第五章　彈性體ニ於ケル應力

(Stress in any Point of a Solid Elastic Body)

第一節　應力平衡ノ方程式

(General Equations of Equilibrium of Stresses)

(I) 互ニ垂直ナル三平面ニ於ケル應力

一ツノ物體內ニ於ケル內力ノ關係ヲ知ランガ爲メ Fig. 88 ニ示ス OX,OY,OZ ノ三直座標軸ヲ採リ其物體內ノ任意點 P ノ座標ヲ (x,y,z) トス，コノ P ヲ通ジテ座標軸ニ平行ナル三平面ヲ作リコノ三平面內ニ三ツノ極微面積 (Elementary area) ヲ考ヘル，卽チ Fig. 88 ニ示ス如ク (1) ハ X 軸ニ直角，(2) ハ Y 軸ニ直角，(3) ハ Z 軸ニ直角トス，今此三邊長ヲ dx, dy, dz トスレバ (1) 平面ノ面積ハ $dy.dz$，(2) 平面ノ面積ハ $dz.dx$，(3) 平面ノ面積ハ $dx.dy$，トナル，而シテ此等ノ極微面積ニ於ケル應力度ヲ p_x, p_y, p_z (此 p_x ニ附シタル x ハ X 軸ニ直角ナル (1) 面ニ働クモノナル事ヲ意味ス) トスレバ一般的ニ是等ノ應力ハ夫々ノ面ニ對シテ或傾斜ヲ爲スノデアルカラ各々其面ニ對シテ垂直及切線應

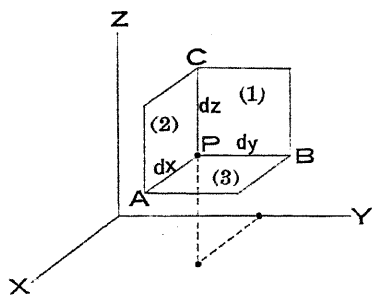

Fig. 88.

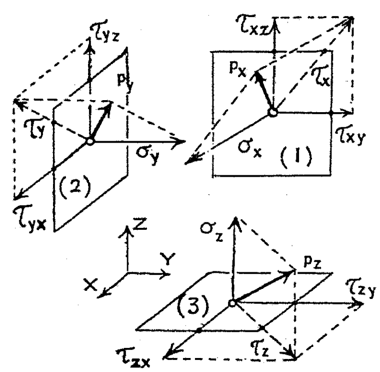

Fig. 89.

力 (Normal and tangential stress) ニ分解シ得ラレル筈デアル,コレヲ Fig. 89 ニ示セバ (1) 平面ニ働ク p_x ハ σ_x ト τ_x トニ分解セラレ更ニ τ_x ハ Y 軸及 Z 軸ニ平行ニ τ_{xy} ト τ_{xz} トニ分解セラレル,此 σ_x ニ附シタル x ハ σ_x ガ X 軸ニ垂直ナ (1) 面ニ働ク垂直應力ノ意デアツテ τ_{xy} τ_{xz} ニ於ケル x ハ其働ク面ガ X 軸ニ直角ナルヲ示シ y, z ハ其剪力ガ Y 軸及 Z 軸ニ平行ナルヲ示ス,コレト全ク同樣ニ他ノ p_y, p_z モ夫々三ツノ分力ニ分タレ從ツテ Fig. 89 ニ示ス如ク九個ノ分力トナル,コレヲ表記スレバ

平行ナル軸ノ方向	X 軸	Y 軸	Z 軸
(1) 面ニ働ク p_x	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
(2) 面ニ働ク p_y	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
(3) 面ニ働ク p_z	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

(II) 極微直六面體ニ働ク應力

今考ヘテ居ツタ P 點ヲ隅點トスル小直六面體ヲ採リ其稜長ヲ dx, dy, dz トス,然ル時ハ前項ニ考ヘテ居ツタ三面ハ Fig. 90 ニ示ス直六面體ノ裏側ニアル三面ト一致スル.此直六面體ニ於テ (1) 面ト dx ヲ隔テテ存スル平面ヲ (I), (2) ノ面ト dy ノ距離ニアル平行面ヲ (II), (3) ト平行デ dz ヲ隔ツル平面ヲ (III) ト名ズル,然ル時ハ此六面體ノ面 BPC ニ作用スル應力ハ前ニ考ヘタ (1) 面ノ應力トハ反對ニ向ヒ $-\sigma_x, -\tau_{xy}, -\tau_{xz}$ トナリ前ニ (2) トシタ面ニ接スル APC 面ノ應力ハ

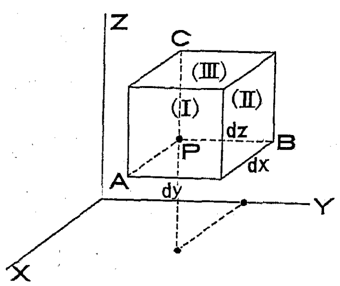

Fig. 90.

