲力率ハ

$$M_{max}=B\frac{l}{2}=\frac{13}{32}P.\frac{l}{2}=\frac{13}{64}P.l$$

或ハ中央荷重ヲ受ケル右半ノ單桁ガ一端ニ負彎曲力率ヲ受ケルモノトシテモ

計算シ得ラレ

$$M_{max}=\frac{Pl}{4}-\frac{3}{64}Pl=\frac{13}{64}Pl$$

(5) 自由端ニPナル荷重ヲ有スル肱木桁ノ中點ヲ彈性柱ニテ支ヘタル場合。

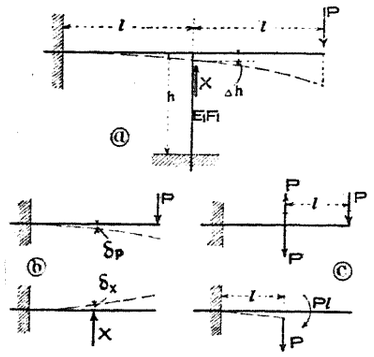


Fig. 308.

Fig. 308 ⓐ ニ示ス如キ荷重配置ヲⓑニ示ス,ニ荷重即チPニ因ル中央支點ノ撓度ト支點反力Xニ因ル其撓度トノ合成セルモノト考ヘラレル,然ラバ支柱ノ短縮 Δh ハ明カニ

$$\Delta h=\delta_P-\delta_X,\quad \Delta h=\frac{Xh}{E_1F_1}$$

然ルニPニ因ル撓度ハⓒ圖ニ示ス如ク中央點ニ働クP及ビ同點ニ働ク偶力Plノニツニ分解セラレ

$$\delta_P=\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{Pl\cdot l^2}{2EI}=\frac{5}{6}\frac{Pl^3}{EI}$$

反力Xニ因ル撓度ハ

$$\delta_X=\frac{Xl^3}{3EI}$$

$$\therefore\quad \frac{Xh}{E_1F_1}=\frac{5}{6}\frac{Pl^3}{EI}-\frac{Xl^3}{3EI}$$

$$\therefore\quad X=\frac{\frac{5}{6}\frac{Pl^3}{EI}}{\frac{l^3}{3EI}+\frac{h}{E_1F_1}}=\frac{5Pl^3}{2l^3+6h\frac{EI}{E_1F_1}}$$

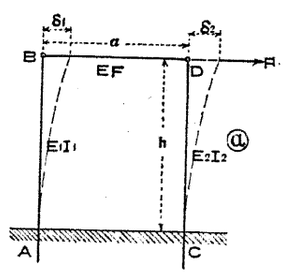
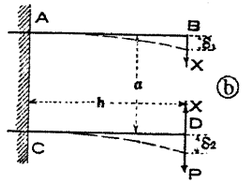


Fig. 309.

(6) 二本ノ柱ノ先端ヲ彈性材ニテ連結シ水平張力ノ作用シタル場合其彈性材ニ於ケル應力ヲ求ム。

今此連結材 BD ノ應力テX, 伸長テ Δa トシ此圖テ90°回轉シテⓑ圖ノ如ク考フレバ



$$\Delta a=\delta_2-\delta_1$$

$$\delta_1=\frac{Xh^3}{3E_1I_1},\quad \delta_2=\frac{(P-X)h^3}{3E_2I_2}$$

$$\Delta a=\frac{Xa}{EF}$$

故ニ

$$\frac{Xa}{EF}=\frac{(P-X)h^3}{3E_2I_2}-\frac{Xh^3}{3E_1I_1}$$

$$\therefore\quad X=\frac{PEF}{E_2I_2\left(\frac{EF}{E_1I_1}+\frac{EF}{E_2I_2}\frac{3a}{h^3}\right)}=\frac{PE_1I_1}{E_2I_2\left(1+\frac{E_1I_1}{E_2I_2}+\frac{3a}{h^3}\frac{E_1I_1}{EF}\right)}$$

(7) 二ツノ單桁 AB 及 CD ガ其中點ニ於テ相交ハリ其交點ニ荷重Pヲ受ケ,二ツノ桁ニ於ケル荷重分擔ヲ求ム。

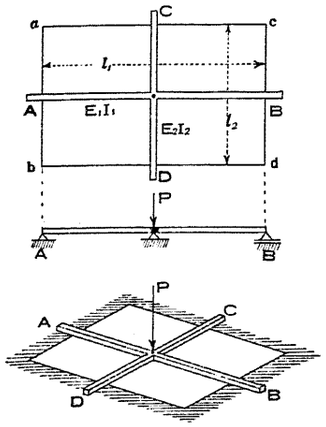


Fig. 310.

CD 桁ノ受クル荷重テ P_2 トセバ AB 桁ノ受クル荷重ハ $P_1=P-P_2$ トナル。

AB 及 CD 桁ハ中點テ共有スルガ故ニ其中點ニ於ケル撓度ハ相等シ,故ニ

$$\delta=\frac{P_1l_1^3}{48E_1I_1}=\frac{P_2l_2^3}{48E_2I_2}=\frac{l_2^3}{48E_2I_2}(P-P_1)$$

$$\therefore\quad P_1=\frac{\frac{Pl_2^3}{E_2I_2}}{\frac{l_1^3}{E_1I_1}+\frac{l_2^3}{E_2I_2}}=\frac{1}{1+\frac{E_2I_2}{E_1I_1}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3}P.$$

同樣ニ

$$P_2=\frac{I}{1+\frac{E_1I_1}{E_2I_2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3}P.$$

今若シ二ツノ桁ガ相等シキ材料及寸法ニテ作ラレテアレバ $E_1=E_2$, $I_1=I_2$ トナリ

$$P_1=\frac{l_2^3}{l_1^3+l_2^3}P,\quad P_2=\frac{l_1^3}{l_1^3+l_2^3}P$$

更ニ若シ徑間相等シキ時ハ $l_1=l_2$ トナリ。

$$P_1=P_2=\frac{1}{2}P.$$

(8) 全徑間等布荷重ヲ受クル桁 AB ガ其中點ニ於テ他ノ桁 CD ニ支ヘラルル場合 CD 桁ニ於ケル壓力ヲ求ム。

今求ムル壓力テXトセバ此二ツノ桁ノ交點ニ於ケル撓度ハ相等シ故ニ $\delta_1=\delta_2$. 然ルニ今Pテ總荷重トスレバ

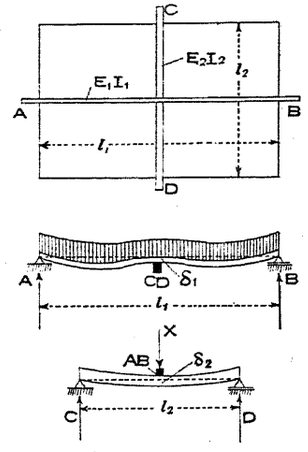


Fig. 311.

$$\delta_1=\frac{5}{384}\frac{Pl_1^3}{E_1I_1}-\frac{Xl_1^3}{48E_1I_1}$$

$$\delta_2=\frac{Xl_2^3}{48E_2I_2}$$

$$\therefore\quad \frac{Xl_2^3}{48E_2I_2}=\frac{5}{384}\frac{Pl_1^3}{E_1I_1}-\frac{Xl_1^3}{48E_1I_1}$$

$$\therefore\quad X=\frac{5}{8}\frac{Pl_1^3}{E_1I_1\left(\frac{l_2^3}{E_2I_2}+\frac{l_1^3}{E_1I_1}\right)}=\frac{5}{8}\frac{P}{1+\frac{E_1I_1}{E_2I_2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3}$$

(9) **一端固定サレ他端支持サルル桁ガ圖示ノ如ク三角荷重Pヲ受クル場合。**

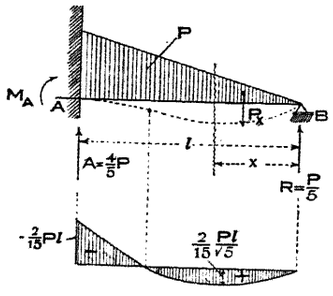


Fig. 312.

先ヅ支點ニ於ケル反力ヲ求メンニ右端支點ニ於テ荷重Pニ因ル撓度δ_Pト反力Rニ因ル撓度δ_Rトハ相殺スル事ヲ要スルガ故ニ

$$\delta_P=\frac{Pl^3}{15EI}$$

$$=\delta_R=\frac{Rl^3}{3EI}$$

$$\therefore\quad R=\frac{P}{5}$$

次ニ容易ニAニ於ケル支點彎曲力率ガ求メラレ其方向ヲ假ニ正ニ考ヘテAニ對スル靜力率ヲ求メ

$$M_A+P\frac{l}{3}-Rl=0$$

$$\therefore\quad M_A=Rl-P\frac{l}{3}=\frac{P}{5}l-\frac{Pl}{3}=-\frac{2}{15}Pl$$

若シBヲ力率ノ中心ニ採ツテ計算スレバ

$$M_A+Al-P\frac{2}{3}l=0$$

$$\therefore\quad M_A=-Al+\frac{2}{3}Pl=-\frac{4}{5}Pl+\frac{2}{3}Pl=-\frac{2}{15}Pl\ (\text{前揭結果ト一致ス})$$

最大彎曲力率ヲ求メンニ$\frac{P_x}{P}=\frac{x^2}{l^2}$デアツテxガ求ムル剪力=0ノ點デアル爲メニハ$R-P_x=0$即チ$P_x=R=\frac{P}{5}$ナル事ヲ要シ

$$P_x=\frac{Px^2}{l^2}=\frac{P}{5}\text{ヨリ}\quad x=\frac{1}{\sqrt{5}}l\ \text{ヲ得}$$

$$\therefore\quad M_{max}=Rx-P_x\frac{x}{3}=\frac{P}{5}x-\frac{P}{5}\frac{x}{3}=\frac{2}{15}Px=\frac{2}{15}\frac{Pl}{\sqrt{5}}$$

第三十節　固定桁 (Fixed Beam or Built-in Beam)

固定桁ノ解法モ亦彈性線ノ微分方程式ヲ用ヒテナス事ヲ得ルガ次ニ說明スル如キ解法ニ依ルガ更ニ便デアル。

AB桁ガ任意ノ荷重ヲ有スル一般的ノ場合ヲ採リ其左右ノ固定端ニ於ケル彎曲力率ヲM_1, M_2トシ共ニ正ナルモノト假定シテ

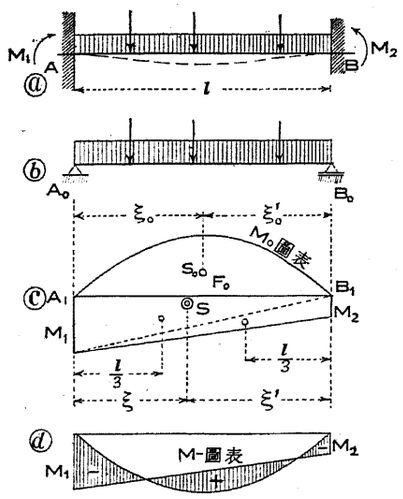


Fig. 313.

置ク,次ニ此固定桁ト同ジ荷重ヲ有スル單桁A_0B_0ヲⓑ圖ノ如ク考ヘ其單桁トシテノ彎曲力率M_0圖表ヲ作リ其面積ヲF_0トシA_1B_1線ノ上側ニ之ヲ表ハシ其重心S_0ガ左端及右端カラ隔ル距離ヲ夫々ξ_0, ξ_0'トス,然ル時ハA_1B_1線上ニアルM_0圖表ニ添ヘテ其下側ニ兩端固定セルニ基因スル彎曲力率圖表ヲ加フレバ所謂固定桁トシテノ彎曲力率圖表ガ出來ル譯デアル,コレヲⓒ圖ニ示ス,併シ計算ノ結果ハ(226)式カラ得ラルル如ク固定端ニ於ケル彎曲力率ハ實際ハ負値トナリ假定ノ逆ナル事ヲ知ルガ故ニ其結果固定桁ノ彎曲力率圖ハ事實ⓓ圖ノ如クナルベキデアル。

扨A,B兩端ノ支點力率M_1及M_2サヘ發見セバ其他ノ問題ハ直チニ解キ得ルガ故ニ先ヅコレヲ求ムル方法ヲ示ス事トスル, AB桁ノ右端Bノ固定ヲ除去スルモノト考ヘ其代リニ玆ニM_2ナル偶力ヲ作用セシムレバ桁ノ狀態ニハ何等變化ハ無イ筈デアル(Fig. 314 ⓑ參照)。然ル時ハAB桁ハ左端Aニノミ固定サレタ肱木桁トナリ右端Bハ固定サレズシテM_2ナル偶力ガ作用スル事トナル,此

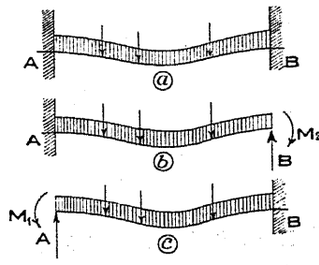


Fig. 314.

狀態ニ於テB點ノ沈下ハ(205)式デ計算出來ル譯デアル卽チ

$$\delta=\frac{F\xi'}{EI}$$

然ルニB端ハ事實固定サルル故ニ原直線AB ノ位置ニ存シ $\delta=0$ デアル,從ツテ前式ヨリ

$$F.\xi'=0$$

デナケレバナラヌ事トナル,次ニ反對ノ方向卽チAB 桁ヲ右端Bニ固定シ左端Aノ固定ヲ取除キ其代リ M_1ナル偶力ヲ作用セシムルモノト假定スル時ハ(Fig. 314 ⓒ 參照)前同樣ニ肱木桁トナリ自由端Aノ沈下ハ

$$\delta=\frac{F\xi}{EI}$$

然ルニAノ沈下無キガ故ニ

$$\delta=0,\quad F.\xi=0$$

ナル條件ヲ得ル,此 $F\xi'$, $F\xi$ ノ意味ハ固定桁ノ彎曲力率圖ノ靜力率デアツテ前者ハ右端ニ後者ハ左端ニ對スル力率ガ何レモ零トナル事ヲ示ス,此靜力率ハ Fig. 313 ⓒ ヨリ容易ニ計算セラレルノデアツテ A_1B_1 線ノ上側ノ單桁トシテノ圖表ト其線以下ノ固定端ニ對スル圖表トニ對シ別々ニ計算シ梯形ハ便宜上更ニ二ツノ三角形ニ分ツモノトスレバ

$$F.\xi'=F_o.\xi'_o+M_1\frac{l}{2}.\frac{2}{3}l+M_2.\frac{l}{2}.\frac{1}{3}l=0$$

$$F.\xi=F_o\xi_o+M_1\frac{l}{2}.\frac{1}{3}l+M_2\frac{l}{2}.\frac{2}{3}l=0$$

此二式カラ二ツノ未知數 M_1 及 M_2 ガ求メラレ

$$\left.\begin{aligned}2M_1+M_2&=-\frac{6F_o\xi_o'}{l^2}\\2M_2+M_1&=-\frac{6F_o\xi_o}{l^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(226)$$

此二ツノ式カラ M_1, M_2 ナル固定端ノ彎曲力率ガ求メラレル,此式中右邊ノ $F_o.\xi_o$ 及 $F_o\xi_o'$ ハ共ニ AB 桁ヲ單桁ト考ヘテノ彎曲力率圖ノ左端及右端ニ對スル靜力率ヲ意味シ同ジ荷重ヲ受クル單桁トシテ容易ニ計算セラレ得ルモノデアル,茲ニ例ヲ設ケテ其計算方法ヲ示サウ。

(1) 一個ノ集中荷重ヲ受クル固定桁。

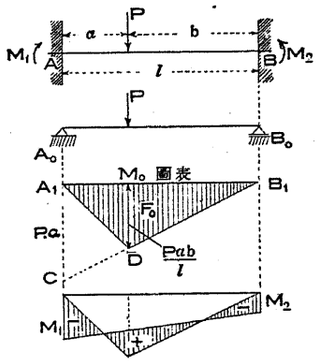


Fig. 315.

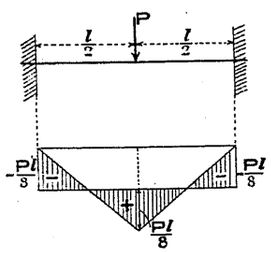


Fig. 316.

M_o 圖表ハ荷重Pノ下デ $\frac{Pab}{l}$ ノ縱距テ有スル三角形デ表ハサレ此 $\triangle A_1B_1D$ ノ靜力率 $F_o\xi_o$ テ求メル爲メニ此面積テ A_1B_1C 及 A_1DC ニ二分シテA點ニ對スル靜力率テ求メ

$$F_o\xi_o=P.a.\frac{l}{2}.\frac{l}{3}-P.a\frac{a}{2}.\frac{a}{3}$$

$$=\frac{Pa}{6}(l^2-a^2)$$

同樣ニB點ニ對シテ計算シ

$$F_o\xi_o'=\frac{Pb}{6}(l^2-b^2)$$

(226) 式ハ次ノ如クナル。

$$2M_1+M_2=-\frac{Pb}{l^2}(l^2-b^2)=-\frac{Pab}{l^2}(l+b)$$

$$2M_2+M_1=-\frac{Pa}{l^2}(l^2-a^2)=-\frac{Pab}{l^2}(l+a)$$

$$\therefore\quad M_1=-\frac{Pab^2}{l^2},\quad M_2=-\frac{Pa^2b}{l^2}\quad\cdots\cdots(227)$$

モシPガ徑間中央ニアレバ $a=b=\frac{l}{2}$

$$M_1=M_2=-\frac{Pl}{8}\quad\cdots\cdots(228)$$

荷重ノ下ニ於ケル最大正力率ハ

$$M_m=\frac{Pl}{4}-\frac{Pl}{8}=\frac{Pl}{8}\quad\cdots\cdots(229)$$

(2) 等布荷重ヲ受クル固定桁。

M_o圖表ハ抛物線トナリ其最大縦距ハ明カニ$\frac{1}{8}ql^2$デアル故ニ其面積F_oノ靜力率ハ容易ニ計算セラレ

$$F_o=\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}l=\frac{1}{12}ql^3$$

$$\xi_o'=\xi_o=\frac{l}{2}$$

$$F_o\xi_o'=F_o\xi_o=\frac{1}{24}ql^4$$

コレヨリ固定端ノ力率M_1及M_2ガ求メラレ

$$2M_1+M_2=-\frac{1}{4}ql^2$$

$$2M_2+M_1=-\frac{1}{4}ql^2$$

$$\therefore\ M_1=M_2=-\frac{1}{12}ql^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(230)$$

桁ノ中點ニ於ケル彎曲力率ハ

$$M_m=M_1+A\frac{l}{2}-\frac{ql}{2}\frac{l}{4}$$

$$=-\frac{ql^2}{12}+\frac{ql}{2}\frac{l}{2}-\frac{ql^2}{8}=\frac{1}{24}ql^2 \cdots(231)$$

或ハ單桁力率ヨリ支點力率ヲ引キ

$$M_m=\frac{ql^2}{8}-\frac{ql^2}{12}=\frac{1}{24}ql^2$$

(9) 三角荷重ヲ受クル固定桁

M_o圖表ハ三次抛物線トナリF_oノ計算モξ_oノ決定モ共ニ面倒デアルガ故ニ他ノ方法ニ據ル,卽チ今B支點ヲ取去リ其代リニB點ニM_2ノ偶力トR_2ノ反力トヲ與ヘルモノトスレバ桁ノ狀態ニハ變化ハ無イ,斯クテ三ツノ荷重 Fig. 318 ⓒ, ⓓ, ⓔ ニ對シテB點ノ位置及方向ニ變化ノ生ジナイ條件ヲ式示スレバ

$$\alpha=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0$$

$$\delta=\delta_1-\delta_2-\delta_3=0$$

卽チ

$$EI\,\alpha=\frac{Pl^2}{12}-M_2l-\frac{R_2l^2}{2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\

ノ二式ヲ得コレヲ (205)及 (206)式ニテ書直シ

$$EI\alpha=F=0 \text{ 及 } EI\delta=F\xi=0$$

式中　　F ＝固定桁トシテノ彎曲力率圖面積

ξ ＝同上面積重心ノ任意點カラノ距離

求メタF=0ナル條件ハ固定桁彎曲力率圖面積ノ總和ハ常ニ零ニ等シク從ツテ單桁トシテノ彎曲力率圖面積ト兩端固定ニ因ル力率圖面積トハ相等シクシテ符號相反スル事ヲ意味シ又 $F\xi=0$ ナル式ハ之ヲ圖式的ニ說明スレバ其彎曲力率圖ノ任意點ニ對スル力率ノ和ガ零ニ等シイ事卽チ單桁トシテノ彎曲力率圖ノ重心ト兩端固定ニ對スル力率圖ノ重心トガ同一垂直線上ニ一致シナケレバナラヌ事ヲ意味スルFig. 320ニ就イテ其詳細ヲ說明センニ⑥圖 M^1AB_1 ヲ單桁 AB ガ同一ノ荷重ヲ受ケタ時ノ彎曲力率圖トシ同圖ニ於テ $A_1A_1'=M_A$, $B_1B_1'=M_B$ (M_A,M_B ハ固定桁トシテノ兩端力率)ト置イタ時ノ $A_1A_1'B_1'B_1$ ヲ桁 AB ガ兩端ニ固定サレタニ因ル力率圖トスル,然ル時ハ圖上ノ影線面積ガ求ムル固定桁ニ對スル彎曲力率圖デアツテ上揭 F=0 ナル條件ハ面積 A_1MB_1=面積 $A_1A_1'B_1'B_1$ ナル事ヲ示シ $F\xi=0$ ナル條件ハ面積 A_1MB_1 ノ重心ト面積 $A_1A_1'B_1'B_1$ ノ重心トガ同一垂直線上ニ存在シナケレバナラヌ事ヲ意味スル。

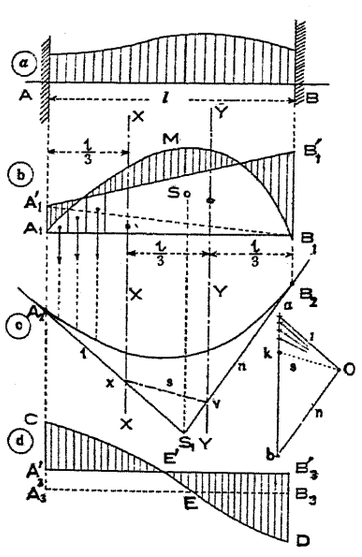


Fig. 320.

Fig. 320 ⑥ ニ於テ梯形ノ兩端支點力率圖 $A_1A_1'B_1'B_1$ ヲ對角線 $A_1'B_1$ ニヨツテ二分シ $\triangle A_1A_1'B_1$ 及 $\triangle A_1'B_1'B_1$ ニ分チ又徑間ヲ三等分シテ垂直線 XX 及 YY ヲ引クモノトスル。

$\triangle A_1A_1'B_1$ ノ重心ハ明カニ XX 線上ニアリ $\triangle A_1'B_1'B_1$ ノ重心ハ明カニ YY 線上ニアル事ヲ知ル,從ツテ今若シ既知ノ A_1MB_1 ナル力率圖面積ヲ二分シ XX 及 YY 線上ニ作用スル二ツノ面積ニ分ツ事ヲ得レバ從ツテ $A_1A_1'=M_A$, $B_1B_1'=M_B$ ヲ求ムル事ヲ得ベク問題ハ自ラ解ケタ事ニナル,コノ面積ヲ分ツ事ノ作圖ハ極メテ容易ニ行ヒ得ルノデアツテ先ヅ單桁力率圖 A_1MB_1 ヲ多數ノ垂直分劃線ニヨツテ細分シ此各々ノ面積ヲ各其重心ニ作用スル力ト考ヘテコレヲ力線 ab ニ採リ任意ノ極 O ヲ假定シテ極射線及其レニ相當スル平衡多邊形ヲ作圖スレバ其兩端線 1 及 n ヲ延長シテ生ジタ交點 S_1 ガ A_1MB_1 ノ重心 S ヲ與ヘル事トナリ更ニ此二線 1 及 n ト XX, YY ナル垂直線トノ交點ヲ x,y トシコレヲ結ブ直線 xy 卽チ閉合線 s ニ平行ニ極 O ヲ通ジテ引イタ射線 s ガ力線 ab ヲ k ニ切ツタモノトスレバ

$$ak=\triangle A_1A_1'B_1,\quad kb=\triangle A_1'B_1'B_1$$

トナル事ハ明カデアル,從ツテ

$$\frac{1}{2}M_A\cdot l=\text{面積 } A_1A_1'B_1=ak$$

$$\therefore\quad M_A=\frac{ak}{\frac{l}{2}}$$

同樣ニ

$$M_B=\frac{kb}{\frac{l}{2}}$$

求メタ M_A 及 M_B ニ等シク A_1A_1' 及 B_1B_1' ヲ採リ $A_1'B_1'$ ヲ結ブ時ハ

圖上影線面積ノ示ス如ク固定桁ニ對スル彎曲力率圖ヲ得ル。

剪力ハ常ニ彎曲力率ノ微分係數即チ彎曲力率圖ノ傾斜ニ等シイモノデアル,而シテ單桁トシテノ彎曲力率圖ト固定桁トシテノ彎曲力率圖トノ相異ハ基線 A_1B_1 ガ $A'_1B'_1$ ニナリ從ツテ曲線全體ノ傾斜ガ一樣ニ夫レダケ變化シタ事ニナルノデアツテ此傾斜變化ノ量ハ $\frac{M_A-M_B}{l}$ デアル事ヲ知ル,換言スレバコノ量ダケ剪力ノ値ガ一樣ニ變化スルノデアルカラ單桁トシテノ剪力圖ノ基線ノ位置ヲ其儘平行ニコノ量ダケ移動スレバヨイ事ニナル, Fig. 320 ニ於テ單桁 AB ニ對スル剪力圖ヲ A_3CEDB_3 トスレバ固定桁トシテ其兩端ヲ固定セラレタ影響トシテ其基線 A_3B_3 ヲ

$$A_3A'_3=B_3B'_3=\frac{M_A-M_B}{l}$$

ダケ下方ニ(Fig. 320 ニテハ此値ガ負トナル故ニ上方ニ)移動シテ求ムル剪力圖 $A'_3CE'DB'_3$ ナル影線面積ヲ得ルノデアル。

茲ニ簡單ナル一二ノ例ヲ示ス。

(1) 全徑間等布荷重ヲ受クル固定桁。

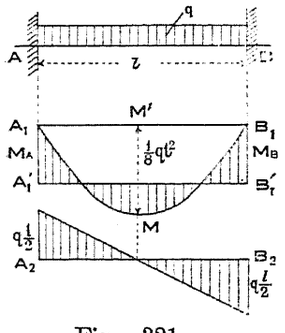


Fig. 321.

此場合ノ如ク左右對稱ナルモノハ其彎曲力率圖ノ重心ノ位置ガ明カデアルカラ解法モ容易デアル; 先ヅ中點ニ $MM'=\frac{1}{8}ql^2$ ナル單桁トシテノ彎曲力率ヲ置キ次ニ F=0 ナル條件カラ A_1MB_1 ナル拋物線面積ト等積ノ矩形 $A_1A'_1B'_1B_1$ ヲ作圖スレバヨイノデアツテ Fig. 321 ニ示シタ如ク MM' ノ三等分點ヲ通ジテ $A'_1B'_1$ ナル水平線ヲ引キ $A_1A'_1=M_A$, $B_1B'_1=M_B$ ヲ得ル其量ハ明カニ

$$M_A=M_B=\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{8}=\frac{1}{12}ql^2$$

剪力圖ハ單桁トシテ求メタモノト何等變化ハ無イ,彎曲力率圖ノ傾斜ハ單桁ニ於ケルモノト何等變化ヲ生ジナイカラデアル。

(2) 一個ノ集中荷重ヲ受クル桁。

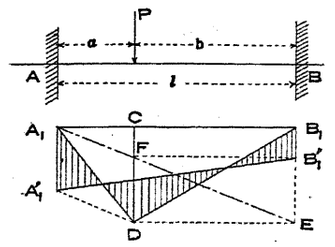


Fig. 322.

Fig. 322 ニ於テ圖式的ニ又ハ計算デ以テ $CD=\frac{Pab}{l}$ (單桁トシテノ彎曲力率)ニ採リ D チ A_1 及 B_1 ニ結ブ,次ニ D カラ水平線 DE チ引キ其 B_1 ニ立テタ垂直線トノ交點チ E トシ E ト A_1 トチ結ベバ $CF=M_B$, $FD=M_A$ トナル,從テ $CF=B_1B'_1$, $FD=A_1A'_1$ トナル如ク作圖シテ(即チ FB'_1 チ A_1B_1 ニ平行ニ又 DA'_1 チ A_1E ニ平行ニ引イテ)得タ A'_1 及 B'_1 チ結ベバ求ムル固定桁ノ力率圖チ得ル,此作圖ノ正シイ事ハ次ノ式カラ明カデアル。

$$B_1B_1'=CF=B_1E\times\frac{A_1C}{A_1B_1}=\frac{Pab}{l}\times\frac{a}{l}=\frac{Pa^2b}{l^2}=M_B$$

第三十一節 連續桁 (Continuous Beam)

若シ桁又ハ梁ガ二點以上ニ支持サルル場合ニハ其中間支點ニ於テモ彎曲力率ヲ持ツ事ニナリ其彈性線ハ波形ヲ呈スル,斯クノ如キ桁ヲ連續桁ト云フ。

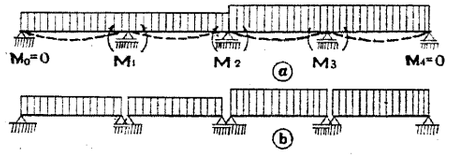


Fig. 323.

Fig. 323 ⓐ ニ示スハ一ツノ連續桁デアツテ中間支點ニハ彎曲力率ヲ生ズル,若シコレガ ⓑ 圖ノ如ク單桁ノ集合ナラバ支點ニハ彎曲力率ヲ生ゼズ完全ニ靜定的トナルノデアル。

連續桁ガ n 支點ヲ有スル場合ニハ $(n-2)$ 次不靜定トナル,其最モ簡單ナル三支點ノ場合ニ對シテハ既ニ第二十九節ニ於テ彈性線ヲ利用シテ解ク事ヲ說明シタガ一般的ニ n ノ數ノ多イ場合ニハ單ニ彈性線ノ式ダケデハ解キ難イノデ「**クラパイロン**」氏方程式 (Clapeyron's equation) 又ハ**三點力率ノ定理** (Theorem of three moments) ヲ

用ヒテ解クガ便利デアル,其詳細ヲ說明センニ前節固定桁ノ場合ノ如ク支點力率ヲ未知項トシテ挿入シ先ヅコレヲ求ムル如キ解法ヲ行フノデアル。

先ヅ連續桁ヲ中間支點ニ於テ切斷シテ見レバ此連續桁ハ同ジ荷重ヲ受クル單桁ニ分解スル事ガ出來其單桁ガ垂直荷重カラ受クル力率ト同時ニ其兩端ニ於テ左右ニ連續シテ居ル爲メニ生ズル支點彎曲力率ヲ受クルモノトシテ連續桁ノ實際ノ狀態トナルノデアル,此單桁トシテ垂直荷重ニ因リ任意斷面ニ生ズル力率ヲ M_x^0, 剪力ヲ Q_x^0 ニテ表スモノトシ更ニ

$0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, n-1, n, n+1, \cdots\cdots$ ヲ支點

$l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots, l_{n-1}, l_n, l_{n+1}, \cdots\cdots$ ヲ徑間

$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, \cdots\cdots$ ヲ中間支點ノ彎曲力率

此中間支點力率ノ符號ニ關シテ其彈性線ガ突出側ヲ下方ニ向ケル場合ヲ正ト考ヘル。

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots\cdots, \beta_{n-1}, \beta_n, \beta_{n+1}, \cdots\cdots$ ヲ相隣レル二支點ヲ連結スル直線ガ水平線ト爲ス角

尙荷重ニ就イテハ集中荷重ニ對シPヲ用ヒコレニ其作用スル徑間ト同ジ接尾字 (Suffix) ヲ附シテ區別シ例ヘバ l_n 徑間ニ於ケルモノヲ P_n トシ其位置ヲ左支點ヨリ a_n,右支點ヨリ b_n ナル距離トス,又等布荷重ハ全徑間ニアルモノトシ q ニテ表シ其徑間ト同ジ接尾字ヲ附シ例ヘバ l_n 徑間ニアルモノヲ q_n トス,更ニ支點反力ニ就イテハ兩端ヲA, Bトシ中間支點ノ反力ヲ

$R_1, R_2, R_3, \cdots\cdots, R_{n-1}, R_n, R_{n+1}, \cdots\cdots$ トス。

Fig. 324ハコレラノ用ヒラルル文字ヲ圖示シタモノデアル。

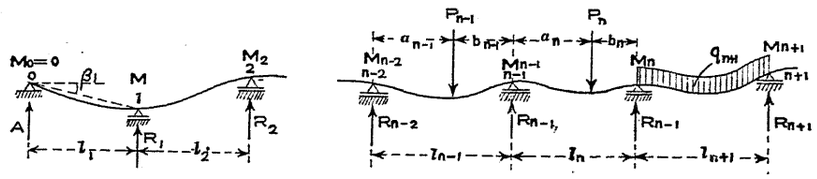


Fig. 324.

今第 n 徑間ヲ採リテ其平衡狀態ヲ考フ。

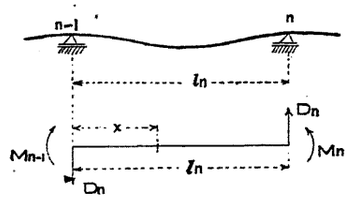


Fig. 325.

$n-1$ 及 n 支點ヲ切斷シテ n 徑間ヲ採リ其兩端支點ニ連續性(Continuity)ノ關係カラ存在セネバナラヌ力率ヲ M_{n-1} 及 M_n トスル,然ル時ハ其徑間ノ平衡ノ爲メニ單桁トシテ生ズル支點反力以外ニ D_n ナル反力ガ呼起サレナケレバナラヌ,卽チ

$$M_{n-1}-D_n.l_n-M_n=0$$

從ツテ支點力率ニ相當シテ生ゼナケレバナラヌ支點反力ハ

$$D_n=\frac{M_{n-1}-M_n}{l_n} \quad \cdots\cdots\cdots\

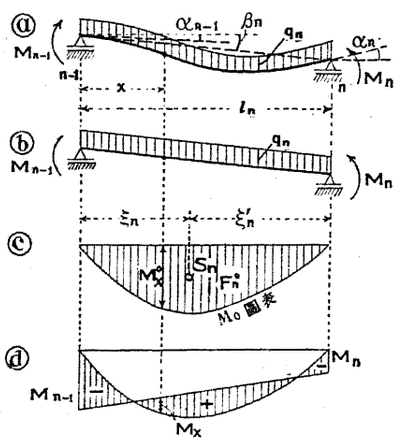


Fig. 326.

從ツテ今第n徑間ニ於ケル彎曲力率圖ヲ求メンニハ其徑間ニ作用スル荷重サヘ與ヘラレテ居レバ單桁トシテソ彎曲力率圖ハ容易ニ知リ得ラレ例ヘバ等布荷重ヲ受クル場合ニハ拋物線トナリ一個ノ集中荷重ヲ受クル場合ニハ三角形トナルガ故ニ此單桁トシテノ彎曲力率圖ニ兩端支點ニ於ケル力率ヲ加ヘテ直チニ連續桁トシテノ實際ノ彎曲力率圖ヲ求メ得ラルル理デアル (Fig. 326 ⓓ參照)。

今單桁トシテノ彎曲力率圖面積ヲ第n徑間ニ對シテF_n^oトシ其圖形ノ重心ノ$(n-1)$支點ヨリノ距離ヲξ_n,n支點ヨリノ距離ヲξ_n'トス,尙$(n-1)$支點ニ於ケル彈性線ヘノ切線ガ水平線ト爲ス角ヲα_{n-1},同ジクn支點ニ於テα_nトスレバ本章第二十節ニヨツテ

$$EI(\alpha_{n-1}-\alpha_n)=\int_o^l M_x\,dx$$

$$=F_n^o+M_{n-1}\frac{l_n}{2}+M_n\frac{l_n}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

尙n支點ト$(n-1)$支點トノ高差ハ$l_n\beta_n$ニテ表シ得ルガ故ニ$(n-1)$支點ニ於ケル彈性線ニ引カレタ切線ヨリn支點迄垂直ニ隔ツテ居ル距離ハ$l_n\alpha_{n-1}-l_n\beta_n$デアル,今連續桁ガ$(n-1)$支點ニ於ケル彈性線ノ位置ニ固定サレタモノト考ヘ此距離ダケ垂直ニ撓ミタルモノト考フレバ第二十二節ニ依リ明カニ

$$EI\delta=F.\xi',\quad \delta=l_n\alpha_{n-1}-l_n\beta_n$$

此式ニ前ニ求メタ値ヲ入レ

$$EI\,l_n(\alpha_{n-1}-\beta_n)=\int_o^l M_x(l_n-x)dx$$

$$=F_n^o\xi_n'+M_{n-1}\frac{l_n}{2}\frac{2}{3}l_n+M_n\frac{l_n}{2}\frac{l_n}{3}$$

從ツテ

$$EI\,\alpha_{n-1}=EI\,\beta_n+F_n^o\frac{\xi_n'}{l_n}+M_{n-1}\frac{l_n}{3}+M_n\frac{l_n}{6} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

以上ノ計算ハ第n徑間ニ就イテ行ツタノデアルガ其通リヲ其次ノ徑間卽チl_{n+1}ニ就イテ施セバ矢張リ(iv)式ノ如キ一ツノ方程式ヲ得ル,此方程式ハ上式ノnノ代リニ$n+1$ヲ置ケバ求メラレ

$$EI\,\alpha_n=EI\,\beta_{n+1}+F_{n+1}^o\frac{\xi'_{n+1}}{l_{n+1}}+M_n\frac{l_{n+1}}{3}+M_{n+1}\frac{l_{n+1}}{6} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(v)}$$

此(iv)式カラ(v)式ヲ引ケバ新シキ一ツノ方程式ヲ得ル,其求メタ方程式ノ左側項ハ(iii)式ノ左側項ニ等シ,故ニ各其右側項ヲ相等シト置キテ次ノ方程式ヲ得。

$$M_{n-1}l_n+2M_n(l_n+l_{n+1})+M_{n+1}l_{n+1}$$

$$=-6F_n^o\frac{\xi_n}{l_n}-6F^o{}_{n+1}\frac{\xi'_{n+1}}{l_{n+1}}-6EI(\beta_{n+1}-\beta_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(232)}$$

コレガ相連續スル三支點ノ彎曲力率ヲ結ビツケル一般式デアツテ右邊項ハ何レモ既知デアル,此式ヲ三點力率ノ定理 (Theorem of three moments)ト云フ。

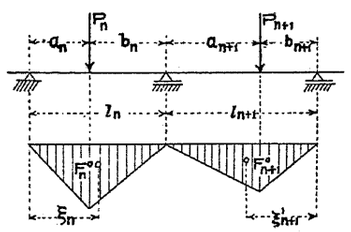


Fig. 327.

(a) 各徑間ニ集中荷重ノ作用スル場合。

各徑間ニ一個ノ集中荷重ノ作用ス

ル場合ニハ(Fig. 327 參照)。

$$F_n^o = \frac{1}{2} P_n a_n b_n$$

$$\xi_n = \frac{1}{2} l_n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} l_n - a_n\right) = \frac{1}{3}(l_n + a_n)$$

$$\therefore \quad 6F_n^o \frac{\xi_n}{l_n} = P_n \frac{b_n}{l_n} a_n (l_n + a_n)$$

$$6F_{n+1}^o \frac{\xi'_{n+1}}{l_{n+1}} = P_{n+1} \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}} b_{n+1}(l_{n+1} + b_{n+1})$$

之等ノ値ヲ (232)式ニ挿入スレバ

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1}$$

$$= -P_n \frac{b_n}{l_n} a_n (l_n + a_n) - P_{n+1} \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}} b_{n+1}(l_{n+1} + b_{n+1})$$

$$-6EI(\beta_{n+1} - \beta_n) \quad \cdots\cdots (233)$$

若シ各徑間ニ數多ノ集中荷重アル場合ニハ各荷重ニ因ツテ同樣ノ影響ヲ生ズルガ故ニ其各々ニ對シテ計算シタモノヲ加ヘ合セバヨイノデアル,卽チ

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1}$$

$$= -\frac{1}{l_n} \sum P_n a_n b_n (l_n + a_n) - \frac{1}{l_{n+1}} \sum P_{n+1} a_{n+1} b_{n+1}(l_{n+1} + b_{n+1})$$

$$-6EI(\beta_{n+1} - \beta_n) \quad \cdots\cdots (234)$$

(b) 各徑間ニ等布荷重ノ滿チタル場合。

今 n 徑間全體ニ q_n ナル等布荷重ガ作用スル時ハ(Fig. 328 參照)

$$F_n^o = \frac{2}{3} \frac{1}{8} q_n l_n^2 l_n = \frac{1}{12} q_n l_n^3$$

$$\xi_n = \xi_n' = \frac{1}{2} l_n$$

從ツテ

$$6F_n^o \frac{\xi_n}{l_n} = \frac{1}{4} q_n l_n^3$$

$$6F_{n+1}^o \frac{\xi'_{n+1}}{l_{n+1}} = \frac{1}{4} q_{n+1} l_{n+1}^3$$

此値ヲ (232)式ニ挿入スレバ

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1}$$

$$= -\frac{1}{4} q_n l_n^3 - \frac{1}{4} q_{n+1} l_{n+1}^3 - 6EI(\beta_{n+1} - \beta_n) \quad \cdots\cdots (235)$$

(c) 集中荷重及等布荷重ノ作用スル場合。

若シ幾ツカノ集中荷重ト全徑間等布荷重トガ同時ニ作用スル時ハ (234)式ニ於ケルPノ項ト(235)式ニ於ケル q ノ項トヲ加ヘ合セバヨイノデアル。

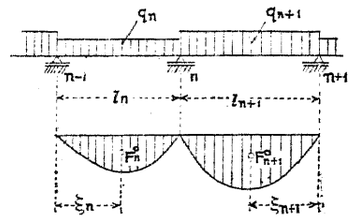


Fig. 328.