$-\tau_{yx}, -\sigma_y, -\tau_{yz}$ トナリ更ニ (3) ト平行ニアル面 APB ノ應力ハ $-\tau_{zx}, -\tau_{zy}, -\sigma_z$ トナル,故ニコレラノ應力度ヲ有スル六面體ノ各面ニ於ケル總應力ハ

(1)面ノ位置　$-\sigma_x dy\,dz,\quad -\tau_{xy} dy\,dz,\quad -\tau_{xz} dy\,dz$

(2)面ノ位置　$-\tau_{yx} dz\,dx,\quad -\sigma_y dz\,dx,\quad -\tau_{yz} dz\,dx$

(3)面ノ位置　$-\tau_{zx} dx\,dy,\quad -\tau_{zy} dx\,dy,\quad -\sigma_z\,dx\,dy$

是等ノ三面積ハ何レモ極小 (Infinitely small) デアル故ニ是等ノ力ハ勿論均等的ニ分布スルモノト考ヘ得ルノデアル,故ニ此力ハ BPC, CPA 及 APB ノ三面ノ重心ニ働クベク此九個ノ力ヲ圖示シテ Fig. 91 ヲ得ル。

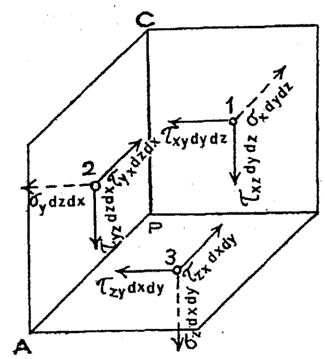

Fig. 91.

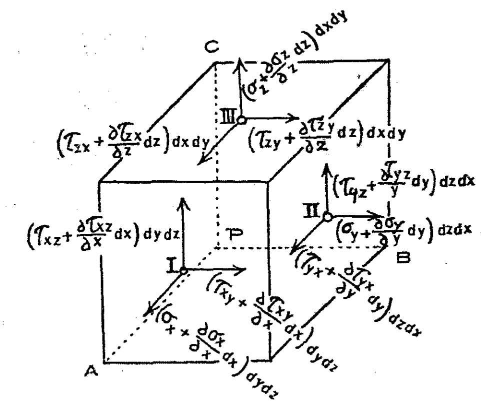

Fig. 92.

六面體ノ他ノ三面ハ前掲ノ三面ヨリ dx, dy, dz ヲ隔ツタ面デアル,其 (I), (II), (III) ナル面ノ重心ニ働ク力ハ既ニ Fig. 91 ニ示シタ力ニ更ニ dx, dy, dz 進ム間ニ生ジタ變化ヲ加ヘレバヨイノデアツテ其力ノ方向ハ反對ニ向ツテ居ル,從ツテ今 (I) ノ重心ニ働ク力ハ

$$\sigma_x.dy\,dz+\frac{\partial(\sigma_x dydz)}{\partial x}dx=\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy.dz$$

$$\tau_{xy}dy\,dz+\frac{\partial(\tau_{xy}.dy\,dz)}{\partial x}dx=\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)dy.dz$$

$$\tau_{xz}.dy.dz+\frac{\partial(\tau_{xz}dydz)}{\partial x}dx=\left(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\right)dy.dz$$

面 BPC ト dx 隔タレル面(I)ノ重心ニ働ク力ハ絶對値ニ於テ此式ニテ表ハサレル,コレト全ク同様ニ CPA ト dy 隔レル面(II)ノ重心ニ働ク力及 APB ト dz 隔レル平行面(III)ノ重心ニ働ク力モ求メル事ガ出來ル,此九個ノ力ヲ記入スレバ Fig. 92 ヲ得ル。

斯クテ總計十八個ノ力ヲ得タノデアルガ其外ニ此立方體ノ質量ニ對スル力ガアル,コレヲ三軸 X, Y, Z ニ分チテ單位容積ニ付キ X, Y, Z デアルモノトシヤウ,然ル時ハ立方體ノ容積ハ $dx.dy.dz$ デアルカラ三軸ノ方向ノ質量ノ力ハ

$$X.\,dx.\,dy.\,dz,\quad Y.\,dx.\,dy.\,dz,\quad Z.\,dx.\,dy.\,dz$$

ノ三分力トシテ取扱ハレル,此三ツノ力ハ立方體ノ重心ニ働ク事ハ勿論デアツテ斯クテ二十一個ノ力ヲ得タノデアル。

(III) 極微直六面體ニ於ケル應力ノ平衡 (Equilibrium of forces in an infinitely small parallelopiped)

前項ニ得タ二十一個ノ力ガ平衡ニアル事ヲ要スルノデアツテ次ニ示ス六ツノ平衡條件ヲ滿足セネバナラヌ,即チ

X, Y, Z ノ三軸ノ方向ニ於ケル力ノ和＝o.

X, Y, Z ノ三軸又ハコレニ平行ナ軸ニ對スル力率ノ和＝o.

此始メノ三ツノ條件ニヨリ Fig. 91 及ビ Fig. 92 ニ就キテ三軸ノ方向ノ力ヲ合計シコレヲ $dx.dy.dz$ ニテ割レバ次ノ三式ヲ得。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=o\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=o\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=o\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(74)$$

次ニ第二ノ平衡條件即チ三軸又ハコレニ平行ナ軸ニ對スル力率ノ和ガ零ニ等シイ事ヲ表ハス式ヲ作ル場合ニ其軸ノ採リ方ニヨツテ式ガ非常ニ簡單トナル,先ヅ X 軸ニ就イテ云ヘバ X 軸ニ平行ニ六面體ノ重心ヲ通ズル軸ヲ力率中心ニ選ベバ次ニ列擧スル多クノ力ガ力率ヲ與ヘナイ事トナリ結果ガ簡單トナル,其力率ヲ與ヘナイ力ハ

1°. (1)及(I)ノ平面ニ働ク力ノ全部

2°. (2)ニ働ク $-\tau_{yx}.dz.dx,\ -\sigma_y.dz.dx$ 及ビ

(II)ニ働ク $\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dz.dx,\ \left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dz.dx$

3°. (3)ニ働ク $-\tau_{zx}.dx.dy,\ -\sigma_z.dx.dy$ 及ビ

(III)ニ働ク $\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dx\,dy,\ \left(\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\right)dx.dy$

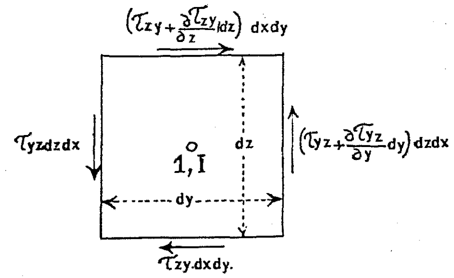

Fig. 93.

4°. 質量ノ力全部.

從ツテ此軸ヲ力率中心ニ採ツタ時ニ式中ニ表ハレル力ハ Fig. 93 ニ示ス四力ダケデアル.

從ツテ求メタ力率ノ式ハ

$$\tau_{yz}.dz.dx.\frac{dy}{2}+\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dz.dx.\frac{dy}{2}$$

$$-\tau_{zy}.dx.dy.\frac{dz}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dx.dy.\frac{dz}{2}=o$$

此式カラ四次ノ微分量ヲ無視シ

$$\tau_{yz}.dx.dy.dz - \tau_{zy}.dx.dy.dz = o$$

$$\therefore \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \cdots\cdots\cdots\cdots(75)$$

此レト同樣ニY及Z軸ニ平行デ六面體ノ重心ヲ通ズル如キ軸ニ對シテ計算ヲ行ヘバ次ノ關係ヲ得

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}, \quad \tau_{xy}=\tau_{yx}.$$

此結果ハ Fig. 94 ニ明カナ如ク直六面體ノ一ツノ稜ニ直角ニ向

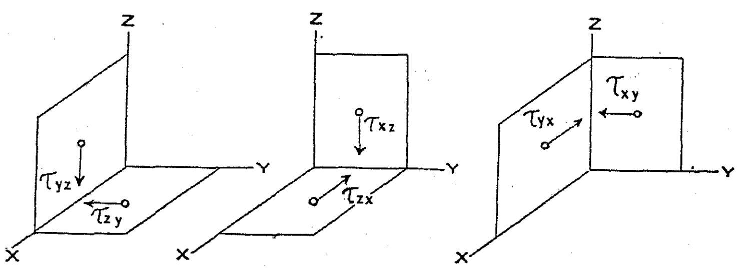

Fig. 94.

ツテ居ル剪力ハ互ニ相等シキ事ヲ示ス,今是等ノ應力ノ名ヲ變シテ

$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\tau_x$ (X軸ニ直角ニ働ク剪力ノ意)

$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\tau_y$

$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau_z$

トスレバ(74)式ハ次ノ如ク記載セラレル。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X = o \\
\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + Y = o \\
\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = o
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(76)$$

以上說明シタ如ク或彈性體內ニ生ズル垂直應剪力ニ對シテハ必ズコレト直角ニ交ハル水平應剪力ガ存在スルモノデアツテ然カモ其強度ハ必ズ相等シキ事ヲ知ル。

第二節 極微四面體ニ於ケル力ノ平衡

(Equilibrium of Forces in an Infinitely Small Tetrahedron)

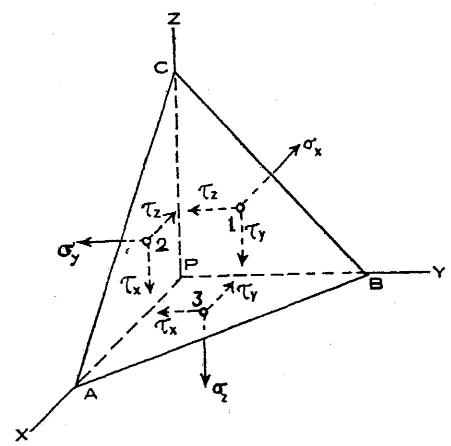

Fig. 95.