以上ノ方程式ニ於ケル右邊最後ノ項ハ支點ノ相對的位置ニ關スル項デアツテ若シモ支點ガ等高卽チ同一水平面內ニアレバ此項ハ消滅スルモノデアル。

(232) 式乃至 (235)式左邊ハ連續三支點ノ未知力率ヲ含ム項デアツテ三支點アル毎ニ此式一ツガ出來ル事トナリ n 支點アル桁ニ對シテハ三連續支點ノ力率ヲ含ムベキ方程式ガ $(n-2)$個ダケ出來ル事トナル,其外ニ兩端支點ノ狀態ヲ表ハス事ニヨツテ更ニ二式ヲ增ス事ガ出來ルノデアル,例ヘバ兩端ガ單純支持ナラバ

$$M_o = 0, \quad M_n = 0 \quad \text{ノ二式}$$

兩端ガ固定サルルナラバ傾斜ハ零トナルガ故ニ

$$\alpha_o = 0, \quad \alpha_n = 0 \quad \text{ノ二式ヲ增ス事ガ出來ルノデアル,從ツテ總計 } n \text{ 個ノ方程式ヲ得タノデアルカラ } n \text{ 個ノ支點力率ヲ解ク}$$

ニ充分デアル。

上述ノ如クニシテ不靜定ヲ除ク事ヲ得バ彎曲力率,反力及剪力等ノ爾後ノ計算ハ單桁ニ於ケルト同樣ニ行フ事ガ出來ル。

支點反力ノ計算ニ就イテ注意スベキハ與ヘラレタル荷重ヲ受クル單桁トシテノ反力ノ外ニ支點力率ニ因ツテ生ズル偶力ヲ加ヘネバナラヌ事デアル, Fig. 325 及 Fig. 329 ニ示ス如ク支點力率ニヨツテ l_n 徑間ノ兩端ニ生ズル反力 D_n ハ $(n-1)$ 支點ニ於テハ下向キニ n 支點ニ於テハ上向キニ働キ

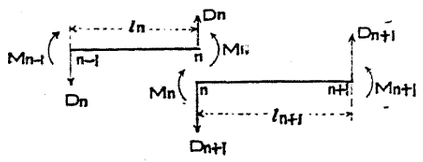


Fig. 329.

$$D_n=\frac{M_{n-1}-M_n}{l_n}$$

同樣ニ次ノ徑間ヲ考フレバ

$$D_{n+1}=\frac{M_n-M_{n+1}}{l_{n+1}}$$

ナル反力ガ n 支點ニ於テハ下向キニ $(n+1)$ 支點ニ於テハ上向キニ働ク事トナル,從ツテ n 支點ニ於テハ差引 D_n-D_{n+1} ナル上向反力ガ發生スルノデアツテ此反力ト單桁トシテノ n 支點ニ生ズル反力 R_n^o トヲ加フレバ連續桁ノ實際ノ反力トナルノデアル,故ニ n 支點ノ反力ハ

$$R_n=R_n^o+D_n-D_{n+1}$$

或ハ

$$R_n=R_n^o+\frac{M_{n-1}}{l_n}-M_n\left(\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\right)+\frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} \quad \cdots\cdots(236)$$

コレハ中間支點 n ニ於ケル反力デアツテ左端支點 0 ニ於テハ

其左側ニ徑間ナキヲ以テ唯 D_1 ナル下向反力ガ働クノミデアツテ

$$D_1=\frac{M_1}{l_1}$$

$$\therefore\quad A=R_1^o+\frac{M_1}{l_1}=A^o+\frac{M_1}{l_1} \quad \cdots\cdots(237)$$

任意徑間 n ニ於ケル任意點 x ノ彎曲力率ハ既ニ本節(ii)式ニ述ベタ所デアツテ

$$M_x=M_x^o+M_{n-1}\left(1-\frac{x}{l_n}\right)+M_n\frac{x}{l_n} \quad \cdots\cdots(238)$$

符號ニ關シテハ彈性線ノ突出側ヲ下向ニスル如キ彎曲力率ヲ正トスル,故ニ支點力率ハ何レモ負値ヲ有スルヲ知ル。

同樣ニシテ任意點ノ剪力ハ彎曲力率ノ微分係數ニ等シキ故ニ (238) 式ヲ微分シテ

$$Q_x=Q^\circ_x-\frac{M_{n-1}}{l_n}+\frac{M_n}{l_n} \quad \cdots\cdots(239)$$

計算例.　等高ナル四支點ヲ有スル連續桁ニ等布荷重ヲ受クル場合。

中央徑間ヲ l_2, 兩端徑間ヲ l_1 トセバ

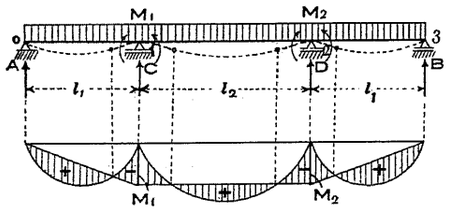


Fig. 330.

$M_0=0,\quad M_3=0,\quad M_1=M_2.$

故ニ (235) 式ニ $n=1$ ト置キ

$$0+2M_1(l_1+l_2)+M_1l_2=-\frac{1}{4}ql_1^3-\frac{1}{4}ql_2^3$$

$$\therefore\ M_1=-\frac{q}{4}\cdot\frac{l_1^3+l_2^3}{2l_1+3l_2}$$

(237) 式ヨリ

$$A=B=A^\circ+\frac{M_1}{l_1}=\frac{ql_1}{2}-\frac{q}{4l_1}\cdot\frac{l_1^3+l_2^3}{2l_1+3l_2}$$

從テ平衡條件ヨリ

$$C=D=q(l_1+\frac{1}{2}l_2)-A$$

徑間相等シキ場合ニハ $l_1=l_2=l$ ト置キ

$$M_1=M_2=-\frac{1}{10}ql^2$$

$$A=B=\frac{4}{10}ql,\quad C=D=\frac{11}{10}ql$$

第一徑間ニ於ケル剪力ハ左支點ヨリ x ノ點ニ於テ

$$Q_x=A-qx=\frac{4}{10}ql-qx$$

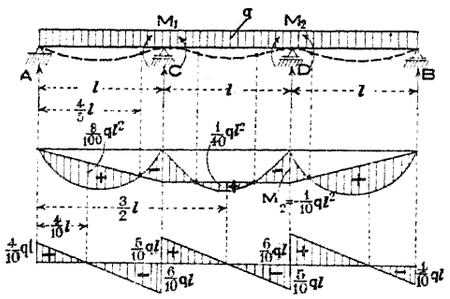


Fig. 331.

剪力圖ハ直線ニテ表ハサルル事ヲ知ル,而シテ $x=0$ ノ點即チ支點ニ於テハ $Q_x=A=\frac{4}{10}ql$ デアリ $x=\frac{4}{10}l$ ノ點ニ於テ $Q_x=0$ トナリ此點ヨリ右ハ負値トナル,第一徑間ノ右端ニテハ $Q_x=-\frac{6}{10}ql$ トナリ此點ニテ突然ニ $C=\frac{11}{10}ql$ ヲ增シ其結果 $+\frac{5}{10}ql$ トナル (Fig. 331 參照)。

第一徑間即チ A 及 C 支點間ニ於ケル最大彎曲力率ハ $\frac{dM_x}{dx}=0$ ニヨツテ求メラレ

$$M_x=\frac{4}{10}qlx-\frac{1}{2}qx^2,\quad \frac{dM_x}{dx}=\frac{4}{10}ql-qx=0$$

コレテ解キテ $x=\frac{4}{10}l$ (圖參照)。此點ノ彎曲力率ハ

$${}_{max}M'_{x=\frac{4}{10}l}=\frac{4}{10}ql\frac{4}{10}l-\frac{1}{2}q\left(\frac{4}{10}l\right)^2=\frac{8}{100}ql^2$$

彎曲力率ノ零ノ點ハ $M_x=\frac{4}{10}qlx-\frac{1}{2}qx^2=0$ ヨリ求メラレ $x=\frac{4}{5}l$.

第二徑間ニ於ケル彎曲力率ノ方程式ハ

$$M_{x_1}=\frac{4}{10}qlx_1+\frac{11}{10}ql(x_1-l)-\frac{1}{2}qx_1^2\quad (x_1\text{ ハ A ヨリノ距離})$$

或ハ

$$M_{x_2}=M_1+\frac{5}{10}qlx_2-\frac{1}{2}qx_2^2\quad (x_2\text{ ハ C ヨリノ距離})$$

前式ニヨリ最大彎曲力率ノ生ズル點ハ

$$\frac{dM_{x_1}}{dx_1}=\frac{4}{10}ql+\frac{11}{10}ql-qx_1=0$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{3}{2}l$$

最大彎曲力率ハ第二徑間ノ中央ニ求メラレ其量ハ

$${}_{max}M''_{x_1=\frac{3}{2}l}=\frac{4}{10}ql\frac{3}{2}l+\frac{11}{10}ql\left(\frac{3}{2}l-l\right)-\frac{1}{2}q\left(\frac{3}{2}l\right)^2=\frac{1}{40}ql^2,$$

以上計算シタル所ニヨリ ${}_{max}M'$ 及 ${}_{max}M''$ ハ單ニ相對的最大デアルニ過ギズ,全徑間ニ於ケル絶對最大彎曲力率ハ中央支點ニ發生シ其量ハ $-\frac{1}{10}ql^2$ 或ハ $-\frac{4}{5}\frac{ql^2}{8}$ トナル,若シ全徑間ガ不變斷面ヲ有スルトセバ所要斷面係數ハ $W=\frac{4}{5}\frac{ql^2}{8k}$ トナル,然ルニ今若シ三徑間ガ單獨ノ單桁ニテ作ラレ居ルモノトセバ $W'=\frac{ql^2}{8k}$ ヲ要スルガ故ニ其關係ハ $W=\frac{4}{5}W'$.

第八表ハ全徑間等布荷重ヲ受ケ等徑間ヲ有スル連續桁ニ於ケル各種ノ數値ヲ與フルモノデアル。

第八表　連續桁(等布荷重,等徑間)

表中 $R_0,R_1,R_2,\cdots\cdots$ 支點反力

$M_0,M_1,M_2,\cdots\cdots$ 支點(負)彎曲力率 ($M_0=0$)

${}_{max}M_1,{}_{max}M_2,\cdots$ 徑間內ノ最大彎曲力率

$x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots\cdots {}_{max}M_1,{}_{max}M_2,\cdots$ ノ最近左支點ヨリノ距離

$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\cdots\cdots$ 彈性線變曲點ノ最近左支點ヨリノ距離

l =徑間長　(徑間ハ皆相等シ)

q =荷重強度　(各徑間強度相等シク全徑間ニ滿載)

數値		支點數 3	4	5	6	7	8	9	單位
支點反力	R_0	0.3750	0.4000	0.3929	0.3947	0.3942	0.3944	0.3943	ql
	R_1	1.2500	1.1000	1.1428	1.1317	1.1346	1.1337	1.1340	〃
	R_2	—	—	0.9286	0.9736	0.9616	0.9649	0.9640	〃
	R_3	—	—	—	—	1.0192	1.0070	1.0103	〃
	R_4	—	—	—	—	—	—	0.9948	〃
支點彎曲力率	M_1	0.1250	0.1000	0.1071	0.1053	0.1058	0.1056	0.1057	ql^2
	M_2	—	—	0.0714	0.0789	0.0769	0.0775	0.0773	〃
	M_3	—	—	—	—	0.0865	0.0845	0.0850	〃
	M_4	—	—	—	—	—	—	0.0825	〃
徑間內最大彎曲力率	${}_{max}M_1$	0.0703	0.0800	0.0772	0.0779	0.0777	0.0778	0.0777	ql^2
	${}_{max}M_2$	—	0.0250	0.0364	0.0332	0.0340	0.0338	0.0339	〃
	${}_{max}M_3$	—	—	—	0.0461	0.0433	0.0440	0.0438	〃
	${}_{max}M_4$	—	—	—	—	—	0.0405	0.0412	〃
最大彎曲力率ノ位置	x_1	0.3750	0.400	0.3930	0.3947	0.3942	0.3944	0.3943	l
	x_2	—	0.500	0.5357	0.5264	0.5327	0.5281	0.5283	〃
	x_3	—	—	—	0.5000	0.4904	0.4930	0.4923	〃
	x_4	—	—	—	—	—	0.5000	0.5026	〃
變曲點ノ位置	ξ_1	0.7500	0.8000	0.7860	0.7894	0.7884	0.7887	0.7887	l
	ξ_2	—	0.2760	0.2659	0.2680	0.2675	0.2680	0.2680	〃
		—	0.7240	0.8055	0.7830	0.7899	0.7884	0.7890	〃
	ξ_3	—	—	—	0.1964	0.1960	0.1962	0.1960	〃
		—	—	—	0.8036	0.7850	0.7897	0.7880	〃
	ξ_4	—	—	—	—	—	0.2153	0.2150	〃
		—	—	—	—	—	0.7847	0.7900	〃

備考　桁中點ニ對シテ左右對稱ナルテ以テ左半部ニ對スル數値ノミテ表示ス。

第八表ニ示シタ彎曲力率ハ何レノ徑間ニモ相等シキ等布荷重例ヘバ死荷重ヲ受ケタ場合ニ對スル數値デアツテ動荷重ヲ受ケタ時ノ絶對最大彎曲力率デナイ事ハ勿論デアル,徑間內ノ正彎曲力率及支點ノ負彎曲力率ガ如何ナル荷重ヲ受ケテ最大トナルカ其量ハ如何ト云フ事ハ第九表ニ示ス所ニ據ツテ自ラ明カトナルデアラウ。

第九表* 連續桁(動荷重,等徑間)

表中　使用文字ハ第八表ニ於ケルト同ジ。

p 等布動荷重(各徑間等强度)。

q 等布死荷重(各徑間等强度トシ第八表ノ數値ヲ轉載ス)。

P 集中動荷重(等量ニシテ等間隔)。

Q 集中死荷重(等量ニシテ等間隔)。

荷重狀態	徑間內彎曲力率 $max M_1$,	$max M_2$	支點彎曲力率 M_1	單位	支點反力 R_0	R_1	單位
q 0.2l 0.6l 0.2l	0.070	0.070	**−0.125**	ql^2	0.375	1.25	ql
P	**0.096**	−0.025	−0.063	pl^2			
Q Q	0.156	0.156	**−0.188**	Ql	0.312	1.376	Q
P	**0.203**	−0.047	−0.094	Pl			
Q Q Q Q	0.222	0.222	**−0.333**	Ql	0.667	2.667	Q
P P	**0.278**	−0.056	−0.167	Pl			
Q Q Q Q Q	0.266	0.266	**−0.469**	Ql	1.04	3.92	Q
P P P	**0.383**	−0.117	−0.234	Pl			

	$max M_1$	$max M_2$	M_1	單位	R_0	R_1	單位
q 0.209l 0.2l	0.080	0.025	−0.100	ql^2	0.40	1.1	ql
p	**0.101**	−0.050	−0.050	pl^2			
p	−0.025	**0.075**	−0.050	pl^2			
p			**−0.117**	pl^2			

* H. Fuchs—Armierter Beton 1915. p. 181 參照。
H. Pedersen—Armierter Beton, 1918. p. 224 參照。

0.175	0.100	−0.150	Ql	0.35	1.15	Q
0.213	−0.075	−0.075	Pl			
−0.038	**0.175**	−0.075	Pl			
		−0.175	Pl			
0.244	0.067	−0.267	Ql	0.734	2.27	Q
0.289	−0.133	−0.133	Pl			
−0.044	**0.200**	−0.133	Pl			
		−0.311	Pl			
0.313	0.125	−0.375	Ql	1.125	3.375	Q
0.406	−0.188	−0.188	Pl			
−0.094	**0.313**	−0.188	Pl			
		−0.438	Pl			

	$max M_1$	$max M_2$	$max M_3$	$max M_4$	M_1	M_2	M_3	單位	R_0	R_1	R_2	單位
q 0.212l 0.2l 0.211l	0.077	0.036	0.036	0.077	−0.107	−0.0714	−0.107	ql^2	0.39	1.14	0.94	ql
	0.100	−0.045	**0.081**		−0.054	−0.036	−0.054	pl^2				
P					**−0.121**	−0.018	−0.058	pl^2				
P					−0.036	**−0.107**	−0.036	pl^2				
Q Q Q Q	0.169	0.116	0.116	0.169	−0.161	−0.107	−0.161	Ql	0.34	1.20	0.92	Q
P P	**0.210**	−0.067	**0.183**	−0.040	−0.080	−0.054	−0.080	Pl				
P P P					**−0.181**	−0.027	−0.087	Pl				
P P					−0.054	**−0.161**	−0.054	Pl				
	0.238	0.111	0.111	0.238	−0.286	−0.191	−0.286	Ql	0.72	2.38	1.81	Q
	0.286	−0.111	**0.222**	−0.048	−0.143	−0.095	−0.143	Pl				
					−0.321	−0.048	−0.155	Pl				
					−0.095	**−0.286**	−0.095	Pl				
	0.299	0.165	0.165	0.299	−0.402	−0.268	−0.402	Ql	1.1	3.55	2.7	Q
	0.400	−0.167	0.333	−0.101	−0.201	−0.134	−0.201	Pl				
					−0.452	−0.067	−0.218	Pl				
					−0.134	−0.402	−0.134	Pl				

	$max M_1$	$max M_2$	$max M_3$	M_1	M_2	M_3	M_4	單位	R_0	R_1	R_2	單位
q												
p	0.0781	0.0331	0.0462	−0.105	−0.079	−0.079	−0.105	ql^2	0.3947	1.317	0.9736	ql
	0.100	−0.0461	**0.0855**	−0.053	−0.040	−0.040	−0.053	pl^2				
	−0.0263	**0.0787**	−0.0395	−0.053	−0.040	−0.040	−0.053	pl^2				
				−0.119	−0.022	−0.044	−0.051	pl^2				
				−0.035	**−0.111**	−0.020	−0.057	pl^2				
Q Q Q Q Q	0.171	0.112	0.132	−0.158	−0.118	−0.118	−0.158	Ql	0.342	1.1985	0.96	Q
P P P	**0.211**	−0.069	**0.191**	−0.79	−0.059	−0.059	−0.079	Pl				
	−0.039	**0.181**	−0.059	−0.079	−0.059	−0.059	−0.079	Pl				
				−0.179	−0.032	−0.066	−0.077	Pl				
				−0.052	**−0.167**	−0.031	−0.086	Pl				
	0.240	0.100	0.122	−0.281	−0.211	−0.211	−0.281	Ql	0.718	2.351	1.93	Q
	0.287	−0.117	**0.228**	−0.140	−0.105	−0.105	−0.140	Pl				
	−0.047	**0.216**	−0.105	−0.140	−0.105	−0.105	−0.140	Pl				
				−0.319	−0.057	−0.118	−0.137	Pl				
				−0.093	**−0.297**	−0.054	−0.153	Pl				
	0.302	0.155	0.204	−0.395	−0.296	−0.296	−0.395	Ql	1.105	3.790	2.660	Q
	0.401	−0.173	**0.352**	−0.198	−0.148	−0.148	−0.198	Pl				
	−0.099	**0.327**	−0.148	−0.198	−0.148	−0.148	−0.198	Pl				
				−0.449	−0.081	−0.166	−0.193	Pl				
				−0.130	**−0.417**	−0.076	−0.215	Pl				

(d) 連續桁圖式解法

任意荷重ヲ受ケタ連續桁ノ解法ハ圖式的ニ行フガ最モ簡單デアル,其作圖方法ヲ說明スルニ先ツテ先ヅFig. 332ニ於テ任意徑間l_rニ任意ノ荷重ヲ受ケタ場合ヲ考ヘ假ニ求ムル彎曲力率圖ヲ@圖ノ如キモノト假定シ其色々ノ性質ニ就イテ調ベテ見ヤウ,第二十二節ニ說明シタル如ク彎曲力率圖面積ヲ荷重ト考ヘテコレニ對スル平衡多邊形ヲ作圖スレバ夫レガ其桁ノ彈性線ヲ示スモノデアル,此原理ハ連續桁ニモ適用スル事ガ出來ル筈デアツテ連續

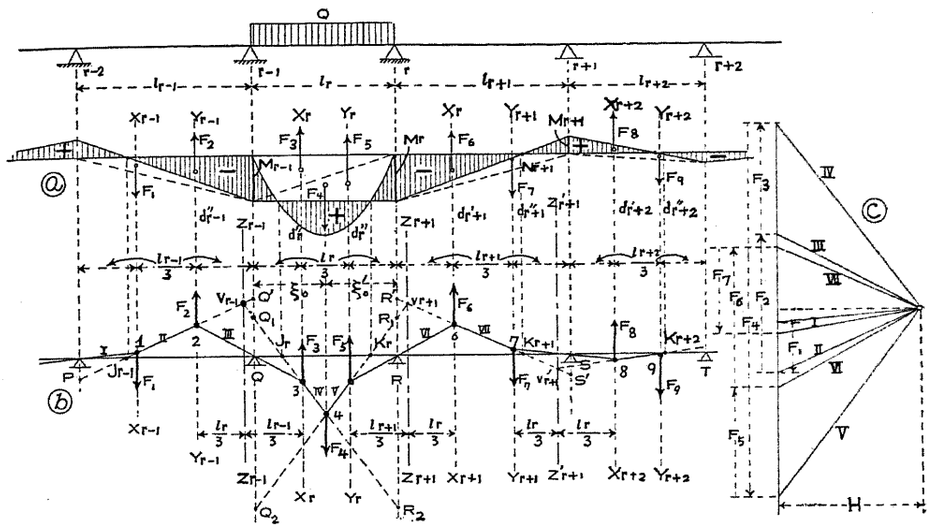


Fig. 332.

桁ノ解法トシテハ彈性線全部ノ形狀ヲ求ムルノ必要ハ無ク單ニ其彈性線ニ對スル支點切線ノミガ求メ得ラルレバ充分ナノデアル,コレヲ利用シテ彎曲力率圖ヲ求メル事ガ出來ル。

Fig. 332 @ ニ於テ實線ニテ示シタ圖形ヲ求ムル彎曲力率圖ト假定シ之ヲ圖上點線デ示シタ如ク各徑間ヲ其高サトスル三角形ニ分割シテ各其面積ヲ F_1, F_2, F_3, F_5, トスレバ F_4 ダケハ外荷重Qニ因ツテ單桁ト考ヘタ時ニ生ズル彎曲力率圖デアツテ一般ニハ三角形トナラナイ,且ツコレハ簡單ニ我々ガ求メ得ルモノデアル,分割サレタ面積 F_1, F_2……ハ各其重心ガ徑間三分點ニ存在スル事ハ前章ニ於テ固定桁ノ圖式解法ニ就イテ說明シタ通リデアツテ此ノ F_1, F_2,……ヲ荷重ト考ヘテ示力線ニ表ハシ極距Hヲ採ツテ極射線

ヲ記入シ(Fig. 332 ⓒ 參照)コレニ相當スル平衡多邊形ヲ ⓑ 圖ニ作レバコレガ彈性線多邊形ニ外ナラナイノデアツテ P,Q,R ノ各支點ヲ通過スル如ク作圖シタモノトスレバ其 $\overline{23}$,$\overline{56}$,$\overline{78}$ 等ノ邊ハ各支點ニ於ケル彈性線ヘノ切線ヲ與ヘルモノデアル,各三角形ノ重心ヲ通ズル垂直線 X,Y ヲ**三分線** (Third line) ト云フ,多邊形ノ邊 $\overline{12}$ 及 $\overline{34}$ ヲ延長スレバ交點 v_{r-1} ヲ生ズル,此 v_{r-1} ナル點ハ明カニ荷重 F_2 ト F_3 トノ合成力ノ作用スル點ト考ヘ得ルガ故ニ其點ヲ通ズル圖上鎖線デ示シタ垂直線 Z_{r-1} ハ $\overline{23}$ ナル邊ヲ此二ツノ荷重 F_2 及 F_3 ノ逆比ノ割合ニ分割スル筈デアル,而シテ $\overline{23}$ ノ邊ノ水平長ハ $\frac{l_{r-1}}{3}+\frac{l_r}{3}$ デアリ $\frac{F_3}{F_2}=\frac{\frac{1}{2}M_{r-1}l_r}{\frac{1}{2}M_{r-1}l_{r-1}}=\frac{\frac{1}{3}l_r}{\frac{1}{3}l_{r-1}}$ デアル故ニ ⓑ 圖ニ示シタ如ク Z_{r-1} ナル垂直線ハ其左及右徑間ノ三分線カラ各々 $\frac{1}{3}l_r$ 及 $\frac{1}{3}l_{r-1}$ ナル距離ニ(左右徑間ノ逆比トナル)隔ツテ居ル事ヲ知ル,コノ Z_{r-1} ノ垂直線ヲ**逆三分線** (Inverted third line) ト云フ,全ク同樣ニ他ノ支點ニ就イテ左右徑間ノ $\frac{1}{3}$ 宛ヲ各三分線カラ逆ニ採ル事ニヨツテ容易ニ他ノ逆三分線 Z_{r+1} 及 Z'_{r+1} ヲ得ルノデアル。

三角形 $23v_{r-1}$ ノ $\overline{3v_{r-1}}$ ナル邊ハ QR ナル水平線ヲ J_r 點デ切ル,此點ハ幾何學的ニ容易ニ證明セラルル如ク不動點デアツテ $\overline{12}$ ナル邊ガ J_{r-1} ナル點ヲ通過シ $\overline{23}$ ナル邊ガ Q 點ヲ通過シ同時ニ三角形 $23v_{r-1}$ ノ三項點ガ各々 Y_{r-1}, X_r 及 Z_{r-1} ノ線上ヲ動ク時ニハ J_r ハ必ズ同一點トナル,此點ヲ**固定點** (Fixed point) ト云フ,全ク同樣ニ $\overline{12}$ ナル邊ガ PQ 線ヲ切ル點ニヨツテ J_{r-1} ノ固定點ガ與ヘラレ更ニ多邊形ノ他ノ邊ガ支點線ヲ切ル事ニヨツテ K_r,K_{r+1},K_{r+2} 等ノ固定點ガ與ヘラレル。

固定點ハ荷重ナキ徑間ニ於テハ作圖上特ニ重要ナル意義ヲ有スルモノデアツテ今 l_{r+1} 徑間ノ固定點 K_{r+1} ニ就イテ考察シテ見ルニ,$\overline{67}$ ナル邊ヲ左右支點迄延長シ各支點ニ於テ RR′ 及 SS′ ナル長ヲ切ルモノトス,然ル時ハ作圖上ノ關係カラ明カナル如ク

$$H.RR'=F_6\frac{l_{r+1}}{3},\quad H.SS'=F_7\frac{l_{r+1}}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{F_6}{F_7}=\frac{RR'}{SS'}$$

ヲ得ベク又一方

$$F_6=\frac{1}{2}M_r.l_{r+1},\quad F_7=\frac{1}{2}M_{r+1}.l_{r+1}$$

$$\therefore\quad \frac{F_6}{F_7}=\frac{M_r}{M_{r+1}}=\frac{RR'}{SS'}$$

此事實ハ固定點 K_{r+1} ガ丁度彎曲力率ノ零ナル點 N_{r+1} ノ眞下ニアル事ヲ示スモノデアル,全ク同樣ノ事實ハ荷重ヲ受クル徑間 l_r ヨリ左側徑間ニ於ケル固定點 J_{r-1} ニ對シテモ同樣デアル,從ツテ一般的ニ云ヒテ荷重徑間ヨリ右側ニアル徑間(無荷重ノ) l_{r+1} ニ於ケル固定點 K_{r+1} ハ其徑間ノ彎曲力率ガ零ナル點ヲ示シ全ク同樣ニ荷重ヨリ左側ニアル徑間 l_{r-1} ニ於ケル固定點 J_{r-1} ハ此徑間ノ彎曲力率ガ零ノ點ヲ示ス事ヲ知ル。

連續桁最終徑間ニ於ケル固定點ハ次ノ如シ。

(1) 最終支點ガ自由端ナル時ハ固定點ハ支點ト一致ス,從ツテ此場合ノ作圖ハ極メテ容易デアツテ Fig. 333 ニ示ス如ク兩端支點カラ始メテ簡單ニ固定點ヲ決定シ得ル,其左端カラ始メタ作圖ニヨツテ J ガ決定セラレ右端ヨリ始メタ作圖ニヨツテ K ガ決定セラレル,例ヘバ Fig. 333 ニ於テ先ヅ三分線及逆三分線ヲ作圖シタル後 A

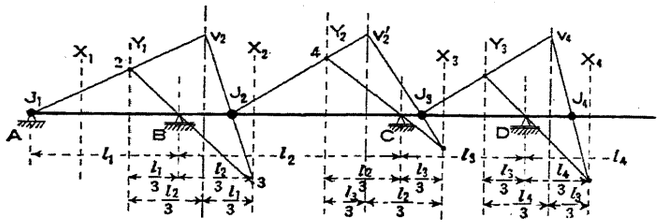


Fig. 333.

(J₁)ヨリ始メ任意方向ニ Av_2 ヲ引キ求メラレタ2トBトヲ結ンデ延長シ3ヲ得ル,此3トv_2トヲ結ベバ第二徑間ノ固定點J_2ヲ求メル事ガ出來ル。

(2)最終支點ガ固定端ナル時ハ固定點ハ其固定支點ヨリ三分ノ一徑間ノ點ニ存在ス,從ツテ固定點ノ作圖モ簡單ニ行ハレル。

以上ハ荷重無キ徑間ニ就イテノ說明デアルガ次ニ荷重ヲ受ケタ徑間l_rニ就イテ說明ヲ進メヤウ。

今Fig. 332ノ荷重徑間l_rニ於ケル外荷重Qニ因ル單桁トシテノ彎曲力率圖面積ヲF_4トセバ©圖ニ明カナル如ク此F_4ノ兩端ヲ劃スル極射線ハIV及V卽チ平衡多邊形ノ$\overline{34}$及$\overline{45}$デアル,此二邊ヲ延長シ其左右支點ニ於テ切ツタ長ヲQ_1Q_2及R_1R_2トスレバ此F_4ガ左右支點ニ對スル靜力率ハ極距ヲHトシテ夫々

$$F_4.\frac{l_r}{2}=H.\overline{Q_1Q_2},\quad F_4.\frac{l_r}{2}=H.\overline{R_1R_2}.$$

故ニQ_1Q_2及R_1R_2ノ長ハ其徑間ニ作用スル荷重Qノミニ關スル數値デアツテ容易ニ求メ得ラレルモノデアル,此場合Q_1R_2及Q_2R_1ノ斜線ヲ**十字線**(Cross line)ト云ヒJ_r及K_rノ二點ヲ通ル事ヲ知ル。

極距Hノ採リ方ハ任意デアルガ今十字線ガ支點上ニ切ツタ長ニヨツテ$QQ_1=M_{r-1}$, $RR_1=M_r$ヲ直接圖示サレル樣ニ採ル事ヲ得レバ一層便利デアル,此爲メニHヲ如何ニ採レバヨイカト云フニF_4ニ隣レル$F_3=\frac{1}{2}M_{r-1}.l_r$, $F_5=\frac{1}{2}M_r.l_r$デアリ其支點ニ對スル靜力率ハ夫々

$$F_3\frac{l_r}{3}=M_{r-1}\frac{l_r^2}{6},\quad F_5\frac{l_r}{3}=M_r\frac{l_r^2}{6}$$

然ルニ作圖上ノ關係ヨリ

$$F_3\frac{l_r}{3}=H.\overline{QQ_1},\quad F_5\frac{l_r}{3}=H.\overline{RR_1}$$

此二式ヲ夫々等シク置キ

$$M_{r-1}\frac{l_r^2}{6}=H.\overline{QQ_1},\quad M_r\frac{l_r^2}{6}=H.\overline{RR_1},$$

今若シ$QQ_1=M_{r-1}$, $RR_1=M_r$ナラシメル樣ニ極距Hヲ採ランニハ明カニ$H=\frac{l_r^2}{6}$ナラシムレバヨイ事ヲ知ル,此値ニ採ツタ時ニハQ_1Q_2及R_1R_2ノ値モ從ツテ決定セラレル筈デアツテ此値ヲTデ表セバ

$$\left.\begin{aligned}T'=Q_1Q_2&=\frac{F_4\xi_o}{H}=\frac{6F_4\xi_o}{l_r^2}\\T''=R_1R_2&=\frac{F_4\xi_o'}{H}=\frac{6F_4\xi_o'}{l_r^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(240)$$

コレヲ**支點垂線高**(Support vertical)ト云フ,色々ナ荷重ニ對シテ此垂線高ノ値ヲ計算スレバ次ノ如シ。

全徑間等布荷重ニ對スル支點垂線高ハ

$$T=T'=T''=\frac{1}{4}ql^2=2M_m\quad\cdots\cdots(241)$$

左支點ヨリ$a\ (=l-b)$ノ點ニ集中荷重ヲ受ケタ時ノ支點垂線高ハ

$$T'=\frac{Pa(l^2-a^2)}{l^2},\quad T''=\frac{Pb(l^2-b^2)}{l^2}\quad\cdots\cdots(242)$$

左支點ヨリa_1及a_2ノ範圍內ニ等布荷重ヲ受ケタ時ニハ

$$\left.\begin{aligned}T'&=\frac{q}{4l^2}(a_2^3-a_1^3)(2l^2-a_1^3-a_2^3)\\T''&=\frac{q}{4l^2}(b_2^3-b_1^3)(2l^2-b_1^3-b_2^3)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(243)$$

式中 $b_2=l-a_1$, $b_1=l-a_2$.

此等布荷重ガ左支點迄及ブ時ニハ $a_1=0$, $a_2=a=\nu l$ トシテ

$$\left.\begin{aligned} T' &= \nu^2(2-\nu^2)\frac{ql^2}{4} = \nu^2(2-\nu^2)T \\ T'' &= \nu^2(2-\nu)^2\frac{ql^2}{4} = \nu^2(2-\nu)^2T \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(244)$$

茲ニ簡單ナル解法例ヲ示シテ上ニ述ベタ説明ノ足ラザル所ヲ補フ事トスル。

(1) **五支點ノ連續桁ニ等布荷重ヲ受クル場合。**

Fig. 334 ⓐ ニ就イテ其作圖順序ヲ説明センニ先ヅ單桁トシテノ彎曲力率圖(拋

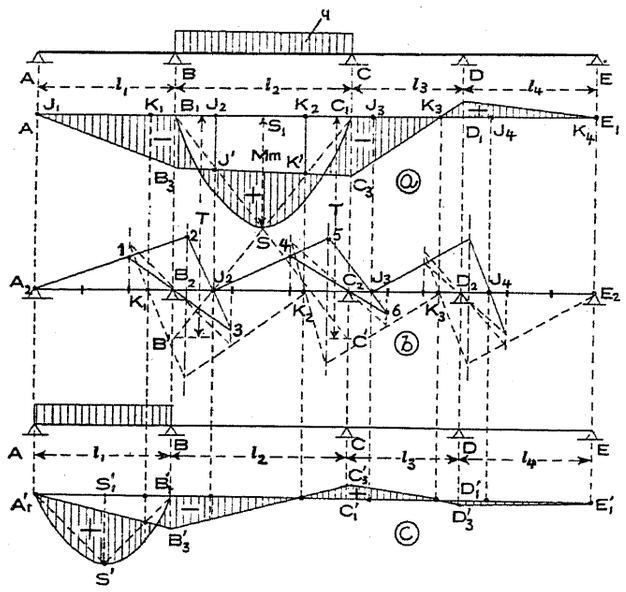


Fig. 334.

物線)テ荷重徑間ニ作圖スル,其頂點高ハ明カニ $SS_1=M_m=\frac{1}{8}ql_2^2$ デアリ支點垂線高ハ $B_1B'=C_1C'=T=\frac{1}{4}ql_2^2=2M_m$ デアル故ニ此ノ値テ支點上ニ採リ十字線 B_1C' 及 $B'C_1$ テ引ケバ S テ通ルテ見ル,次ニ ⓑ 圖ニ於テ A_2 ヨリ始メテ任意方向テ有スル

直線テ引キ其三分線及逆三分線テ切ル點テ 1,2 トシ 1 ト B_2 トテ結ブ直線ト次ノ徑間ニ於ケル三分線トノ交點 3 テ求メ 2 ト 3 トテ結ブ時ハ l_2 徑間ノ一方ノ固定點 J_2 テ得ル,更ニ J_2 テ通ジ任意方向ノ直線ト他ノ三分線及逆三分線トノ交點テ 4 及 5 トセバ 4 ト C_2 トテ結ブ直線テ延長シ l_3 徑間ノ三分線トノ交點 6 テ得 5 ト 6 トテ結ベバ固定點 J_3 テ得ル,同樣ニシテ J_4 テ作圖シ得ベク又他端 E_2 ヨリ同樣ノ作圖テ始メテ行ケバ容易ニ他ノ固定點 K_3, K_2, K_1 テ決定スル事ガ出來ル。

固定點 J_2 及 K_2 カラ垂線テ立テ十字線トノ交點 J' 及 K' テ求メコレテ結ブ J'/K' 線ガ支點上ニ切ル點テ B_3 及 C_3 トセバ

$$B_1B_3=M_B,\quad C_1C_3=M_C$$

トナル,斯クテ A_1 ト B_3, C_3 ト K_3 トテ結ベバ圖示ノ如キ求ムル彎曲力率圖テ得ル。

上述ノ場合ニハ必ズシモ支點垂線テ置クテ要シナイ,拋物線頂點 S テ利用シテ十字線テ引キ得ル事勿論デアル。

ⓒ 圖ハ l_1 徑間ニ荷重テ受ケタ時ノ解法テ示ス。

數多徑間ニ荷重テ受クル時ニハ其各々ニ對シテ解法テ行ヒ其求メタ支點彎曲力率ノ總和テ求ムレバヨイ。

(2) **一個ノ集中荷重ヲ受クル場合。**

此場合ニハ單桁トシテ生ズル彎曲力率圖ハ三角形トナリ其荷重下ニ生ズル最大縱距ハ $M_m=GG_1=\frac{Pab}{l_2}$ デアル,次ニ Fig. 335 ⓐ ニ示ス支點垂線高 T' 及 T'' ハ (242) 式ニ示ス如ク

$$T' = \frac{Pab(l_2+a)}{l_2^2} = \frac{Pab}{l_2}\cdot\frac{l_2+a}{l_2} = M_m\frac{l_2+a}{l_2}$$

$$T'' = \frac{Pab(l_2+b)}{l_2^2} = \frac{Pab}{l_2}\cdot\frac{l_2+b}{l_2} = M_m\frac{l_2+b}{l_2}$$

此式ニ據レバ T',T'' ハ作圖上極メテ容易ニ求メラレル,即チ G_1 點ヨリ左右ヘ l_2 ノ距離テ採ツテ F_1 及 F_2 テ作リ F_1G 及 F_2G ノ延長線ガ支點垂直線上ニ切ル點テ C_2 及 B_2 トセバ相似三角形ノ關係カラ

$$B_1B_2 = G_1G\frac{l_2+a}{l_2} = M_m\frac{l_2+a}{l_2} = T'$$

$$C_1C_2 = G_1G\frac{l_2+b}{l_2} = M_m\frac{l_2+b}{l_2} = T''$$

或ハ又 ⓑ 圖ニ示ス如ク $B_1G'=G_1G$ ト採リ C_1G' ニ平行ニ G テ通ジテ GB_2 テ引キ B_2 テ作レバ $B_1B_2=T'$ トナリ同樣ニ $C_1G''=G_1G$ トシテ $GC_2 \parallel B_1G''$ ニ作ツテ C_2 テ得バ $C_1C_2=T''$ トナル,此事實ハ GB_2 ナル線ガ ⓐ 圖ノ F_2B_2 ト一致スル事ニヨツテ容易

ニ證明シ得ラレル。

斯クテ B_2, C_2 ノ二點ヲ決定シタ後 B_1C_2 及 B_2C_1 ノ十字線ヲ作リ固定點 J_2, K_2 カラ

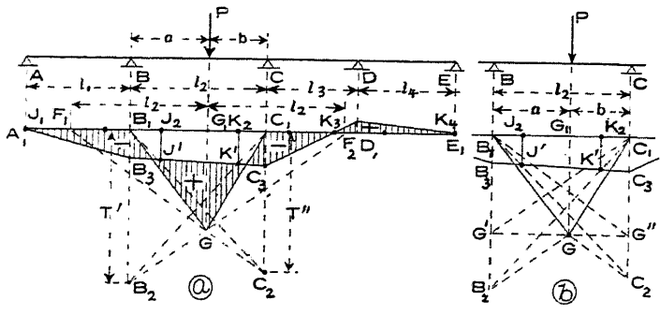


Fig. 335.

下シタ垂線トノ交點ヲ J′,K′ トスレバ J′,K′ ヲ結ブ直線ヲ延長シテ支點垂直線上ニ支點彎曲力率 $B_1B_3=M_B$ 及 $C_1C_3=M_C$ ヲ得ル事トナル。

(3) 部分荷重ヲ受クル場合。

Fig. 336 ⓑ ニ示力線 $ab=ql$ ト置キ任意ノ極 O′ ヲ設ケテ極射線 aO' 及 bO' ニ平行ニ C_1S' 及 D_1S' ヲ引ケバ此二邊ハ單桁トシテ全徑間荷重ヲ受ケタ時ノ彎曲力率圖(拋物線)ニ對スル切線ニ相當スル。

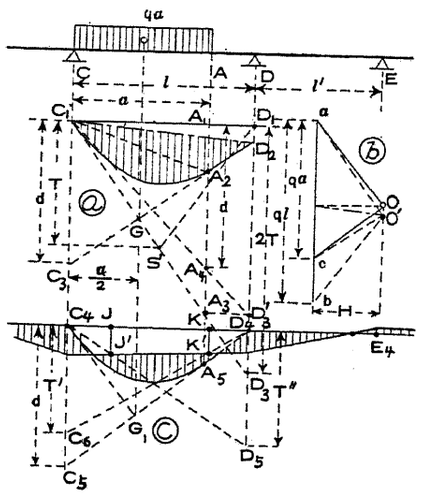


Fig. 336.