Fig. 95 ニ示ス PABC ナル四面體ハ前ニ Fig. 90 ニ示シタ六面體ヲ A,B,C ノ三點ヲ通ズル平面ニテ切ツテ出來タモノトスル,此容積ヲ dV, 平面ABCノ面積ヲFトシ尚 $\alpha=$ 平面ABCト平面BPCトノ間ノ角

$\beta=$ 平面ABCト平面CPAトノ間ノ角

$\gamma=$ 平面ABCト平面APBトノ間ノ角

トス,然ル時ハ他ノ三面ノ面積ハ

$$BPC=F.\cos\alpha, \quad CPA=F.\cos\beta, \quad APB=F.\cos\gamma.$$

而シテ此互ニ直角ニアル三面ノ應力ハ Fig. 95 ニ示ス如クデアツテコレハ Fig 91 ニアル應力ト同ジデアル,勿論茲ニハ $\tau_{xz}=\tau_{zx}=\tau_y$ 等ト書キ換ヘテアル,尚平面ABCニ生ズベキ應力ヲ p, ソノ p ガ座標軸 X,Y,Z トナス角ヲ λ,μ,ν トスル,然ル時ハ座標軸 X,Y,Z ノ方向ニ於ケル平衡條件ハ次式ニテ與ヘラレル。

$$-\sigma_x.\mathrm{F}.\cos\alpha-\tau_z.\mathrm{F}.\cos\beta-\tau_y.\mathrm{F}.\cos\gamma+p.\mathrm{F}.\cos\lambda+\mathrm{X}\,d\mathrm{V}=o$$

$$-\tau_z.\mathrm{F}.\cos\alpha-\sigma_y.\mathrm{F}.\cos\beta-\tau_x.\mathrm{F}.\cos\gamma+p.\mathrm{F}.\cos\mu+\mathrm{Y}\,d\mathrm{V}=o$$

$$-\tau_y.\mathrm{F}.\cos\alpha-\tau_x.\mathrm{F}.\cos\beta-\sigma_z.\mathrm{F}.\cos\gamma+p.\mathrm{F}.\cos\nu+\mathrm{Z}\,d\mathrm{V}=o$$

是等ノ式ノ何レニ於テモ始メノ四項ハ第二次ノ微分量 (Infinitesimal) デアルニ對シ最後ノ項ハ第三次ノ微分量デアル故ニ之ヲ無視スレバ

$$\left.\begin{aligned} p.\cos\lambda&=\sigma_x.\cos\alpha+\tau_z.\cos\beta+\tau_y.\cos\gamma\\ p.\cos\mu&=\tau_z.\cos\alpha+\sigma_y.\cos\beta+\tau_x.\cos\gamma\\ p.\cos\nu&=\tau_y.\cos\alpha+\tau_x.\cos\beta+\sigma_z.\cos\gamma \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(77)$$

此他ニ一般的ノ幾何學的關係トシテ

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$$

即チ平衡條件トシテ合計四式ヲ得タ,故ニ Fig. 95 ニ示シタ如キ三平面ニ働ク $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ ノ分應力ガ與ヘラレテ居レバ夫等ノ應力ノ働ク平面ト α, β, γ ノ傾斜ヲ爲ス平面 ABC ノ應力 p 及ビ其 p ガ座標軸トナス角度 λ, μ, ν ノ四ツノ未知數ヲ求ムル事ガ出來ル。

以上四面體ヲ採ッテ考ヘテ來タ此條件ハ第四ノ極微面積 ABC ガ P 點ニ漸次近ヨッテ來テ遂ニ P ト一致シテモ何等變化ノ無イ筈デアル,此場合ニハ p ナル應力ハ P ヲ通ズル任意面ニ對スル P 點ノ應力トナル,換言スレバ前述三平面ノ分應力 (Component stress) ガ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ デアル時ニ P ヲ通ジ是等三平面トハ α, β, γ ナル傾斜ヲ有スル任意平面ニ於ケル應力 p ノ量及方向ヲ決定シ得ルモノデアル。

尚以上ハ三平面ノ應力ハ分力ヲ以テ説明シテ來タガコレハ勿論其原力 (Original force) ヲ以テ之ヲ取扱ッテモ何等差異ハ無イ筈

デアル,原力トハ p_x, p_y, p_z デアッテコレハ第一節(I)ニ於テ Fig. 89 ニ示シテアル。

第三節 應力楕圓體 (Ellipsoid of Stress)

茲ニ物體内ノ一點 P ヲ通シテ三垂直平面ト α, β, γ ナル可變角ヲナシテ種々ノ位置ヲ採ル平面ヲ考ヘ其平面ノ應力並ビニ其方向ガ如何ナル法則ニ從ッテ變化スルカヲ知ル爲メニ茲ニ或一ツノ平面ニ對スル應力 p ヲ P カラ量及方向ヲ正シク PQ$=p$ ナル長サニテ表ハスモノトシ其平面ノ位置ヲ變ヘルニ從ッテ此 Q ガ如何ナル面ヲ作ルカ即チ Q 點ノ軌跡 (Locus) ヲ求メ樣トスルノデアル。