ⓑ 圖ニ $ac=qa$ ヲ採リ aO' 及 cO' ニ平行ニ ⓐ 圖ニ C_1G 及 D_2G ヲ作レバ部分荷重ニ對スル彎曲力率圖ガ C_1GA_2 ニ内接スル拋物線ト A_2D_2 ナル直線トカラ成立ツ事ヲ知ル,尤モ G ハ qa ナル荷重ノ重心ト一致スベキ筈デアル,此彎曲力率圖ノ閉合線 C_1D_2 ハ水平ニナツテ居ナイ故ニ不都合デアル,コレヲ水平ニスルニハ本章第十一節 (III) ニ於テ説明シタ作圖方法ニ據ツテ極 O′ ヲ O ニ移シ其極射線 aO 及 cO ニ平行ニ平衡多邊形即チ彎曲力率圖ヲ作ルモヨイガ又次ノ如キ簡單ナル方法ヲ用

ユル事モ出來ル。

今 ⓐ 圖 D_2G ヲ延長シテ C 支點垂線ト C_3 ニ交ラシムレバ ⓐ 圖ノ C_1C_3G ト ⓑ 圖ノ acO' トハ相似デアルカラ

$$d:\frac{a}{2}=qa:H \qquad \therefore\ d=\frac{qa^2}{2H}$$

然ルニ全徑間ニ荷重サレタ場合ニ對シ ⓐ 圖 D_1D_3S' ト ⓑ 圖 abO' トノ相似關係カラ

$$2T:\frac{l}{2}=ql:H \qquad \therefore\ H=\frac{ql^2}{4T}$$

此二式カラ

$$d=\frac{qa^2}{2H}=\frac{qa^2}{2}\cdot\frac{4T}{ql^2}=2\left(\frac{a}{l}\right)^2T=2\nu^2T$$

此 d サヘ求メラルレバ別ニ ⓑ 圖ヲ作圖セズトモ最初カラ直接ニ彎曲力率圖ヲ作リ得ル筈デアル,今 $D_1D_3=2T$ ト採リ C_1D_3 線ト A 點カラノ垂線トノ交點ヲ A_3 トシ A_3 ヲ水平ニ D_3' ニ移シ更ニ C_1D_3' 線ト A 點ノ垂線トノ交點ヲ A_4 トセバ $A_1A_4=d$ トナル,何トナレバ

$$A_1A_4=D_1D_3'\frac{a}{l}=A_1A_3\frac{a}{l}=D_1D_3\left(\frac{a}{l}\right)^2=2\nu^2T=d.$$

實際ノ作圖ニ當ツテハ先ヅ ⓒ 圖ニ於テ $C_4C_5=d$ ト採リ C_5A_5 及 C_4G_1 ヲ切線トスル拋物線ヲ作圖シテ單桁トシテノ彎曲力率圖ヲ得ル,次ニ支點垂線高ヲ (244) 式カラ

$$C_4C_6=T'=\nu^2(2-\nu^2)T,\quad D_4D_5=T''=\nu^2(2-\nu)^2T$$

ニ採リ十字線 C_4D_5 及 C_6D_4 ヲ引ケバ固定點 J 及 K ニ相當シテ J′ 及 K′ ヲ十字線上ニ得ベクコレヲ結ブ J′K′ 線ニヨツテ支點彎曲力率 M_C 及 M_D ヲ得ル。

(4) 移動荷重ニ對スル影響線。

移動荷重ヲ受クル構造物ノ解法ハ影響線 (Influence line) ヲ用ヒテ行フガ最モ簡單デ且ツ便利ナル事ハ既ニ第十二節ニ於テ詳述シタ通リデアル,茲ニ連續桁任意點ノ彎曲力率及剪力ノ影響線ヲ作圖スル方法ニ就イテ例ヲ以テ説明シヤウ。

(a) 支點彎曲力率ノ影響線。

Fig. 335 ニ於テ一個ノ集中荷重ノ作用シタ場合連續桁ノ任意點ニ生ズル彎曲力率ヲ求メル方法ヲ説明シタ,今此荷重ノ位置ヲ種々移動セシメ且ツ荷重トシテ P=1 (1*ton* 又ハ 1*lb*) ヲ採ルモノトシテ各々ノ場合ニ或定點ニ生ズル彎曲力率ノ値ヲ求メコレヲ其荷重ノ位置ニ縱距トシテ圖示スレバ茲ニ一ツノ曲線ヲ得ル

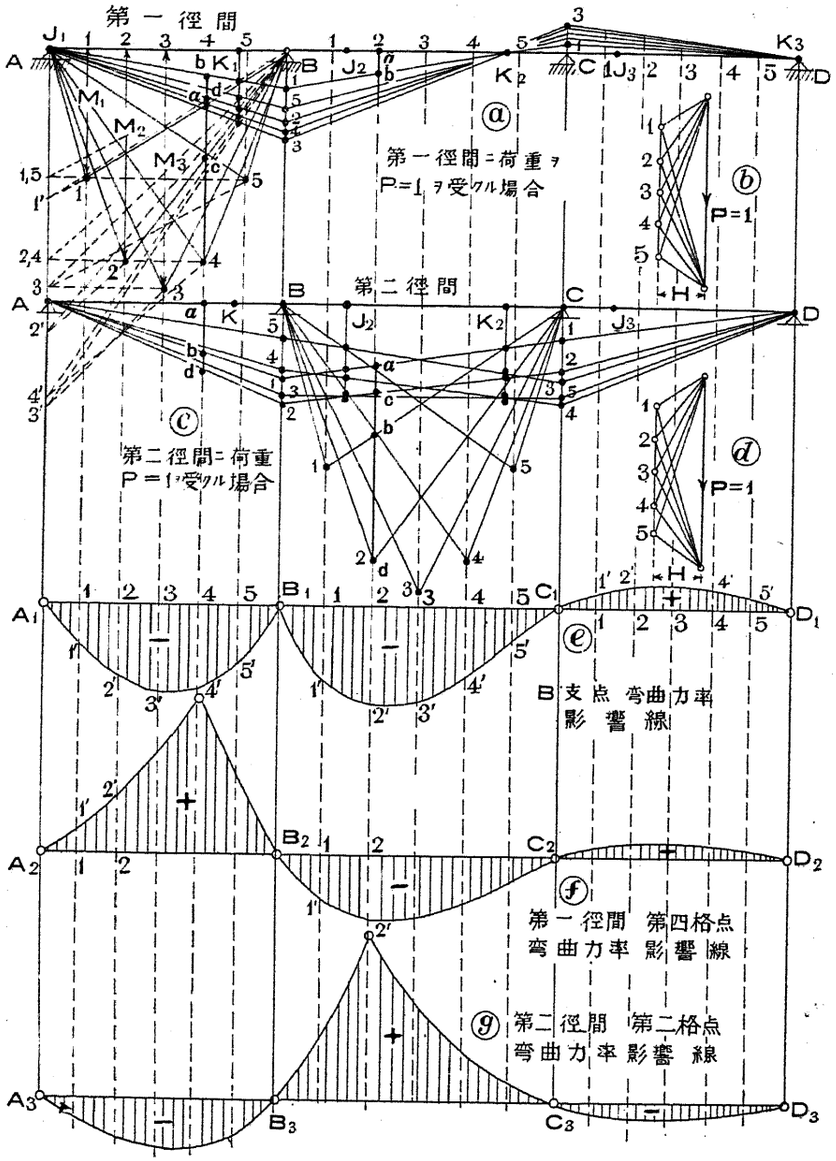


Fig. 337.

コレ卽チ其定點ニ對スル彎曲力率ノ影響線デアル。

Fig. 337 ハ四支點ヲ有スル連續桁ヲ示ス,今第一徑間ヲ五等分シタモノトシ各分劃點ニ荷重ノ存在スル時ノ單桁トシテノ彎曲力率圖ヲ書ク事第十五節ニ於テ Fig. 217 ヲ以テ說明シタル如クスル,卽チ先ヅ示力線ⓑニ於テ(Fig. 337 參照)P=1 ヲ採リ荷重位置ガ格點 1, 2, 3,……ニ存在スルニ對シテ各々閉合線ガ水平トナル樣ニ同一極距 H ヲ有スル極 1, 2, 3,……ヲ選定シコレニ對シテ平衡多邊形ヲ作圖スレバⓐ圖第一徑間ニ示シタ圖形ヲ得ル,コレハ單桁トシテノ彎曲力率圖デアルカラコレニ對シテ十字線ヲ作リ第一徑間ノ固定點 J_1(A ト一致ス)及 K_1 カラ立テタ垂線ト此單桁トシテノ彎曲力率圖トノ交點ヲ求メコレヲ結ブ線ガ B 支點ノ垂線ト交ル點ヲ 1, 2, 3,……トスレバ B1.B2,B3,……ハ荷重 P=1 ガ格點 1,2,3,……ニ作用スル時ノ M_B ヲ示スモノニ外ナラナイ,此荷重ニ對スル第二第三徑間ノ彎曲力率圖ノ作圖ハ極メテ容易デアツテ此 M_B ヲ限定スル 1,2,……ノ點ヲ第二徑間ノ固定點 K_2 及第三徑間ノ固定點 K_3 (D ト一致ス)ニ結ベバヨイ。

全ク同樣ニシテ第二徑間ニ荷重 P=1 ノ作用スル場合ヲ考ヘンニハ此第二徑間ヲ五等分シタモノトシ各格點ニ荷重ノ作用スル場合ニ對スル單桁トシテノ彎曲力率圖ヲ作リ(Fig. 337 ⓒ 及 ⓓ 參照)其各々ニ對スル十字線ヲ作圖シテ(圖示セズ)固定點 J_2 及 K_2 ヲ通ズル垂線トノ交點ヲ求メコレヲ結ビツケル事ニ依ツテ支點力率 M_B 及 M_C ガ求メラレ更ニ J_1 及 K_3 ニ結ベバ彎曲力率圖ヲ完成シ得ル。

第一徑間ト第三徑間ト等シキモノトセバ第三徑間ニ對スル作圖ハ省略スルコトヲ得。

斯クテ求メタ彎曲力率圖カラ支點彎曲力率 M_B ニ對スル影響線ヲ作ランニハⓐ及ⓒ圖ニ就イテ荷重ノ種々ノ位置ニ於ケル M_B ノ値ヲ拾ヒ出シテコレヲⓔ圖ニ示ス如ク各其荷重位置ニ於ケル縱距トシテ立テレバヨイノデアル,卽チ第一徑間ニ於テハⓔ圖トⓐ圖トヲ對照シテ 11′=B1,22′=B2,33′=B3,44′=B4 及 55′=B5 トナリ荷重ガ B 點ニアル時ニハ M_B=0 デアル,更ニ第二徑間ニ於テハⓔ圖トⓒ圖トヲ對照シテ 11′=B1,22′=B2,33′=B3,……トナル,第三徑間ニ對シテハⓐ圖卽チ第一徑間ニ對スル作圖ヲ利用スルノデアツテ第三徑間ニ荷重アル時ノ M_B ハ丁度第一徑間ニ荷重アル時ノ M_C ニ等シキ事ヲ知ル故ニ C 支點ノ M_C ヲ測レバヨイ事ニナル,卽チⓔ圖トⓐ圖トヲ對照シテ 11′=C5,22′=C4,33′=C3,44′=C2, 55′=C1 トナル,其符號ハⓐ圖ヨリ見テ正ナル事ヲ知ル。

(b) 第一徑間第四格點ノ彎曲力率影響線。

支點力率ニ對スル影響線ヲ求メタト全ク同樣ニシテ徑間內任意定點ノ彎曲力率ニ對スル影響線ガ作圖セラレ得ル,第一及第三徑間ニ於ケル荷重ニ對シテハ ⓐ 圖カラ第二徑間ニ於ケル荷重ニ對シテハ ⓒ 圖カラ求メコレヲ ⓕ 圖ノ如ク置ケバヨイノデアル,例ヘバ第一徑間第四格點ニ對スル M_4 ヲ求メンニハ ⓐ 圖カラ ⓕ 圖第一徑間ヘ $ab=11'$, $cd=22'$,……ノ如ク置キ又 ⓒ 圖カラ ⓕ 圖第二徑間ヘ $ab=11'$, $ad=22'$,……ノ如ク移シ全ク同樣ニ第三徑間ニ荷重アル時第一徑間第四格點ニ生ズル力率ハ第一徑間ニ荷重アル時第三徑間第二格點ニ生ズルモノニ等シキ故ニ此點ノ縱距ヲ ⓕ 圖第三徑間ニ採レバヨイノデアル,求メタ影響線ハ第一徑間ハ正,第二徑間ハ負,第三徑間ハ正トナル。

(c) 第二徑間第二格點ノ彎曲力率影響線。

Fig. 337 ⓖ ニ圖示ス,其作圖方法ハ (b) ニ說明シタ所ト殆ンド差違ヲ認メナイ。

(d) 或定點ニ最大彎曲力率ヲ生ズル爲メノ荷重配置。

Fig. 337 ヨリ見ル如ク今考ヘテ居ル點ガ固定點 J ト固定點 K トノ間ニ採ラレタ場合ニハ其徑間內ニ作用スル荷重ニ對スル影響線ハ常ニ正トナリ其他ノ徑

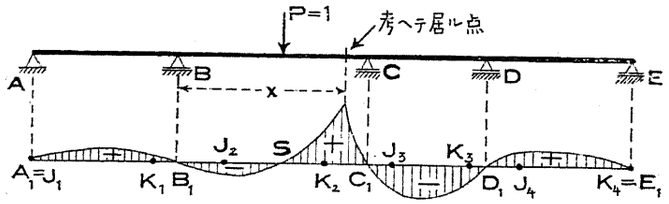


Fig. 338.

間ニ於ケル影響線ハ交互正負ニ變化スルヲ見ル,然ルニ若シ考ヘテ居ル點ガ支點ト固定點トノ間ニ採ラレタ時ニハ Fig. 338 ニ示ス如ク其徑間內ニ於ケル影響線ハ S ナル點ヲ界トシテ一部分正トナリ一部分負トナル,從ツテ一般的ニ或點ニ最大彎曲力率ヲ生ズル荷重配置ハ之ヲ次ノ如ク約言スル事ガ出來ル。

1. 考ヘテ居ル點ガ同一徑間內ノ固定點間ニアル時ニハ其徑間ニハ滿載荷重ヲ受ケ他ノ徑間ニハ一ツ置キニ荷重ヲ受クル事,此荷重サレナカツタ徑間ニノミ荷重サレタ時ニハ最大負力率ヲ生ズル。
2. 考ヘテ居ル點ガ支點ト固定點トノ間ニアル時ニハ荷重限界 S ト支點トノ間ニ滿載荷重ヲ受ケ他ノ徑間ニハ交互滿載及無荷重ヲ受クル事,之ヲ Fig. 338 ニ

就イテ言ヘバ正影響線ノ部分ニノミ荷重サレタ時ニ最大正力率ヲ生ジ負影響線ノ部分ニノミ荷重サレタ時ニ最大負力率ヲ生ズル。

(e) 支點反力 A ニ對スル影響線.

Fig. 337 ⓐ ノ內カラ一ツノ彎曲力率影響線(圖示セルハ第一徑間第一格點ニ對スルモノ)ヲ摘出シテ Fig. 339 ⓐ ニ示ス,此圖ヲ見ル時ハ此影響線ガ一ツノ閉平衡多邊形ヲ形成シテ居ル事ヲ知ルベク其各隅點ニ作用シテ互ニ平衡ニアル外力 P ト支點反力 A,B,……ノ平衡狀態ヲ示スモノニ外ナラヌ Fig. 339 ⓑ ニ於テ ⓐ ノ平衡多邊形ノ邊ニ平行線ヲ引ク時ハ外力 P=1 ガ分割點 1 ニ作用シタ場合ニ相當スル示力線ヲ切ツテ各支點反力ヲ與ヘルノデアル,卽チ ⓑ 圖ニ於テ示力線

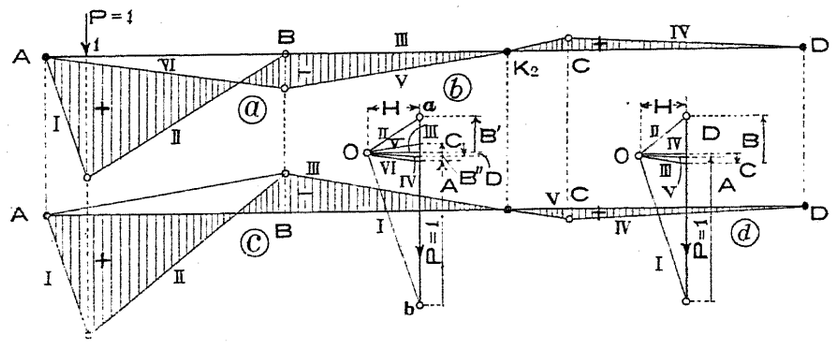


Fig. 339.

$ab=P=1$ ノ兩端カラ平衡多邊形ノ I 及 II ノ邊ニ平行線ヲ引イテ交點 O ヲ求メコレヲ極トシテ多邊形ノ邊 I,VI ニ平行ニ引イタ極射線 I,VI ニヨッテ A 支點反力ヲ與ヘルヲ見ル,然シ此作圖ニ於テハ反力 B ハ二部分ニ分レテ圖示サレル故ニ不便デアル,此不便ヲ除クニハ平衡多邊形ノ閉合線ヲ水平ニ採ル事 Fig. 339 ⓒ ノ如クスレバヨイノデアッテ之ハ Fig. 337 ⓐ カラ直接ニ作圖シ得ラレルモノデアル,斯クテ ⓒ 圖ノ平衡多邊形ニ平行ニ ⓓ 圖ノ示力線ヲ作圖シテ各支點ノ反力ヲ求メ得ル Fig. 340 ハ Fig. 337 カラ上記ノ理ニヨッテ移シタ作圖ニ外ナラヌ。

今荷重 P=1 ガ A 支點ノ上ニアル時ニハ影響線ノ同點ニ於ケル縱距ハ P=1 デアル,荷重ガ第一徑間ニアレバ此時ニ相當スル平衡多邊形 Fig. 340 ⓐ カラ ⓑ ノ如キ示力圖ガ得ラレル,此 ⓑ 圖ノ求メ方ハ Fig. 339 ⓒ 及 ⓓ ニ就イテ行ッタト全ク同樣デアルカラ說明スル迄モ無カラウ,カクテ求メタ反力 A ノ値ヲ Fig. 340 ⓔ

ニ於テ水平線 A_1B_1 上ニ縦距トシテ立テレバ第一徑間ニ働ク荷重ニ因ル反力 A ニ對スル影響線ガ得ラレル事トナル,次ニ荷重ガ第二徑間ニアル時ニハ Fig. 340 ⓒノ平衡多邊形ヲ作圖シタ後其 A 點ニ集ツテ居ル邊 A1,A2,…ニ平行ニⓓ圖ノ b ヲ通ジテ平行線ヲ引ク時ハ此場合ノ反力 A_1, A_2,…ガ求メラレル,カクテⓔ圖ニ於テ B_1C_1 ナル水平線上ニ縦距トシテ置ケバ影響線ガ作圖シ得ラルベク其値

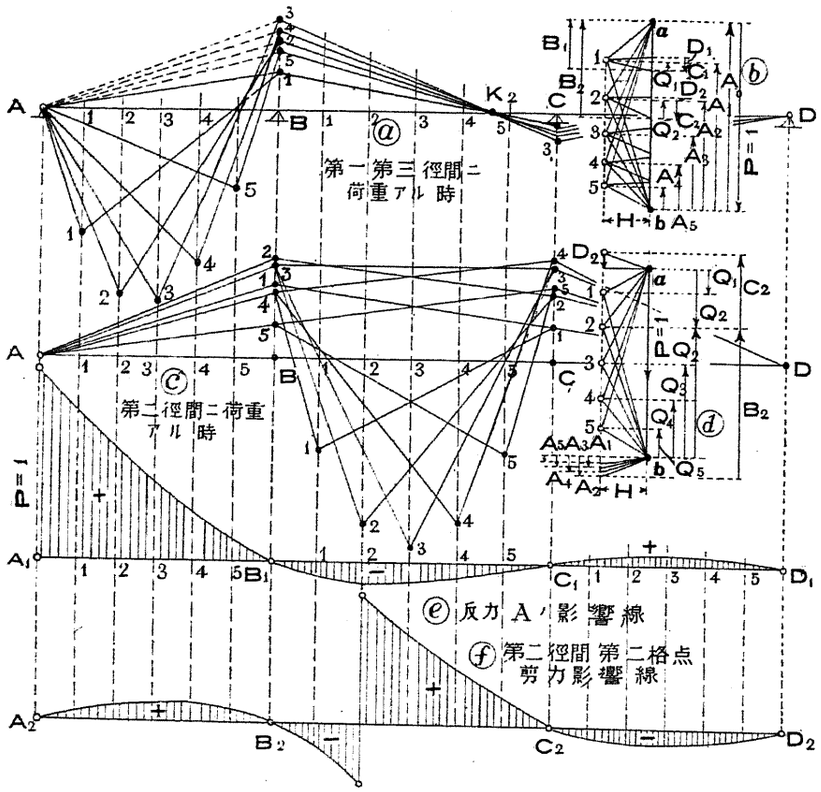


Fig. 340.

ハ負デアル,更ニ荷重ガ第三徑間ニアル時ノ反力 A ハ丁度荷重ガ第一徑間ニアル時ノ反力 D ノ値ニ等シイ故ニ Fig. 339 ⓒ 及ⓓヲ參照スレバ明カナル如ク Fig. 340 ⓐノ平衡多邊形ニ於テ D ニ集マル邊ニ平行ニⓑ圖上ニ極射線ヲ引イテ反力 D ガ求メラレル,コレヲⓔ圖水平線 C_1D_1 上ニ縦距ニ置イテ反力 A ニ對スル

影響線ヲ完成スル事ヲ得ルノデアル。

(*f*) 第二徑間第二格點ノ剪力ニ對スル影響線。

或斷面ニ於ケル剪力トハ其左側ニ働ク全部ノ外力ノ合成力デアル,此合成力ハ Fig. 340 ⓑ又ハⓓカラ容易ニ摘出スル事ガ出來ル値デアツテ其値ヲ各荷重ノ下ニ縦距ニ置ケバ剪力影響線ガ得ラレル筈デアル,此影響線ハ一部分正,一部分負デアル。

荷重 P=1 ガ第一徑間ニアル時ニハ今考ヘテ居ル第二徑間第二格點ヨリ左側ニ働ク外力ノ總和トシテ Q=A+B−1 ヲ得ベク此値ハ Fig. 339 ⓓカラ明カナル如ク正デアツテ Fig. 340 ⓑカラ直接各荷重位置ニ相當シテ求メラレル,荷重 P=1 ガ第二徑間ニ進入シテモ尙問題ノ點ニ達スル迄ハ Q=A+B−1 デアツテ直接 Fig. 340 ⓓカラ求メラレル,荷重ガ丁度問題ノ第二格點ニ乘ツタ時ニ相當スル剪力 $-Q_2$ ハⓓ圖ニ明示シタ通リトナル,荷重ガ問題ノ斷面ヨリ右側ニ作用スル時ニハ Q=A+B デアルガ故ニⓓ圖カラ常ニ正トシテ直接答ガ求メラレル,更ニ荷重ガ第三徑間ニ入ツテモ全ク同樣ニ Q=A+B ナル關係ニハ變化ハナイノデアルガ第三徑間ニ對スル作圖ハ第一徑間トシテ行ツテ居ル關係上第一徑間ニ荷重アル時ノ Q=C+D ハ求ムル剪力ノ絶對値ヲ示スモノデアル,此値ハ Fig. 339 ⓓニ示ス如ク負デアツテ直接ニⓑ圖カラ求メル事ガ出來ル,是等ノ値ヲⓕ圖ニ $A_2B_2C_2D_2$ ナル水平線上ニ縦距トシテ置ケバ剪力ニ對スル影響線ヲ得ル,其第三徑間ニ於ケル値ハ第一徑間ニ於ケル値ト全ク對稱的デアツテ等値デ單ニ符號ガ反對ニナツテ居ルニ過ギナイ。

第三十二節　有鉸連續桁或ハ「ゲルバー」桁

(Continuous Beam with Hinges—Gerber's Beam)

既ニ本章第六節及第三十一節ニ於テ述ベタ如ク *n* 支點ヲ有スル連續桁ハ (*n*−2)次不靜定デアツテコレヲ解ク爲メニハ「クラパイロン」氏方程式卽チ三點力率ノ定理ヲ用ユルヲ要スル,今此 *n* 徑間ヲ有スル連續桁ニ (*n*−2)個ノ鉸 (Hinge) ヲ挿入スレバコレヲ靜定桁ニ變ズル事ガ出來ルノデアル,斯クノ如キ鉸ヲ用ヒタル桁ヲ「ゲルバー」桁ト云フ,英語ニテ此種ノ桁ヲ肱木桁 (Cantilever beam) ト云フ

ハ其一部ニ肱木 (Cantilever) ガ存在スルカラデアル。

「ゲルバー」桁ハ其配置ノ如何ニ拘ラズFig. 341ニ示ス如ク次ノ四ツノ部分ヨリ成ル。

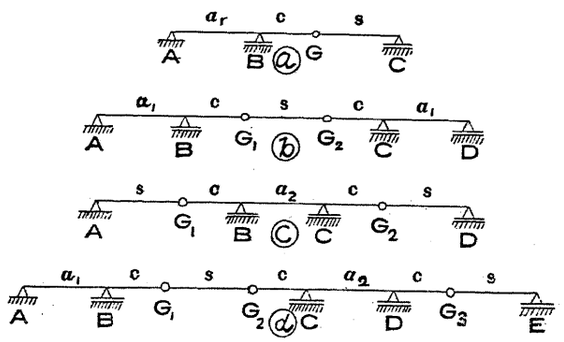


Fig. 341.

s = 懸垂部 (Suspended span)

c = 肱木部 (Cantilever arm)

a_1 = 錠著部(Anchor arm)

a_2 = 複錠著部 (Double anchor arm)

錠著部 a_1 ハ二ツノ支點上ニ休止シ一ツノ肱木部 c ニ接續シ複錠著部 a_2 ハ同ジク二ツノ支點上ニ休止シ兩側ニ肱木部ヲ有スルモノデアル。

s ナル懸垂部ハ兩端ニ支ヘラレタ一ツノ單桁ニ外ナラナイ,從ツテ玆ニ說明スルヲ要シナイデアラウ,其他ノ c, a_1, a_2 ノ各部ニ就イテ反力,彎曲力率及剪力ヲ求ムル方法ヲ影響線(Influence line)ヲ用ヒテ說明シヤウ.コレハ極限値其他ヲ求ムルニ特ニ便利デアル。

(1)鉸ト鉸トノ間ニアル支點ノ反力。

Fig. 342ニ示ス四支點ヲ有スル「ゲルバー」桁ニ於テ AG_1 及 G_2D ノ部分ハ懸垂

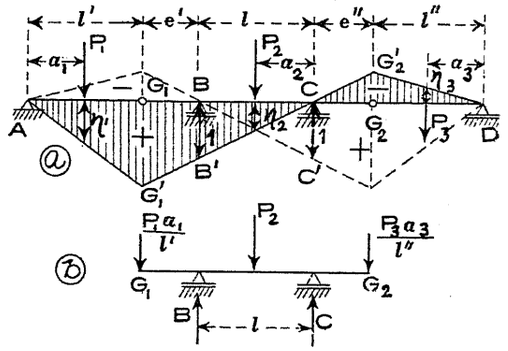


Fig. 342.

部デアツテ其反力 A,G_1,G_2 及 D ハ容易ニ求メラレル,次ニ B 及 C ノ反力ヲ調ベテミヤウ。

今 AB 間ニアル荷重ヲ P_1, BC 間ニアルモノヲ P_2, CD 間ノモノヲ P_3 トスル,然ル時ハ懸垂部ニアル P_1,P_3 ガ鉸點 G_1,G_2 ニ與フル壓力ハ容易ニ計算セラレ

$$G_1=\frac{P_1a_1}{l'},\quad G_2=\frac{P_3a_3}{l''}$$

從ツテ支點反力 B 及 C ハ Fig. 342 ⓑ ニ示ス如ク三個ノ荷重ヲ負フモノトシテ容易ニ計算セラレル,今 C 點ヲ原點ニ採ツテ力率ノ式ヲ立テ

$$Bl-\frac{P_1a_1}{l'}(l+e')-P_2a_2+\frac{P_3a_3}{l''}e''=0$$

$$\therefore\quad B=P_1\frac{l+e'}{l}\frac{a_1}{l'}+P_2\frac{a_2}{l}-P_3\frac{e''}{l}\frac{a_3}{l''}$$

コレヲ次式ニテ表ハスモノトスル

$$B=P_1\eta_1+P_2\eta_2+P_3\eta_3$$

式中　$\eta_1=\frac{l+e'}{l}\frac{a_1}{l'}$,　$\eta_2=\frac{a_2}{l}$,　$\eta_3=-\frac{e''}{l}\frac{a_3}{l''}$

各荷重ノ下ニ於ケル縱距 η ガ此値ヲ持ツ樣ナ直線ハ次ノ如クニシテ容易ニ作圖シ得ル。

先ヅ B 點ニテ BB′=1 ナル縱距ヲ立テ B′ト C トヲ結ビコレガ鉸點 G_1 及 G_2 カラノ垂線ト交ル點ヲ G_1' 及 G_2' トスル,此等ノ點ヲ A 及 D ニツナイデ生ジタ $AG_1'G_2'D$ ナル折線圖形ハ B 點ノ反力ニ對スル影響線トナル,從ツテ各荷重ノ下ニ於ケル縱距 η ト荷重 P トノ積ヲ求ムレバ其和ガ B 點ノ反力デアル。

斯ク作圖シタ影響線ヨリ見テ明カナル如クAヨリC迄ニアル荷

重ハ總テ正反力ヲ生ズルニ反シCヨリ右ノ荷重ハ何レモ負反力ヲBニ與フル,故ニBニ於ケル最大反力ハCヨリ左ニ荷重ガ滿チ右ニハ荷重ナキ時ニ生ズル事ヲ知ル,全ク同樣ニB點ニ於ケル最小反力ハCヨリ右ニ荷重ガ滿チ左ニハ荷重ナキ時デアツテ此時ハ負反力ヲ生ズルノデアル,從テ强度pナル進行荷重(Advancing load)ガ桁上ヲ通過スルモノトシ桁自重ヲ單位長ニツキqトセバB支點ノ最大反力及最小反力ハ次式デ與ヘラレル。

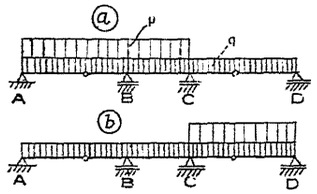


Fig. 343.

Fig. 343 ⓐノ如クAヨリC迄ノ正影響部分ニ進行荷重ヲ受ケテ

$$B_{max}=(p+q)\frac{(l+e')(l+e'+l')}{2l}-g\frac{e''(l''+e'')}{2l}$$

ⓑ圖ノ如クCヨリD迄ノ負影響部分ニ荷重サレテ

$$B_{min}=q\frac{(l+e')(l+e'+l')}{2l}-(p+q)\frac{e''(l''+e'')}{2l\cdot}$$

……(245)

全ク同樣ノ計算ガC支點反力ニ就イテモ行ヒ得ラレルノデアツテFig. 342 ⓐニ點線デ示スモノハ卽チ其影響線デアル,卽チC點ノ下ニCC′=1ナル縱距ヲトリC′トBトヲ結ンデ作圖スレバヨイ。

(2)肱木部卽C部ニ於ケル剪力 (Fig. 344 ⓐ ⓑ參照)。

肱木部G_1Bニ於ケル剪力ノ狀態ヲ調ブルニ先ヅ懸垂部ニ働ク荷重ヲP_1肱木部ニ働ク荷重ヲP_2トシ肱木部內任意點Kヲ考フ,K點ハ其左ニアル鉸ヨリxノ距離ニアルモノトス,Kノ剪力ニ就イテ考ヘニ採ルベキハ其左側ニ働ク荷重ノミデアツテ容易ニ書キ表ハサレ

$$Q_K=-P_1\frac{a_1}{l'}-P_2$$

此剪力Q_Kニ相當スル影響線ハ容易ニ作圖セラレ得ル,先ヅK點ニ於テ縱距$K_1K'=1$(ⓑ圖參照)ヲ採リコレヨリ水平線ヲ引キ鉸點ヨリノ垂線トG_1'ニ交ラシメA_1ニ結べバ各荷重ノ下ニ於ケル縱距ヲη_1及η_2トシテ

$$Q_K=P_1\eta_1+P_2\eta_2$$

デ表ハス事ガ出來式中ノ

$$\eta_1=-\frac{a_1}{l'},\quad \eta_2=-1$$

トナツテ居ル,故ニ$A_1G_1'K'$ハK點ノ剪力ニ對スル影響線デアル。

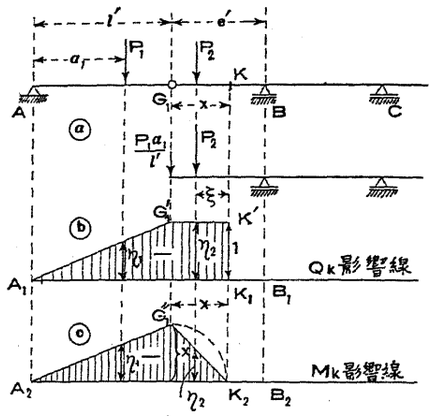


Fig. 344.

桁上ヲ進行荷重(Advancing load)ガ通過スル場合其强度ヲp,死荷重强度ヲqトシテK點ノ剪力ノ絕對値トシテノ最大値及最小値ハ次ノ如シ。

$$_{max}Q_K=-(p+q)\left(\frac{1}{2}l'+x\right)$$
$$_{min}Q_K=-q\left(\frac{1}{2}l'+x\right)$$

……(246)

(3)肱木部ニ於ケル彎曲力率 (Fig. 344 ⓐ ⓒ參照)。

肱木部ノ任意點Kノ彎曲力率ハ負デアツテ其値ハ明カニ

$$M_K=-P_1\frac{a_1}{l'}x-P_2\xi$$

此式ニ對スル影響線ハ容易ニ作圖セラレ

$$M_K=P_1\eta_1+P_2\eta_2$$

ニ於テP_1ノ下ノ縱距$\eta_1=-\frac{a_1}{l'}x$, P_2ノ下ノ縱距$\eta_2=-\xi$ナラシムレバヨイノデアル,Fig. 344 ⓒニ示ス如ク先ヅ鉸點G_1ニ縱距xヲ立テ

其端 G_1'' ヲ A_2 及 K_2 ニ結ベバ出來タ三角形 $A_2G_1''K_2$ ハ求ムル影響線デアツテ負値ヲ有スルモノデアル,各荷重ノ下ニ於ケル縦距ガ上揭ノ値ヲ有スルニヨツテ其正シキ事ヲ知ル。

今若シ强度 p ノ進行荷重ト强度 q ノ死荷重トヲ考フレバ其絶對値トシテノ最大及最小彎曲力率ハ

$$\left.\begin{aligned} {}_{max}M_K &= -\frac{1}{2}(p+q)x(l'+x) \\ {}_{min}M_K &= -\frac{1}{2}px(l'+x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(247)$$

故ニ絶對値ニテ最大彎曲力率ノ生ズルハ x ノ最大ノ點卽 $x=e'$ 卽 B 點デアツテ其量ハ (247) 式カラ

$${}_{max}M_B = -\frac{1}{2}(p+q)e'(l'+e') \cdots\cdots(248)$$

(4) B 及 C 支點間卽 a_2 部ニ於ケル剪力 (Fig. 345 ⓐ ⓑ 參照)。

既ニ B 及 C 支點ノ反力ニ對スル影響線ヲ求メ得タカラコレヲ利用スレバ任意點ノ剪力ノ影響線ハ容易ニ求メ得ラレル。

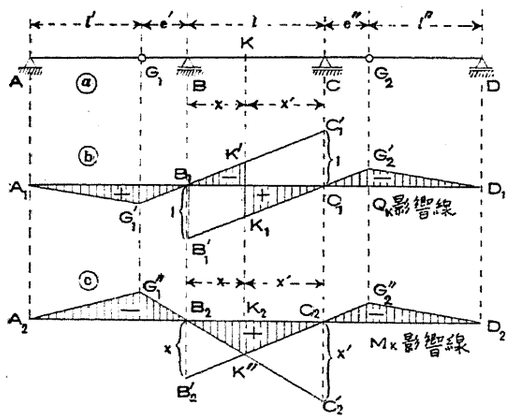


Fig. 345.

今任意點 K ノ右側ノミニ荷重ノアル時ハ K 點ノ剪力ハ $Q_K=+B$ トナリ之ニ反シ K 點ノ左側ニノミ荷重アル時ノ剪力ハ K 點ノ右側ヲ考ヘテ $Q_K=-C$ トナル,故ニ K 點ノ剪力ニ對スル影響線ハ K 點ノ右側ニテハ反力 B ノ影響線ト一致シ又 K 點ノ左側ニテハ負反力 −C ノ影響線ト一致スル, Fig. 345 ⓑ ハ斯クノ如クシテ求メタ K 點ノ剪力影響線デアル。

集中荷重ニ因ル K 點ノ剪力ハ其荷重ノ位置及數ニ拘ラズ常ニ其荷重ト其作用點ニ於ケル影響線ノ縦距トノ積ノ代數和ニヨツテ與ヘラレ進行荷重 p ニヨル K 點ノ最大剪力ハ明カニ正影響面積ニ $p+q$ ヲ乘ジ負面積ニ q ヲ乘ジテ代數和ヲ採レバヨロシク其反對ヲ行ヘバ最小剪力ヲ得ルノデアル。

$$\left.\begin{aligned} {}_{max}Q_K &= (p+q)\left\{\frac{(l-x)^2}{2l}+\frac{e'(l'+e')}{2l}\right\}-q\left\{\frac{x^2}{2l}+\frac{e''(l''+e'')}{2l}\right\} \\ {}_{min}Q_K &= q\left\{\frac{(l-x)^2}{2l}+\frac{e'(l'+e')}{2l}\right\}-(p+q)\left\{\frac{x^2}{2l}+\frac{e''(l''+e'')}{2l}\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(249)$$

(5) B 及 C 支點間卽 a_2 部ニ於ケル彎曲力率 (Fig. 345 ⓐ ⓒ 參照)。

此場合ニ對スル彎曲力率ハ支點 B 及 C ノ反力ノ影響線ヲ應用シテ容易ニ誘導スル事ガ出來ル,今斷面ノ右側ノミニ荷重アレバ其斷面ノ彎曲力率ハ明カニ $M_K=B.x$ デアリ其斷面ノ左側ノミガ荷重ヲ受クレバ $M_K=C.x'$ デアル,故ニ此二ツノ理由ニ依リ任意點 K ノ彎曲力率ニ對スル影響線トシテハ K 點ノ右ニテハ反力 B ニ對スル影響線ノ縦距ノ x 倍大ナル縦距ヲ與ヘ又 K 點ノ左ニテハ反力 C ニ對スル影響線ノ縦距ヨリ x' 倍大ナル縦距ヲ與フルモノデアレバヨロシイ,從ツテ Fig. 345 ⓒ ニテ支點 B ノ下ニ 1 ヲ取ル代リニ x ヲ取リ支點 C ノ下デ 1 ヲ置ク代リニ x' ヲ置イテ反力ニ對スル影響線ヲ求ムルト同樣ニ作圖スレバ $A_2G_1''K''G_2''D_2$ ナル圖形ヲ得,コレガ求ムル K 點ノ彎曲力率ニ對スル影響線デアル。

今進行荷重 p ニ對スル K 點ノ彎曲力率ノ最大及最小値ハ Fig. 345 ⓒ ノ正面積ニ相當スル部分ノミニ此進行荷重ガ乘ルカ或ハ

負面積ニ相當スル部分ノミニ乘ルカニヨツテ與ヘラレ

$$\left.\begin{aligned} {}_{max}M_K &= (p+q)\frac{x(l-x)}{2} - q\frac{e'(l-x)(l'+e')+e''x(l''+e'')}{2l} \\ {}_{min}M_K &= q\frac{x(l-x)}{2} - (p+q)\frac{e'(l-x)(l'+e')+e''x(l''+e'')}{2l} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(250)$$

(6) 錠著部即 a_1 部ニ於ケル剪力及彎曲力率

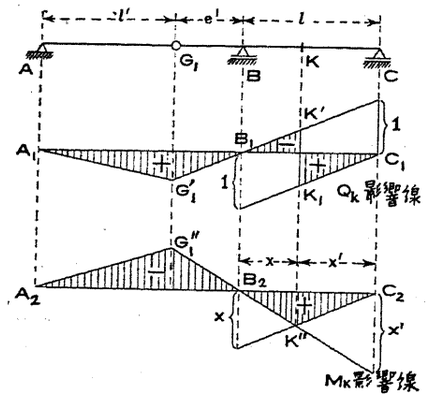


Fig. 346.

此場合ニ對スル Q_K 及 M_K ノ影響線ハ Fig. 345 ニ示シタ複錠著部 a_2 ノトキト同一デアル,唯此場合ニハ支點ノ外側ニ相當スル一部ヲ取去レバヨイノデアツテ Fig. 346ニ示スモノハ卽チ夫レデアル,從ツテ進行荷重ニ對スル剪力及彎曲力率ノ最大及最小値ヲ列擧スレバ次ノ如シ。

$$\left.\begin{aligned} {}_{max}Q_K &= (p+q)\left\{\frac{(l-x)^2}{2l} + \frac{e'(l+e')}{2l}\right\} - q\frac{x^2}{2l} \\ {}_{min}Q_K &= q\left\{\frac{(l-x)^2}{2l} + \frac{e'(l'+e')}{2l}\right\} - (p+q)\frac{x^2}{2l} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(251)$$

$$\left.\begin{aligned} {}_{max}M_K &= (p+q)\frac{x(l-x)}{2} - q\frac{e'x'(l'+e')}{2l} \\ {}_{min}M_K &= q\frac{x(l-x)}{2} - (p+q)\frac{e'x'(l'+e')}{2l} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(252)$$

(7) 間接荷重ノ場合

若シ荷重ガ主桁ニ直接作用セズ橫梁又ハ小桁ヲ經テ作用スル樣ニ配置サレテ居タナラバ先ヅ前述ノ如ク始メハ直接荷重トシテノ影響線ヲ引キ次ニ相隣レル二個ノ小桁ノ間ニテハ影響線ハ

直線デ表サルルノ理ニヨツテコレヲ訂正スレバヨイノデアル,卽チ Fig. 347 ニ示スハ其一例デアル。

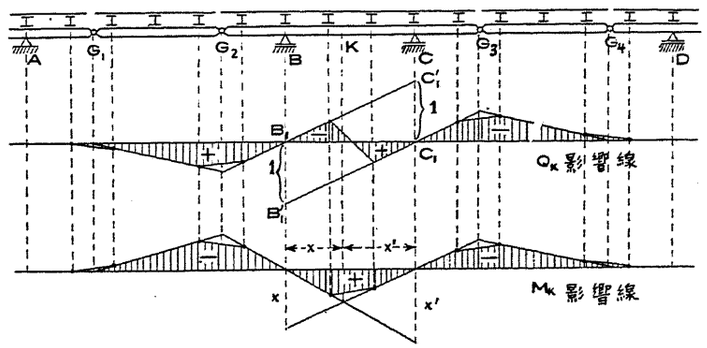


Fig. 347.