Fig. 96 ニ示ス如ク P ヲ原點トシテ本章第一節ニ考ヘタ三平面ノ原應力 p_x, p_y, p_z ノ方向ヲ此場合ノ座標軸ト考ヘテ置ク,然ル時ハ p_x, p_y, p_z ハ相互ニ傾斜シテ居ル故ニ此場合ノ座標軸ハ傾斜軸 (Inclined axes) デアル,此三軸ニ對スル Q ノ座標ヲ (x', y', z') トスル,(此圖ニハ此傾斜座標軸ノ外ニ最初考ヘタ垂直座標軸 PX, PY, PZ モ鎖線デ記入シテアル)今

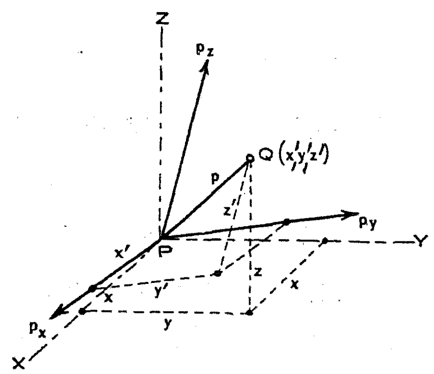

Fig. 96.

λ =PX ト p トノ間ノ角
λ_x=PX ト p_x トノ間ノ角
λ_y=PX ト p_y トノ間ノ角
λ_z=PX ト p_z トノ間ノ角

トスレバ Q ノ座標 (x', y', z') ハ $p=$PQ ナル應力ヲ傾斜軸 p_x, p_y, p_z ノ方向ヘ分解シタ分力ニ相當スル筈デアルガ故ニ應力 p ヲ原軸 PX ノ方向ヘ分解シタ分力ハ勿論

x', y', z' ヲ PX ノ方向ヘ分解シテ合計シタモノト同ジデアル筈デアル,卽チ式示スレバ

$$p.\cos\lambda = x'.\cos\lambda_x + y'.\cos\lambda_y + z'.\cos\lambda_z$$

更ニ Fig. 89 ニ示シタ關係カラ

$$\cos\lambda_x=\frac{\sigma_x}{p_x},\quad \cos\lambda_y=\frac{\tau_z}{p_y},\quad \cos\lambda_z=\frac{\tau_y}{p_z}$$

ナル事ヲ知ルガ故ニコレヲ上式ニ入レ

$$p.\cos\lambda=\sigma_x\frac{x'}{p_x}+\tau_z\frac{y'}{p_y}+\tau_y\frac{z'}{p_z}$$

ト置キ得ル,是レト(77)ノ第一式トヲ比較シ

$$\sigma_x\cos\alpha+\tau_z\cos\beta+\tau_y\cos\gamma=\sigma_x\frac{x'}{p_x}+\tau_z\frac{y'}{p_y}+\tau_y\frac{z'}{p_z}$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{x'}{p_x},\quad \cos\beta=\frac{y'}{p_y},\quad \cos\gamma=\frac{z'}{p_z}$$

此結果ヲ一般的關係

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

ニ挿入スル時ハ次式ヲ得ル。

$$\left(\frac{x'}{p_x}\right)^2+\left(\frac{y'}{p_y}\right)^2+\left(\frac{z'}{p_z}\right)^2=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(78)$$

此式ハ p_x, p_y, p_z ヲ共軛半徑 (Conjugate radii) ニ有スル楕圓體 (Ellipsoid) ノ式デアル故ニ一般的法則トシテ

今物體內ノ一點Pニ於テ其Pヲ通ズル總テノ可能ナル斷面 (All possible sections) ニ對スル應力ヲ量及方向ヲ正シク置ケバ其應力ヲ示ス直線ノ端ノ軌跡ハ楕圓體トナル。

コノ楕圓體ヲ應力楕圓體 (Ellipsoid of stress) ト云フ。

第四節 主應力 (Principal Stresses)

上述シタ所ハ物體中ニ起リ得ル極一般的ノ關係デアルガ實際ニ生ズル場合ハコレヨリ簡單ナ事ガ多イ,例ヘバ三平面ヲ考ヘル立體的ヨリモ二平面ヲ考ヘル平面的ノ場合ガ多イ,此場合ニハ前ノ一般的ノ場合ノ何レカ一ツノ方向ニハ分力ヲ有セナイ事トナリ今假ニ此分力ノ無イ方向ヲZ軸ノ方向ト考ヘレバ此時ニハ一般的ニ取扱ッテ來タ應力ノ內デ

$$\sigma_z=0,\quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=\tau_y=0,\quad \tau_{yz}=\tau_{zy}=\tau_x=0$$