(8)「ゲルバー」桁圖式解法

Fig. 348 ハ複錠著部ノ彎曲力率ニ對スル圖式解法ヲ示スモノデアツテ荷重ハ任意數ノ集中荷重トシ其 P_1 及 P_6 ハ相隣レル懸垂部ヨリ來ル鉸ヘノ壓力ト考ヘル。

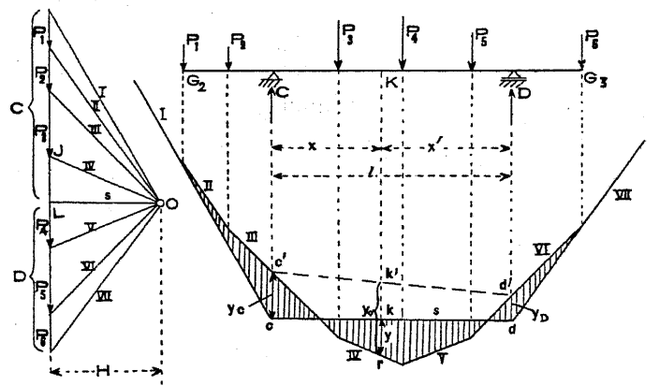


Fig. 348.

此桁ノ解法ハ全ク普通ノ桁同樣ニ行ハレル,卽チ先ヅ示力線ヲ置キ極距Hヲ採ツテ極Oヲ定メ射線及平衡多邊形ヲ畫キ其兩端邊 (Extreme side)

ノ延長線ト支點ヨリノ垂線トノ交點 c 及 d ヲ連結シテ閉合線 s ヲ引ク,此 s ニ平衡ニ OL ヲ作リLニヨツテ反力C及Dヲ區劃スル.

今任意點Kノ彎曲力率ヲ求メンニハ圖上ノ縱距ヲ y トシテ

$$M_K=H.y$$

更ニK點ノ剪力ハ

$$Q_K=LJ=C-(P_1+P_2+P_3)$$

圖上點線デ示シタ閉合線 $c'd'$ トIII,IV,V,VI ノ折線トノ間ニ生ズ

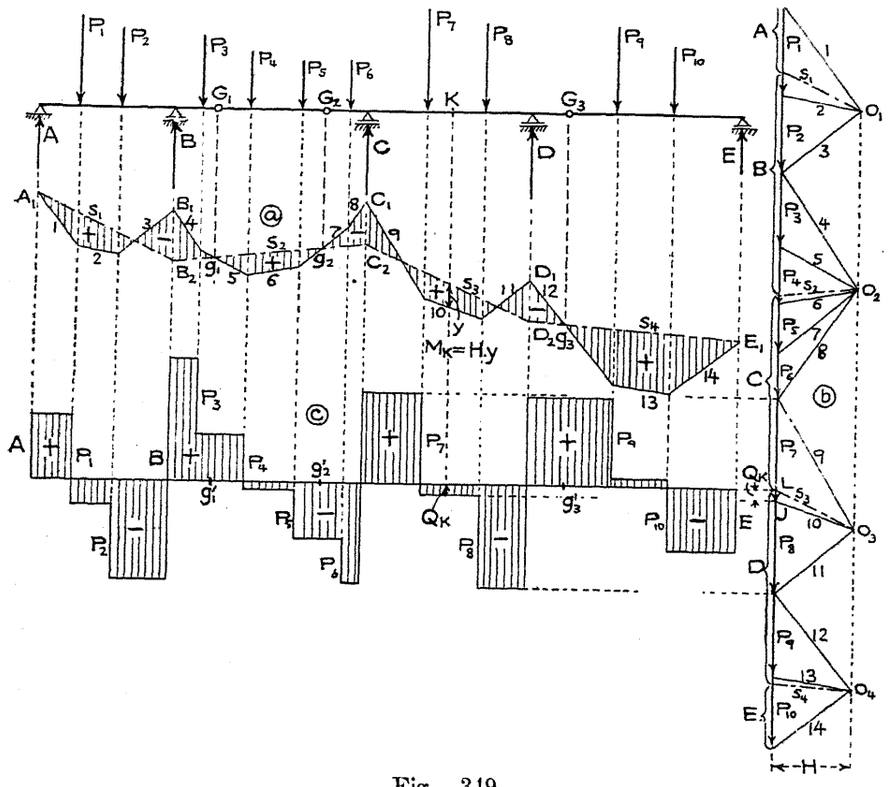


Fig. 349.

ル平衡多邊形ハCD ヲ單桁ト考ヘタ場合ノ荷重 P_3,P_4,P_5 ニ對スル彎曲力率圖ニ當ル,此レニ支點C及Dニ於ケル負彎曲力率ニ相當スル $cc'=y_C=\frac{M_C}{H}$, $dd'=y_D=\frac{M_D}{H}$ ヲ加ヘタモノガ實際ノ「ゲルバー」桁ニ於ケル彎曲力率圖デアツテ

$$M_K=H.y_o-H(kk')=H.y$$
$$=M_K^o-M_C\left(1-\frac{x}{l}\right)-M_D\frac{x}{l}$$ ……第三十一節(ii)參照

Fig. 349ハ五個ノ支點ヲ有スル「ゲルバー」桁ニ對シ任意數ノ集中荷重ノ作用セル場合ノ解法デアル。

先ヅ各徑間ヲ夫々單桁ト考ヘテ與ヘラレタ荷重ヲ示力線ニ置キ極 O_1,O_2,O_3,O_4 ヲ共通ノ極距Hヲ有スル如ク採リ順次射線及平衡多邊形ヲ作ル,斯クテ各鉸ニ相當スル平衡多邊形上ノ點ヲ g_1,g_2,g_3 トシ此 g_1 ト g_2 トヲ通ズル直線及 g_3 ト E_1 トヲ結ブ直線ヲ引キ其等ガ支點 B, C, D ヨリノ垂線ト B_2, C_2, D_2 ニテ交ルモノトスレバ此等ノ點ヲ結ンデ生ズル影線面積 (Shaded area) ハ求ムル彎曲力率圖デ

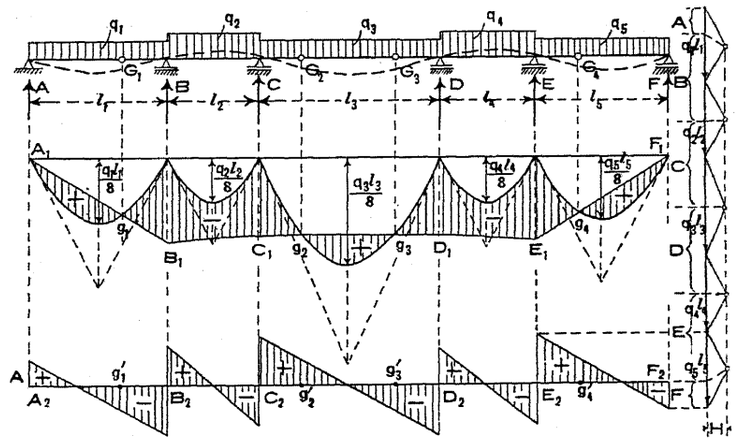


Fig. 350.

アル,任意點ノ剪力ハ示力線ト閉合線トノ關係カラ支點反力ト荷重トヲ移寫配列スル事ニヨツテFig. 349 ⓒノ如ク容易ニ求メラレル。

全ク同樣ニシテ今若シ六支點ヲ有スル「ゲルバー」桁ガ等布荷重ヲ受クルトセバ鉸點及A,Fノ支點ニテハ彎曲力率ハ零ナルガ故ニFig. 350ニ示ス如ク作圖スル事ガ出來ル,一般ニ「ゲルバー」桁ヲ圖式的ニ解ク順序ハ(1)各徑間ヲ單桁ト考ヘテ彎曲力率圖ヲ作リ(2)鉸點ヨリ下シタ垂線トノ交點ヲ求メ(3)此等ノ點及兩端支點ヲ通ジテ閉合線ヲ引ケバ彎曲力率圖ヲ得ル。

(9)「ゲルバー」桁ノ徑間及桁長選定ニ就イテ

「ゲルバー」桁ハ橋梁ニ應用シテ桁橋(Beam bridge)構橋(Trussed bridge)共ニ用ヒラレ家屋建築ニ應用シテ母屋桁(Purlin)ニ便利ニ用ヒラレル,此桁ニ於テ生ズル彎曲力率ハ明カニ單桁ニ於ケルモノヨリ少ナク同時ニ連續桁ニ於ケル如キ施工上及計算上ノ不便不確實ノ無キ特徵ヲ有ス「ゲルバー」桁ヲ最モ經濟的ニ應用スル一例トシテ次ニ徑間及桁長ノ選定法ヲ說明シヤウ。

實際問題トシテ架設セラルベキ全徑間及支點數ガ與ヘラレテ各部ノ長ヲ適當ニ選定シヤウトスルニハ其各部ニ生ズル彎曲力率ヲ均一ナラシメ特ニ一ケ所ニ大ナル彎曲力率ノ生ズル如キ事ノ無イ樣ニシ斯クシテ桁全體トシテノ絕對最大彎曲力率ヲ成ルベク小ナラシメル事ガ經濟上必要デアル,コレヲ式デ表セバ

$$M_2=M_1,\ M_3=M_1,\ M_4=M_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(253)$$

式中 M_1= 懸垂部ニ於ケル最大彎曲力率

M_2= 肱木部ニ於ケル絕對最大彎曲力率

M_3= 錠著部ニ於ケル絕對最大彎曲力率

M_4= 複錠著部ニ於ケル絕對最大彎曲力率

此四ツノ力率 M_1,M_2,M_3 及 M_4 ヲ桁長 s,c,a_1 及 a_2 ノ項ニテ表シ(253)式ノ條件ヲ滿足スル樣ニ力率ヲ平均サセレバ其內ノ一ツヲ與ヘテ他ヲ最モ經濟的ニ定メル事ガ出來ル。

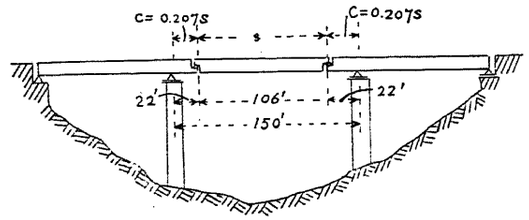


Fig. 351.

例ヘバFig. 351ニ示ス中央徑間150′ニ於ケル桁長配置ヲ最モ經濟的ニ選定センニハ進行荷重 p ヲ假定スルモノトシテ s 徑間中央ニ於ケル最大彎曲力率ハ

$$M_1=\frac{1}{8}(p+q)s^2$$

又(248)式ヨリ左右支點ニ於ケル負最大彎曲力率ノ絕對値ハ

$$M_2=\frac{1}{2}(p+q)\,c\,(s+c)$$

(253)式ニヨリ此二式ヲ等シク置キ

$$\frac{1}{8}s^2=\frac{1}{2}c(s+c);\quad c(s+c)=\frac{1}{4}s^2$$

$$\therefore\quad c=s\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)=0.207\,s$$

從テ150′ノ中央徑間ヲ區劃スル事Fig. 351ニ示ス如クスレバ最モ經濟的ナル桁長ヲ得ル。

第三十三節　木鐵集成桁

(Composite Beam of Timber and Iron)

集成桁ト云フハ二ツノ異ナツタ材料カラ作ラレタ桁ガ共同シテ荷重ヲ擔フ樣ニ配置セラレタモノデアル,從ツテ此二ツノ材料ガ爲ス彈性線ニ就テ同一ノ斷面ニ於ケル撓度ハ相等シキ事ヲ要スルノデアツテ此撓度ノ相等シキ原理ヲ應用シテコレヲ解キ得ルノデアル。

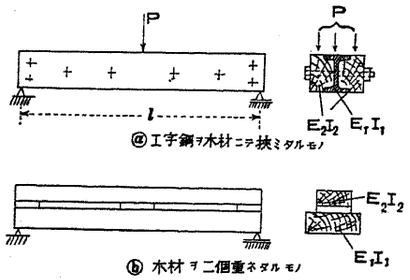


Fig. 352.

Fig. 352ニ示スハ集成桁ノ一例デアツテ作用スル荷重Pノ內各桁ノ荷フ負擔部分ヲP_1及P_2トスレバ此P_1トP_2トノ割合ガ如何ニナルカハ全ク不靜定ノ問題デアリコレヲ決定スルニハ次ノ如ク彈性撓度法則ヲ利用スル今

P_1＝彈性係數E_1,慣性能率I_1ナル桁ノ負擔スル荷重部分

P_2＝彈性係數E_2,慣性能率I_2ナル桁ノ負擔スル荷重部分

トスレバ此二ツノ桁ノ中央撓度ハ

$$\delta=\frac{P_1 l^3}{48\,E_1 I_1}=\frac{P_2 l^3}{48\,E_2 I_2}$$

$$\therefore\quad \frac{P_1}{P_2}=\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}\cdots\cdots$$

$$\delta=\frac{\sigma_1 l^2}{6\,E_1 h_1}=\frac{\sigma_2 l^2}{6\,E_2 h_2}$$

$$\therefore\quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{E_1 h_1}{E_2 h_2}\cdots\cdots \qquad\cdots\cdots(254)$$

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}$$

(254)式ニテ計算セラルル應力ノ比ガ此二ツノ材料ノ許容應力ノ比ト一致シナイ場合ニハ其內ノ比較的弱イ方ノ材料ヲ標準トシナケレバナラヌ。

尙又材料ガ同一ナル場合ニハ$E_1=E_2$デアツテ荷重ノ分ケ前ハ慣性能率ニ比例シ其應力度ハ桁高ノ比ニ等シ。

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{I_1}{I_2},\quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{h_1}{h_2},\quad \frac{M_1}{M_2}=\frac{I_1}{I_2}\cdots\cdots(255)$$

例題第二十五.　鍊鐵工字桁高サ30*cm*慣性能率11,182cm^4テ有スルモノト二個ノ木桁各々高30*cm*,幅10*cm*テ有スルモノトテFig. 353ノ如ク結合ス,其鍊鐵桁ニ對シテハ　$E_1=2{,}000{,}000\ kg/cm^2$, $k_1=700\ kg/cm^2$, $I_1=11{,}182cm^4$,　木桁ニ對シテハ　$E_2=120{,}000\ kg/cm^2$, $k_2=70\ kg/cm^2$, $I_2=\frac{1}{12}\times20\times20^3=45{,}000cm^4$ト假定シテ最大許容荷重テ求ム。

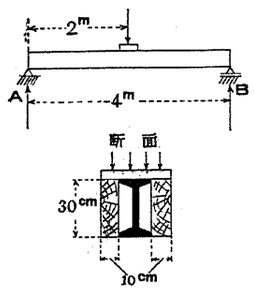


Fig. 353.

答　(254)式ニ於テ桁高相等シキガ故ニ

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{E_1}{E_2}=\frac{2{,}000{,}000}{120{,}000}=\frac{100}{6}$$

然ルニ此兩材料ノ强度比ハ

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{700}{70}=\frac{100}{10}$$

從フテ應力比ハ强度比ヨリ大ナルガ故ニ　$\sigma_1=k_1=700\ kg/cm^2$テ標準ニ採ラナケレバナラヌ,此場合ニ相當スル木桁ノ應力ハ　$\sigma_2=700\times\frac{6}{100}=42\ kg/cm^2$ニ過ギナイ,若シ反對ニ$\sigma_2=70\ kg/cm^2$テ標準ニ採ルモノトスレバコレニ相當スル　$\sigma_1=70\times\frac{100}{6}=1{,}167\ kg/cm^2$トナリ許容應力　$k_1=700\ kg/cm^2$テ超過スル。

(254)式ニ依リ

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}=\frac{100}{6}\times\frac{11{,}182}{45{,}000}=4.14$$

更ニ鍊鐵桁ニ對シテハ　$M_1=\frac{P_1 l}{4}=\frac{\sigma_1 I_1}{\frac{h}{2}}$ヨリ

$$P_1=\frac{4\sigma_1 I_1}{l\cdot\frac{h}{2}}=\frac{4\times700\times11182}{400\times15}=5218\ kgs.$$

從ツテ木桁ニ於ケル負擔荷重ハ

$$P_2=\frac{P_1}{4.14}=\frac{5218}{4.14}=1260\ kgs.$$

此値ハ前同樣ニ $M_2=\frac{P_2 l}{4}=\frac{\sigma_2 I_2}{\frac{h}{2}}$ ヲ用ヒテモ求メラレ

$$P_2=\frac{4\sigma_2 I_2}{l\cdot\frac{h}{2}}=\frac{4\times 42\times 45{,}000}{400\times 15}=1260\ kgs.$$

故ニ集成桁ノ許容荷重ハ

$$P=P_1+P_2=5218+1260=6478\ kgs.$$

斯ク求メタ荷重ニヨル兩桁ノ撓度ハ相等シキ理デアツテ

$$\delta_1=\frac{P_1 l_3}{48E_1 I_1}=\frac{5218\times 400^3}{48\times 2{,}000{,}000\times 11{,}182}=0.31cm$$

$$\delta_2=\frac{P_2 l^3}{48E_2 I_2}=\frac{1260\times 400}{48\times 120{,}000\times 45{,}000}=0.31cm$$

若シ此木桁ト工字桁トガ各獨立シテ荷重ヲ受クルモノトスル時ハ木桁ノ擔ヒ得ル荷重ハ $P_2=\frac{4\times 70\times 45000}{400\times 15}=2100\ kgs$ デアツテ此荷重ヲ受ケタ場合ノ木桁ノ撓度ハ $\delta_2=\frac{2100\times 400^3}{48\times 120{,}000\times 45{,}000}=0.52cm$ トナル,即チ鐵桁ヨリモ $\delta_2-\delta_1=0.21cm$ ダケ多クノ撓度ヲ爲シテ始メテ其全强度ヲ發揮スルモノト考ヘラレル,Fig. 354 ニ示ス如キ構造ノ桁ヲ使用スル時ハ上述ノ荷重狀態ト成リ得ルノデアツテ此時ノ全荷重 $=5218+2100=7318\ kgs$ トナリ然ラザル場合ニ比シテ $7318-6478=840\ kgs.$ ダケ多クノ荷重ヲ負ヒ得ル事トナル。

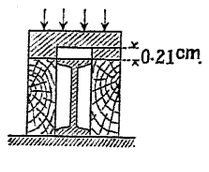


Fig. 354.

第三十四節　混凝土,石及鑄鐵ノ桁

[I]混凝土桁 (Plain Concrete Beam)

純混凝土ヲ桁トシテ用ユル事ハ殆ンド無イガ其應力分布ノ狀態ハ他ニモ應用サレ得ルカラ順序トシテ其研究ヲ進メヤウ。

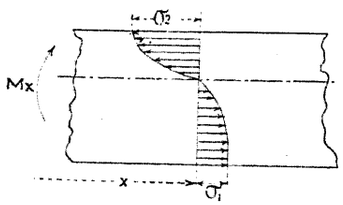


Fig. 355.

純混凝土ニ於ケル應力ト變形トノ關係ハ指數公式 (Exponential law) 即チ

$$\varepsilon=\frac{\sigma^n}{E_o}$$

ニテ表サレルノデアツテ「フツク」氏法則 (Hooke's law) ニ從ハナイ,此指數 n ハ材料ニヨリ異ナルモ混凝土ニ於テハ 1.1 乃至 1.2 ノ値ヲ有ス,即チ變形ハ應力ニ正比例スルモノデナク應力ガ增加スル割合ヨリモ一層速カニ變形ガ增加スル事ヲ示ス,從テ應力圖 (Stress diagram) ハ Fig. 355 ニ示ス如キ形トナル。

(*a*) 嚴密ナル計算 (Accurate calculation)

彎曲ニ因ツテ生ズル應力ハ其方向常ニ桁軸ニ平行デアツテ從ツテ平衡條件カラ全壓力ト全張力トハ等シクナリ

$$D=Z \quad \cdots\cdots (a)$$

又外力ニヨル力率ト內力ニ因ル力率トハ等シクナリ

$$M_x=D.a=Z.a \quad \cdots\cdots (b)$$

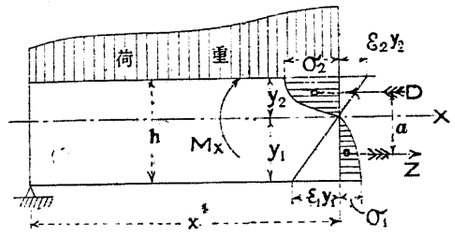


Fig. 356.

此場合ノ未知數ハ次ノ六ツデアル。

σ_2 ＝上端緣維最大應壓力。

σ_1 ＝下端緣維最大應張力。

y_2 ＝中立軸ヨリ上端緣維ニ至ル距離。

y_1 ＝中立軸ヨリ下端緣維ニ至ル距離。

ε_2 ＝中立軸ヨリ上方ヘ單位距離ノ層ニ於ケル變形。

ε_1 ＝中立軸ヨリ下方ヘ單位距離ノ層ニ於ケル變形。

此六ツノ未知數ヲ解ク爲メニ六ツノ方程式ガ必要デアル,此レヲ列擧センニ先ヅ幾何學的關係カラ

$$y_1+y_2=h \quad \cdots\cdots (1)$$

桁ガ彎曲シタ後モ斷面ガ平面ニ存在スル爲メニ

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2 \quad \cdots\cdots (2)$$

應力ト變形トノ關係カラ

$$\sigma_1^{n_1}=E_o'\varepsilon_1 y_1 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\sigma_2^{n}=E_o\varepsilon_2 y_2 \quad \cdots\cdots(4)$$

今微分面積 df ノ中立軸ヨリノ距離ヲ y トセバ應壓側ニ於テ

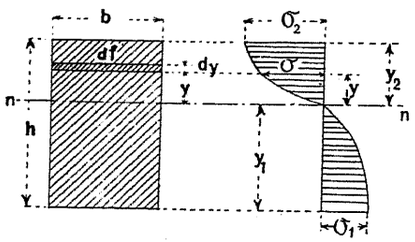


Fig. 357.

$$\sigma^n=E_o\varepsilon_2 y$$

(4)式ヨリ $\dfrac{\sigma^n}{\sigma_2^n}=\dfrac{y}{y_2}$

$$\therefore\quad \sigma=\sigma_2\sqrt[n]{\frac{y}{y_2}}$$

從ツテ全壓力ハ

$$D=\int_o^{y_2}\sigma df=\frac{\sigma_2}{\sqrt[n]{y_2}}\int_o^{y_2}\sqrt[n]{y}\,df.$$

同樣ニ應張側ニ於ケル全張力ハ

$$Z=\int_o^{y_1}\sigma df=\frac{\sigma_1}{\sqrt[n_1]{y_1}}\int_o^{y_1}\sqrt[n_1]{y}\,df.$$

今此桁ガ矩形斷面ヲ有スルモノト假定セバ $df=b.dy$ トナル,此關係ヲ挿入シ更ニ(a)式卽チ D=Z ヨリ

$$\frac{\sigma_2 b}{\sqrt[n]{y_2}}\int_o^{y_2} y^{\frac{1}{n}}dy=\frac{\sigma_1 b}{\sqrt[n_1]{y_1}}\int_o^{y_1} y^{\frac{1}{n_1}}dy$$

或ハ

$$\frac{\sigma_2}{\sqrt[n]{y_2}}\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{y_2^{(n+1)}}=\frac{\sigma_1}{\sqrt[n_1]{y_1}}\frac{n_1}{n_1+1}\sqrt[n_1]{y^{(n_1+1)}}$$

$$\therefore\quad \frac{n}{n+1}\sigma_2 y_2=\frac{n_1}{n_1+1}\sigma_1 y_1 \quad \cdots\cdots(5)$$

次ニ $\sigma.df$ ナル應力ガ中立軸ニ對シテ有スル力率 $\sigma.df.y$ ヲ斷面全體ニ合計シタルモノハ外力ニ因ル其斷面ノ彎曲力率ニ等シカルベキニヨリ

$$M_x=\frac{\sigma_2 b}{\sqrt[n]{y_2}}\int_o^{y_2} y^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}dy+\frac{\sigma_1 b}{\sqrt[n_1]{y_1}}\int_o^{y_1} y^{\left(\frac{1}{n_1}+1\right)}dy$$

或ハ

$$M_x=\frac{\sigma_2 b}{\sqrt[n]{y_2}}\frac{n}{1+2n}\sqrt[n]{y_2^{(2n+1)}}+\frac{\sigma_1 b}{\sqrt[n_1]{y_1}}\frac{n_1}{2n_1+1}\sqrt[n_1]{y^{(2n_1+1)}}$$

$$\therefore\quad M_x=\frac{n}{2n+1}\sigma_2 b y_2^2+\frac{n_1}{2n_1+1}\sigma_1 b y_1^2 \quad \cdots\cdots(6)$$

以上六ツノ方程式ニヨリ h,E_o,E_o',n,n_1,M_x 等ガ與ヘラレ居レバ六ツノ未知數ヲ求メル事ガ出來ル,其內 σ_2,σ_1,y_2 及 y_1 ハ殊ニ必要トスル事多キ數値デアル。

今若シ此材料ガ應壓應張共ニ同ジ彈性狀態ヲ呈スルナラバ

$$E_o=E_o'$$

トナリ更ニ變形ガ應力ニ比例スルモノトセバ

$$n=n_1=1,\ \sigma_1=\sigma_2,\ y_1=y_2=\frac{h}{2}$$

トナリ(6)式ハ

$$M_x=\sigma_2\frac{bh_2}{6}$$

トナル,コレハ鋼材等ニ見ル普通ノ場合デアル。

以上ハ精密ニ各種ノ彈性諸係數ガ判リ居ルモノトシテノ計算デアルガ實際ニ於テハ普通次ノ近似解法ヲ用ユル。

(*b*) 近似算法。

今 $n=n_1=1$ ト置ケバ應力ノ分布ハ中立軸ヨリノ距離ニ比例スル事トナリ其應力圖ハ Fig. 358 ニ示ス二個ノ三角形ニヨツテ與ヘラレル,斯クノ如キ假定ノ下ニ求メラレタ緣維應力ハ嚴密ナ計算ニ依ツテ得タモノヨリモ稍過大トナルガ故ニ其生ズル誤差ハ安全側ナルモノトシテ一般ニ採用セラレテ居ル。

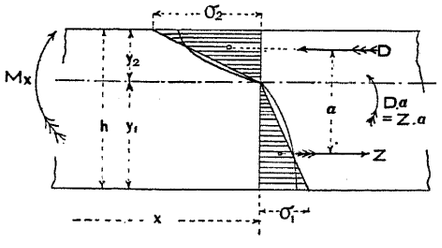


Fig. 358.

今應壓應張彈性係數ノ比ヲ

$$\frac{E_o}{E_o'}=\mu$$

ニテ表セバ μ ハ混凝土ノ配合ニヨツテ變化スル値デアル,斯クテ四ツノ未知數ニ對シ次ノ四式ヲ得

$$y_1+y_2=h$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{E_o y_2}{E_o' y_1}=\mu\frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{b\sigma_2 y_2}{2}=\frac{b\sigma_1 y_1}{2}$$

$$\frac{\sigma_2 y_2}{2}\,b.\frac{2}{3}\,h=M_x$$

此四式ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2&=\frac{3M_x}{bh^2}\left(1+\sqrt{\mu}\right)\\ \sigma_1&=\frac{3M_x}{bh^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(256)$$

μ ノ値ハ混凝土ノ配合ニヨツテ 9～25 ノ範圍ニ變化スル。

最小値 $\mu=9$ ニ對シ

$$\sigma_2=\frac{12M_x}{bh^2}=2\left(\frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}\right)$$

$$\sigma_1=\frac{4M_x}{bh^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}\right)$$

平均値 $\mu=16$ ニ對シ

$$\sigma_2=2\,\frac{1}{2}\left(\frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}\right);\quad \sigma_1=\frac{5}{8}\left(\frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}\right)$$

最大値 $\mu=25$ ニ對シ

$$\sigma_2=3\left(\frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}\right);\quad \sigma_1=\frac{3}{5}\left(\frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}\right)$$

上式中ノ $\frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}$ ハ均等彈性ノ桁ニ於ケル縁維應力ヲ表ス,從ツテ不均等彈性デアル混凝土ノ桁ニ於テハ其應壓力ハ前者ニ比シ 2～3 倍,應張力ハ $\frac{2}{3}\sim\frac{3}{5}$ 倍ニ當ル事ヲ知ルノデアツテ Fig. 359 ニ示ス如キ應力圖トナル。

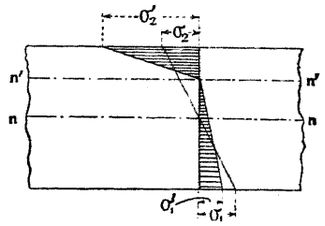


Fig. 359.

(c) 彎曲ニ因ル剪力(Shear due to Bending)

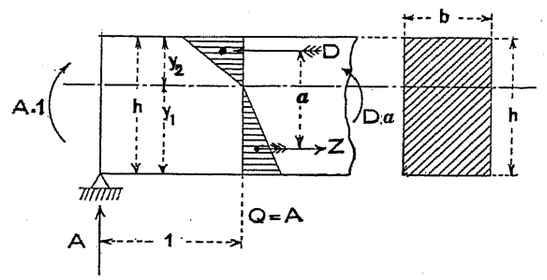


Fig. 360.

彎曲ニ伴ツテ生ズル應剪力ノ最大力度ハ最大垂直剪力ノ生ズル斷面ノ中立軸ニ沿フテ發生スルモノデアル(第十七節參照)今左支點Aヨリ單位距離ニ斷面ヲ假定シ此斷面ヨリ左側部ノ平衡條件カラ

$$A\,1=D.a$$

$$\therefore\quad D=\frac{A}{a}$$

然ルニ近似算法ニ據レバ $a=\frac{2}{3}h$ デアルカラ

$$D=\frac{3}{2}\,\frac{A}{h}$$

今斷面ガ矩形デアツテ其幅ヲ b トセバ其中立軸ニ沿フテ發生スル最大應剪力ハ

$$\tau_{max}=\frac{D}{1.b}=\frac{3}{2}\,\frac{A}{bh}\cdots\cdots(257)$$

コレ此桁内ニ生ズル最大應剪力デアル。

[II] 鑄鐵桁。

鑄鐵モ混凝土ト同樣其彈性的性狀ガ鋼トハ違フノデアツテ例ヘバ鑄鐵ノ試驗片ヲ作リ其純張力試驗ニ依ツテ得タ抗張力ト同ジ材料ヲ彎曲試驗ニ掛ケ普通公式 $\sigma=\frac{M.y}{I}$ ニヨツテ調ベ得タ所ノ破壞荷重ニ相當スル縁維應力トヲ比較スルト後者ヨリ得タ强度ガ純張力試驗ヨリ得タモノニ對シテ約二倍大トナル事ヲ知ルノデアル,コレニ對シテハ正シイ説明ヲ與ヘル事ハ出來ナイノデアルガ混凝土ノ如ク張力ト壓力トニ對シEナル彈性係數ガ異ナル爲メニ中立軸ガ桁ノ軸ヨリ上方ニ偏シ從ツテFig. 361ニ示ス如キ應力圖トナル爲メニ普通公式ヲ用ヒ計算シタモノヨリ事實遙カニ小ナル應張力ヲ出スニ過ギナイ事トナル爲メデアルラシイ。

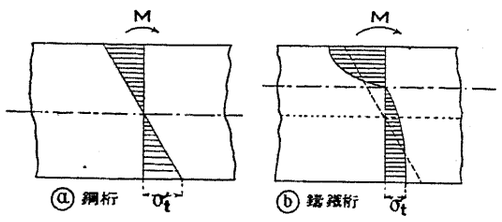


Fig. 361.

此説明モ全ク完全トハ云ヒ難キモ今日ノ所デハコレ以上ノ説明ハ出來ズ又實驗ニ使用スル供試體斷面ニモ鑄造ノ不完全不均一ヲ免レナイ爲メニ應力ノ分布ガ不均一不整デアルカラ斯ノ如キ實驗上相一致シナイ事實アルニ拘ラズ鑄鐵桁ノ計算ニ當ツテハ安全ノ爲メニ普通公式ヲ用ヒ其應張縁維ノ許容應力ヲ純張力試驗デ得タ所ノ强度ニ等シク置イテ計算スル事ガ止ムヲ得ナイトサレテ居ル,卽チ

$$\sigma=\frac{M}{W}\leqq k_t$$

此式ニ據ル時ハ勿論安全側ノ誤差ヲ含ムモノト思ハレル。

[III] 石桁。

石材モ混凝土材ニ於ケル如ク普通ノ彎曲公式ヲ適用スル事ハ正シクナイ,コレモ鑄鐵ニ説明シタト同樣ノ理由ニヨルノデアラウト思ハレル,共ニ桁トシテ用ユル事ハ避ケタイノデアルガ止ムヲ得ナイ時ニハ次式ニ據ルモ一法デアル。

$$\sigma=\eta\frac{M}{W}\leqq k_t \quad \cdots\cdots 258)$$

式中 η =補正係數。

「フェプル」氏 (Föppl) ノ與ヘタル補正係數 η ノ數値ハ

η=0.98 花崗岩ノ矩形桁

=0.84 砂岩ノ矩形桁

第三十五節　鐵筋混凝土桁

(Reinforced Concrete Beam)

本節ハ少シ長クナルカラ豫メ目次ヲ示ス事トスル。

[I] 一般構造要項。

(a) 床版。 (b) 壁。 (c) 支柱。

(d) 桁。 (e) 拱。

[II] 强度其他。

[III] 計算。

(1) 短柱。

(2) 床版及桁。

(a) 單筋矩形桁。 (b) 單筋矩形桁近似解法。

(c) 複筋矩形桁。 (d) 丁字桁。

(e) 大ナル斷面積ノ鐵筋ヲ有スル桁。 (f) 圖式的解法。

(3) 桁ノ彎曲ニ因ル應剪力。

(a) 複筋ヲ有スル一般ノ場合。(b)單筋ノ場合。

(c) 附著應力。(d)繫筋及傾斜鐵筋。

(4) 桁ノ撓度。

(5) 長柱(第八章第八節參照)。

(6) 扭力率ヲ受クル環體(第九章第四節參照)。

(7) 偏倚荷重ヲ受クル場合(第十二章參照)。

(8) 床版(第十三章參照)。

[I] 一般構造要項.

混凝土ノ抗張强ハ著シク其抗壓强ヨリ小デアツテ其比ハ配合ノ如何ニヨリ $\frac{1}{10}$ 乃至 $\frac{1}{20}$ ニ及ブヲ見ル,從ツテ混凝土構造ニ於テ應張力ノ生ズル部分ヘ何カ抗張强ノ大ナル材料ヲ挿入シテ其張力ヲ負擔セシメタナラバ卽チ補强シタナラバ混凝土ノ構造ヲシテ更ニ能ク其能力ヲ發揮セシメ得ルナラントノ考ガ浮ブ譯デアル。

此目的ニ副フ樣ナ廉價ニシテ張力ニ對シ强イ材料ハ展鋼 (Rolled iron) デアル故ニ應張力ノ惹起サルル部分ヘ鋼釘 (Steel bar) ヲ挿入シ夫レヲ應張力ノ方向ニ使用シ且ツ混凝土ト親密ニ密著セシメ同時ニ外圍ノ影響卽チ風化作用ヨリ保護スルタメニ混凝土ヲ以テ充分被覆シタナラバ上述ノ目的ヲ達スル事トナルノデアル,斯クノ如クニシテ最モ簡單ナ鐵筋混凝土構造ガ成立ツノデアツテ二ツノ獨立シタ材料ガ親密ナ密著ヲ保ツテ成立スル所謂合成構造ヲ爲スモノデアル。

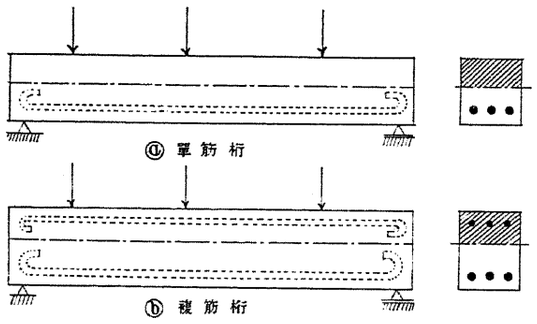


Fig. 362.

此種ノ最モ簡單ナル實例ハ Fig. 362 ⓐ ニ示ス鐵筋混凝土桁デアツテ其應張層ノミニ水平鐵筋ヲ挿入シタ所謂**單筋** (Single reinforcement) ト稱セラルルモノデアル,鐵材ノ抗壓强ハ混凝土ノ夫レヨリハ著シク大ナルガ故ニ鐵筋ヲ桁ノ抗壓層ニモ挿入シテ壓力ニ對シテモ亦抵抗ヲ增加スル事ガ出來ル,コレヲ**複筋** (Double reinforcement) ヲ有スル桁ト云フ Fig. 262 ⓑ ニ其例ヲ示ス。

今日用ヒラルル混凝土ト鐵筋トノ合成構造ハ以上述ベタ樣ナ理論的研究カラ發達シタノデハナクテ其初メハ鐵筋ハ全然安全ノ爲メニ入レラレタカ又ハ鐵筋ガ模型ノ役ヲ勤メテ欲スル形ニスル事ヲ容易ナラシムル目的デ用ヒラレタノデアル,混凝土ト鐵筋トノ合成構造ニ對シ初メテ與ヘラレタ特許ハ 1854 年建築技師「タイエルマン」氏 (Tyerman) ニ與ヘラレタ英國ノ特許デアリ更ニ 1855 年「ランボー」氏 (Lambot) ガ鐵筋混凝土デ短艇ヲ作ルコトノ特許ヲ取リ 1867 年「モニエー」氏 (Monier) ガ鐵筋混凝土ノ植木鉢ノ製造ニ就イテ佛國ノ特許ヲ得而シテ其後構造方法上ニ適用サレタル多クノ追加特許ヲ得タノデアル,併シナガラ「モニエー」氏ノ構造ハ其發明者ガ猶鐵ノ混凝土ニ對スル力學上ノ働キニ就イテ判然タル觀念ヲ持タナカツタ事ヲ知ラシメルノデアル。

初メテ「ケーネン」博士 (Dr. Ing. Mathias Koenen) ガ鐵筋混凝土ノ鐵筋ガ張力ヲ傳導シ混凝土ガ壓力ヲ負擔スルノデアル事ヲ知ツテ「モニエー」式混凝土版ノ計算方法ヲ與ヘ且ツ其當時ノ獨逸ニ於ケル「モニエー」式特許ノ所有者「ワイス」氏 (Ing. G. A. Wayss) ヲシテ此新シキ構法ノ適用ニ就テ一ツノ小冊子ヲ刊行セシメ其理論的方面ヲ彼ガ受持ツタノデアル,此新構法ハ 1900 年以後非常ノ急速度デ殆ンド總テノ國々ヘ擴メラレタ,ソレハ 1900 年ノ巴里ノ世界大博覽會ガ「アンヌビク」氏 (François Hennebique) ニ由ツテ作ラレタ鐵筋混凝土構造物ヲ世界ニ紹介シタノガ此趨勢ヲ促進シタト見ルコトガ出來ル。

鐵筋混凝土ノ計算ニ入ルニ先ダチ構造ノ要項ヲ說明シテ計算ニ當ツテ正シキ判斷ヲ爲スコトヲ得セシメヤウト思フ。

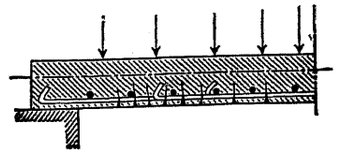


Fig. 363.

(a) **床版** (Slab)。

Fig. 363 ニ其一半ヲ示ス,此ノ如キ自由支持床版 (Freely supported slab) ノ彎曲力率ハ危險斷面 (Dangerous section) ヨリ支點ノ方ヘ漸次減ズル故ニ應張鐵筋ノ斷面積モ亦漸次支點ヘ近ヅクニ從ヒ減ズル事圖ノ如クシテ差支ナキモノノ如ク見ユルモ普通ハ總テノ應張鐵筋ヲ支點迄延長シ又ハ折曲ゲテ應壓層迄達セシメ其處ニ其先端ヲ曲ゲテ錠著セシムルモノデアル,之レ全然混凝土ハ應張力ヲ傳導スル事ガ出來ナイ事ニ由ルノデアツテ Fig. 363 ニ示ス如ク應張層ニハ龜裂 (Crack) ガ實現シ混凝土ハ最早張力ニ抵抗スル能ハザル狀態ニアルカラ若シモ或鐵筋ガ途中デ切斷サレテ支點迄延長サレザル場合ニハ長キ鐵筋ハ其自身ニ彎曲力率ヨリ生ズル張力ヲ負擔スルコトノ外

ニ短縮サレタル鐵筋ノ張力テモ龜裂ナキ部分ニ傳導セネバナラヌ譯デアッテ過大ノ荷重テ負ハサルル事ニナルカラデアル。

不均等ニ分布サレタル荷重又ハ集中荷重ガ床版ニ働クトキ徑間ニ直角ノ方向ニモ亦撓度テ生ズル,從テ彎曲力率ガ矢張リ徑間ニ直角ナル面ニモ起ルカラ此彎曲力率ニ基因スル內部ノ張力テ負擔スルタメニ**主要鐵筋**(Main reinforcement)ト直角ニ且ツ直接其上ニ所謂**配力鐵筋** (Distribution bar)テ挿入スル事ガ必要デアル Fig. 363 ニ斷面デ表サレテ居ル鐵筋ハ卽チ夫レデアル,配力鐵筋ハ主鐵筋ノ直徑ニ應ジテ5乃至 10mm 直徑ノモノテ採用ス,墺國ニテハ橋梁ノ場合ニ少クトモ 7mm 直徑ノモノテ用ヒ而シテ其間隔モ亦稀ニ不均等ノ荷重ノ作用スル如キ場合ニ備ヘル爲メ 30cm テ超エザル事トシ尙作用スベキ集中荷重ノ大サニ應ジテ其間隔テ小ナラシメル事ニシテ居ル,單純ニ支持サレタル床版ノ場合ニ獨逸ノ規定デハ計算ニ用フル徑間ハ純徑間 (Clear span) ニ床版ノ厚サテ加ヘタルモノテ採用スル事トナッテ居ル,從テ支承面ノ壓力ノ合成力ガ支承緣端カラ $\frac{d}{2}$ ダケ離レテ作用スルモノト考ヘナケレバナラヌ(Fig. 364 參照)。支承面ノ壓力分布ハ Fig. 364 ⓐ 及 ⓑ ニ表サレタル兩極端ノ中間ニアルモノト見テ可ナルベク從テ支承面ノ長サ t ハ少ナクモ床版厚 d ダケハ必要トナルガ $\frac{3}{2}d$ ヨリ大ナル事テ要シナイ事ニナル,卽チ $d<t<\frac{3}{2}d$, 但シ實際ニハ著シク大ナル支承長テ採用シテ居ル。

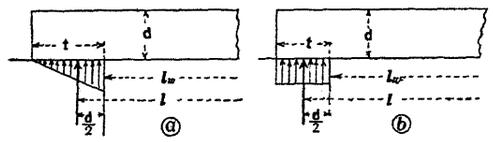


Fig. 364.