トナルガ故ニ前ニ考ヘタ應力ノ六分力ノ內三ツハ零トナリ殘ル所ハ σ_x, σ_y 及 $\tau_z\equiv\tau$ ノ三分力ノミトナル,茲ニ於テ今互ニ直角ナル二平面ニ於ケル應力ガ與ヘラレタ場合ニZ軸ニ平行ナル第三ノ平面ニ如何ナル應力ガ起ルカ,又其應力ノ最大ナルハ其平面ガ如何ナル位置ヲ採ッタ時デアルカヲ研究シテ見ヤウ。

Fig. 97 ニ示ス三邊ヲ通ジ紙面ニ直立スル角壔 (Prism) ヲ考ヘZ軸ニ平行ナル面 AB ノ長サ卽チ紙面ニ直角ノ奧行ヲ dz トシ而シテZ軸ノ方向ニハ應力零ノモノトスル,今任意第三邊 AB ノ應力ヲ求メントスルニ

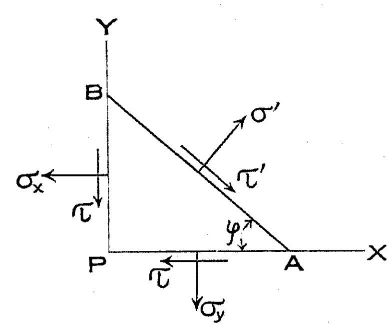

Fig. 97.

dF = AB ナル傾斜面ノ面積

φ = AB ガX軸トナス角

σ', τ' = 平面 AB ノ分應力

トセバ此角壔ノ平衡條件ヨリX軸ノ方向ノ總テノ分力ノ和ガ零デアル爲メニハ

$$\sigma'.dF.\sin\varphi+\tau'.dF.\cos\varphi-\sigma_x.dF\sin\varphi-\tau.dF.\cos\varphi=0$$

$$\therefore\quad \sigma'.\sin\varphi+\tau'\cos\varphi-\sigma_x.\sin\varphi-\tau\cos\varphi=0$$

Y軸ノ方向ニ就キ同樣ニ取扱ツテ

$$\sigma'.\cos\varphi-\tau'.\sin\varphi-\sigma_y\cos\varphi-\tau\sin\varphi=0$$

此二式カラ第三平面ニ於ケル二ツノ未知數 σ' 及 τ' ガ計算シ得ラレ

$$\sigma'=\sigma_x.\sin^2\varphi+\sigma_y.\cos^2\varphi+2\tau\sin\varphi.\cos\varphi$$

$$\tau'=(\sigma_x-\sigma_y)\sin\varphi.\cos\varphi+\tau(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$$

尙此式ヲ變形スル爲メニ $\sin^2\varphi=\dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$, $\cos^2\varphi=\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$ ヲ置ケバ

$$\left.\begin{aligned}\sigma'&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\cos 2\varphi+\tau\sin 2\varphi\\ \tau'&=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi+\tau\cos 2\varphi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(79)$$

σ' 及 τ' ナル第三面ノ分應力ハ其面ノ傾斜 φ ノ函數デアル,卽チXY面(紙面)ニ直角卽チZ軸ニ平行ナル此面ノX軸トナス角度 φ ガ與ヘラルレバ容易ニ其分應力 σ' 及 τ' ハ計算シ得ラレル。

σ' ガ最大値ヲ與ヘル時ノ傾斜及其量ヲ知ル爲メニハ σ' ノ一般式ヲ φ ニ對シ微分シテ $=0$ ト置キ

$$\frac{d\sigma'}{d\varphi}=-\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}2\sin 2\varphi+2\tau\cos 2\varphi=0\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\therefore\quad \tan 2\varphi=\frac{2\tau}{\sigma_y-\sigma_x}\cdots\cdots\cdots(80)$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\tau}{\sigma_y-\sigma_x}+n\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots(b)$$

(b)式ニ於ケル n ハ任意ノ正又ハ負ノ整數ヲ採リ得ル,尙注意スベキ事ハ(a)式ハ丁度(79)式ノ τ' ノ値ノ二倍ニ相當スルヲ見ル,故ニ σ' ガ最大又ハ最小トナル樣ナ平面ニ於テハ τ' ハ零トナル事ヲ示ス,同

時ニ(b)式ヨリ見テ此條件ニ協フ平面ハ少クモ互ニ直角ヲナシテ二ツ存在スル事ヲ知ル,玆ニ一ツノ除外例トスベキハ與ヘラレタル應力ノ内 $\tau=0$ 從ツテ $\sigma_x=\sigma_y$ トナル場合デアツテ此場合ニハ他ノ總テノ平面ニ對シテ

$$\tau'=0,\qquad \sigma'=\sigma_x=\sigma_y$$

此場合ニハ σ' ハ傾斜 φ ニハ無關係ニ何レノ方向ニ向ツテモ定數ヲナス事ヲ知ル。

一般ニ σ' ガ最大又ハ最小トナル平面ハ互ニ直角ヲ爲シテ二平面存在シ此平面ニ於テハ剪力 $\tau'=0$ トナリ直應力 σ' ハ其平面ニ直角ヲ爲スヲ知ル,此方向ヲ稱シテ**主軸** (Principal axis) ト云ヒ其平面ノ應力 σ' ヲ此點ニ於ケル**主應力** (Principal stress) ト云フ。