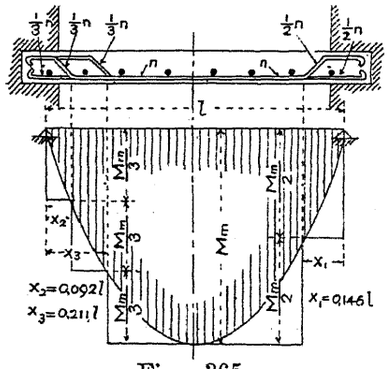


Fig. 365.

鐵筋混凝土ノ構法ニ於テ以上述ベタ如キ完全ニ自由ナル支持狀態ニ作ラルル事ハ稀デアル普通ハ Fig. 365 ノ如ク其端ガ他ノ構造物ニ不完全ナガラ固定サルル狀態ニアル,從テ其支點ニ負彎曲力率テ生ズルモノトシテ計算サレネバナラヌ,勿論其場合ニ固定ノ程度ガ不明ナル故中央ノ正彎曲力率テ減少スル程ノ影響ハ計算ニ入レナイノガ普通デアル。

Fig. 365 ニ等布荷重テ負ヘル床版テ示

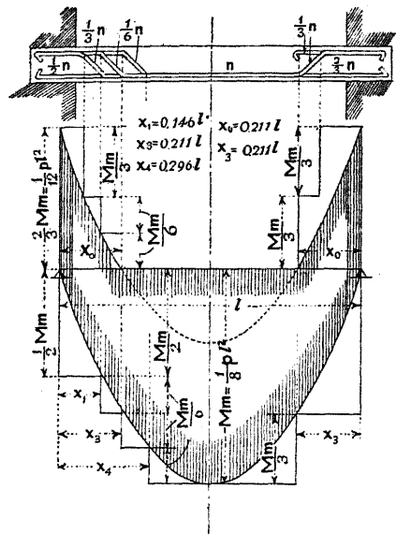


Fig. 366.

ス,其床版ニ於テ單純ニ支持セラレタル單桁トシテノ中央ノ最大彎曲力率 $M_m=\frac{1}{8}ql^2$ ニ對シ應張鐵筋ガ算定サレタルモノトス,此鐵筋ハ中央ニ於テハ必要デアルガ兩端ニ近ヅクニ從ヒ漸次不必要トナルカラ同圖ニ示ス方法デ上ニ曲ゲ上ゲ此クシテ兩端ノ負彎曲力率ノ爲メニ起コル上側緣維ノ應張力テ受ケ持タシムルノデアル,鐵筋テ曲ゲ上ゲル點ノ距離 x ノ選定方ハ彎曲力率圖ヨリ決定セラレルノデ同圖左半ニハ先ヅ全鐵筋ノ $\frac{1}{3}$ テ曲ゲ上ゲ次ニ又 $\frac{1}{3}$ テ曲ゲタルテ示シ右半ニハ全鐵筋ノ半數卽 $\frac{n}{2}$ テ彎曲力率ガ中央ノ半卽 $\frac{M_m}{2}$ ナル點ニテ一箇所デ曲ゲタルテ示ス。

Fig. 366 ハ同樣ノ床版ガ其端テ固定サレタル場合卽チ $\frac{1}{12}pl^2$ ノ負彎曲力率テ生ズルモノトシテ鐵筋ノ挿入サレタルテ示ス,從ッテ彎曲力率ハ實線ノ如キ最大及最小力率圖テ顧慮シテ決定セラレナケレバナラヌ,卽チ鐵筋ノ上側(應壓側)ニ於ケル曲折點ハ最小彎曲力率圖ニヨリ又下側ノ曲折點ハ最大彎曲力率圖ニヨッテ定メルベキモノデアル Fig. 366 右半ハ鐵筋全數ノ $\frac{1}{3}$ 卽 $\frac{1}{3}n$ 丈ケ別ニ添加セル場合テ示シタノデアッテ斯クスレバ多少鐵筋ノ數量ハ增加スベキモ其代リ加工費ハ節

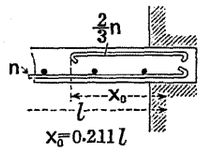


Fig. 367.

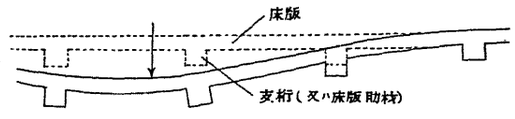


Fig. 368.

約シ得ラレル,其極端ノ例ハ Fig. 367 デアッテ上部鐵筋ハ全部別ノモノテ挿入シタノデアル,コレハ床版ノ時ハ後ニ說明スル通リ剪力ノ關係カラ傾斜鐵筋ノ必要ナキ故斯クスル事モ出來ルノデアル。

以上ハ單一ナル徑間ニ就テ述ベタノデアルガ連續床版 (Continuous slab) ハ鐵筋

混凝土構造ニ於テハ Fig. 368 ニ示ス如ク肋桁ニ支持サレ夫レト單體的(Monolithic)ニ結合サルルガ普通デアルカラ彈性的ニ沈下並ニ回轉ヲ爲シ得ル樣ナ支點ニ支持セラレタ桁ノ如キ狀態ニナルノデアツテ此ノ如キ床版ノ計算ニハ固定度(Degree of fixing)ヲ評價思料シテ彎曲力率ヲ選ブノデアル,獨逸ノ規定デハ等徑間ノ連續床版ノ場合ニ等布荷重ニ對シテハ支點ニ於テ完全固定端トシテノ支點力率ヲ採リ兩端徑間(End span)ノ正彎曲力率ヲ $\frac{1}{11}pl^2$ トシ中間徑間(Intermediate span)ノ正彎曲力率ヲ $\frac{1}{14}pl^2$ ト採ル事トナツテ居ル, Fig. 369 ニハ此力率ノ評價ニ相當セル最大及最小彎曲力率ヲ圖示シ且ツ均等桁厚ノ場合ノ鐵筋屈折點ノ位置ヲ與ヘタノデアル。

支點力率及固定端力率ハ徑間中央ノ正彎曲力率ヨリ量ニ於テ大トナルガ普

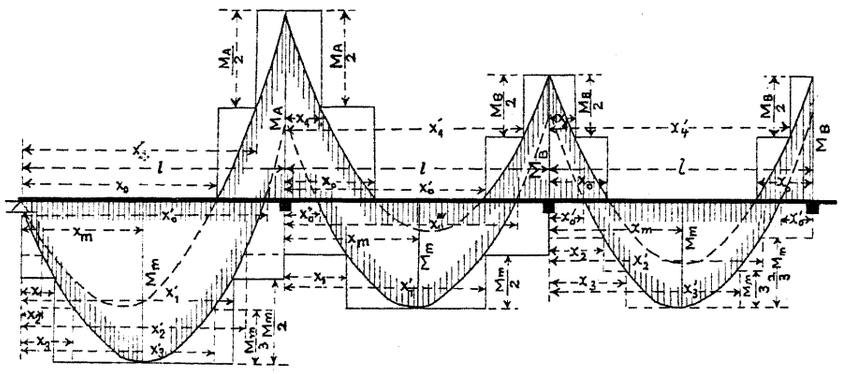


Fig. 369.

通デアル故ニ床版ハ支點ニ於テ徑間中央ニ於ケルヨリ其厚ヲ增スヲ普通トス. Fig. 370 ⓐ 乃至 ⓓ ハ其例ヲ示スモノデアル。

床版ガ被覆又ハ土被リヲ有スル場合ニハ荷重ノ爲メ壓セラレタル幅 t ガ s ナル厚キ被覆ノ分布作用ニヨツテ床版ノ表面ニ於テハ約 $t+2s$ ダケノ幅トナル

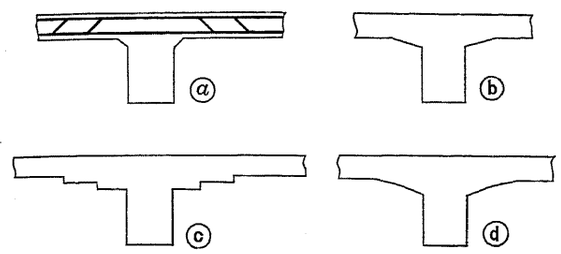


Fig. 370.

(Effective span) l ノ $\frac{2}{3}$ ニ採ラルル事ニナツテ居ル卽 $b=\frac{2}{3}l$ (Fig. 372 參照)。之ニ對シ瑞西國ノ規定ハ b ヲ多少大キク $b=\frac{2}{3}l+1.5s$ 又ハ l ニ採ル事ガ許サレテアル,墺國ノ規定ハ集中荷重ノ作用ヲ縱橫ニ鐵筋ヲ用ヒ四邊ニ支持サレタ床版ト唯一方ノ方向ノミニ鐵筋ヲ挿入シ二邊ニ支持サレタル床版(Fig. 371 參照)。

床版ノ厚及鐵筋ノ斷面ノ計算ニ對シテハ集中荷重ガ幅 b ナル桁ニ等布スルモノトシテ考ヘラレル, b ハ主筋ニ直角ニ測ラレタ幅デアツテ獨逸ノ規定ニ依レバ此 b ハ有效徑間

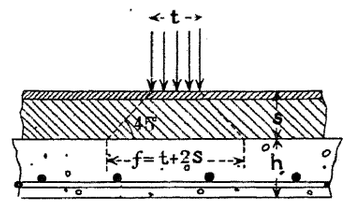


Fig. 371.

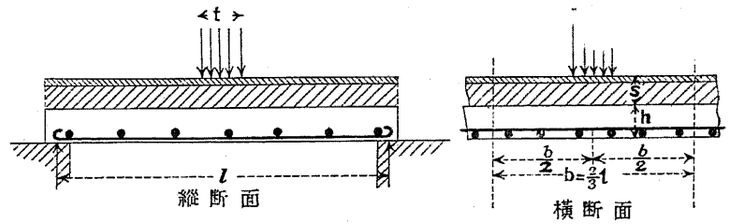


Fig. 372.

トニ區別シ其縱橫ニ鐵筋ヲ挿入シ四邊ニテ支持サレタ場合

$$f=t+2(h+s),\quad b=t+2(h+s)$$

一方ノ方向ニノミ鐵筋ヲ挿入サレタ場合

$$f=t+2(h+s),\quad b=t+2h+s$$

床版ハ屢々主桁 (Main beam) ト小桁 (Cross beam or joist) トニ亙リ四邊デ支持サル. 此場合ニ普通小ナル徑間ヲ採リ二邊ニ支持サレタルモノトシテ計算サルルモ斯ク四邊デ支持サルル事ハ二邊デ支持サルルヨリモ床版ニ取ツテハ望マシキ事デアルガ其端ニ負彎曲力率ノ起ル事ヲ忘レテハナラヌ。

獨逸ノ規定及瑞國ノ條例デハ床版ノ場合ニ混凝土デ鐵筋ヲ被覆スル事少クトモ 1cm ノ厚ヲ要ストセラル。

薄キ床版ノ場合ニ施工中鐵筋ヲ其正シキ位置ニ保ツ事困難デアル故ニ餘リ薄キ床版ハ避クルヲ要ス,獨逸デハ最小厚ヲ 8cm ト規定シテ居ル。

(*b*)**壁**。

大ナル垂直荷重ヲ負擔スベキ壁ハ鐵筋混凝土構造ニ於テ之ヲ柱ト構格トニ分解スル事ガ出來ル,**柱**ハ夫自ラガ一ツノ鐵筋混凝土ノ柱デアツテ各階ノ床ノ下デ鐵筋混凝土ノ桁ニ結合サレル,**構格** (Panel) ハ柱ト柱トノ間ニ相當スル部分デアツテ建物ノ場合必ズシモ一般ニ鐵筋混凝土デ作ラレルトハ限ラナイ,之レガ窓又ハ戸ノ開口ヲ必要トシナイ時ハ石又ハ煉瓦ヲ以テ張ラルル事モアル,此ノ如キ構法ヲ**鐵筋混凝土架構** (Reinforced concrete framework) ト稱ス,此場合柱ト柱トノ間ハ開放サレタ空間ガ廣ク採ラレテ大ナル窓ヲモ作リ得ベク光線ガ能ク入ル故室ヲ奥深ク作ル事ガ出來工場建築ニハ至極適當デアル。

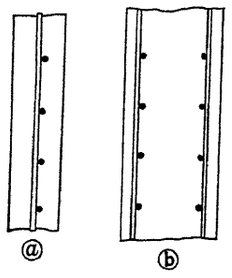


Fig. 373.

塀ノ如キ及ビ隔壁ノ如キ別ニ垂直壓力ヲ受ケナイ壁ハ鐵筋混凝土デ輕簡ニ作リ得ラレル,其場合僅カノ橫力 (Lateral force) ヲ受クル場合ニハ Fig. 373 ⓐノ如キ單筋デ充分デアルガ大ナル橫力ヲ受クル時ハ同圖ⓑノ如ク複筋ヲ採用セネバナラヌ,貯水池隔壁ノ如ク壓力ノ方向ノ變ズル場合ニモ複筋ヲ採用シ何レノ側ガ滿水トナルモ差支ナキ樣ニ計算ヲ行フ事ガ必要デアル。

上ニ述ベタ所ニヨツテ觀レバ鐵筋混凝土壁ハ特ニ大ナル橫力ヲ受クル場合ニ適ス,若シ夫レガ普通ノ石工壁 (Masonry wall) デアツタナラバ必ズヤ相當ニ厚ク且ツ大ナル自重ヲ有シナケレバ堪ヘ得ラレナイノデアル,夫故ニ鐵筋混凝土ハ貯水池壁 (Reservoir wall) 膠灰倉塔 (Cement silo) 擁壁 (Retaining

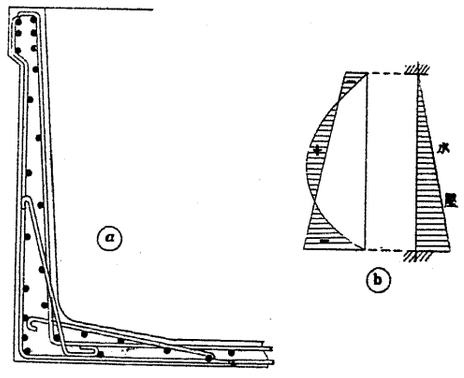


Fig. 374.

wall) 堰堤 (Dam) 橋臺 (Abutment) 及ビ翼壁 (Wing wall) 等ニ主トシテ適用サレル。

彎曲力率ヲ受クル壁ニ對シテハ鐵筋混凝土ヲ以テスル程適當ニ目的通リ作リ得ラルル構法ハ他ニ見出サレナイノデアル。

Fig. 374 ノ如キ曲レル貯水池壁ニ於テハ恒ニ彎曲力率ノ外ニ直力 (Axial force) ヲ受ケル,直力ハ此場合張力デアル,卽チ貯水池壁ノ上部ハ圓環 (Ring) ノ如ク働イテ此張力ヲ負擔シ壁ハ其下部ガ基礎ニ上部ガ此圓環ニ固定的ニ結合サレタル床版トシテ計算スベキデアツテ固定端ニ於テハ負,中央デハ正ノ彎曲力率ヲ生ズルノデアル。

(*c*)**支柱** (Column)。

柱ハ構造物ノ肝要ナル部材デアリ夫レガ破壞デモスレバ其結果甚大ナル傷害ヲ與フルモノデアルガ故ニ一般ニ他ノ部材ヨリハ大ナル安全率ヲ以テ計算スベキデアル,夫故ニ鐵筋混凝土構造物ノ計算及施工ニ際シテモ特ニ愼重ナル用心ヲ以テ柱ヲ取扱ハナケレバナラヌ。

柱ハ出來ル丈ケ軸ニ沿フテ (Axially) 荷重ヲ受ケル樣ナ配置ニ努ムベキデアル柱ト結合サルル桁ガ對稱的ニ配置サレタル場合ニ柱ノ斷面ハ四角カ八角ニスルガ便利デアルガ若シ美觀ノ點カラ必要デアレバ圓形ニスル事モアル,唯片側ノミガ對稱的ナル場合及ビ著シク彎曲ヲ受クル筈ノ柱ニ對シテハ長方形又ハ

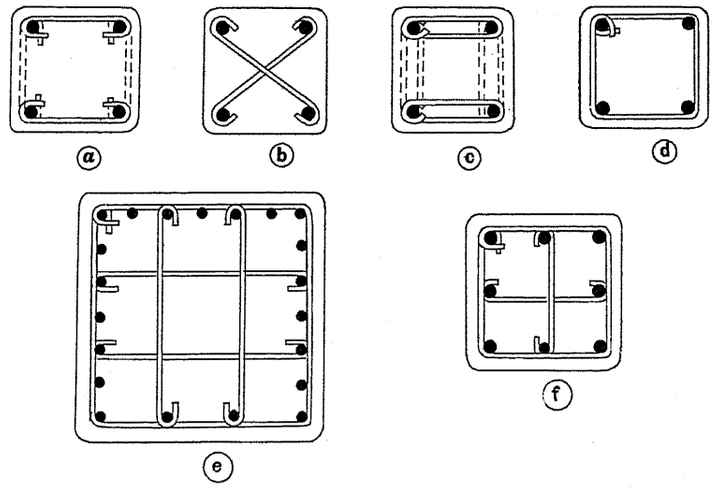


Fig. 375.

丁字形ノ斷面ガ適當スル,其場合ニハ丁字形ノ突緣(Flange)ガ壓力側ニ置カレル。

方形又ハ長方形ノ柱ノ隅角ハ丸メルガ普通デアル。

縱鐵筋ハ繫筋(Stirrup)デ以テ橫ニ結束サル,其最大ノ間隔ハ縱鐵筋ノ彎曲ヲ防グ爲メニ縱鐵筋ノ直徑ノ約12倍ヨリ大ナラザルヲ要ス。

今日迄用ヒラレ來ツタ繫筋ノ種々ノ形卽チ結束繫筋 (Umfangsbügel Fig. 375 ⓐ), 對角繫筋 (Diagonalbügel, 同圖 ⓑ),複結繫筋 (Schleifenbügel, 同圖 ⓒ), 圍繞繫筋 (Umschliessungsbügel, 同圖 ⓓ)等ノ中デ最後ノモノガ最モ有效ノ樣デアル,何トナレバ能ク卷キ附キ縱鐵筋全體ヲシツカリ保持シ混凝土ヲ打ツ前ニ全體トシテ便利ニ定置スルコトガ出來ルカラデアル。

四本以上ノ縱鐵筋ヲ用ユル場合ニ圍繞鐵筋ノ外ニ Fig. 375 ⓔ 及 ⓕ ニ示ス樣ナ橫結束線ヲ挿入シテ主要縱鐵筋ノ彎曲ヲ防グ事モ必要デアル。

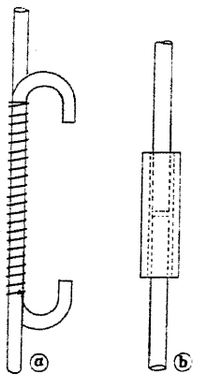


Fig. 376.

出來ルナラバ縱鐵筋ハ接目ナシニ挿入シタキモノデアルガ施工上接手ノ避ケラレナイ場合ニハ床ノ下端ノ所デ接グガ最良デアル之レ其處デハ柱ノ斷面ガ連結サルル桁ノ爲メニ外側ヘ增大サレテアルカラデアル。

接合サルル鐵筋ハ其兩端ガ是非曲ゲラレネバナラヌ,且ツ互ニ重ネ合セ而シテ其重ネ合フ全長ニ亙リ鐵線ヲ捲キ附ケテ互ニ結束スルヲ要ス (Fig. 376 ⓐ 參照)。此捲附ハ別ニ壓力又ハ張力ヲ傳導スルモノデハナイ,唯接合サルベキ鐵筋ノ端ガ震動シナイ樣ニ型枠ノ中デシツカリト保タレ依ツテ以テ夫レガ混凝土ノ中デ空隙ヲ作ル事ノナイ樣ニスルノデアル,縱鐵筋ヲ衝頭接合 (Abutting joint) ニシ其部ニ管ヲ被セタル如キ接目ハ奬メラレナイ (Fig. 376 ⓑ 參照)。何トナレバ衝頭面ガ必ズシモ完全デナイカラ壓力ノ直接傳導ハ不確デアリ且ツ管ノ內部ヘ混凝土ガ不完全ノ狀態デ入込ムカラ空隙中ニアル鐵筋ノ端ノ錆ビル傾向ガアルカラデアル。

縱鐵筋ニ圓輪 (Ring) 又ハ螺旋 (Spiral) ヲ捲キ附ケタ柱ハ八角斷面ニ施工スルノガ最良デアル (Fig. 377 ⓐ 及 ⓑ 參照)。

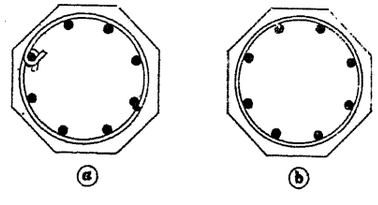


Fig. 377.

此場合各隅角ガ縱鐵筋ノ位置ニ相當スル。

展鐵 (Profile iron) デ出來タ鐵柱ヲ混凝土デ包ムト其破壞荷重(强度)ハ純鐵柱ヨリモ高キ事實驗ノ證明スル所デアツテ構法ニヨツテ差ハアルガ兎ニ角純鐵柱ヨリ强キノ故ヲ以テ屢々用ヒラルル。

柱ノ基礎部卽チ縱鐵筋ノ始マル脚部ハ段附ト傾斜トデ混凝土ノ斷面ヲ增大シテ作ラルル事 Fig. 378 ニ示サルル通リデアツテ同圖ニハ其各部ノ適當セル寸法割合ヲ四角柱ノ一邊ヲ單位トシテ記入シテアル。

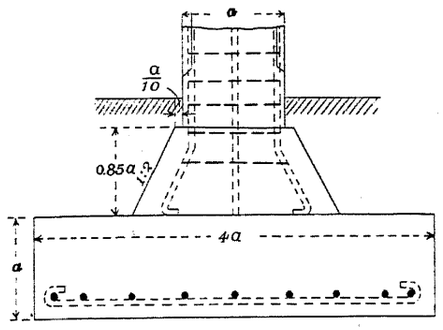


Fig. 378,

柱ノ脚部ハ鐵筋ノ無キ敷混凝土(純混凝土基礎)ノ上カ又ハ鐵筋ノアル基礎版ノ上ニ支持サレル,純混凝土(Plain concrete)ノ場合ハ少ナクトモ其厚ガ突出長ノ 1.5 倍アルヲ要ス,鐵筋ヲ挿入スル時ハ Fig. 379 ⓐ 及 ⓑ ノ如ク爲シ得ル,時トシテハ同圖 ⓒ ノ如ク一方向ノミニ擴大シテ作ラレタ柱脚ヲ長方形ノ鐵筋混凝土基礎ノ上ニ据置クガ便利ナル事モアル。

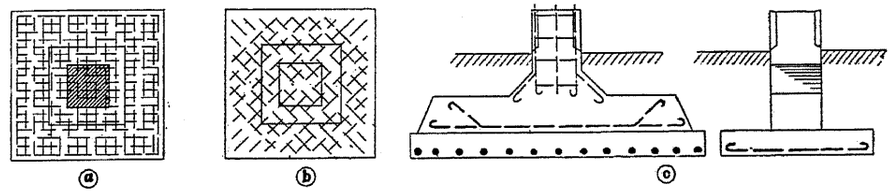


Fig. 379.

(*d*) 桁 (Beam)。

桁ハ床版ノ厚ノ大ナルモノデ張力ト壓力ト傾斜主應力 (Inclined principal stress) トヲ傳フル爲メニ縱鐵筋ト繫筋トヲ配置スル。

桁ノ斷面ハ要求ニ應ジ奈何樣ニデモ形成サルルガ出來ル丈ケ彎曲面ニ對シ對稱的デアルガヨロシイ,最モ屢々用ヒラルル桁ノ斷面ハ矩形カ丁字形デアル。

獨逸ノ規定デハ桁ノ作用高 ($h-e_1$) ニ對シテ徑間ノ $\frac{1}{20}$ ヨリ小ナラザルベキヲ要求サレテアル(Fig. 380 參照)。

床版ニ於ケルト同樣桁ニ利用サルル縱鐵筋ノ端ハ主要應張力ノタメニ龜裂ヲ受クル如キ部分ニ終ツテハナラナイ,必ズヤ支點ノ如キ應力ナキ部分カ又ハ單ニ應壓力ノミヲ受クベキ混凝土ノ部分迄延長スルヲ要ス,而シテ其部分ニ於

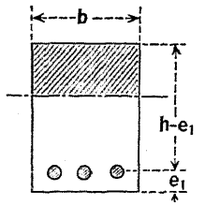


Fig. 380.

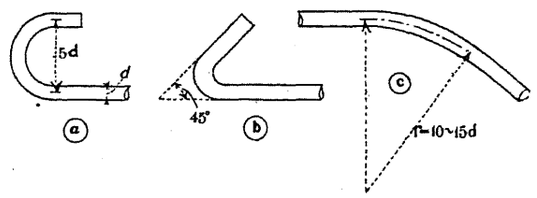


Fig. 381.

テ銳角ノ屈曲又ハ丸キ屈曲ヲ爲シテ安全ニ錠著サルルヲ要スル,縱鐵筋ヲ曲ゲテ壓力ノミヲ受クル部分ニ迄延長スル場合ニ其半徑 r ハ鐵筋直徑 d ノ 10~15 倍デナケレバナラヌ(Fig. 381 參照)。

繫筋ハ 5~12mm 直徑ノ丸鐵ニテ種々ノ形ニ作ラルル,A 字繫筋 (A-Bügel, Fig. 382ⓐ), U 字繫筋 (U-Bügel, 同圖 ⓑ), 結束繫筋 (Umfangsbügel, 同圖ⓒ)ハ其例デアル,桁

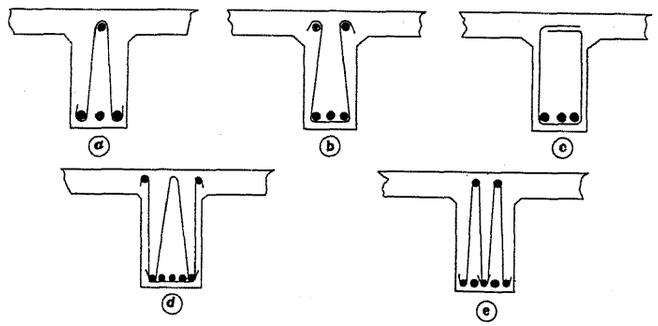


Fig. 382.

ノ或斷面ニ於テ特ニ大ナル繫筋ヲ要スルガ如キトキハ多クノA字繫筋又ハA字及U字繫筋ヲ同時ニ同一斷面ニ配置スルコト Fig. 382 ⓓ 及 ⓔノ如クスルモヨロシイ。

繫筋ノ間隔ハ餘リ大キク選バレテハイケナイ,中立軸ニ沿フテノ應剪力ガ許容値ニ達シナイ樣ナ部分ニ於テノ最大間隔ハ矩形斷面ナラバ其幅又丁字桁ノ

場合ナラバ其肋幅 b (Fig. 400 參照)ニ採ツテヨイガ併シ許容應剪力ヲ超過スル如キ部分ニ於テハ多クトモ上揭ノ $\frac{3}{4}$ 位ニ採ラナケレバナラヌ。

抗壓鐵筋ヲ包圍スル繫筋ハ柱ノ場合ト同樣縱鐵筋ノ直徑ノ 12 倍ヨリ大ナル間隔ヲ持ツテハナラヌ。

同一平面內ニアル一列ノ縱鐵筋相互ノ間隔及ビ相上下シテ數列配置サレネバナラヌ場合ノ其列ノ距離トシテハ最大鐵筋ノ直徑ヲ標準トスル,獨逸ノ規定ハ此規則ヲ含有シ尙其外ニ鐵筋ノ良好ナル被覆ノ點ヲ顧慮シテ鐵筋間ノ最小正味間隔ヲ 2cm トシテ居ル,尙又外面ヨリ縱鐵筋迄ノ最小距離トシテ繫筋ヲ混凝土デ被覆スル事少クモ 1.5cm ノ厚ヲ要シ其他ニ於テハ 2cm ヲ要ストシテ居ル。

兩端單ニ支持サルル桁ノ計算ニ用フル徑間トシテ獨逸ノ規定デハ支承中點間ノ距離ヲ採ルモノトシテ $l=l_w+t$ (Fig. 364 參照)トナル,併シ極メテ非常ニ長イ支承ノ場合ニハ l_w ノ 5% 增ニシ $l=l_w+\frac{5}{100}l_w=1.05l_w$.

適當ナル支承長 t ヲ選定シテ後支承面ニ生ズル壓力ガ支承材料ノ許容限度ヲ超過スルコトナキヤ否ヤヲ照査シナケレバナラヌ,若シ超過スル場合ニハ必要ナル鐵筋ヲ支承面ニ挿入シ桁ノ端ヲ兩側面ニ擴大シテ支承面ヲ增加スル事 Fig. 383 ニ示ス如クスルヲ要ス。

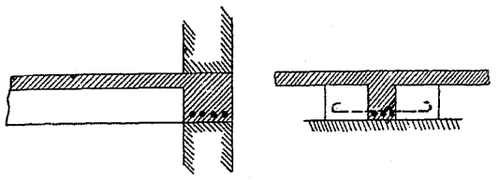


Fig. 383.

鐵筋混凝土構造ハ甚ダ剛直デアルカラ凡テノ避クベカラザル支點ノ沈下ガ均等デアル樣ニ努メネバナラヌ,故ニ一ツノ支點ヲ一部混凝土ニテ作リ一部ヲ石灰膠泥 (Lime mortar) 積ノ石工デ作ル如キ事ハ避ケネバナラヌ。

連續桁ハ特ニ凡テノ支點ガ均等ニ沈下スル樣ニセネバナラヌ,故ニ若シ此ノ如キ桁ガ一部鐵筋混凝土ニ支持サレ又一部ハ石工ノ上ニ支持サルル如キ場合ニハ其石工ハ膠灰膠泥 (Cement mortar) ニテ積ムカ又ハ石灰ヲ混ズルニシテモ豐富ナル膠灰石灰膠泥 (Cement lime mortar) ニテ積ム事ニシナケレバナラヌ,何トナレバ石灰膠泥積ノ石工ハ甚シク壓縮サレ鐵筋混凝土ノ支點ハ極メテ僅カニ壓縮サルルニ過ギヌカラデアル。

橋梁ノ構造ニ適用サルル如キ非常ニ長キ且ツ重ク荷重サレタル鐵筋混凝土桁ハ普通支承床版 (Bearing plate)ノ上ニ支持サルルモノデアツテコレハ鐵橋ノ床

鈑又ハ沓鈑 (Bed-plate or shoe-plate) ニ似テ然モ鐵筋混凝土構法ニ適シタル構造ナルコトヲ要ス。

墺國ノ規定デハ鐵筋混凝土公道橋ニ向ツテ次ノ如ク要求ス,徑間 4m 以上ノ桁ハ承版又ハ適當ノ裝置ノ上ニ支持サレ溫度又ハ應力ノ變化ニ相應セル移動ノ可能ナルモノタルヲ要スト。

此橋梁ノ桁ノ場合ヲ別トシテ鐵筋混凝土桁ガ完全ニ移動ノ自由ナル如キ支點ヲ有スル事ハ構造方法ニ於テ稀デアル,普通ハ桁ノ兩端共他ノ混凝土構造物ト共ニ一體ニ作リ込マルルカ又ハ支壁工 (Support wall masonry) 中ニ埋込マルルカデアツテ所謂固定桁 (Fixed beam) ニナルノデアルガ其端ノ固定ガ不確デアルカモ知レヌカラ徑間ノ中央ニ於ケル彎曲力率ヲ減少スル事ノ影響ハ之ヲ計算ニ入ルル事ハ出來ナイケレドモ兩端ニ於テ幾分カノ負彎曲力率ノ生ズルコトハ顧慮シナケレバナラヌノデアツテ床版ニ於ケルト同樣ニ下部鐵筋ノ一部ヲ曲上ゲテ負彎曲力率ヨリ生ズル張力ヲ受ケ持タシムル樣ニシナケレバナラヌ。

鐵筋混凝土構造ニ於テハ彎曲力率ノ分布ガ好都合デアルノト且ツ長キ桁ヲ作ル事ガ簡單デアルノトノ二ツノ理由デ他ノ構法ニ於ケルヨリハ遙カニ多ク連續桁ガ適用サレル,其場合ニ支點力率ガ徑間中ノ正力率ヨリハ量ニ於テ遙カ大デアルカラ支點ノ上ニ於テ桁高ヲ增加スル必要ガアリ其爲メ Fig. 384 ニ於ケ

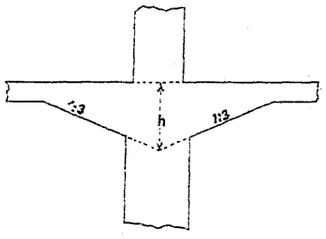


Fig. 384.

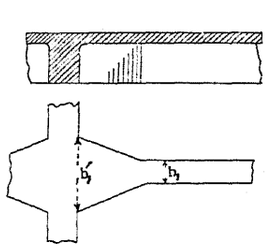


Fig. 385.

ル如ク變曲點 (Inflexion point) ヨリ傾斜ヲ附ケテ所要ノ h ヲ得ルニ至ラシム,此傾斜ハ 1:3 ヨリ急ナルハ望マシカラズ。



Fig. 386.

又 Fig. 384 ノ如キ傾斜ヲ肋 (Rib) ニ附與シ能ハザル理由ノアル時ハ結合サルル支點及固定端ニ於テ肋ノ幅ヲ b_1 ヨリ b_1' ニ(Fig. 385 參照)擴大スル事モ亦一法デアル,勿論生ズル縁維

應力ハ h ノ自乘ニ逆比例シ b ニハ只一乘ニ逆比例スルガ故ニ h ヲ變ズル方有效デアル事ハ言ヲ待タヌ。

連續桁ノ主桁ト小桁トノ交點ニ於テハ其接合面ニ大ナル剪力ガ生ズル譯デアルカラ其部分ニ Fig. 386 ニ示ス如キ釣繋筋 (Aufhängebügel) ヲ採用スルガヨイ,而シテ夫ハ構造關係カラ下開キ又ハ上開キノ何レカヲ用フベキデアル。

(*e*) **拱** (Arch)。

鐵筋混凝土拱ニ於テハ鐵筋ガ張力ヲ受持チ得ル故ニ此種ノ拱ニ於テハ軸壓力 (Axial thrust) ノ外ニ彎曲力率ヲ受ケテ應張力ヲ生ジテモ差支ナイノデアル,卽チ鐵筋混凝土拱ニ於テハ石拱 (Masonry arch) ノ樣ニ壓力線 (Pressure line)ガ必ズシモ常ニ拱環 (Arch ring)ノ中央三分ノ一 (Middle third)以內ニ存在スル事ヲ必要トシナイ.夫故ニ鐵筋混凝土拱ハ同一狀態ニアルトシテ純混凝土拱 (Plain concrete arch) 又ハ石拱ヨリハ薄ク作リ得ラレルノデアル。

輕量荷重ヲ擔フ鐵筋混凝土拱ハ Fig. 387 ニ於ケルガ如ク單ニ拱腹線 (Intrados) ニノミ單筋ヲ挿入シテ足ル,勿論如此單筋デハ大ナル荷重ニハ耐ヘ得ラレナイ,

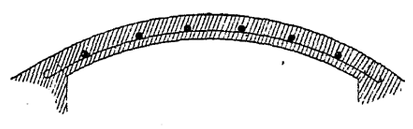


Fig. 387.

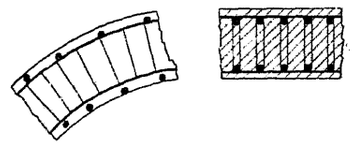


Fig. 388.

鐵筋ガ大ナル力ヲ傳導シナケレバナラナイ場合ニハ Fig. 388 ノ如ク上下側ニ鐵筋ヲ挿入シテ複筋トシ且ツ多クノ繋筋ヲ加ヘ混凝土被覆厚ヲ充分ニシナケレバナラヌ,拱橋ニ於テハ屢々拱腹及拱背 (Intrados & extrados) ニ等量ノ鐵筋ヲ挿入シテ種々不規則ナル荷重狀態ニ因リ生ズル應張力ヲ受ケ持タシムル事ニ努メテ居ル。

[II] 强度其他.

(1) 彈性係數 (Modulus of Elasticity)

混凝土ノ彈性係數ノ値ハ使用スル材料ノ良否,其材齡及應力ノ範圍ニヨツテ極メテ廣イ範圍ニ變化スルモノデアル故ニ或一定ノ種類ノ混凝土ニ就キ或年限ニ於テ試驗ヲ行ヒ定メルノ外ハナ

イ,併シ實際ニ當ツテハ平均トシテ鋼材ノ彈性係數ノ$\frac{1}{15}$トシテ居ル,コレハ勿論精密ナ値デハナイガ之ヲ用ヒテ計算シタモノハ安全ナル結果ヲ與ヘルノデ各國共之ヲ採用シテ居ル,卽チ

$$n=\frac{E_s}{E_c}=15$$

今 E_s= 2,100,000 kg/cm^2 トスレバ E_c= 140,000 kg/cm^2 トナリ

E_s=30,000,000 ″/□″ 〃 E_c=2,000,000 ″/□″ トナル

(2)支承應力 (Bearing Stress)

コレハ加壓面積 (Loaded area) ヨリモ大ナル斷面ヲ有スル物體ニ壓力ヲ加ヘタ時ニ其接觸面ニ生ズル應力デアツテ大約

42 kg/cm^2=600 ″/□″ ヲ許容セラル

(3)軸壓力 (Axial Compression)

短柱ニ對シ軸ニ沿フテ壓力ガ作用スル時ニ生ズル應壓力デアツテ長サガ徑ノ12倍ヲ超エナイ場合ニ對シテハ大約

28 kg/cm^2=400 ″/□″

(4)緣維應壓力 (Compression in Extreme Fibre)

桁ニ於テ生ズル應壓側ノ許容緣維應壓力ハ大約

28～35 kg/cm^2=400～500 ″/□″

(5)剪力及傾斜張力 (Shear and Diagonal Tension)

只單ニ純應剪力ノミナル時ハ卽チ其斷面ニ直角ナル應力ノ存在シナイ時ハ 4.2 kg/cm^2=60 ″/□″

併シ若シ剪力ガ其斷面ニ直角ナル應力ト結合スル時例ヘバ柱ニ於ケル傾斜剪力卽チ軸ト45°傾斜セル斷面ニ沿フテノ應剪力ニ對シテハ(コレハ軸ニ沿フ應壓力ノ$\frac{1}{2}$トナル)

14 kg/cm^2=200 ″/□″

又傾斜張力ガ混凝土デ受持タルル時例ヘバ桁ノ中立軸ニ生ズル傾斜張力ヲ混凝土ノミデ負擔セントスル時コレニ相當スル垂直應剪力ニ對シ 2.8 kg/cm^2=40 ″/□″

(6)附著應力 (Bond Stress)

コレハ混凝土ト鐵筋トノ間ノ應力卽チ附著ノ應力デアツテ

4.2 kg/cm^2=60 ″/□″

(7)鐵筋ノ強度

鐵筋混凝土用鋼材ノ許容應張力及許容應壓力トシテ

850～1200 kg/cm^2=12000～15000 ″/□″

其許容應剪力トシテハ

550～700 kg/cm^2=8000～10000 ″/□″

(8)鐵筋混凝土ノ配合 (Proportion of Concrete Reinforced)

普通膠灰 (Cement) 1, 砂 2, 砂利 4 ノ容積配合ガ用ヒラルル,但シ厚サ薄キカ又ハ特ニ主要構造物デアツテ良質混凝土 (Rich concret) ヲ欲スル時ニハ同樣容積比ニテ $1:1\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}$ 或ハ 1:2:2 ノ配合ガ用ヒラレル,更ニ斷面積ノ大ナル然モ主要ナラザルモノニハ 1:3:5 或ハ 1:3:6 デ充分デアル。

(9)砂利及碎石ノ寸法 (Dimension of Gravel or Broken Stone)

砂利碎石ノ大サハ作ラルル構造物ノ厚ニヨリ異ナルモノデアツテ鐵筋ト外面トノ間ノ距離ガ小ナル時ハ其空間ニモ充分混凝土ノ入リ得ル樣ニ砂利ヲ小ニスル,又網狀鐵筋ナレバ其網目ヨリ小ナル徑ノ砂利ヲ用ヒネバナラヌ,一般ニ厚サノ薄キトキハ 2 分～5分止メトシ非常ニ大ナル空間アル場合ニモ 8 分以上ハ望マシカラズ。

(10)斷面割合 (Proportion of Cross Section)

斷面ノ中ニ鋼材ヲ挿入スル位置ハ Fig. 389 ニ就イテ

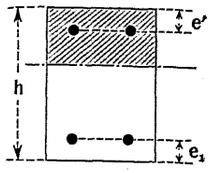


Fig. 389.

床版ニテハ單筋複筋共ニ $e_1=e'=\frac{1}{6}h$

桁ニテハ　單筋複筋共ニ $e_1=e'=\frac{1}{10}h$

尙鐵筋比 (Percentage of reinforcement) ハ經濟上約

$$\frac{F_s}{F_c}=0.5\%\sim1.0\%$$

式中 F_s=鐵筋總面積, F_c=混凝土面積,

コレ以上ノ鐵筋ハ望マシカラズ特ニ 1.5 % 以上ハ殆ンド不可ナルニ近イ。

尙混凝土及鐵筋混凝土ノ施工設計及作用應力ニ關スル下記ノ報告文ハ參考トナス價値アルモノト認メラル。

Final Report of the Special Committee on Concrete and Reinforced Concrete
Proceedings of the American Society of Civil Engineers Vol. 42. No. 10.
Dec. 1916. p 1657—1708

茲ニ上記報告文ノ要點ヲ摘記スレバ下ノ如シ。

混凝土ノ作用應力度ヲ決定スルニハ使用セントスル材料及配合ヲ用ヒテ徑 8″ 長 16″ ノ圓壔ヲ實驗室内ニテ作リ 28 日間保存シタル後試驗器械ニテ調ベタル平均抗壓强度ヲ標準トシ其百分率ヲ以テ下記ノ如ク與ヘラルル,但シ此試驗强度ハ次表ノ値ヲ以テ最大限ト看做ス。

混凝料 ＼ 配合	1 : 3	1 : 4 $\frac{1}{2}$	1 : 6	1 : 7 $\frac{1}{2}$	1 : 9
花崗岩。脈岩	3,300 (232)	2,800 (197)	2,200 (155)	1,800 (127)	1,400 (98)
砂利。硬質石灰岩。硬質砂岩	3,000 (211)	2,500 (171)	2,000 (141)	1,600 (112)	1,300 (91)
軟質石灰岩。砂岩	2,200 (155)	1,800 (127)	1,500 (105)	1,200 (84)	1,000 (70)
石炭燼	800 (50)	700 (49)	600 (42)	500 (35)	400 (28)

(單位 #/□″, (kg/cm²); 配合ハ膠灰ニ對スル砂及砂利ノ和ヲ以テ容積比ニテ表ハス)

(1) 支承應力ハ加壓面積ノ少クモ二倍ノ斷面ヲ有スル物體ニ對シテハ支承面ニ於テ上揭試驗抗壓强度ノ 35 % ノ應力ヲ許容ス(假ニ試驗强度 2000 #/□″ ナラバ 700 #/□″(49 kg/cm²) ヲ採ル事トナル)。

(2) 軸壓力ハ長サガ徑ノ 4 倍ヲ超過セザル純混凝土柱若クハ縱鐵筋ノミヲ有シ長サガ徑ノ 12 倍ヲ超過セザル鐵筋混凝土柱ニ對シ 12.5 % ヲ採ル(試驗强度 2000 #/□″ ノ時 450 #/□″(32 kg/cm²) ニ相當ス)。尙圓形捲筋或ハ螺旋繫筋ヲ有シ且ツ Fig. 390 ニ示ス條件ヲ具備スル時ハ上揭應力ニ比シテ其 55 % ヲ增シ得ルモノトス(同上 700 #/□″(49 kg/cm²)ニ相當ス)。

(3) 繰維應壓力トシテハ 32.5 % ヲ採ル(試驗强度 2000 #/□″ ノ時 650 #/□″(46 kg/cm²) ニ當ル)。但シ連續桁ノ支點ノ彎曲力率ヲ $\frac{1}{12}pl^2$(終端徑間ノ內方支點幷ビニ二徑間ノミデ終端ガ固定サレタ時ハ $\frac{1}{10}pl^2$)トシテ計算シ許容壓力ヲ 15 % 增シ得ル(同上 710 #/□″(50 kg/cm²) ニ當ル)。

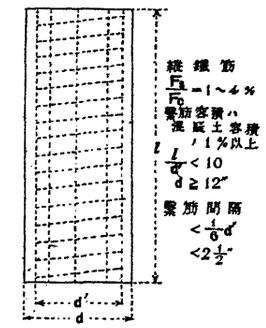


Fig. 390.

(4) 剪力及傾斜張力ニ對シテハ縱鐵筋ノミヲ有スル桁ノ最大垂直剪力度ニ對シ 2 %(同上 40 #/□″(3 kg/cm²))。傾斜張力ニ對スル防備ガ爲サレテアル場合ニハ 6 %(同上 120 #/□″(84 kg/cm²) ニ當ル。

(5) 附著應力ハ丸鐵ノ場合 4 %(同上 80 #/□″(6 kg/cm²))。異形鐵筋ノ最良型ノモノニアリテモ 5 % 以內(同上 100 #/□″ (7 kg/cm²) ニ當ル)。

(6) 鐵筋ノ應壓力及應張力ハ 16000 #/□″(1120 kg/cm²)ヲ超過セザル事ヲ要ス。

我國ニ於テ,市街地建築物法施行規則ニ據リ規定セラレタル强度左ノ如シ。

(1)「セメント」1, 砂 2, 砂利 4 ノ混凝土應力限度(第百二條)。

應壓力度 45 kg/cm²(640 #/□″), 應張力度 4.5 kg/cm²(64 #/□″)。

應剪力度 4.5 kg/cm²(64 #/□″), 但シ鐵筋混凝土構造ニ於テ主筋ヲ橫斷スル面ニ對シテハ 9kg/cm²(128 #/□″)

彎曲應力度 4.5 kg/cm²(64 #/□″)。

(2)「セメント」1, 砂 3, 砂利 6 ノ混凝土應力限度(同上)。

應壓力度 30 kg/cm²(427 #/□″), 應張力度　3 kg/cm²(43 #/□″)。

應剪力度 3 kg/cm²(43 #/□″), 彎曲應力度 3 kg/cm²(43 #/□″)。

(3) 軟鋼ノ應力限度(同上)。

應壓,應張幷ビニ彎曲應力度 1150 kg/cm²(16,400 #/□″)。

應剪力度 750 kg/cm²(10,700 #/□″)。

(4) 錬鐵ノ應力限度(同上)。

應壓,應張幷ビニ彎曲應力度 850 kg/cm²(12,000 #/□″)。

應剪力度 550 kg/cm²(7830 #/□″)。

(5) 鐵筋混凝土構造ニ於テ鐵ト混凝土トノ彈性係數ノ比15(第百三條)。

(6) 同ジク應滑力度 7 kg/cm²(100 #/□″), 異形鐵筋ハ其形狀ニ依リ地方長官ノ許可ヲ得テ 10 kg/cm²(142 #/□″) 迄ト爲ス事ヲ得ル(第百四條)。

[III] 計算 (Statical Calculation)。

鐵筋混凝土構造ニ於テ鐵筋ガ充分ナ均等性 (Homogenuity) ヲ保ツ樣ニ配置サレテ居ツタナラバ鐵筋ハ常ニ周圍ノ混凝土ト密著シテ居ルト考ヘラルル故ニ鐵筋ト其周圍ノ混凝土トハ同一ノ變形ヲ爲スモノト假定サレ得ル,而シテ平面斷面ハ荷重ヲ受ケタ後モ平面ヲ保留スル事,彈性係數ハ不變ト見做ス事等ガ今後計算ヲ行フニ際シテノ主要ナル前提ヲ爲スモノデアル。

(1) 鐵筋混凝土短柱。

第三章第八節ニ述ベタ如ク $\frac{l}{d} \leqq 18$ ノ場合ヲ指スノデアツテ直壓ニ因ツテ破壞スル如キモノデアル,普通ノ鐵筋混凝土柱ハ此制限外ニ出ル事ハ稀デアル,今

P = 全壓力

σ_c = 混凝土ニ於ケル應壓力

σ_s = 鐵筋ニ於ケル應壓力

F_c = 混凝土ノ斷面積

F_s = 鐵筋ノ斷面積

E_c = 混凝土ノ彈性係數

E_s = 鐵筋ノ彈性係數

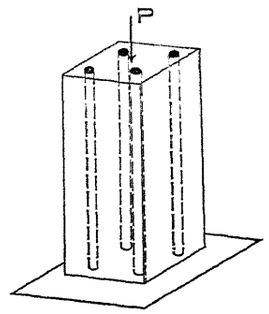


Fig. 391.

トスレバ此短柱ガP ノ壓力ヲ受ケテ尙平面斷面ヲ保留スル假定ニ依リ鐵筋ト混凝土トガ同一變形ヲ生ズル事トナリ

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s \quad \cdots\cdots (a)$$

然ルニ平衡條件ヨリ

$$P = \sigma_c F_c + \sigma_s F_s \quad \cdots\cdots (b)$$

而シテ應力ト變形トノ關係ハ

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s}, \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_c^m}{E_o}$$

ナル故ニコレヲ (a) 式ニ挿入シ

$$\sigma_s = \frac{E_s}{E_o}\sigma_c^m$$

更ニ此値ヲ (b) 式ニ挿入シ

$$P = \sigma_c F_c + F_s \frac{E_s}{E_o}\sigma_c^m$$

$$= \sigma_c\left(F_c + F_s \frac{E_s}{E_o}\sigma_c^{m-1}\right)$$

然ルニ第二章第三節 [II] ニ述ベタ如ク

$$E_c = \frac{E_o}{\sigma_c^{m-1}}$$

$$\therefore \quad P = \sigma_c\left(F_c + \frac{E_s}{E_c}F_s\right)$$

今 $\frac{E_s}{E_c}\equiv n$ ト置イテ

$$\left.\begin{aligned} P&=\sigma_c(F_c+nF_s)\\ \therefore\quad \sigma_c&=\frac{P}{F_c+nF_s}\\ \sigma_s&=\frac{P}{F_s+\frac{1}{n}F_c}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(259)$$

卽チ混凝土ノ應力ヲ求メヤウト思ヘバ鐵筋面積ヲ混凝土ノ等價面積ニ換算シテコレト混凝土ノ面積トノ和デ荷重ヲ割レバ求メラレ鐵筋ノ應力ヲ出サウト思ヘバ鐵筋面積ト混凝土ヲ鐵筋ノ等價面積ニ換算シタモノトノ和デ割レバ求メラレル。

(2)床版及桁。

(a)單筋矩形桁(鐵筋ノ面積及高ガ混凝土ニ比シテ小ナル場合)。

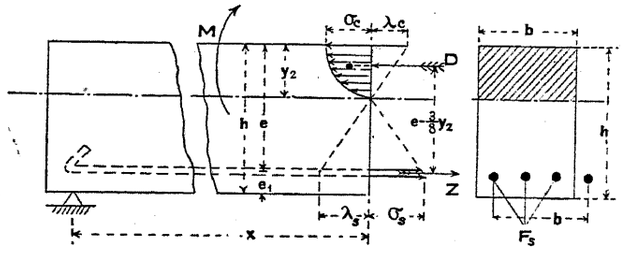


Fig. 392.

Fig. 392 ニ於テ左支點カラ x ノ距離ニ斷面ヲ採リ外力ニ因ル彎曲力率 M ハ混凝土ノ應壓力ト鐵筋ノ應張力トヲ以テ抵抗セラルルモノトス,而シテ混凝土ニ起ツタ壓力トシテ圖示ノ如キ拋物線形ヲ假定シ其最大力度ヲ σ_c 且ツ其應張力ヲ考慮ニ採ラナイモノトスル,此場合ノ鐵筋ノ應張力ヲ σ_s トセバ

混凝土壓力 $D=\frac{2}{3}\sigma_c b y_2$ ……(i)

鐵筋ノ張力 $Z=\sigma_s F_s$ ……(ii)

彎曲ヲ受ケテ後モ平面斷面ヲ保留スルノ假定カラ

$$\frac{\lambda_c}{y_2}=\frac{\lambda_s}{e-y_2}$$

$$\therefore\quad \frac{\sigma_c}{E_c y_2}=\frac{\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_s}=\frac{E_c y_2}{E_s(e-y_2)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{y_2}{e-y_2}\cdots\cdots\text{(iii)}$$

(i) 及 (ii) 式ヨリ D=Z ノ條件ヲ表ハシ同時ニ σ_s ノ値ヲ(iii)式ニヨリ代入シテ

$$\frac{2}{3}\sigma_c b y_2=F_s\frac{n\sigma_c(e-y_2)}{y_2}$$

$$\frac{2}{3}by_2^2=nF_s(e-y_2)$$

$$\therefore\quad y_2=-\frac{3}{4}n\frac{F_s}{b}+\sqrt{\frac{3}{2}n\frac{F_s}{b}\left(\frac{3}{8}n\frac{F_s}{b}+e\right)}\cdots\cdots(260)$$

次ニ外力ニ因ル彎曲力率ハ內力ニ因ル抵抗力率ニ等シクナケレバナラヌ,後者ハ混凝土及鐵筋ノ應力ニ依ツテ構成セラルルノデアツテ此場合合成力 D ノ働點ハ上端緣維カラ $\frac{3}{8}y_2$ ノ點ニアル事ハ明カデアルカラ

$$M=D(e-\frac{3}{8}y_2)=Z(e-\frac{3}{8}y_2)$$

コレニ (i) 及 (ii) 式ノ値ヲ挿入シ

$$M=\frac{2}{3}\sigma_c b y_2(e-\frac{3}{8}y_2)$$

$$=\sigma_s F_s(e-\frac{3}{8}y_2)$$

故ニ求ムル混凝土最大應壓力ハ

$$\sigma_c=\frac{3M}{2by_2(e-\frac{3}{8}y_2)}\cdots\cdots(261)$$

鐵筋應張力ハ

$$\sigma_s=\frac{M}{F_s(e-\frac{3}{8}y_2)} \quad \cdots\cdots(262)$$

今若シ床版又ハ桁ノ寸法ガ與ヘラレテ居ツテ其應力ヲ調ベンニハ (260)式ニヨツテ y_2 ヲ計算シ此 y_2 ヲ用ヒ (261)及 (262)式ニ據ツテ其斷面ニ働ク彎曲力率 M ニ因ツテ生ズル混凝土應力及鐵筋應力ガ計算サルル譯デアル。

Fig. 392 ニ示シタ混凝土ノ應壓力ガ拋物線的ニ變化スルト假定スル嚴密ナ計算方法ハ一般的ニハ用ヒラレテ居ナイ,次ニ述ブル中立軸カラノ距離ニ比例スル應力三角形ヲ假定スル近似解法ガ最モ普通ニ用ヒラレテ居ル。

(b) 單筋矩形桁近似解法(混凝土應力ガ中立軸ヨリノ距離ニ比例スルモノト假定ス)。

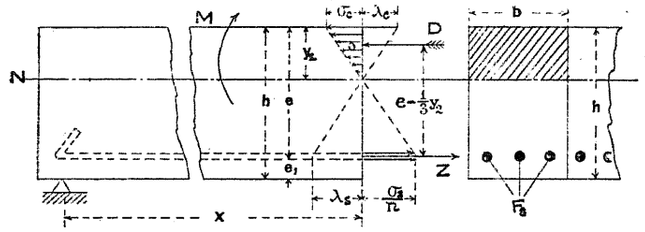


Fig. 393.

混凝土ニ於ケル壓力　$D=\frac{1}{2}\sigma_c b y_2$ ……(i)

鐵筋ニ於ケル張力　$Z=\sigma_s F_s$ ……(ii)

平面斷面ノ保留條件ヨリ

$$\frac{\lambda_c}{y_2}=\frac{\lambda_s}{e-y_2}\text{ 或ハ }\frac{\sigma_c}{E_c y_2}=\frac{\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_s}=\frac{E_c}{E_s}\frac{y_2}{e-y_2}=\frac{1}{n}\frac{y_2}{e-y_2} \quad \cdots\cdots(iii)$$

平衡條件 D=Z ナル式ニ(iii)式ヲ挿入シ

$$y_2=\frac{nF_s}{b}\left\{\sqrt{1+\frac{2}{n}\frac{be}{F_s}}-1\right\} \quad \cdots\cdots(263)$$

各應力度ヲ求ムル爲メニ外力ニ因ル彎曲力率ヲ內力ニ因ル抵抗力率ニ等シク置キ

$$M=\frac{1}{2}\sigma_c b y_2\frac{2}{3}y_2+\sigma_s F_s(e-y_2)$$

$$=\frac{1}{2}\sigma_c b y_2(e-\frac{1}{3}y_2)=\sigma_s F_s(e-\frac{1}{3}y_2)$$

此二式ヲ解キテ

混凝土ノ最大應壓力　$\sigma_c=\frac{2M}{by_2(e-\frac{1}{3}y_2)}$ ……(264)

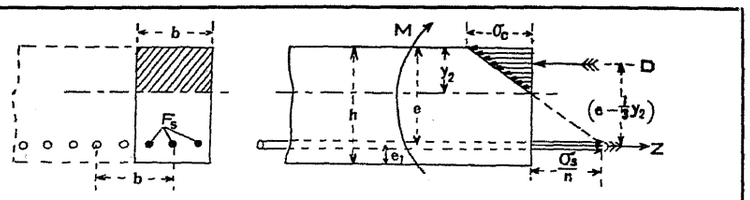
鐵筋ノ應張力　$\sigma_s=\frac{M}{F_s(e-\frac{1}{3}y_2)}$ ……(265)

今或斷面ニ働ク彎曲力率 M 及ビ混凝土及鐵筋ノ面積 be 及 F_s ガ與ヘラレタナラバ先ヅ (263)式ニ據ツテ中立軸ノ位置ヲ求メ更ニ (264) 及 (265)式ニ據ツテ混凝土及鐵筋ノ應力ガ求メラレル,是等ノ式ノ適用ハ相當ニ面倒デアルガ故ニ豫メ表又ハ圖表ヲ作ツテ置ケバ其手數ヲ省略スル事ガ出來ル,其一例ヲ說明センニ混凝土ニ對スル鐵筋ノ割合卽チ鐵筋比 (Percentage of reinforcement) ヲ

$$\frac{be}{F_s}=\mu \qquad F_s=\frac{be}{\mu}$$

ト置キ此 μ ヲ種々ノ値ニ採リ n ヲ定値トシテ (263)乃至 (265)式ニ適用シ y_2, σ_c 及 σ_s ヲ計算シテ表示シタモノ卽チ第十表デアル,同表ニ據レバ鐵筋比ヲ與ヘテ直チニ此等ノ値ヲ求メル事ガ出來ル。

第十表　單筋矩形桁應力表



F_s	$n=15$			$n=18$		
	y_2	σ_c	σ_s	y_2	σ_c	σ_s
$\frac{be}{100}$	0.418e	$5.559\frac{M}{be^2}$	$116\frac{M}{be^2}=20.87\sigma_c$	0.446e	$5.267\frac{M}{be^2}$	$117.5\frac{M}{be^2}=22.300\sigma_c$
$\frac{be}{110}$	0.403e	5.735 〃	127 〃 $=22.15\sigma_c$	0.431e	5.420 〃	128.5 〃 $=23.699\sigma_c$
$\frac{be}{120}$	0.391e	5.895 〃	133 〃 $=23.41\sigma_c$	0.418e	5.563 〃	139.4 〃 $=25.059\sigma_c$
$\frac{be}{130}$	0.379e	6.040 〃	149 〃 $=24.67\sigma_c$	0.406e	5.701 〃	150 3 〃 $=26.368\sigma_c$
$\frac{be}{140}$	0.368e	6.194 〃	160 〃 $=25.83\sigma_c$	0.395e	5.834 〃	161.2 〃 $=27.629\sigma_c$
$\frac{be}{150}$	0.358e	6.344 〃	170 〃 $=26.80\sigma_c$	0.384e	5.940 〃	172.0 〃 $=28.962\sigma_c$
$\frac{be}{160}$	0.349e	6.485 〃	181 〃 $=27.91\sigma_c$	0.375e	6.095 〃	182 9 〃 $=30.005\sigma_c$
$\frac{be}{170}$	0.341e	6.617 〃	192 〃 $=29.02\sigma_c$	0.366e	6.223 〃	193.6 〃 $=31.114\sigma_c$
$\frac{be}{180}$	0.333e	6.756 〃	203 〃 $=30.05\sigma_c$	0.358e	6.340 〃	204.4 〃 $=32.243\sigma_c$
$\frac{be}{190}$	0.326e	6.883 〃	213 〃 $=30.95\sigma_c$	0.351e	6.457 〃	215.2 〃 $=33.319\sigma_c$
$\frac{be}{200}$	0.320e	7.000 〃	224 〃 $=32.00\sigma_c$	0.344e	6.566 〃	225.9 〃 $=34.400\sigma_c$

實際設計ニ際シテハ彎曲力率及混凝土ト鐵筋トノ許容應力ヲ與ヘテ其部材ノ寸法ヲ求ムル場合ガ最モ多イ,カカル場合ニ對スル表ヲ作ランニハ例ヘバiii)式カラ

$$y_2=\frac{n\sigma_c}{\sigma_s+n\sigma_c}e$$

此式ヲ便宜上次ノ如ク表ス

$$y_2=se \quad \cdots\cdots(266)$$

式中　$s=\frac{n\sigma_c}{\sigma_s+n\sigma_c}$

此 y_2 ノ値ヲ (264) 式ニ挿入シ桁ノ有效高 e ヲ求ムレバ

$$e=\sqrt{\frac{2}{\left(1-\frac{s}{3}\right)s\sigma_c}}\sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$\equiv r\sqrt{\frac{M}{b}} \quad \cdots\cdots(267)$$

同樣ニ (265) 式ヨリ

$$F_s=\frac{M}{\sigma_c\left(e-\frac{se}{3}\right)}=\frac{1}{r\left(1-\frac{s}{3}\right)\sigma_s}\sqrt{Mb}$$

$$\equiv t\sqrt{Mb} \quad \cdots\cdots(268)$$

此 (266) 乃至 (268) 式ヲ用キテ σ_c 及 σ_s ノ値ヲ種々ニ採リ s,r,t ノ數値ヲ計算シテ表示スル時ハ第十一表又ハ Fig. 394 及 Fig. 395 ヲ得ル,コレヲ使用スレバ極メテ便利ニ計算ヲ爲ス事ガ出來ル。

又實際ニ遭遇スル問題トシテ彎曲力率,各材料ノ許容應力及其桁ノ寸法ヲ與ヘテ鐵筋積ヲ求メタイ事ガアル,此時ニハ前揭 (266) 乃至 (268) 式ヲ逆ニ使用スレバヨイノデアツテ次ノ樣ニスル,先ヅ (264) 式ヲ解キ

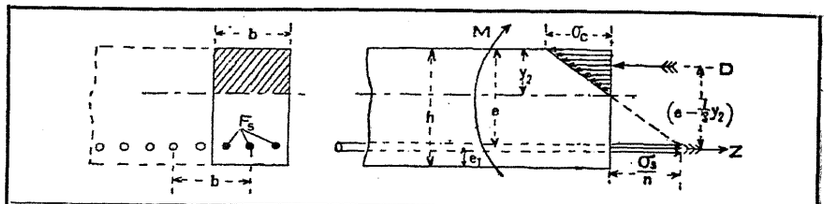
$$y_2^2-3ey_2+\frac{6M}{b\sigma_c}=0 \quad \cdots\cdots(269)$$

此式カラ y_2 ヲ求メ其値ヲ (265) 式卽チ

$$F_s=\frac{M}{\sigma_s(e-\frac{1}{3}y_2)} \quad \cdots\cdots(270)$$

ニ挿入シテ鐵筋積 F_s ヲ求メル事ガ出來ル。

第十一表 單筋矩形桁計算表



σ_s kg/□cm	σ_c kg/□cm	n=15 $y_2=s.e$ ×e	n=15 $e=r\sqrt{\frac{M}{b}}$ ×$\sqrt{\frac{M}{b}}$	n=15 $F_s=t_1\sqrt{Mb}$ ×$\sqrt{Mb}$	σ_s lbs/□″	σ_c lbs/□″	n=15 $y_2=s.e$ ×e	n=15 $e=r\sqrt{\frac{M}{b}}$ ×$\sqrt{\frac{M}{b}}$	n=15 $F_s=t_1\sqrt{Mb}$ ×$\sqrt{Mb}$
1150	50	0.395	0.342	0.00293	16000	650	0.379	0.096	0.000745
〃	45	0.370	0.370	0.00268	〃	640	0.375	0.098	0.000735
〃	40	0.343	0.406	0.00242	〃	600	0.360	0.103	0.000690
1100	50	0.405	0.338	0.00311	〃	550	0.339	0.110	0.000641
〃	45	0.380	0.366	0.00284	〃	500	0.319	0.118	0.000592
〃	40	0.353	0.401	0.00257	〃	450	0.297	0.129	0.000538
〃	35	0.323	0.445	0.00229	〃	400	0.273	0.142	0.000484
〃	30	0.290	0.505	0.00199	14000	650	0.411	0.093	0.000890
1000	45	0.403	0.357	0.00324	〃	600	0.391	0.099	0.000821
〃	40	0.375	0.390	0.00293	〃	550	0.371	0.106	0.000770
〃	35	0.344	0.433	0.00261	〃	500	0.349	0.114	0.000710
〃	30	0.310	0.490	0.00228	〃	450	0.325	0.124	0.000646
〃	25	0.273	0.568	0.00193	〃	400	0.300	0.136	0.000583
900	45	0.429	0.348	0.00373	〃	350	0.273	0.152	0.000517
〃	40	0.400	0.380	0.00337	12000	600	0.430	0.095	0.001020
〃	35	0.368	0.420	0.00302	〃	550	0.407	0.102	0.000946
〃	30	0.333	0.475	0.00263	〃	500	0.385	0.109	0.000877
〃	25	0.294	0.549	0.00224	〃	450	0.360	0.118	0.000803
800	40	0.429	0.367	0.00397	〃	400	0.333	0.130	0.000721
〃	35	0.396	0.408	0.00353	〃	350	0.304	0.145	0.000640
〃	30	0.360	0.459	0.00309	10000	600	0.474	0.091	0.001306
〃	25	0.319	0.530	0.00264	〃	550	0.452	0.097	0.001215
750	40	0.444	0.363	0.00430	〃	500	0.429	0.104	0.001122
〃	35	0.412	0.401	0.00385	〃	450	0.403	0.113	0.001022
〃	30	0.375	0.451	0.00338	〃	400	0.375	0.123	0.000929
〃	25	0.333	0.520	0.00288	〃	350	0.344	0.137	0.000825

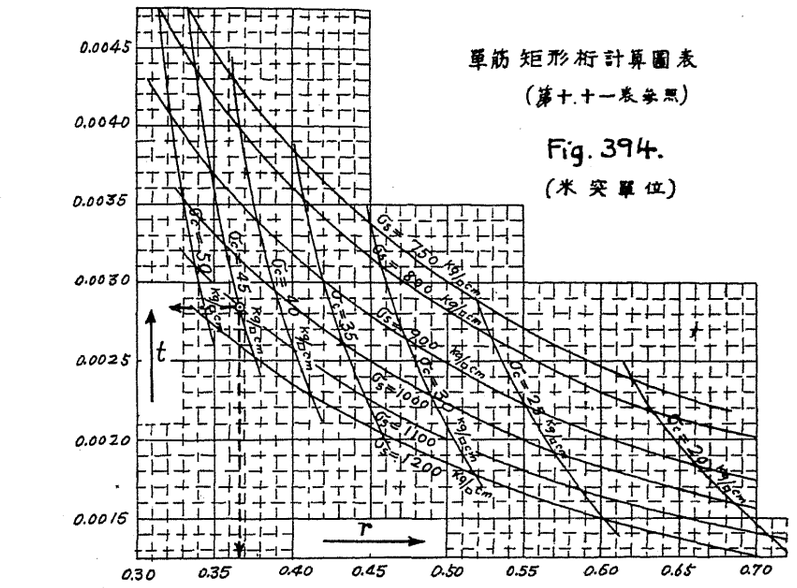


Fig. 395.
(吋單位)

此問題ヲ近似的ニ解クニハ Fig. 394(又ハ Fig. 395)ヲ利用スル,即チ先ヅ與ヘラレタ數値ヲ以テ

$$r=\frac{e}{\sqrt{\frac{M}{b}}}$$

ヲ計算シ圖上此 r ニ相當スル點カラ竪線ニ沿フテ上ニ登リ與ヘラレタ σ_c 又ハ σ_s トノ交點ヨリ左ニ進ミ左ノ目盛ニ t ヲ讀ム,此求メ得ラルル t ノ內大ナル數値ヲ以テ(268)式ニ據リ鐵筋積ヲ計算スルノデアル。

附錄第三表及第四表ハ設計上必要ナル丸鐵ノ斷面積及圓周長ヲ與ヘル。

例題第二十六.　徑間12′ノ桁アリ,等布荷重 100 #/□′ ヲ受ク,桁間隔ヲ3′,桁幅9″トシテ桁高及鐵筋面積ヲ求ム,但シ $\sigma_c=350$ #/□″, $\sigma_s=12{,}000$ #/□″, $n=15$ ト假定ス。

答　此桁ニ生ズル最大彎曲力率ハ

$$M=\frac{1}{8}ql^2=\frac{1}{8}\times3\times100\times12^2=5400\ ft\text{-}lbs=64\,800\ in\text{-}lbs.$$

故ニ第十一表ニヨリ $\sigma_c=350$ #/□″, $\sigma_s=12{,}000$ #/□″ ニ對シ $r=0.145, t=0.000640, s=0.304$ ヲ得ルガ故ニ

$$e=r\sqrt{\frac{M}{b}}=0.145\sqrt{\frac{64\,800}{9}}=12.3''$$

從ツテ總桁高ヲ 14″ ニ採レバ充分デアル,然ル時ハ $e_1=h-e=14.0-12.3=1.7''$ トナル,更ニ鐵筋面積ハ

$$F_s=t\sqrt{Mb}=0.000\,640\sqrt{64\,800\times9}=0.49\ □''$$

故ニ徑$\frac{1''}{2}$丸鐵3本ヲ用フレバ其面積ハ $3\times0.196=0.59$ □″ トナリ充分デアル,尙中立軸ノ位置ハ上端ヨリ

$$y_2=s\,e=0.304\times12.3=3.74''$$

例題第二十七.　前題ニ於テ桁高 16″ ガ與ヘラレタル場合必要ナル鐵筋面積ヲ求ム。

答　與ヘラレタ桁高 16″ ニ對シ有效高 14$\frac{1''}{2}$ ト假定スレバ

$$r=\frac{e}{\sqrt{\frac{M}{b}}}=\frac{14.5}{\sqrt{\frac{64\,800}{9}}}=0.171$$

Fig. 395 ニ於テ $r=0.171$ ノ竪線ヲ辿レバ與ヘラレタ應力

(1)　$\sigma_c=350$ #/□″ ニ相當シ $\sigma_s=$ 約 20,000 #/□″

(2)　$\sigma_s=12{,}000''$　〃　$\sigma_c=$ 約 260 #/□″

ノ二點ヲ得ル,前者(1)ニ於ケル鐵筋應力ハ過大ニ過グルガ故ニ(2)ヲ採用スルモノトシ左端目盛ニテ $t=0.00053$ ヲ得之ニ對シ

$$F_s=0.000\,53\sqrt{64\,800\times9}=0.40\ □''$$

ナル所要鐵筋量ヲ得ル,尤モ此場合ノ混凝土應力ハ僅カニ 260 #/□″ ニ過ギナイケレドモ止ムヲ得ナイ。

本題ヲ嚴格ニ解クニハ(269)式ヲ用ヒ

$$y_2^2-3ey_2+\frac{6M}{b\sigma_c}=y_2^2-3\times14.5y_2+\frac{6\times64\,800}{9\times350}=0$$

$$y_2^2-43.5y_2+123.4=0$$

コレヲ解イテ $y_2=3.07''$ ヲ得(270)式ニ據リ

$$F_s=\frac{M}{\sigma_s(e-\frac{1}{3}y_2)}=\frac{64\,800}{12000\times(14.5-\frac{1}{3}\times3.07)}=0.40\ □''$$

(c) 複筋矩形桁

既ニ構造要項ニモ說明セシ通リ應壓側ニ挿入スル鐵筋ハ應壓力ニ耐ユルノミナラズ若シ他ノ荷重ニ因ツテ負彎曲力率ヲ生ズル如キ場合ニハ應張鐵筋トシテ役立ツモノデアル。

(1) M,b,h,e,e′,F$_s$ 及 F$_s$′ ヲ與ヘテ y_2,σ_c,σ_s 及 σ_s' ヲ求ム。

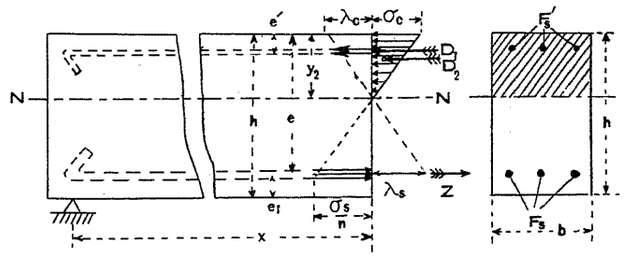


Fig. 396.

鐵筋斷面ハ混凝土面積ニ比シテ極メテ小ナルモノトシ又生ズル混凝土ノ應力ハ中立軸ヨリノ距離ニ比例スルモノトス,然ル時ハ彎曲力率ニ因ツテ生ズル應張鐵筋,應壓鐵筋及

應壓混凝土ノ應力ハ夫々

$$Z=\sigma_s F_s,\ D_1=\sigma_s' F_s',\ D_2=\frac{1}{2}\sigma_c b y_2$$

內力ノ平衡條件卽チ $Z=D_1+D_2$ ヨリ

$$\sigma_s F_s=\sigma_s' F_s'+\frac{1}{2}\sigma_c b y_2 \quad \cdots\cdots(a)$$

外力ニ因ル彎曲力率ヲ內力ニ因ル抵抗力率ニ等シク置キ

$$M=D_2\left(e-\frac{y_2}{3}\right)+D_1(e-e')$$

$$=\frac{1}{2}\sigma_c b y_2\left(e-\frac{y_2}{3}\right)+\sigma_s' F_s'(e-e') \quad \cdots\cdots(b)$$

更ニ斷面ノ平面保留ノ條件ヨリ

$$\lambda_c:\lambda_s=\frac{\sigma_c}{E_c}:\frac{\sigma_s}{E_s}=y_2:(e-y_2)$$

$$=\frac{\sigma_c}{E_c}:\frac{\sigma_s'}{E_s}=y_2:(y_2-e')$$

$$\therefore\quad \sigma_c:\frac{\sigma_s}{n}=y_2:(e-y_2) \quad \cdots\cdots(c)$$

$$\sigma_c:\frac{\sigma_s'}{n}=y_2:(y_2-e') \quad \cdots\cdots(d)$$

此 (a), (b), (c), (d) ノ四式ガ四ツノ未知數ヲ解クニ充分デアツテ

$$y_2=-\frac{n(F_s+F_s')}{b}+\sqrt{\left[\frac{n(F_s+F_s')}{b}\right]^2+\frac{2n}{b}[F_s e+F_s' e']} \quad \cdots\cdots(271)$$

$$\sigma_c=\frac{2My_2}{by_2^2\left(e-\frac{y_2}{3}\right)+2nF_s'(y_2-e')(e-e')} \quad \cdots\cdots(272)$$

$$\sigma_s=n\sigma_c\frac{e-y_2}{y_2} \quad \cdots\cdots(273)$$

$$\sigma_s'=n\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2} \quad \cdots\cdots(274)$$

若シ此場合應壓側ニアル鐵筋面積ニ相當スル混凝土面積ノ減

少ヲ考慮ニ入ルルナラバ夫レダケヲ差引キ

$$D_2=\frac{1}{2}\sigma_c b y_2-\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}F_s'$$

此値ヲ用ヒ前同樣ノ計算ヲ行ヘバ

$$y_2=-\frac{(n-1)F_s'+nF_s}{b}+\sqrt{\left[\frac{(n-1)F_s'+nF_s}{b}\right]^2+\frac{2}{b}[(n-1)F_s'e'+nF_s e]} \quad \cdots\cdots(275)$$

$$\sigma_c=\frac{2My_2}{by_2^2\left(e-\frac{y_2}{3}\right)+(n-1)F_s'(y_2-e')(e-e')} \quad \cdots\cdots(276)$$

(2) M,b,h,e,e', σ_c 及 σ_s ヲ與ヘテ y_2,σ_s', F_s 及 F_s' ヲ求ム。

本題ハ外力ニヨル彎曲力率及混凝土ノ斷面ガ與ヘラレテ此時ニ許容サレタル混凝土及鐵筋ノ應力 σ_c 及 σ_s ニ相當シテ鐵筋ノ面積ヲ求メントスルノデアル。

今與ヘラレタ力率 M ヲ二分シ $M=M_1+M_2$ ト置キ其 M_1 ハ高 h, 幅 b ナル單筋混凝土桁ガ許容應力 σ_c 及 σ_s ヲ以テ抵抗シ得ルダケノ力率デアツテ此時ニ必要ナル應張鐵筋ノ面積ヲ F_{s1} トスル,然ル時ハ前ニ單筋桁ニ就イテ說明シタ (267) 式 $e=r\sqrt{\frac{M_1}{b}}$ ニ於ケル力率 M_1 ハコレニ相當スルモノデアツテ明カニ

$$M_1=b\left(\frac{e}{r}\right)^2 \quad \cdots\cdots(277)$$

此 M_1 サヘ既知トナレバコレ

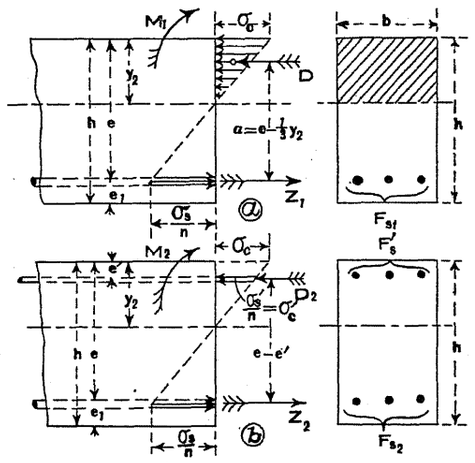


Fig. 397.

ニ對スル所要鐵筋面積ハ

$$F_{s1}=t\sqrt{M_1 b}=\frac{tbe}{r} \quad \cdots\cdots(278)$$

式中ノ r 及 t ハ第十一表ヨリ容易ニ求メラレル。

更ニ力率ノ内ノ殘リノ M_2 ハ Fig. 397 ⓑ ニ示ス如ク唯應張應壓鐵筋ノミニ因ツテ抵抗セラルベキ力率デアル,何トナレバ混凝土ハ既ニ力率 M_1 ニ對シテ抵抗スル事ニナツテ居ルカラデアツテ應壓鐵筋ノミニテ M_2 ヨリ生ズル應壓力ニ耐ヘネバナラヌノデアル,此場合ノ y_2 ハ既ニ前掲ノ Fig. 397 ⓐ ノ關係ヨリ (266) 式ニ與ヘラレ

$$y_2=se \quad \cdots\cdots(279)$$

式中ノ s ハ既ニ第十一表ニ掲出シテアル,而シテ此 y_2 ノ中立軸位置ヲ以テ M_2 ニ抵抗シナケレバナラヌノデアツテ

$$M_2=M-M_1 \quad \cdots\cdots(280)$$

$$Z_2=D_2=\frac{M_2}{e-e'}$$

$$=\sigma_s F_{s2}=\sigma_s' F_s'$$

$$\therefore \quad F_{s2}=\frac{M_2}{\sigma_s(e-e')} \quad \cdots\cdots(281)$$

次ニ應壓鐵筋ノアル其位置ニ於ケル混凝土ノ應力從ツテ鐵筋ノ應力ハ

$$\sigma_c'=\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}$$

$$\sigma_s'=n\sigma_c'=n\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2} \quad \cdots\cdots(282)$$

從テ應壓鐵筋ノ所要面積ハ

$$F_s'=\frac{M_2}{\sigma_s'(e-e')} \quad \cdots\cdots(283)$$

應張鐵筋面積ハ前ニ單筋ト考ヘ M_1 ニ耐ユルトシテ求メタ F_{s1} ト鐵

筋ノミニヨツテ M_2 ニ抵抗スルトシテ求メタ F_{s2} トノ和デアツテ

$$F_s=F_{s1}+F_{s2} \quad \cdots\cdots(284)$$

(3) $F_s=F_s'$ ナルトキ M, b, σ_c 及 σ_s ヲ與ヘテ e, y_2, σ_s' 及 $F_s(=F_s')$ ヲ求ム。

構造上往々 F_s ト F_s' トヲ相等シカラシムル事ヲ要スル事ガアル,斯クノ如キ場合ニハ

$$F_s=F_{s1}+F_{s2}=F_s'$$

トナリ (278),(281) 及 (283) 式ヨリ其値ヲ代入シ

$$t\sqrt{M_1 b}+\frac{M_2}{\sigma_s(e-e')}=\frac{M_2}{\sigma_s'(e-e')}$$

茲ニ $M_1=b\left(\frac{e}{r}\right)^2$, $M_2=M-b\left(\frac{e}{r}\right)^2$ ヲ挿入シテ

$$t\frac{be}{r}+\frac{M}{\sigma_s(e-e')}-\frac{be^2}{r^2\sigma_s(e-e')}=\frac{M}{\sigma_s'(e-e')}-\frac{be^2}{r^2\sigma_s'(e-e')}$$

更ニ

$$e-e'\equiv\psi e$$

ト置ク時ハ此係數 ψ ノ値ハ大約

$\psi=0.90$ 薄イ床版ノ場合

$=0.88$ 厚イ床版ノ場合

$$\therefore \quad e'=(1-\psi)e$$

然ルニ

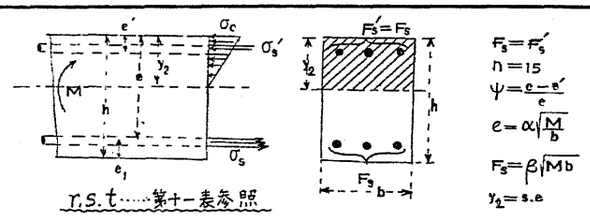
$$\sigma_s'=n\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}=n\sigma_c\left(1-\frac{1-\psi}{s}\right)$$

此値ヲ上式ニ挿入シ

$$t\frac{be}{r}+\frac{M}{\sigma_s\psi e}-\frac{be}{r^2\sigma_s\psi}=\frac{M}{\sigma_s'\psi e}-\frac{be}{r^2\sigma_s'\psi}$$

$$e^2\left[\frac{bt}{r}-\frac{b}{r^2\sigma_s\psi}+\frac{b}{r^2\sigma_s'\psi}\right]=\frac{M}{\psi}\left(\frac{1}{\sigma_s'}-\frac{1}{\sigma_s}\right)$$

第十二表　複筋矩形桁計算表



σ_s	σ_c	ψ	σ_s'	$e=\alpha\sqrt{\frac{M}{b}}$	$F_s=\beta_1\sqrt{Mb}$	σ_s	σ_c	ψ	σ_s'	$e=\alpha\sqrt{\frac{M}{b}}$	$F_s=\beta_1\sqrt{Mb}$
kg/□cm	kg/□cm		kg/□cm	$\times\sqrt{\frac{M}{b}}$	$\times_1\sqrt{Mb}$	#/□″	#/□″		#/□″	$\times\sqrt{\frac{M}{b}}$	$\times_1\sqrt{Mb}$
1150	50	0.90	559	0.243	0.00405	16000	650	0.90	7175	0.071	0.00100
		88	522	252	395			88	6700	73	98
〃	45	0.90	493	0.279	0.00352	〃	600	0.90	6500	0.079	0.00090
		88	456	288	345			88	6000	81	87
〃	40	0.90	425	0.321	0.00303	〃	550	0.90	5815	0.087	0.00080
		88	391	330	298			88	5324	90	79
1100	50	0.90	564	0.230	0.00458	〃	500	0.90	5148	0.097	0.00072
		88	528	240	447			88	4675	100	68
〃	45	0.90	497	0.271	0.00372	〃	450	0.90	4473	0.109	0.00063
		88	462	278	376			88	3994	112	63
〃	40	0.90	430	0.313	0.00321	〃	400	0.90	3800	0.124	0.00056
		88	396	321	322			88	3363	127	55
〃	35	0.90	362	0.365	0.00275	14000	650	0.90	7379	0.063	0.00128
		88	330	373	274			88	6900	66	104
〃	30	0.90	295	0.434	0.00229	〃	600	0.90	6700	0.071	0.00122
		88	264	442	230			88	6237	74	110
1100	45	0.90	508	0.248	0.00457	〃	550	0.90	6025	0.080	0.00101
		88	474	258	445			88	5550	82	100
〃	40	0.90	440	0.290	0.00389	〃	500	0.90	5348	0.089	0.00090
		88	408	300	380			88	4920	92	88
〃	35	0.90	372	0.342	0.00329	〃	450	0.90	4670	0.101	0.00079
		88	342	352	323			88	4256	104	78
〃	30	0.90	304	0.408	0.00272	〃	400	0.90	4000	0.117	0.00062
		88	276	418	268			88	3600	118	68
〃	25	0.90	237	0.497	0.00222	12000	600	0.90	6907	0.061	0.00155
		88	210	506	219			88	6489	64	149
900	45	0.90	518	0.224	0.00564	〃	550	0.90	6222	0.070	0.00135
		88	486	234	545			88	5815	73	131
〃	40	0.90	450	0.267	0.00466	〃	500	0.90	5552	0.079	0.00119
		88	420	277	460			88	5160	82	116
〃	35	0.90	382	0.317	0.00397	〃	450	0.90	4872	0.091	0.00104
		88	353	327	387			88	4500	93	101
〃	30	0.90	315	0.382	0. 0325	〃	400	0.90	4196	0.105	0.00089
		88	288	392	320			88	3836	107	87
〃	25	0.90	247	0.485	0. 0265	〃	350	0.90	3522	0.122	0.00076
		88	222	478	260			88	3176	105	75

$$e=\frac{r\sqrt{\frac{1}{\sigma_s'}-\frac{1}{\sigma_s}}}{\sqrt{\psi rt-\frac{1}{\sigma_s}+\frac{1}{\sigma_s'}}}\sqrt{\frac{M}{b}}\equiv\alpha\sqrt{\frac{M}{b}} \quad \cdots\cdots(285)$$

式中　$$\alpha=\frac{r\sqrt{\frac{1}{\sigma_s'}-\frac{1}{\sigma_s}}}{\sqrt{\psi rt-\frac{1}{\sigma_s}+\frac{1}{\sigma_s'}}}$$

此式ニ據ツテ $F_s=F_s'$ ノ場合ニ與ヘラレタル彎曲力率 M ニ對シテ必要ナル床版厚又ハ桁高ヲ求メ得ラレル,同樣ニ鐵筋ノ斷面積モ求メ得ラレ

$$F_s=F_s'=\frac{M}{\sigma_s'\psi e}-\frac{be}{r^2\sigma_s'\psi}$$

$$=\frac{1}{\psi\sigma_s'}\left[\frac{M}{e}-\frac{be}{r^2}\right]$$

然ルニ (285)式ニヨツテ $e=\alpha\sqrt{\frac{M}{b}}$ デアル故ニ

$$F_s=F_s'=\frac{1}{\psi\sigma_s'}\left[\frac{1}{\alpha}\sqrt{Mb}-\frac{\alpha}{r^2}\sqrt{Mb}\right]$$

$$F_s=F_s'=\frac{1}{\psi\sigma_s'}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{r^2}\right)\sqrt{Mb}\equiv\beta\sqrt{Mb} \quad \cdots\cdots(286)$$

式中　$$\beta=\frac{1}{\psi\sigma_s'}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{r^2}\right)$$

求メタル α 及 β ノ値ハ與ヘラレタ許容應力ニ對シテ豫メ計算シテ置ク事ガ出來ル値デアツテ σ_c 及 σ_s ヲ種々ノ値ニ採ツテ第十二表ノ如キ結果ヲ得ル。

例題第二十八.　高 30*cm* 幅 25*cm* ナル鐵筋混凝土桁ガ柱荷重 P=1600*kg* ヲ其純徑間 2.7*m* ノ中央ニ受クルモノトス,壓壓鐵筋ハ徑 10*mm* 3 本應張鐵筋ハ徑 10*mm* 6 本トシ其外面ヨリノ距離ハ 2*cm* トス,混凝土及鐵筋ノ應力ヲ求ム(Fig. 398 參照)。

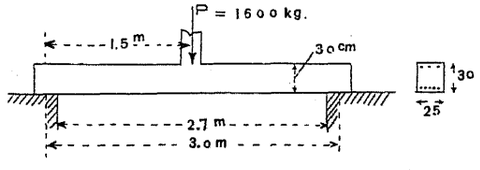


Fig. 398.