此主應力ノ量ハ(79)式ノ中ヘ(80)式又ハ(b)式ニ依ツテ決定サレタ φ ノ値ヲ挿入スレバ得ラレルベク又ハ一層簡單ニ(80)式ヲ $\sin 2\varphi$ 及 $\cos 2\varphi$ ニ分解シテ

$$\sin 2\varphi=\pm\frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}}$$

$$\cos 2\varphi=\pm\frac{\sigma_y-\sigma_x}{\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}}$$

ヲ得コレヲ(79)式ニ挿入シテ

$$\sigma'_{\substack{max\\min}}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\frac{\frac{1}{2}\left(\sigma_y-\sigma_x\right)^2+2\tau^2}{\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}}$$

又ハ簡單ニ

$$\sigma'_{\substack{max\\min}}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}\cdots\cdots\cdots(81)$$

若シ $\tau=0$ ナル場合ニハ主軸ノ方向ハ座標軸ト一致スル,故ニ σ_x 及 σ_y ハ其レ自身ガ主應力トナル。

次ニ τ' ノ最大値ヲ求メンニハ(79)式ノ τ' ノ値ヲ φ ニ對シ微分シテ $=o$ ト置キ

$$\frac{d\tau'}{d\varphi}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}2\cos 2\varphi-2\tau\sin 2\varphi=o$$

故ニ τ' ガ最大又ハ最小ナルタメノ條件ハ

$$\tan 2\varphi=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(82)$$

此値ハ(80)式ヨリ見出サレタ處ノ $\cot 2\varphi$ ノ負値ニ相當ス,故ニ(82)式ニテ求メタ角度 2φ ハ(80)式ニテ見出サレタ 2φ トハ $\frac{\pi}{2}$ ダケノ相違ヲ有シ從ツテ其X軸トノ間ニ爲ス角 φ ハ互ニ $\frac{\pi}{4}$ ダケノ相違ヲ有スルヲ知ル,卽チ σ' ガ最大ナル樣ナ主軸ト τ' ガ最大ナル樣ナ方向トハ互ニ $\frac{\pi}{4}$ ノ傾斜ヲ爲スノデアル,尙前ニ述ベタ如ク直應力 σ' ノ最大又ハ最小ナル方向ニ於テハ應剪力 τ' ハ零トナルノデアルガ其逆ニ應剪力ガ最大ナル方向ニテノ直應力ハ必ズシモ零トナラナイ事ハ注意スベキ事柄デアル。

τ' ノ最大値ヲ求メルニハ今見出シタ傾斜(82)式ヲ(79)式ニ挿入スレバヨイノデアツテ其爲メニ

$$\sin 2\varphi=\pm\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{4\tau^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2}}$$

$$\cos 2\varphi=\pm\frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2}}$$

トシテ(79)式ニ挿入シ

$$\tau'_{\substack{max\\min}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(83)$$

此式ニテ得ラルル最大ト最小トハ單ニ其符號ヲ異ニスルノミデアツテ直應力ニ於ケル如ク其量ヲ異ニスルノデハナイ,方向ヲ逆ニスルノミデアル。

例題第十。 徑1″ノ丸鐵3000#ノ張力ト1*ton*ノ剪力トヲ受ク,主應力及最大主剪力並ビニ其軸トナス角ヲ求ム。

(答)丸鐵ノ中心軸ノ方向ヲX軸ニ採レバ此1″丸鐵ノ斷面積 =0.7854□″ デアルガ故ニ

$$\sigma_x=\frac{3000}{.7854}=3819\ \#/\square'',\quad \sigma_y=o$$

$$\tau=\frac{2240}{.7854}=2852\ \#/\square''$$

故ニ(81)式ニ據リ

$$\sigma'_{max}=\frac{\sigma_x}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+\sigma_x^2}=\frac{3819}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\times2852^2+3819^2}$$

$$=5342\ \#/\square''\text{ 或ハ }-1522\ \#/\square''$$

(80)式ニヨリ軸ト爲ス角ハ

$$\tan 2\varphi=\frac{2\tau}{-\sigma_x}=-\frac{2\times2852}{3819}=-1.494$$

$$2\varphi=123°\ 48'\text{ 或ハ }-56°\ 12'$$

$$\therefore\quad \varphi=61°\ 54'\text{ 或ハ }-28°\ 6'$$

更ニ(83)式ニ據リ

$$\tau'_{max}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+\sigma^2_x}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\times2852^2+3819^2}=\pm3432\ \#/\square''$$