答　徑間ハ $l=l'+t=2.7+.3=3.0m$

桁ノ自重 $q=0.25\times0.30\times2400=180\ kg/m.$

故ニ自重ニ因ル彎曲力率 $M_q=\frac{1}{8}ql^2=\frac{1}{8}\times180\times3^2=202.5m\text{-}kg.$

柱荷重ニ因ル彎曲力率　$M_P=\frac{1}{4}Pl=\frac{1}{4}\times1600\times3=1200\,m\text{-}kg.$

桁中點ニ於ケル最大彎曲力率

$$M_{max}=202.5+1200=1402.5m\text{-}kg=140250cm\text{-}kg.$$

尙附錄第四表丸鋼ノ表ヨリ $F_s=6-10mm\phi=4.71cm^2$, $F_s'=3-10mm\phi=2.36cm^2$.

(271), (272), (273) 及 (274) 式ヨリ

$$y_2=-\frac{n(F_s+F_s')}{b}+\sqrt{\left[\frac{n(F_s+F_s')}{b}\right]^2+\frac{2n}{b}\left[F_se+F_s'e'\right]}$$

$$=-\frac{15\times(4.71+2.36)}{25}+\sqrt{\left[\frac{15\times(4.71+2.36)}{25}\right]^2+\frac{2\times15}{25}\left[4.71\times28+2.36\times2\right]}$$

$$=9.22cm$$

$$\sigma_c=\frac{2My_2}{by_2^2\left(e-\frac{y_2}{3}\right)+2nF_s'(y_2-e')(e-e')}$$

$$=\frac{2\times140250\times9.22}{25\times9.22^2\left(28-\frac{9.22}{3}\right)+2\times15\times2.36(9.22-2)(28-2)}=39\ kg/cm^2$$

$$\sigma_s=\frac{n\sigma_c(e-y_2)}{y_2}=\frac{15\times39(28-9.22)}{9.22}=1192\ kg/cm^2$$

$$\sigma_s'=\frac{n\sigma_c(y_2-e')}{y_2}=\frac{15\times39(9.22-2)}{9.22}=458\ kg/cm^2$$

例題第二十九.　高 30*cm* 幅 25*cm* ノ鐵筋混凝土桁ガ前題ト同樣ニ支持荷重セラル,其應張並ニ應壓鐵筋ノ面積ヲ求ム,但シ混凝土及鐵筋ノ最大許容應力ヲ $\sigma_c=35\ kg/cm^2$, $\sigma_s=1000\ kg/cm^2$ ト假定ス。

答　荷重及桁ノ狀態ハ前題同樣ナルヲ以テ $M_{max}=140{,}250\ cm\text{-}kg.$

第十一表ヨリ $\sigma_c=35$ $\sigma_s=1000$ ニ對シ

$$r=0.433,\quad t=0.00261,\quad s=0.344$$

然ル時ハ (277) 式ニヨリ　$M_1=b\left(\frac{e}{r}\right)^2=25\left(\frac{28}{0.433}\right)^2=104{,}523cm\text{-}kg$

(278) 式ニヨリ　$F_{s1}=t\sqrt{M_1b}=0.00261\sqrt{104523\times25}=4.2cm^2$

(280) 式ヨリ　$M_2=M-M_1=140{,}250-104{,}523=35{,}727cm\text{-}kg.$

(281) 式ヨリ　$F_{s2}=\frac{M_2}{\sigma_s(e-e')}=\frac{35727}{1000(28-2)}=1.37cm^2$

(279) 式ヨリ　$y=se=0.344\times28=9.63cm$

(282) 式ヨリ　$\sigma_s'=n\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}=15\times35\times\frac{9.63-2}{9.63}=416\ kg/cm^2$

更ニ (283) 式ヨリ　$F_s'=\frac{M_2}{\sigma_s'(e-e')}=\frac{35727}{416(28-2)}=3.3cm^2$

$$F_s=F_{s1}+F_{s2}=4.2+1.37=5.6cm^2$$

附錄第四表ヲ用ヒテ鐵筋ノ數ヲ決定スル事下ノ如シ。

$$F_s=6-11mm\phi=6\times0.95=5.70cm^2$$

$$F_s'=3-12mm\phi=3\times1.13=3.39cm^2$$

例題第三十.　Fig. 398 ニ示ス如キ荷重ヲ受クル桁ノ寸法ヲ求ム,但シ鐵筋ハ上下等量ノ複式トシ $\sigma_c=45$, $\sigma_s=1150\ kg/cm^2$ ト假定ス。

答　第十二表ニヨリ $\psi=0.90$ ニ對シ $\alpha=0.279$, $\beta=0.00352$ ヲ得ルガ故ニ幅 $b=20cm$ ト假定シテ

$$e=\alpha\sqrt{\frac{M}{b}}=0.279\sqrt{\frac{140250}{20}}=23.4cm$$

$$F_s=F_s'=\beta\sqrt{Mb}=0.00352\sqrt{140250\times20}=5.9cm^2$$

卽チ幅 20*cm* 高 26*cm*, 鐵筋 $4-14mm\phi=4\times1.54=6.16cm^2$ ヲ使用セバヨロシ。

(*d*)丁字桁 (T-form Beam).

丁字桁ヲ論ズルニハ便宜上三ツノ場合ニ分チ得ル,卽チ

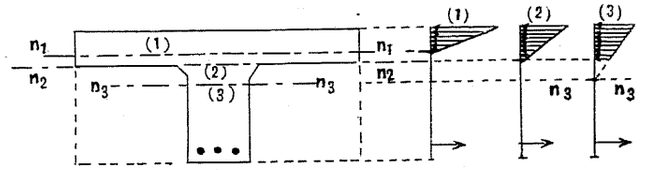


Fig. 399.

(1) 中立軸ガ突緣 (Flange) 中ニアルトキ

(2) 中立軸ガ突緣下端ト一致スルトキ

(3) 中立軸ガ肋桁 (Web) 內ニアルトキ

Fig. 399 ニ示ス如ク (1) 及 (2) ハ共ニ矩形斷面ノ場合ト見テ何等變化ハ無イ,何トナレバ突緣ノ下肋桁ノ兩側ニ於ケル無用混凝土ノ有無ニヨッテ何等變化ヲ生ジナイカラデアル (3) ノ場合ニハ中立軸 n_3n_3 以上ノ應壓混凝土ノ量ガ少シ減ズルノデ若干ノ變化ヲ生ズル,一般ニ丁字桁ガ數多連續スル場合其突緣ノ幅トシテ何程ヲ採

ルベキカハ相當考慮ヲ拂ハルベキ問題デアツテ普通ニ採ラルル幅ハ Fig. 400 ニ就イテ

$$b \leqq \begin{cases} l_1 \\ 8b_1 \\ 16e_o \\ 4h \end{cases}$$

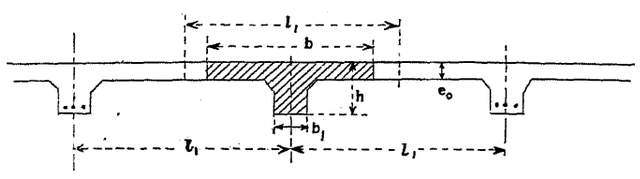


Fig. 400.

(1) $y_2 \leqq e_o$ ノ場合

幅 b ノ矩形桁ト何等變化ハ無イノデアツテ Fig 401 ニ示ス單筋ノ場合トスレバ單筋矩形桁ニ對スル公式ハ其儘適用サレル,卽チ中立軸位置ハ (260) 式ヨリ,混凝土最大應壓力ハ (261) 式ヨリ鐵筋最大應張力ハ (262) 式ヨリ求メ得ラレル。

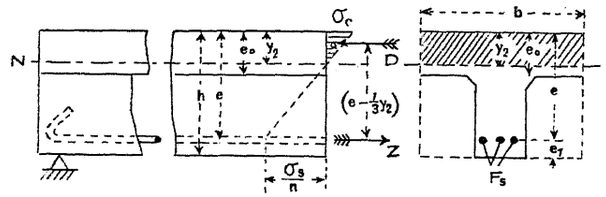


Fig. 401.

(2) $y_2 > e_o$ ノ場合

中立軸ガ突緣外ニ出ル時ニハ中立軸以上ニアル應壓混凝土ノ幅ハ一樣デナイ,而シテ其突緣下面以下ニアル應壓混凝土ハ面積モ少ナク應力度モ小サイノデアルカラコレヲ無視スルヲ常トスル,從テ Fig. 402 ニ示ス如ク應力圖ハ梯形

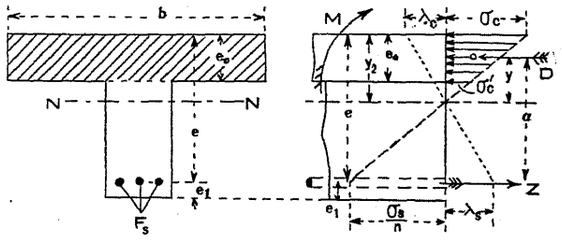


Fig. 402.

ニテ表サルルコトニナリ

$$D = \frac{\sigma_c + \sigma_c'}{2} be_o$$

$$Z = \sigma_s F_s$$

平衡條件ヨリ D=Z ト置キ

$$\frac{\sigma_c + \sigma_c'}{2} be_o = \sigma_s F_s \quad \cdots\cdots (i)$$

平面斷面保留ノ條件カラ

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_c'} = \frac{y_2}{y_2 - e_o}$$

$$\therefore \quad \sigma_c' = \sigma_c \frac{y_2 - e_o}{y_2} \quad \cdots\cdots (287)$$

$$\frac{\sigma_c}{E_c} : y_2 = \frac{\sigma_s}{E_s} : (e - y_2)$$

$$\therefore \quad \sigma_s = n\sigma_c \frac{e - y_2}{y_2} \quad \cdots\cdots (ii)$$

此二ツノ値ヲ (i) 式ニ挿入シ

$$\frac{\sigma_c + \sigma_c \frac{y_2 - e_o}{y_2}}{2} be_o = F_s n \sigma_c \frac{e - y_2}{y_2}$$

$$\therefore \quad y_2 = \frac{nF_s e + \frac{e_o^2 b}{2}}{e_o b + nF_s} \quad \cdots\cdots (288)$$

而シテ梯形應力圖ノ重心ノ中立軸カラノ距離ヲ y トセバ

$$y_2 - y = \frac{e_o}{3} \frac{\sigma_c + 2\sigma_c'}{\sigma_c + \sigma_c'}$$

コレニ (287) 式ノ σ_c' ヲ入レ

$$y_2 - y = \frac{e_o}{3} \frac{\sigma_c + 2\sigma_c \frac{y_2 - e_o}{y_2}}{\sigma_c + \sigma_c \frac{y_2 - e_o}{y_2}}$$

$$\therefore\quad y=y_2-\frac{e_o}{3}\frac{3y_2-2e_o}{2y_2-e_o}$$

$$=y_2-\frac{e_o}{3}\frac{3y_2-\frac{3}{2}e_o-\frac{1}{2}e_o}{2y_2-e_o}$$

$$=y_2-\frac{e_o}{2}+\frac{e_o^2}{6(2y_2-e_o)}\quad\cdots\cdots(289)$$

力率平衡ノ條件カラ

$$M=Z(e-y_2+y)=\sigma_s F_s(e-y_2+y)$$

$$\therefore\quad \sigma_s=\frac{M}{F_s(e-y_2+y)}\quad\cdots\cdots(290)$$

故ニ(ii)式ヲ用ヒ混凝土ノ最大應力ハ

$$\sigma_c=\sigma_s\frac{y_2}{n(e-y_2)}\quad\cdots\cdots(291)$$

(e) 大ナル斷面積ノ鐵筋ヲ有スル桁

鐵筋ノ斷面ガ比較的大ナル場合ニハ其高及面積ヲ無視スル事ガ出來ナイ,從テコレ迄ニ用ヒタ鐵筋ノ應力σ_s'及σ_sハ應壓幷ニ應張鐵筋ノ平均應力デアルカラ更ニ$_{max}\sigma_s'$及$_{max}\sigma_s$デ表ハス最大應力ヲ考ヘナケレバナラヌ,而シテ平均應力ハ夫々中立軸カラy_2-e'及$e-y_2$ナル距離ノ點(鐵筋重心)ノ應力デアルカラ其最大應力ハy_2-a及$e+\beta-y_2$ノ點ノ應力デアル,尙鐵筋ノ重心ヲ通ツテ中立軸ニ平行ナル軸ニ對スル其鐵筋ノ慣性能率ヲI_s'及I_sニテ表スモノトスル,又應壓鐵筋ガ自分ノ面積ダケノ混凝土ヲ置換シテ居ルカ

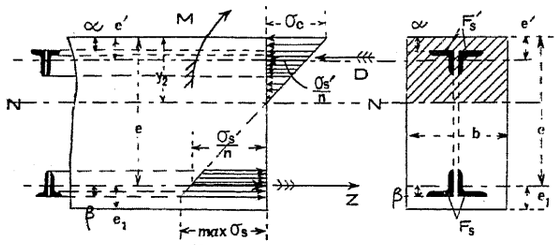


Fig. 403.

ラコレダケヲ除カナケレバナラヌ,尤モ其應力ハ其重心ニ働クモノトシテ計算スル。

先ヅ應壓鐵筋ノ重心ニ於ケル混凝土ノ應壓力ヲσ_xトセバ

$$y_2:\sigma_c=(y_2-e'):\sigma_x$$

$$\sigma_x=\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}$$

此鐵筋ノ爲メニ失ハレタ抵抗ノ總應力ハ面積ガF_s'デアルカラ

$$\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}F_s'\quad\text{トナル}$$

故ニ D=Z ノ式ヲ書表セバ

$$\frac{1}{2}\sigma_c b y_2-\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}F_s'+\sigma_s'F_s'=\sigma_s F_s\quad\cdots\cdots(i)$$

次ニ平面斷面ノ保留ニ對スル假定ニヨツテ

$$\sigma_s'=n\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}\quad\cdots\cdots(ii)$$

$$\sigma_s=n\sigma_c\frac{e-y_2}{y_2}\quad\cdots\cdots(iii)$$

$$\therefore\ {}_{max}\sigma_s'=n\sigma_c\frac{y_2-a}{y_2}\quad\cdots\cdots(292)$$

$${}_{max}\sigma_s=n\sigma_c\frac{e+\beta-y_2}{y_2}\quad\cdots\cdots(293)$$

次ニ外力ニ因ル彎曲力率ト內力ニ因ル抵抗力率トヲ等シク置キ

$$M=\frac{1}{2}\sigma_c b y_2\frac{2}{3}y_2-\sigma_c\frac{y_2-e'}{y_2}\frac{I_s'+(y_2-e')^2F_s'}{y_2-e'}$$

$$+\frac{\sigma_s'\{I_s'+(y_2-e')^2F_s'\}}{y_2-e'}+\frac{\sigma_s\{I_s+(e-y_2)^2F_s\}}{e-y_2}\quad\cdots\cdots(iv)$$

(i) 及 (iv) 式ニ (ii) 及 (iii) 式ノ値ヲ入レ

$$\frac{by_2^2}{2}+(n-1)F_s'(y_2-e')-nF_s(e-y_2)=0\quad\cdots\cdots(v)$$

及

$$M=\frac{\sigma_c}{y_2}\left[\frac{by_2^3}{3}-\{F_s'(y_2-e')^2-I_s'\}+n\{F_s'(y_2-e')^2+I_s'\}+n\{F_s'(e-y_2)^2+I_s\}\right]\cdots\cdots(vi)$$

(v)式ヲ解ケバ中立軸ノ位置ガ求メラレ

$$y_2=-\frac{nF_s+(n-1)F_s'}{b}+\sqrt{\left\{\frac{nF_s+(n-1)F_s'}{b}\right\}^2+\frac{2\{nF_se+(n-1)F_s'e'\}}{b}}\cdots(294)$$

(vi)式ヲ解ケバ混凝土ノ最大應力ガ求メラレ

$$\sigma_c=\frac{My_2}{\frac{by_2^3}{3}+(n-1)\{F_s'(y_2-e')^2+I_s'\}+n\{F_s(e-y_2)^2+I_s\}}\cdots(295)$$

或ハ

$$\sigma_c=\frac{My_2}{I_n}$$

式中 I_n=全斷面ノ中立軸ニ對スル慣性能率

先ヅ(294)式ニテ中立軸ノ位置 y_2 ヲ求メ其値ヲ用ヒテ(295)式カラ混凝土應力 σ_c ガ求メラレ更ニ(292)及(293)式ニヨリ鐵筋ノ最大應力ガ計算シ得ラレルノデアル。

次ニ述ブルハ此簡單ナル場合デアル。

1°)應壓應張兩鐵筋ノ面積ガ相等シク且ツ表面カラ等距離ニアル場合。

一般式ニ於テ $e_1=e'$, $F_s'=F_s$, $I_s'=I_s$ ト置ケバ

$$y_2=-\frac{(2n-1)F_s}{b}+\sqrt{\left\{\frac{(2n-1)F_s}{b}\right\}^2+\frac{2F_s(nh-e')}{b}}\cdots\cdots(296)$$

$$\sigma_c=\frac{My_2}{\frac{by_2^3}{3}+(2n-1)I_s+F_s\{(n-1)(y_2-e')^2+n(e-y_2)^2\}}\cdots\cdots(297)$$

2°)單筋ノ場合。

$F_s'=0$, $I_s'=0$　ト置キ

$$y_2=-\frac{nF_s}{b}+\sqrt{\frac{n^2F_s^2}{b^2}+\frac{2nF_se}{b}}\cdots\cdots(298)$$

$$\sigma_c=\frac{My_2}{\frac{by_2^3}{3}+n\{F_s(e-y_2)^2+I_s\}}\cdots\cdots(299)$$

例題第三十一. Fig. 404 ニ示ス如キ斷面テ有スル鐵筋混凝土桁アリテ 180,000 *in-lbs* ノ彎曲力率ヲ受ク,鐵筋及混凝土ニ於ケル應力テ求ム。

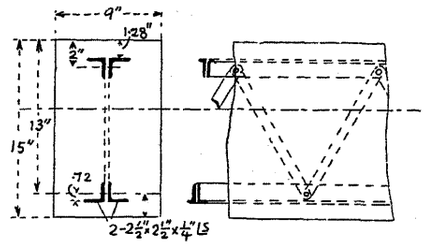


Fig. 404.

答　此場合 $M=180{,}000$ *in-lbs*, $b=9''$, $h=15''$, $e'=e_1=2''$, $n=15$,

$F_s=F_s'=2\times1.19=2.38$ □″.

$I_s=I_s'=2\times0.7=1.4$ *in*⁴.

(296)式ニヨリ

$$y_2=-\frac{(2\times15-1)2.38}{9}+\sqrt{\frac{(2\times15-1)^2\times2.38^2}{9^2}+\frac{2\times2.38(15\times15-2)}{9}}=5.65''$$

倘(297)式テ $\sigma_c=\frac{My_2}{I_n}$ ノ形ニ置イテ

$$I_n=\frac{9\times5.65^3}{3}+(2\times15-1)\times1.4+2.38\left\{(15-1)(5.65-2)^2+15(13-5.65)^2\right\}=2953\ in^4.$$

$$\therefore\quad \sigma_c=\frac{180\,000\times5.65}{2953}=344.5\ \#/□''$$

$$max\sigma_s=15\times344.5\times\frac{13.72-5.65}{5.65}=7380\ \#/□''$$

$$max\sigma_s'=15\times344.5\times\frac{5.65-1.28}{5.65}=4000\ \#/□''$$

(*f*)圖式的解法。

不規則斷面ヲ有スル鐵筋混凝土桁ノ解法ハ圖式的ニ行フガ最モ容易デアル Fig. 405 ニ就イテ其說明ヲ行ハウ。

Fig. 405 @ ヲ與ヘラレタ斷面トシ此斷面ニ彎曲力率 M ガ作用スル時如何ナル應力ガ生ズルカヲ計算スルノデアル,先ヅ中立軸ニ平行ニ(荷重ニ直角ニ)與ヘラレタ斷面ヲ細分シ其面積ヲ順次 f_1, f_2, …… トス,但シ鐵筋面積ハ其 n 倍ヲ採ルモノトシ混凝土面積ハ桁

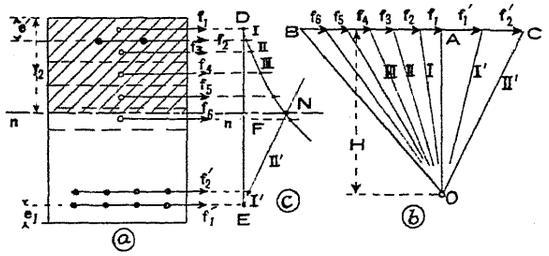


Fig. 405.

下端ヨリ起算スル場合ニ之ヲ無視スル,斯クテ⑥圖ニ於テ此面積ヲ中立軸ニ平行ニ排列シ其桁上端ヨリ起算シタル $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ヲAヨリ左方ニ桁下端ヨリ起算シタル $f_1', f_2', \cdots\cdots$ ヲAヨリ右方ニ置キAヨリ垂線ヲ立テテ極距Hニ於テ極Oヲ採ル,面積 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_1', f_2', \cdots\cdots$ ヲ中立軸ニ平行ニ働ク力ト考ヘテ極射線 OA, I,II,III,……及 I′,II′,……ニ平行ニ平衡多邊形ヲ作圖スル事ⓒ圖ノ如クスレバ其多邊形ノ閉合スル點Nガ求メラレル,Nヲ通ジテ水平ニ引キタル線ガ求ムル中立軸ニ外ナラナイ,何トナレバ是レガ重心軸ニ相當シ且ツ中立軸ヨリ下方ノ混凝土面積ハ考慮ニ加ヘラレテ無イカラデアル。

次ニ混凝土及鐵筋ノ應力ヲ求メンニハ第四節 (V) (2) ニ說明シタ「モール」氏法 (Mohr's method) ニ據リ此斷面ノ中立軸ニ對スル慣性能率Iハ次ノ如クナル。

$$I = 2HF$$

式中 H＝示力圖極距(面積ニ對スル縮尺ニテ測ル)

F＝面積DEN(平衡多邊形ニテ圍マレタ面積)

從ツテ求ムル應力ハ

$$\sigma_c = \frac{My_2}{I} = \frac{My_2}{2HF} \quad \cdots\cdots(300)$$

$$\sigma_s' = \frac{M(y_2 - e')}{2HF} \quad \cdots\cdots(301)$$

$$\sigma_s = \frac{M(h - e_1 - y_2)}{2HF} \quad \cdots\cdots(302)$$

(3) 桁ノ彎曲ニ因ル應剪力

(a) 複筋ヲ有スル一般ノ場合

Fig. 406 ニ示ス應壓側任意層 aa ニ於ケル混凝土ノ應剪力ヲ考フルニ二ツノ斷面 AB, CD ヲ dx 隔テテ採リ此間ニ於ケル此 aa 層ニ

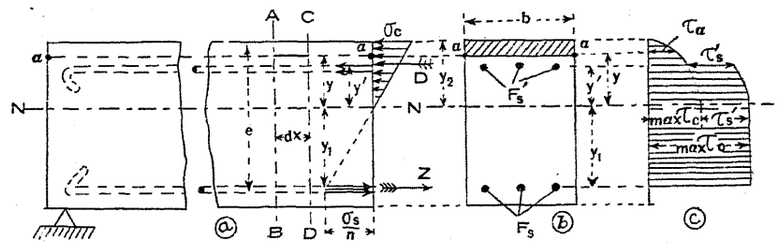


Fig. 406.

沿フ剪力ハ此層以上ノ二斷面ノ直應力 (Normal stress) ノ差ニ等シクナクテハナラヌ(第十七節參照) aa 層ノ中立軸カラノ距離ヲ y トセバ

$$\tau_a . b . dx = \int_y^{y_2} b . dy . d\sigma \quad \cdots\cdots(i)$$

然ルニ混凝土ノ最大緣維應力ハ

$$\sigma_c = \frac{M}{I_n} y_2 \qquad \text{但 } I_n = \text{中立軸ニ對スル鐵筋混凝土ノ慣性能率}$$

$$\therefore \quad \frac{d\sigma_c}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{y_2}{I_n} = Q . \frac{y_2}{I_n}$$

且ツ $\quad \frac{d\sigma}{d\sigma_c} = \frac{y}{y_2}$ デアルカラ

$$d\sigma = \frac{y}{y_2} d\sigma_c = \frac{y}{y_2} \frac{Qy_2}{I_n} dx$$

此値ヲ (i) 式ニ入レ

$$\tau_a.b.dx=\int_y^{y_2} b.dy.y.\frac{Q}{I_n}dx$$

$$\tau_a.b=\frac{b.Q}{2I_n}(y_2^2-y^2) \quad \cdots\cdots(ii)$$

此式ニ於ケル$\frac{b(y_2^2-y^2)}{2}$ハaa層以上ノ斷面部ノ中立軸ニ對スル靜力率デアル,コレヲS_aデ表セバ

$$S_a=\frac{b(y_2^2-y^2)}{2}$$

$$\therefore \quad \tau_a=\frac{Q.S_a}{b.I_n} \quad \cdots\cdots(163)式参照$$

コレハ均質斷面 (Homogeneons cross section) ニ對シテ求メタ (163) 式ト全ク同ジデアル。

$y=0$ ナル場合ニハS_a從テτ_aガ最大トナル,即チ中立軸ニ沿フテ最大應剪力ガ生ズル事トナルノデアツテ其値ハ

$$_{max}\tau_o=\frac{QS_o}{bI_n}=\frac{Qy_2^2}{2I_n} \quad \cdots\cdots(iii)$$

以上ハ應壓鐵筋ノ無キ場合デアツテ此場合ノ應剪力ヲ横距ニ取ツテ圖示スレバFig. 406 ⓒ點線デ示ス如クナル,其最大値ハ中立軸ニ於ケル$_{max}\tau_c$デアル。

更ニ應壓側ニアル鐵筋ノ存在ニ因ツテ其層デ急ニ應剪力ガ或數値ダケ增加スルノデアツテ此增加スル値モ AB,CD 二斷面間ニ於テ生ズル鐵筋直應力ノ差ニ等シイ,今コレヲdD_s'ニテ表シコレニ因ツテ增加スル混凝土ノ應剪力ヲτ_s'トスレバ

$$dD_s'=\tau_s'.b.dx \quad \cdots\cdots(iv)$$

然ルニ應壓鐵筋ノ應力 $\sigma_s'=n\frac{M}{I_n}y'$ デアル故ニ

$$D_s'=\sigma_s'F_s'=\frac{nMy'F_s'}{I_n}$$

$$\therefore \quad \frac{dD_s'}{dx}=\frac{dM}{dx}\frac{ny'F_s'}{I_n}=\frac{Qny'F_s'}{I_n}$$

此値ヲ(iv)式ニ入レ

$$\tau_s'.b=\frac{Qny'F_s'}{I_n}=\frac{QS'}{I_n} \quad \cdots\cdots(v)$$

式中 $S'=nF_s'y'$ = 應壓鐵筋ヲ混凝土ニ換算シ其中立軸ニ對スル靜力率。

從テ應壓鐵筋ノ存スル場合其中立軸ニ沿フテ混凝土ニ生ズル應剪力ハ(iii)式ト(v)式トノ和ニヨツテ與ヘラレ

$$_{max}\tau_o=_{max}\tau_o+\tau_s'=\frac{Q}{I_nb}\left(\frac{1}{2}by_2^2+ny'F_s'\right) \quad \cdots\cdots(303)$$

此値ハ中立軸ニ於テ生ズル最大應剪力デアル,中立軸以下ニ於テハ下側鐵筋ノ點迄此値$_{max}\tau_o$ニハ變化ナク(中立軸以下ノ混凝土ノ應張力ハ始メカラ考ニ採ツテ居ナイノデアルカラ)下側鐵筋ノ點ニ於テ其應張力ノ量ダケ減ズル事トナル,此應力ノ値ハ上側鐵筋ト同樣ニ求メラレ

$$\tau_s=\frac{Qny_1}{bI_n}F_s$$

此値ハ (303) 式ニ於ケル$_{max}\tau_o$ト全ク等シイ事ハ容易ニ證明セラレ得ル,從テ應剪力圖ハ此下側鐵筋ノ點ニ於テ零トナル事Fig. 406ニ示ス如シ。

(b) 單筋ノ場合。

(303) 式ニ於テ $F_s'=0$ ト置ケバ求メラレ

$$_{max}\tau_o=\frac{Qy_2^2}{2I_n}=\frac{Qy_2^2}{2}\frac{\sigma_c}{My_2}$$

尙 $M=D.a=\frac{\sigma_c by_2}{2}a$ ナルガ故ニ

$$_{max}\tau_o=\frac{Qy_2^2\sigma_c}{2\frac{\sigma_c b y_2^2}{2}a}=\frac{Q}{ab}$$

式中 $a=e-\frac{1}{3}y_2$ デアル故ニ最大應剪力ハ

$$_{max}\tau_o=\frac{Q}{b(e-\frac{1}{3}y_2)} \quad \cdots\cdots(304)$$

應剪力ノ狀態ハ Fig. 407 ニ示ス如クナル。

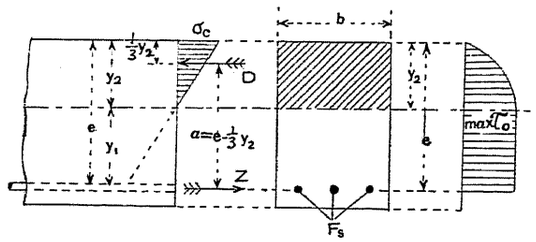


Fig. 407.

(304) 式ニ於ケル剪力 Q ハ斷面ニ依ツテ其値ヲ異ニシ,其最大値ハ支點ニ起リ Q=A デアル故ニ支點ノ中立軸ニ沿フテ生ズル最大應剪力ハ

$$_{max}\tau_o=\frac{A}{b(e-\frac{1}{3}y_2)} \quad \cdots\cdots(305)$$

(c) 附著應力 (Bond Stress or Adhesive Stress)。

附著應力ト云フハ鐵筋面ニ沿フテ混凝土トノ間ニ生ズル應力デアツテコレハ鐵筋ニ働ク全張力 Z ヲ其圓周面積 (Circumferential area) デ割レバ求メラレル,今鐵筋ノ長 1, 混凝土ノ幅 b ニ就イテ考ヘ

τ_b = 求ムル鐵筋ニ沿フ附著力

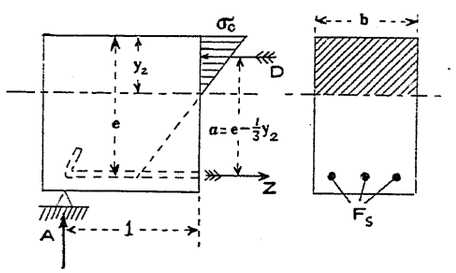


Fig. 408.

U = 鐵筋ノ圓周トスレバ

U × 1 × τ_b = Z = D

尙 Fig. 408 ニ於テ平衡ノ條件カラ

$$A\times 1=D.a=D(e-\frac{1}{3}y_2)$$

デアルカラ求ムル附著應力ハ

$$\tau_b=\frac{A}{U(e-\frac{1}{3}y_2)} \quad \cdots\cdots(306)$$

此式ニテ見ル如ク圓周 U ノ大ナル程附著應力ハ小サクナル,卽チ太イモノヲ數少ナク用ユルヨリモ細イモノヲ多數用ユル方ガ附著力ニ對シ安全ナル事ヲ知ル。

(d) 繫筋及傾斜鐵筋 (Stirrup and Diagonal Tie)。

以上混凝土ニ生ズル應剪力ノ計算ヲ說明シタガ一體混凝土ノ抗剪力ハ極メテ少ナイ故ニ混凝土ノミデハ外力ニ因ツテ起ル應剪力ニ耐エ得ラレナイ場合ガ多イ,殊ニ丁字桁ノ場合ニ於テ然リトスル,斯カル場合ニ混凝土ノ許容應剪力ヨリ大ナル應剪力ヲ發生シタ時ニハ之レニ抵抗スル爲メニ他ノ材料ヲ挿入スル方法ヲ採ル,其方法ニ二ツアル,卽チ (a) 平鐵 (Flat iron) 又ハ丸鐵 (Round iron) ノ繫筋 (Stirrup) ヲ挿入スル法 (Fig. 409 ⓐ

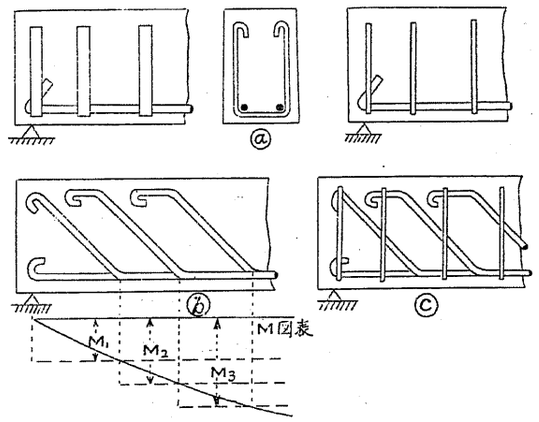


Fig. 409.

參照), (b) 縱ニ入レタ主鐵筋ノ桁ノ端ニ於テ必要以上ニアルモノヲ適當ノ場所デ折曲ゲ傾斜鐵筋 (Diagonal tie) 或ハ曲上筋 (Bent bar) トシテ之ニ據テ桁ニ起ル主應力卽應張力ヲ受ケ持タセル法 (Fig. 409 ⓑ 參照)及ビ (c) 繋筋及傾斜鐵筋ヲ併用スル法(Eig. 409 ⓒ 參照)之デアル。

此 (a) ト (b) トノ優劣ニ就イテハ多クノ實驗ガ行ハレテ居ルガ「メルシュ」氏 (Mörsch) ノ最近實驗ニ於テハ (b) ノ方ガ優ツテ居ルトセラレテ居ル,併シ其間隔ハ普通廣クナルノデアツテ從テ適當ニ應力ガ傳ヘラレナイ部分ガ生ズル恐ガアル,此點カラ云ヘバ傾斜鐵筋以外ニ其間ニ更ニ繋筋ヲ挿入シタ (c) ノ構法ガ最モ好結果ヲ與ヘルノデアル。

(a) 繋筋 (Stirrup) ノ計算。

繋筋ヲ用ユレバ之ニ依テ桁ノ破壞荷重ヲ增ス事ガ出來ル,卽チ破壞ニ對スル安全率ヲ增シ得ル事ハ多クノ實驗ガ證明シテ居ル所デアツテ其要點ヲ約言スレバ次ノ通リデアル,卽チ桁ニ荷重ヲ掛ケテ始メテ龜裂 (Crack) ノ表レルノハ繋筋ノ有無ニ因テハ著シキ變化ヲ見ナイノデアルガ併シ荷重ヲ增シテ其破壞荷重ニ至ル時ハ繋筋ノ大小,間隔ノ粗密ニ因ツテ甚シキ差ヲ生ズルノデアツテ 20％～80％破壞荷重ヲ增ス事ガ出來ル,卽チ繋筋ノ間隔ノ同一ナル場合ニハ大ナル繋筋ノ方ガ破壞荷重ヲ增シ又同一寸法ノ繋筋デアレバ間隔ノ密ナル程破壞荷重ヲ增ス,而シテ其挿入スル繋筋ノ形狀如何ハ龜裂荷重及破壞荷重ニ著シキ影響ヲ與ヘナイ,平鐵デアツテモ丸鐵デアツテモ大體ニ於テ同樣デアル,夫レ故ニ普通ハ扱ヒ易イ 6～10mm 徑ノ丸鐵ガ多ク用ヒラレル。

繋筋ノ數ノ計算方法トシテ茲ニ二法ヲ擧ゲヤウ。

1°) 在來普通ノ方法。

Fig. 410 ニ示ス如キ單筋ノ場合ニ中立軸ニ沿フテ起ル最大應剪力ハ(304)式ニ示ス如ク

$$_{max}\tau_o=\frac{Q}{b(e-\frac{1}{3}y_2)}=\frac{Q}{ab}$$

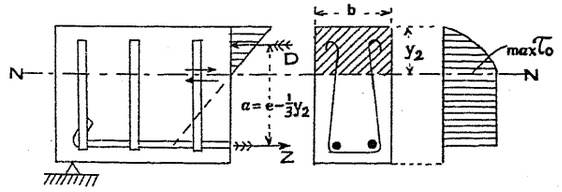


Fig. 410.

然ルニ混凝土ノ抗剪力ハ非常ニ弱ク 4 kg/cm^2 或ハ 60 ″/□″ ヲ出デナイノデアルカラ其餘分ハ繋筋ニ受持タス必要ガアル,今混凝土ノ許容應剪力ヲ $_{con}k_s$ ニテ表セバ繋筋ガ抵抗シナケレバナラヌ應剪力ハ $_{max}\tau_o-_{con}k_s$ デアル。

今幅 b ニ對スル繋筋ノ斷面積ヲ $2f_s$ (卽チ f_s ノ斷面積アル繋筋一本ニ相當ス,コレハ中立軸ヲ二個所デ通ルカラ二倍トシテ働ク) トシ其許容應剪力ヲ k_s トセバ繋筋ノ間隔ヲ d トシ其間ノ平均水平應剪力ヲ $_{max}\tau_o$ トシテ繋筋ノ許容强度ト其負擔スベキ剪力トヲ等シク置キ

$$2f_sk_s=db(_{max}\tau_o-_{con}k_s)$$

故ニ所要繋筋間隔ハ

$$d=\frac{2f_sk_s}{b(_{max}\tau_o-_{con}k_s)} \quad \cdots\cdots(307)$$

此式ニ於ケル $_{con}k_s$ ハ定値デアルガ $_{max}\tau_o$ ハ點ニ依ツテ異ナル値デアル,其變化ノ有樣ハ荷重分布ノ狀態ニ依ツテ變ルガ等布荷重ヲ假定シテ圖示スレバ Fig. 411 ノ如クナル,同圖ハ垂直剪力ノ値ヲ縱距トシテ表ハシタモノデアツテ $Q=a.b_{max}\tau_o$,

$Q_1=ab_{con}k_s$ デアリ從ツテ

$Q_2=ab'_{max}\tau_o-_{con}k_s)$ ハ繋筋ガ負擔セネバナラヌ剪力ニ相當スルモノデアル,任意點ニ於ケル鐵筋ノ負擔剪力ニ相當スル垂直剪力ヲQ_xトスレベコレニ因テ中立軸ニ生ズル應剪力ハ

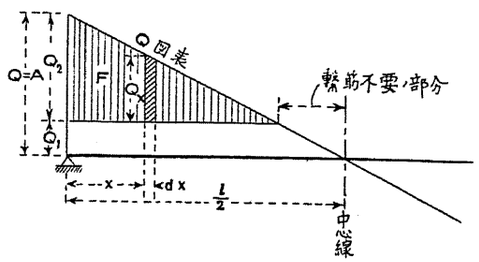


Fig. 411.

$$\tau_x=\frac{Q_x}{a.b}$$

故ニ中立軸ニ沿フテ生ズル全剪力ハ

$$T=\int\tau_x.b.dx=\int\frac{Q_x}{ab}\,b\,dx=\frac{1}{a}\int Q_x dx=\frac{F}{a}$$

式中　F= Fig. 411 圖上ニ於ケル影線面積 (Shaded area)

コレガ繋筋ノ受持ツベキ剪力デアル,從ツテ求ムル繋筋ノ所要總斷面積ハ

$$\sum f_s=\frac{F}{ak_s}$$

從テ繋筋ノ所要數zハ

$$z=\frac{\sum f_s}{(2f_s)}=\frac{F}{2af_sk_s}\qquad\cdots\cdots(308)$$

式中　$a=e-\frac{1}{3}y_2$

F＝繋筋ノミニテ負擔スベキ總垂直剪力(Fig. 411 ニ示ス影線面積)

カクテ繋筋ノ數ヲ知レバ此繋筋ノ負擔スベキ垂直剪力全面積Fヲ繋筋ノ數ニ等分シ繋筋ヲ其重心ニ當ル點ニ挿入スレバ各繋筋ガ等シイ負擔ヲスル事トナルノデアツテ其位置ヲ決定スルニ

ハ作圖上ニテ Fig. 412 ニ示ス如ク行ヘバヨイノデアル,圖示スル所ハ $z=4$ ノ場合デアツテ左半圖ニ於テハ等分サレルベキ三角形 abc ノ頂點 c ニ一線ヲ立テ $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ……$\sqrt{z-1}$, $\sqrt{z}$ ノ比ニテ此線上ニ點ヲ設ケ其上端ヲ a ニ結ビコレニ平行ナ線ニヨツテ ac 線ヲ分割スレバ弦ニ等積ノ剪力面積ヲ得,各繋筋ハ其重心ニ相當スル點ニ挿入スレバヨイ,右半圖ニ於テハ $c'a'$ ヲ z 等分シ各分割點ヨリノ垂線ト $c'a'$ ヲ直徑トスル圓トノ交點ヲ求メ c' ヲ中心トシテ此交點ヲ通ズル圓弧ヲ畫キテ $c'a'$ 上ニ等積剪力ノ分割點ヲ得ル,而シテ其各面積ノ重心ガ繋筋ノ位置ヲ示ス事前ト同ジ。

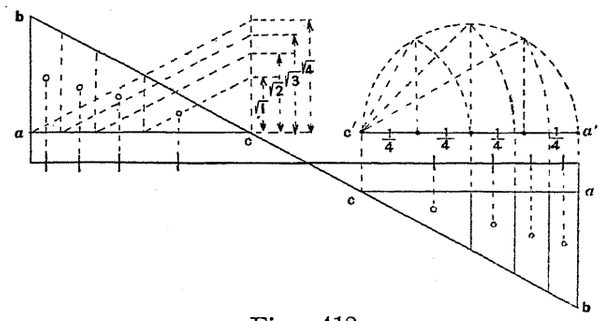


Fig. 412.

以上說明シタ計算方法ハ繋筋ガ中立軸ニ沿フテ剪斷サレルニ抵抗スルト假定シタノデアルガ此考ヘ方ハ全ク正シキモノト考ヘラレナイ,何トナレバ繋筋ノ周圍ノ混凝土ノ抗壓抵抗或ハ摩擦抵抗ガ繋筋ノ應剪力ニ比シテ極メテ小ナルニ過ギナイカラ繋筋ノ應力ガ其抗剪强ニ達スルヨリモ遙ニ早ク混凝土ガ破壞スルト思ハレルカラデアル。

2') 新法。

前述ノ如キ缺點ヲ補フ爲メニ考案サレタ算法ハ繋筋ヲ有スル鐵筋混凝土桁ヲ結構構造 (Framed structure) ト比較考察スルノデアツテ Fig. 413 ニ示ス如クコレヲ「ハウ」(Howe) 式結構ノ一種ト比較シ

繫筋ガ垂直抗張材ノ如キ働キヲ爲シ傾斜抗壓材トシテハ混凝土ガ働クト考ヘルノデアル(結構構造ニ關スル詳細ナル理論ハ第七章ニ讓ル)。

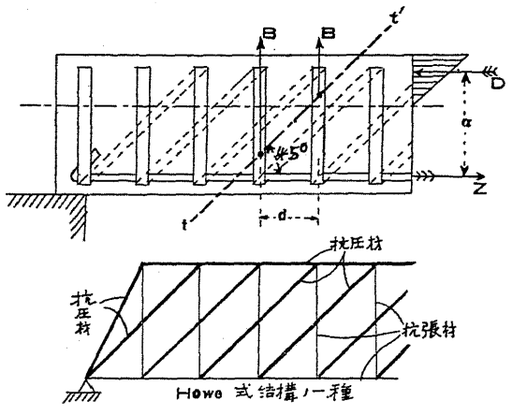


Fig. 413.

Fig. 413 ノ如ク繫筋ノ間隔ヲ d トスレバ 45°ノ傾斜ニ假定シタ斷面ガ切ル繫筋ノ數ハ $\frac{a}{d}$ 對 ($a=2d$ ノ時ハ二對)トナルデアラウ,卽チ桁ニ働ク全壓力 D ト全張力 Z トノ距離 a ヲ格間長 (Panel length) ニ採ツテ其間ニ $\frac{a}{d}$ 對ノ繫筋ガ存在スル事トナル,然ル時ハ此繫筋ガ垂直抗張材トシテ傳達スル總應力ハ其斷面ノ剪力 Q ニ等シクナケレバナラヌ,故ニ繫筋ノ應張力ヲ σ_s トシテ

$$Q=\frac{a}{d}(2f_s)\sigma_s$$

尤モ混凝土ノ應張力ハ之ヲ無視シテ居ル,更ニ桁幅(丁字桁ニ於テハ肋桁幅)ヲ b_1 トスレバ $Q={}_{max}\tau_o.a.b_1$ デアルカラ

$${}_{max}\tau_o.a.b_1=\frac{a}{d}(2f_s)\sigma_s$$

今繫鐵ノ許容應張力ヲ k_t トセバ

$$\left.\begin{aligned} d&=\frac{(2f_s)\sigma_s}{{}_{max}\tau_o.b_1}\\ &\leqq\frac{(2f_s)k_t}{{}_{max}\tau_o.b_1}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(309)$$

此計算方法ニ依ルト繫筋ハ應張力ヲ受ケル事トナルノデアツテ

在來ノ方法ニ於ケル應剪力ニ抵抗スルトシテノ假定ヨリモ事實ニ近イモノト思ハレル,繫筋ノ最大間隔 d ハ $\frac{a}{2}$ ヲ超過シナイガ望マシイ.

(b) 傾斜鐵筋 (Diagonal tie) ノ計算。

傾斜鐵筋ハ第十八節ニ說明シタ主應力 (Principal stress) ニ抵抗セシムル爲メニ挿入スルノデアツテ桁ノ一點ニ於テ直應力 σ, 應剪力 τ ヲ受クル場合ニ生ズル主應力ハ

$$\sigma_1\text{ 或ハ }\sigma_2=\frac{\sigma}{2}\pm\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}\quad\cdots\cdots(166)\text{參照}$$

其中立軸ニ於ケルモノヲ調ベンニハ $\sigma=0$ ト置キ

$$\sigma_1=+\tau,\quad\sigma_2=-\tau$$

此方向ハ (169)式ニ據リ

$$\tan 2\theta=-\frac{2\tau}{\sigma}$$

ニ於テ $\sigma=0$ ト置キ $\tan 2\theta=\infty$, 故ニ

$$\theta=45°$$

卽チ水平ト 45°ノ傾斜デ一方ニ $+\tau$ ナル應張力,コレト直角ニ $-\tau$ ナル應壓力ガ發生スルノデアル,而シテ混凝土ノ抗壓强ハ大デアルカラ發生スル應壓力ハ問題トナラナイガ抗張强度ハ弱イノデアルカラ應張力ノタメ破壞ノ生ズル恐ガアル,卽チコレニ抵抗スル爲メニ傾斜鐵筋ヲ挿入スルノデアル,而シテ普通ノ場合剪力ノ大ナル部分卽チ端ニ近イ所デハ水平主筋ニ過剩ガ生ズルノデアルカラ此主筋ヲ傾斜シテ曲上グレバヨイ。

Fig. 414 ニ一本ノ傾斜鐵筋ヲ採リ之ヲ中心トシテ中立軸ニ沿ヒ $cd=x$ ナル長ヲ考ヘ其平均應剪力ヲ ${}_{max}\tau_o$ トスル,然レバ此間ニ於ケ

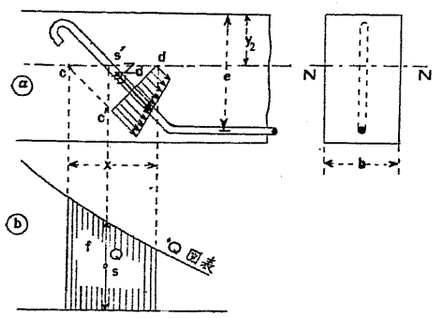


Fig. 414.

ル中立軸ニ沿ヘル主應力モ亦同ジ力度ヲ有スルモノデアツテ此方向ハ軸ト45°傾斜スル事ヲ知ル,此主應力ノ方向ニ傾斜鐵筋ガ挿入セラレアルモノトスル,今cdナル長ヲ傾斜鐵筋ノ方向ニ直角ニ投射シタモノヲ$c'd$トスレバ其面積ハ

$$\overline{c'd}.b = x\cos 45°.b = \frac{bx}{\sqrt{2}}$$

此cd間ノ主應力ニ鐵筋ガ抗張材トシテ抵抗スルモノトスレバ其傾斜主要張力ハ

$$Z_d = \frac{bx}{\sqrt{2}}\,{}_{max}\tau_o$$

然ルニ此傾斜鐵筋一本ノ斷面積ヲf_sトスレバ

$$Z_d = f_s\sigma_s.$$

而シテ　　${}_{max}\tau_o = \dfrac{Q}{b(e-\frac{1}{3}y_2)}$　デアル故ニ

$$f_s\sigma_s = \frac{Q}{e-\frac{1}{3}y_2}\,\frac{x}{\sqrt{2}}$$

此式ノ分子$Q.x$ハ明カニFig. 414 ⓑニ示シタ剪力圖ニ於ケルcd即xニ相當シタ面積ニ外ナラナイ,コレヲfデ表セバ

$$f_s\sigma_s = \frac{f}{(e-\frac{1}{3}y_2)\sqrt{2}}$$

此剪力圖面積fノ重心ハ丁度傾斜鐵筋ガ中立軸ヲ切ル點ト一致

スル筈デアルカラ重心sニ相當スル中立軸上ノ點s'ヲ通ジテ鐵筋ヲ挿入スレバヨロシイ。

斯ノ如キ計算ニ當ツテ人ニヨツテハ屢々混凝土ノ許容應剪力ニ超過シタ應剪力ダケヲ傾斜鐵筋ニ負擔セシムル事ニ考ヘテ解イテ居ル,卽チ混凝土ノ許容應剪力ヲ${}_{con}k_s$トセバ傾斜鐵筋ノ負擔量ハ$({}_{max}\tau_o - {}_{con}k_s).a.b$トナル,然ルニ又或人ハ傾斜主要張力ハ純應張力デアルガ故ニ生ズル全張力ハ悉ク傾斜鐵筋ニ負擔セシメルト考ヘネバナラヌトシテ居ル. Fig. 415ハ此兩說ヲ圖示シタノデアツテ前者ハ

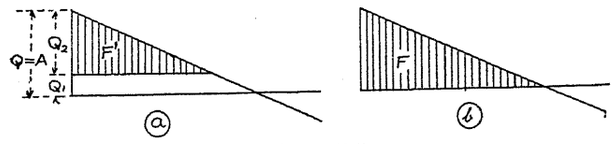


Fig. 415.

ⓐニ相當シ後者ハⓑニ相當スル,理論的ニ云ヘバ後者ⓑノ方ガ合理的デアラウト思ハレルガ實際ニハ傾斜鐵筋ノ外ニ繫筋ヲ用ヒルノデアリ總テニ於テ安全過ギル事ニナルノデアルカラF'ダケヲ負擔スル事(卽前者ⓐ)ニシテ置イテモ更ニ繫筋ガコレヲ補フ事トナルデアラウト思ハレル,其何レニ從フカハ讀者ノ判斷ニ委ス事トシヤウ。

扨45°ニ挿入サレタ傾斜鐵筋總斷面積ヲF$_s$トシ其應張力ヲσ_sトスレバⓐ圖ノ假定ニ從フモノトシテ

$$F_s.\sigma_s = \frac{F'}{(e-\frac{1}{3}y_2)\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad F_s = \frac{F'}{\sigma_s(e-\frac{1}{3}y_2)\sqrt{2}}$$

$$=0.7\frac{F'}{(e-\frac{1}{3}y_2)\sigma_s} \quad \cdots\cdots(310)$$

式中 σ_s=鐵筋ノ許容應張力。

從テ傾斜鐵筋ノ所要全面積ガ判リ一本ノ斷面積ヲ假定スレバ鐵筋所要數 z ハ

$$z=\frac{F_s}{f_s}=\frac{F'}{f}$$

式中 f ハ一本ノ鐵筋ノ負擔シ得ル剪力圖面積デアツテ(310)式ノ $a=e-\frac{1}{3}y_2$ ヲ大約不變ト見レバ

$$f=f_s\sigma_s(e-\frac{1}{3}y_2)\sqrt{2}$$

$$z=\frac{F'}{f_s\sigma_s(e-\frac{1}{3}y_2)\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots(311)$$

傾斜鐵筋ノ數 z ガ決定シタナラバ其數ト同數ニ此剪力圖ノ F′ ヲ等分シテ其鐵筋ノ配布位置ヲ定メ得ル,今假ニ等布荷重ヲ假定セバ其剪力圖ハ直線トナリコレヲ等分スル事モ容易デアル Fig. 416 ⓐ ハ其等分作圖法ヲ示シ Fig. 416 ⓑ ハ直接鐵筋ノ位置ヲ決定

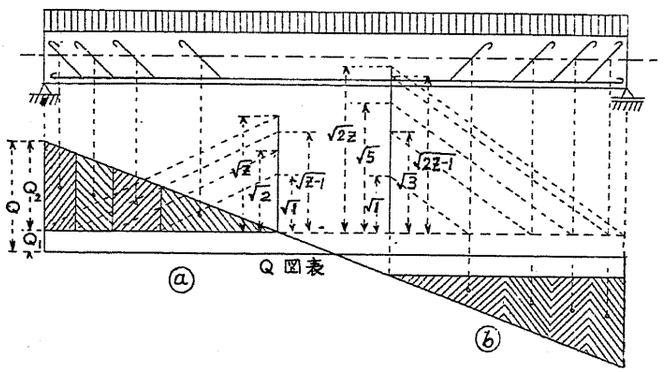


Fig. 416.

スル作圖方法ヲ示ス。

⑷鐵筋混凝土桁ノ撓度。

Fig. 417 ニ於テ一ツノ鐵筋桁ノ內ニ荷重スル前ニ平行デアツタ二斷面 ab,cd ヲ距離 dx 隔テテ採リ彎曲シテ cd ガ $c'd'$ ノ位置ニナリ應壓側ノ混凝土ノ繰維層ガ $\triangle dx$ ダケ壓縮サレタモノトセバ

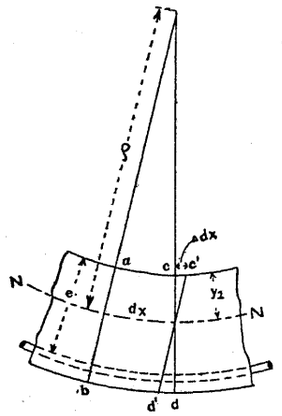


Fig. 417.

$$\frac{\triangle dx}{y_2}=\frac{dx}{\rho}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho}=\frac{\triangle dx}{dx.y_2}$$

而シテ混凝土ノ最遠繰維及鐵筋ノ變形ヲ夫々 ε_c 及 ε_s トセバ

$$\varepsilon_c=\frac{\triangle dx}{dx},\quad \varepsilon_s=\varepsilon_c\frac{e-y_2}{y_2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho}=\frac{\varepsilon_c}{y_2}=\frac{\varepsilon_s}{e-y_2}$$

且ツ

$$\varepsilon_c=\frac{\sigma_c}{E}=\frac{My_2}{EI},\quad \varepsilon_s=\frac{M(e-y_2)}{EI}$$

$$\rho=-\frac{1.}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

トナル故ニ彈性線方程式ハ

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{\varepsilon_c}{y_2}=\frac{\varepsilon_s}{e-y_2}\equiv p \quad \cdots\cdots(312)$$

コレハ第二十三節ニ於テ說明シタ「モール」氏 (Mohr) 第二平衡多邊形ニ依ツテ圖式的ニ撓度解法ヲ行ツタモノト一致シ荷重縱距 p ニ對スル平衡多邊形ガ求ムル彈性線デアル。

(312) 式ニ於ケルE及Iハ共ニ可變數デアツテ從テ撓度ヲ精密ニ計算スル事ハ極メテ面倒且ツ困難ナ問題デアル,彈性係數Eハ一ツノ斷面內ニ於テモ應力ノ大小ニヨツテ一定デナク又桁ノ異ナル點ニ於テモ差ガアル故ニ彈性線モコレニ支配サレル事トナル,又斷面ノ慣性能率Iハ實際ニ於テ混凝土ノ應張層ガ何程迄共同作用ヲ爲スヤニ從ツテ變化スルモノデアツテ荷重少ナキ時ニハ應張側ノ混凝土モ働イテ居ルノデアルガ荷重及應力ガ增シテ應張層ニ龜裂デモ入レバ働カナクナルモノト思ハレル,卽チ應力ヲ次ノ二階程ニ分ツテ考ヘル事トスル。

應力第一期。

應張力ガ少ナク從テ混凝土ノ應壓力モ極僅カデアル間ハ斷面全體ガ働キ得ルノデアルカラ此時ノ抵抗力率ハ

混凝土ノ全斷面積＋n×鐵筋斷面

ノ全部ガ有效ナノデアル,此時ノIヲI_1トシ鐵筋混凝土ノ彈性係數ヲE_Iトスレバ種々實驗ヲ行ツタ結果

$$E_I=400{,}000\sim300{,}000\ kg/cm^2$$

$$\therefore\quad n=\frac{E_s}{E_1}=\frac{2\,100\,000}{400{,}000\sim300{,}000}=5\sim7.$$

應力第二期。

更ニ荷重ガ增シ第二期ニ入レバ應張力ガ增ス爲メニ應張側ニ龜裂ガ入ル事トナリ此時ノ斷面ノ慣性能率ハ殊ニ大ナル應力ヲ受ケル部分ニ於テ非常ニ減ジ同時ニ彈性係數モ減ズル故ニ撓度ハ大イニ增加スル,斯クテ混凝土ノ應張力ガ大トナレバ遂ニ應張力ハ鐵筋ノミノ應力デ負擔セラレル事トナリ其場合ニ於テ前式ハ次ノ如ク表サレル。

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\varepsilon_s}{e-y_2}=\frac{\sigma_s}{E_s(e-y_2)}=\frac{M}{E_sI_{II}}$$

$$\therefore\quad I_{II}=\frac{M.\rho}{E_s}=\frac{M(e-y_2)}{\sigma_s}$$

此I_{II}ノ値ヲ用ヒ力率Mニハ其場合ノ荷重ニ相當シタ値 $M=\frac{Pl}{n''}$ ヲ置イテ彈性線ニ對スル單簡ナ式ガ得ラレル,卽チ

$$\delta=n'\frac{Pl^3}{EI}=n'\frac{Pl^3\sigma_s}{E_sM(e-y_2)}=n'\frac{Pl^3\sigma_s}{E_s(e-y_2)}\frac{n''}{Pl}$$

$$=n'''\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}\qquad\cdots\cdots(313)$$

n'''ハ其荷重ニ依ツテ一定デアル,次ニ計算例ヲ示ス。

1° 單桁。

等布荷重

$$\delta=\frac{5}{384}\frac{Pl^3}{EI}=\frac{5}{384}\frac{Pl^3}{E_s}\frac{\sigma_s}{M(e-y_2)}$$

然ルニ $M=\frac{1}{8}Pl$ デアル故ニ

$$\delta=\frac{5}{384}\frac{Pl^3\sigma_s}{E_s(e-y_2)}\frac{8}{Pl}=\frac{5}{48}\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$\therefore\quad n'''=\frac{5}{48}$$

集中荷重(徑間中央ニ働ク)

$$\delta=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI}=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E_s}\frac{\sigma_s}{M(e-y_2)},\quad M=\frac{1}{4}Pl.$$

$$=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E_s}\frac{\sigma_s}{e-y_2}\frac{4}{Pl}=\frac{1}{12}\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$n'''=\frac{1}{12}$$

2' 拡木桁。

等布荷重

$$\delta=\frac{1}{8}\frac{Pl^3}{EI}=\frac{1}{4}\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$n'''=\frac{1}{4}$$

集中荷重(自由端ニ働ク)

$$\delta=\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}=\frac{1}{3}\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$n'''=\frac{1}{3}$$

3° 固定桁。

等布荷重

$$\delta=\frac{1}{384}\frac{Pl^3}{EI}=\frac{1}{32}\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$n'''=\frac{1}{32}\quad\left(M=\frac{1}{12}Pl\ トシテ計算\right)$$

集中荷重(中央)

$$\delta=\frac{1}{192}\frac{Pl^3}{EI}=\frac{1}{24}\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$n'''=\frac{1}{24}\quad\left(M=\frac{1}{8}Pl\ トシテ計算\right)$$

4° 不完全固定桁 (Partially fixed beam)。

等布荷重

$$\delta=\frac{3}{384}\frac{Pl^3}{EI}=\frac{3}{48}\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$n'''=\frac{3}{48}\quad\left(M=\frac{1}{8}Pl\ ヲ採用シテ計算\right)$$

集中荷重(中央)

$$\delta=\frac{5}{384}\frac{Pl^3}{EI}=\frac{1}{16}\frac{l^2\sigma_s}{E_s(e-y_2)}$$

$$n'''=\frac{1}{16}\quad\left(M=\frac{5}{24}Pl\ トス採リ計算ス\right)$$

以上ノ計算ニヨルカ又ハ簡單ニ EI ノ平均値ヲ採用シテ δ ヲ解析的ニ求メ得ラレルノデアツテ I_{II} ニハ混凝土ノ應張側ヲ無視シ鐵筋積ヲ15倍シテ計算シ E_{II} トシテハ 300,000～150,000 kg/cm^2 ヲ採ツタナラバ先ヅ相當適當ナ値ガ得ラレル,然シ此應力第二期ノ場合ニ於テモ其荷重ガ全徑間ニ行渡ラズ強度ノ大ナル荷重ガ大ナル應力ヲ受ケル部分ニノミ働ク時ニハ I ハ I_I ト I_{II} トノ中間ノモノトナル,何トナレバ中央ノ大ナル應力ヲ受ケル部分ハ I_{II} ニ近ク端ノ應力ノ小ナル所ハ I_I ニ近イカラデアル,其適當ナ値ヲ決定スル事ハ困難デアル,以上 I ニ就イテ述ベタ事ハ E ニ就イテモ亦同樣デアル,從テ鐵筋混凝土桁ノ撓度ノ算定ハ殆ンド常ニ不確カト云ハナケレバナラス。

茲ニ良好ト思ハルル鐵筋混凝土ニ關スル參考書ヲ列擧シテ本節ヲ終ラウト思フ。

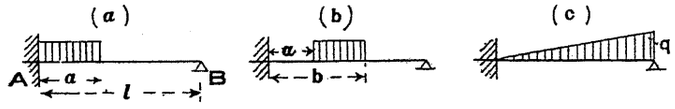
1. 阿部美樹志氏 ……鐵筋混凝土工學
2. Berger et Guillerme, …La Construction en Ciment Armé.
3. Buel and Hill, ……Reinforced Concrete.
4. Christoph, ……Le Béton Armé.
5. Considère, ……Reinforced Concrete.
6. Deutscher Ausschuss für Eisenbeton.
7. Dunn, ……Lectures on Reinforced Concrete.
8. Emperger, ……Handbuch für Eisenbeton.
9. Foerster. ……Eisenbeton.
10. Foerster, ……Grundzüge des Eisenbetons.
11. Fölzer, ……Betoneisen Konstruktionen.

12. Forscher Arbeiten a. d. Gebiete der Eisenbeton.
13. Gillete and Hill……Concrete Construction.
14. Göldel.……Praxis und Theorie des Eisenbetons.
15. Hager.……Theorie des Eisenbetons.
16. Heidenreich. ……Engineers Pocketbook of Reinforced Concrete.
17. 日比忠彥氏……鐵筋混凝土理論及其應用.
18. Hool……Reinforced Concrete Construction.
19. Kaufmann. ……Tabelle für Eisenbeton Konstruktionen.
20. Kersten. ……Der Eisenbetonbau I u II.
21. Kersten. ……Brücken in Eisenbeton.
I Platten u. Balken. Brücken.
II Bogen Brücken.
22. Marsh.……Reinforced Concrete.
23. Mörsch. ……Der Eisenbetonbau (4te Auflage)
24. Mörsch. ……Steel Concrete Construction. (英譯)
25. Nicolas. ……Die Eisenbeton Praxis.
26. Nivet. ……Methode de Calcul du Beton Armé avce Baremes.
27. Pilgrim. ……Vollständige theoretische und praktische Berechung der Eisenbeton Konstruktionen.
28. Probst.……Vorlesungen über Eisenbeton.
29. Saliger.…… Festigkeit veränderlich elastischer Konstruktionen.
30. Saliger. ……Der Eisenbeton in Theorie und Konstruktionen.
31. Schule.……Resistance et Deformation du Beton Armé.
32. Taylor and Thompson.
…… Concrete Plain and Reinforced.

33. Tedesco. ……Manuel du Constructeur en Ciment Armé.
34. Turneaure ……Principles of Reinforced Concrete Construction.
35. Reid. ……Concrete and Reinforced Concrete Construction.
36. Beton und Eisen. (雜誌)

問 題 集 第 八

(1) 自由端ヲ支持サレタル肱木桁圖示ノ如キ荷重ヲ受ク,支點反力及固定端ノ彎曲力率ヲ求ム。



答 (a) $A=\frac{qa}{8l^3}(8l^3-4la^2+a^3)$, $B=\frac{qa^2}{8l^3}(4la-a^2)$,

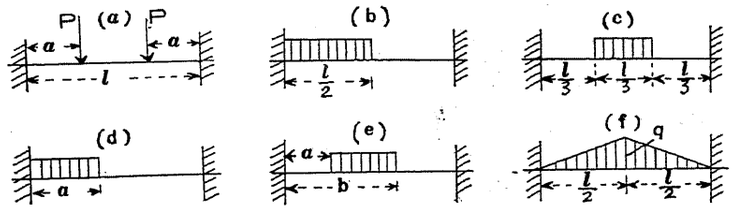
$M_A=-\frac{qa^2}{8l^2}(4l^2-4la+a^2)$,

(b) $B=\frac{q}{8l^3}\left[4l(b^3-a^3)-(b^4-a^4)\right]$, $A=q(b-a)-B$,

$M_A=-\frac{q}{8l^2}\left[4l^2(b^2-a^2)-4l(b^3-a^3)+(b^4-a^4)\right]$,

(c) $A=\frac{9}{40}ql$, $B=\frac{11}{40}ql$, $M_A=-\frac{7}{120}ql^2$.

(2) 圖示ノ固定桁ニ就イテ支點反力及固定端ノ彎曲力率ヲ求ム。



答 (a) $A=B=P$, $M_A=M_B=-\frac{Pa(l-a)}{l}$

(b) $A=\frac{3}{32}ql$, $B=\frac{13}{32}ql$, $M_A=-\frac{5}{192}ql^2$, $M_B=-\frac{11}{192}ql^2$.

(c) $A=B=\frac{1}{6}ql$, $M_A=M_B=-\frac{13}{324}ql^2$.

(*d*) $A=\frac{qa}{2l^3}(2l^3-2la^2+a^3)$, $B=\frac{qa}{2l^3}(2la^2-a^3)$

$M_A=-\frac{qa^2}{12l^2}(6l^2-8al+3a^2)$, $M_B=-\frac{qa^2}{12l^2}(4la-3a^2)$

(*e*) $B=\frac{q}{2l^3}\left[2l(b^3-a^3)-(b^4-a^4)\right]$, $M_A=-\frac{q}{12l^2}\left[6l^2(b^2-a^2)-8l(b^3-a^3)+3(b^4-a^4)\right]$

(*f*) $A=B=\frac{1}{4}ql$, $M_A=M_B=-\frac{5}{96}ql^2$.

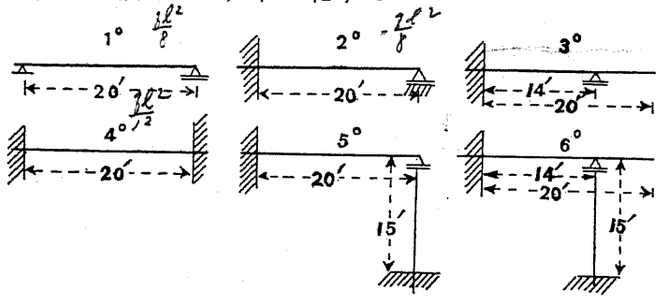
(3) 等布荷重ヲ受クル肱木桁ヲ其固定端ヨリ何程ノ距離ニ支點ト同高ニ支ヘタル時其自由端ノ撓度ヲ無カラシメ得ルカ.又其生ズル彎曲力率ヲ最小ナラシメ從ツテ斷面ヲ最小ナラシメ得ルカ, 答 0.740*l*, 0.710*l*

(4) 等布荷重ヲ受クル AB 桁ノ A ヲ固定シ B ヲ單純ニ支持スル時 B 支點ガ $\frac{ql^4}{16EI}$ ダケ沈下セル時ノ反力ヲ求ム,全荷重ヲ A ニテ負フ爲メノ沈下如何,若シ A ノ固定不完全ニシテ其中立軸ガ水平線ト $\frac{ql^3}{48EI}$ ノ角ヲ爲シタルモノトセバ如何。

答 $\frac{11}{16}ql$, $\frac{1}{8}\frac{ql^4}{EI}$; $\frac{3}{4}ql$, $\frac{7}{48}\frac{ql^4}{EI}$

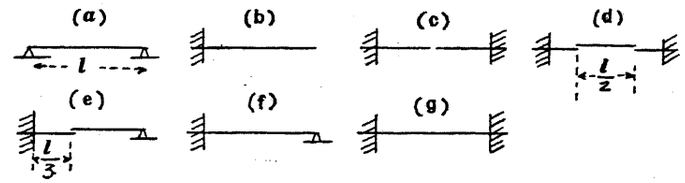
(5) 徑間 4*m* ノ固定木桁ガ圖示ノ荷重ヲ受クル時ノ斷面ヲ求ム,但シ桁幅ト桁高トハ 1:2 ノ割合ヲ有スルモノトシ許容應力ヲ 50 *kg/cm²* ニ採レ。

(6) 「カーネギー」會社製工字桁 B9 ガ圖示ノ六種ノ方法ニテ荷重セラル,許容應力ヲ 14000 #/□″ トシテ安全ニ耐エ得ル等布荷重度ヲ求ム,但 $E=30{,}000{,}000$ #/□″, $I_x=2280in^4$, $W=\frac{2280}{6}=380in^3$, 支柱ハ鑄鐵製 $E_1=15{,}000{,}000$ #/□″, $F_1=16.0in^2$.



答 1° 8867 #/*ft*. 2° 8867 #/*ft*. 3° 15730 #/*ft*.
4° 13300 #/*ft*. 5° 8830 #/*ft*. 6° 15320 #/*ft*.

(7) 圖示ノ如ク同一徑間 *l* ニ架桁スルニ七法アリ,全徑間等布荷重ヲ受ケタル時其何レガ强度最モ大ナルカヲ比較セヨ。



答 (*a*) : (*b*) : …… =8 : 2 : 8 : 16.04 : 11.75 : 8 : 12

(8) 固定桁ニ集中荷重 P 作用シテ桁ヲ *a*,*b* ノ二部分ニ分ツモノトス,其荷重點ノ撓度ハ $\frac{P}{3EI}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^3$ ナル事ヲ證セヨ。

(9) 兩端ヲ固定シタル桁アリ,慣性能率中央ニテ I_0 ニシテ漸次兩端ノ $\frac{1}{2}I_0$ ニ變化ス,荷重 P ガ中點ニ作用スル時ノ兩端及中點ノ彎曲力率並ビニ中點撓度ヲ求ム,全徑間等布荷重ナレバ如何。

答 0.1108 P*l*, 0.1392 P*l*, $0.007\frac{Pl^3}{EI}$; 0.0759 ql^2, 0.0491 ql^2, $0.0037\frac{ql^4}{EI}$

(10) 自重 10 *lbs/ft* ナル長 30′ ノ軸アリ,左端ヨリ 4′,16′, 24′ ノ三點ニ支ヘラレ左端ヨリ 1′ ノ點ニ 60 # ノ荷重ヲ受ク,各支點ノ力率ヲ求ム。

答 −260, −26, −180 *ft-lbs.*

(11) AB,BC ノ二徑間ヨリ成ル連續桁アリ,等布進行荷重長 EF ナルモノ通過スル時 AB 徑間ニ乘レル BE 部分ノ重心ヲ G_1,BC 徑間ニ乘レル BF 部分ノ重心ヲ G_2 トセバ B 支點彎曲力率ハ

$$\frac{AE.EB}{CF.FB}=\frac{AG_1}{CG_2}$$

ナル時ニ最大トナル事ヲ證セヨ。

(12) 長 *l* ナル桁ガ等布荷重ヲ受ケ三支點ニ支ヘラレ兩端ニ突出ス,各支點ノ力率ガ等シキ爲メニハ突出長ヲ何程トセバ可ナルカ,又支點ノ反力ガ等シキ爲メニハ如何。 答 0.145*l*, 0.153*l*.

(13) 50′ 二徑間ノ連續桁上ニ 6*t* ノ荷重四個 5′ 間隔ニテ排列ス,第二支點ガ 1″,第三支點ガ $1\frac{1''}{2}$ 低キ時中央支點ノ最大彎曲力率ヲ求ム。

答 $0.9855-\frac{EI}{40000}$ *ft-tons.*

(14) 相等シキ二徑間ノ連續桁ガ等布荷重ヲ受ケ中央支點ガ *h* ダケ低キ時ノ彎曲力率ヲ求ム。 答 $\frac{1}{8}ql^2-\frac{3EIh}{l^2}$

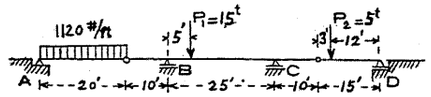
(15) 相等シキ二徑間ニ渉ル連續桁ノ兩端支點ガ固定サレタ時ノ剛度ハ單純ニ支持サレタ時ノ 2.08 倍ナル事ヲ證セヨ。

(16) 三徑間ノ連續桁ノ兩端徑間相等シキモノ等布荷重ヲ受ク,中間支點上ニ於テ彈性線ガ水平ナル爲メノ徑間比ヲ求ム,又若シ中央徑間中點ニ鉸ヲ挿入シタル時,中央徑間三分點ニ鉸ヲ挿入シタル時及同四分點ニ鉸ヲ挿入シタル時如何。 答 $1:\sqrt{3}:\sqrt{2}$; 1 : 1; 3 : $2\sqrt{2}$; 2 : $\sqrt{3}$.

(17) 圖示ノ「ゲルバー」桁ニ就イテ

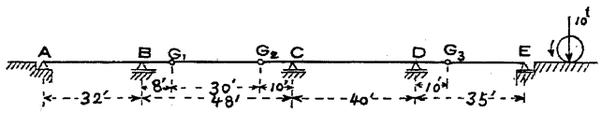
(a) B 及 C 支點反力及 (b) P_1 ノ作用スル點ノ彎曲力率ヲ求ム

但 1*ton*=2240 #



答 (a) 17.4*t*, 6.6*t*; (b) −12*ft-tons*.

(18) 10 *tons* ノ轉行荷重圖示ノ「ゲルバー」桁上ヲ通過スル時。



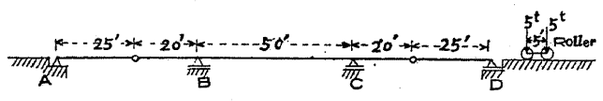
(a) C 支點ニ於ケル最大及最小反力並ビニ最大剪力。

(b) CD 徑間中點ニ於ケル最小(最大負號)彎曲力率。

(c) G_1G_2 及 G_3E 徑間ニ於ケル最大彎曲力率ヲ求ム。

答 (a) +10*t*, −2.5*t*, 10*t*. (b) −50 *ft-tons* (c) 75 *ft-tons*, 62.5 *ft-tons*.

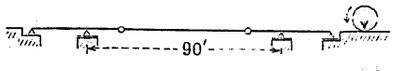
(19) 10 噸輾壓機ガ圖示ノ有鉸連續桁ヲ通過スル時 (a) B 支點ノ最大反力 (b) BC



徑間中點ノ最大彎曲力率及 (c) 同點ノ最大剪力ヲ求ム。

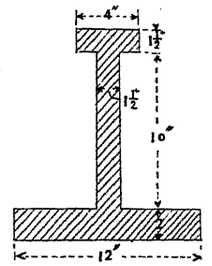
答 (a) 10*t*, (b) 112.5 *ft-tons*, (c) 3.5*t*.

(20) 公道橋中央徑間 90′ ノモノヲ「ゲルバー」式ニ配置セントス,一個ノ轉行荷重ヲ假定シテ最モ經濟的ナル桁長ヲ求ム。 答 15′+60′+15′=90′



(21) 等布荷重ヲ受クル固定桁ノ徑間四分點ニ鉸ヲ有ス,鉸ノ點ニ於テ桁ノ傾斜ハ急ニ二倍トナル事ヲ示セ。

(22) 圖示ノ斷面ヲ有スル鑄鐵桁ガ徑間 10′ ニ架セラレタ時安全ニ負ヒ得ル荷重ヲ求ム,但シ鑄鐵ノ許容應張力ヲ 1*t*/□″, 許容應壓力ヲ 5*t*/□″トス。 答 1.36*t*/*ft* (等布荷重トシテ)



(23) 幅 4″ 高 6″ ノ木桁ノ應張面ニ幅 1″ 厚 $\frac{1''}{2}$ ノ鋼鈑ヲ張附ケタル時中立軸ノ位置及最大應力ヲ求ム,但シ彈性係數ノ比ヲ 20 トシ彎曲力率ヲ 30,000 *in-lbs* トス。

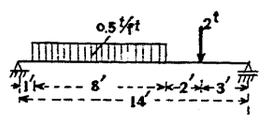
答 2.04″; 木材 806 #/□″, 鋼 10344 #/□″

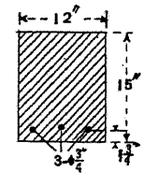
(24) 圖示ノ鐵筋混凝土桁ニ於ケル混凝土及鐵筋ノ應力ヲ求ム。

答 n=15 トシテ σ_c=153 #/□″,

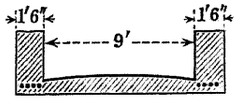
σ_s=3585 #/□′

(25) 徑間 12′ ノ暗渠ニ幅 20″ 長 15′ ノ單筋混凝土桁二個ヲ使用セントス,荷重トシテ「クーパー」氏標準荷重 E40 ヲ採ル場合許容應力 σ_c=500 #/□″, σ_s=12000 #/□″ ヲ超過セザル爲メニ此桁ニ與フベキ寸法ヲ求ム。(死重ヲ無視ス) 答 徑間 14′ トシテ $h-e_1$=39.6″, F_s=6.37 □″



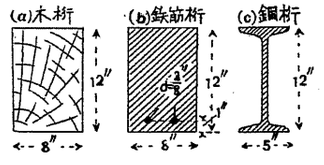


(26) 徑間 30′ 有效幅員 9′ ノ公道橋アリ.圖示ノ如ク其高欄ヲ主桁ニ代用スルモノトシ床面積ニ 200 #/□′ (死重ヲ含ム)ノ等布荷重ヲ受クル時徑間中點及四分點ニ於ケル主桁ノ寸法及鐵筋積ヲ求ム,但 σ_s=16,000#/□′, σ_c=400#/□″ トス。



答 中央 $h-e_1$=37″, F_s=2.26 □″ ; 四分點 $h-e_1$=32″, F_s=1.96 □″.

(27) 三種ノ桁アリ,圖示ノ斷面ヲ有ストシテ其強度ヲ比較セヨ。



1° 許容强度。 木桁 800 #/□″, 混凝土 400 #/□″, 鐵筋 12000 #/□″, 鋼材 15000 #/□″,.

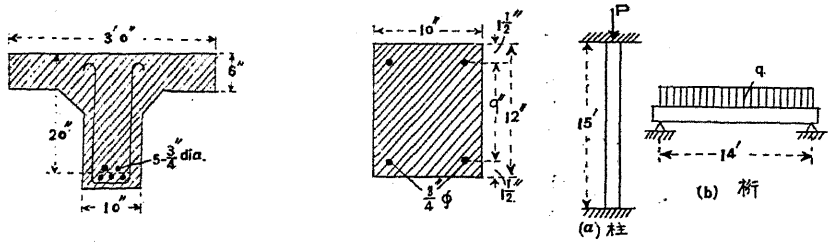
2° 彈性係數。 木材 1,500,000#/□″, 混凝土 2,000,000 #/□″, 鐵筋30,000,000 #/□″,

3° 工字鋼ノ X 軸ニ關スル慣性能率 =215.8in^4.

徑間及荷重ハ等シキモノトシ自重ヲ無視ス。

答 153,600 : 57,300 : 526,300

(28) 徑間 25*ft.* ノ鐵筋混凝土桁ガ圖示ノ斷面ヲ有シ等布荷重ヲ受ク,其應力ガ σ_c=500 #/□″, σ_s=14.000 #/□″ ヲ超過セザル爲メニ受ケ得ベキ荷重度ヲ求ム,但 n=15 トス。 答 602 #/*ft.*



(29) 一個ノ集中荷重ヲ受クル鐵筋單桁ニ於テ繫筋ノ間隔ハ如何ニ決定サルベキカ。

(30) 長15′ノ鐵筋混凝土柱アリ,圖示ノ如ク柱及桁トシテ二樣ニ使用シタル時ノ安全荷重ヲ求ム,但シ n=15, σ_c=500 #/□″, σ_s=14,000 #/□″ トス。

答 柱 P=73250 #. 桁 q=442 #/*ft.*

構造强弱學上卷終