其方向ハ(82)式ニヨリ

$$\tan 2\varphi=\frac{\sigma_x}{2\tau}=\frac{3819}{2\times2852}=0.669$$

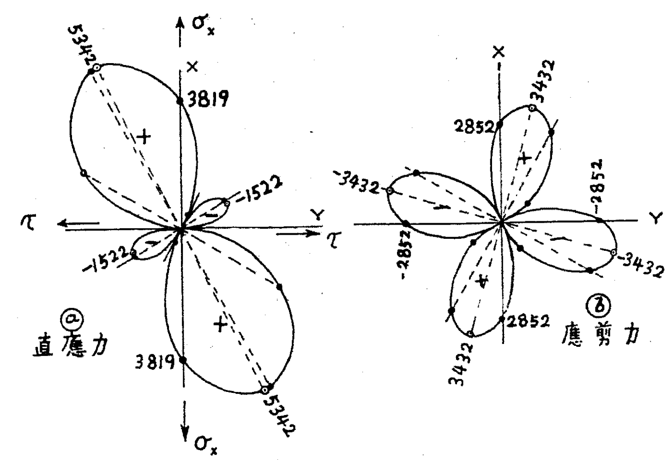

Fig. 98.

$$\therefore \quad 2\varphi=33^\circ\,48' \text{ 或ハ } -146^\circ\,12'$$

$$\varphi=16^\circ\,54' \text{ 或ハ } -73^\circ\ \ 6'$$

以上求メタル結果及φヲ種々ノ値ニ變化シタル場合ノσ'及τ'ヲ(79)式ニ據ツテ計算シタルモノヲ圖示シテ Fig. 98 ヲ得ル。

第五節　應力楕圓 (Ellipse of Stress)

今茲ニ Fig. 99 ニ於テ Z 軸ニ直角ナ任意平面ヲ採ツテ考ヘ其分應力σ'及τ'ヲ(79)式ニ據ツテ計算シタモノトス,今此σ'及τ'ノ分力ヲ結合セル合成力ヲρトセバ第三面abノ一ツ

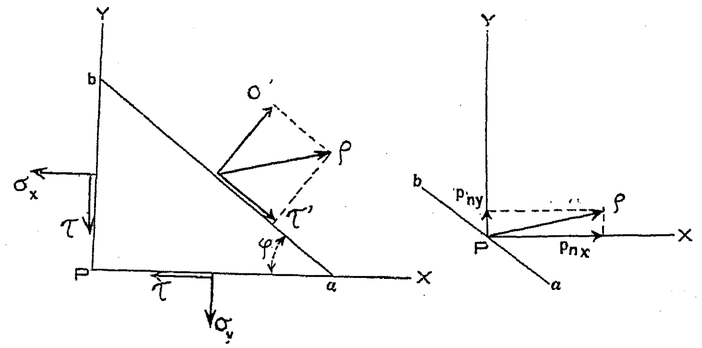

Fig. 99.

ノ位置ニ對シテ一ツノρガ存スル理デアル,今平面abガ原點Pニ接近シ遂ニPト一致シタ場合ヲ考ヘ原點カラ此合成應力ρヲ適當ノ縮尺デ正シク置キ斯クテ第三面ノ位置ヲ變化スルニ從ツテρガ如何ナル位置,如何ナル量ニ變化スルカハρヲ示ス直線ノ端ガ作ル軌跡ヲ檢スレバヨイ.此軌跡ハ楕圓トナルノデアツテ是ヲ應力楕圓(Ellipse of stress)ト云フ,コレハ立體的ニ考慮シテ第三節ニ應力楕圓體ヲ生ズル事ヲ説明シタ特殊ノ場合ニ過ギヌ。

此事實ヲ證明センニハ先ヅ合成力ρヲ XY 軸ノ方向ニ分解シ X 軸ノ方向ノ分力ヲp_{nx}, Y 軸ノ方向ノヲp_{ny}ト命ズル. Fig. 100 ニ明カナ如クp_{nx}, p_{ny}ハ求ムル曲線ノ座標トナル,p_{nx}, p_{ny}ヲ求ムルニハρヲ分解シテ求メル事モ出來又ハ第四

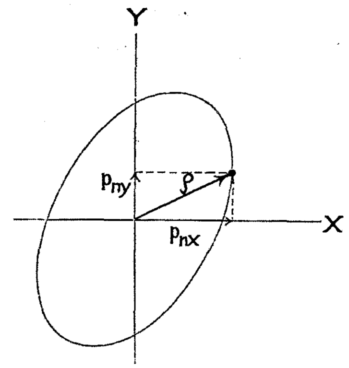

Fig. 100.

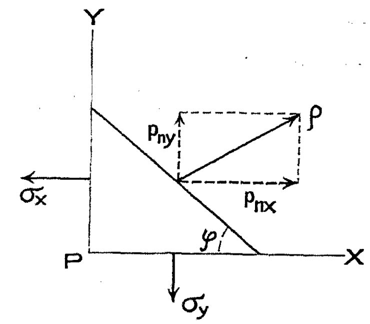

Fig. 101.

節(79)式カラ求メタσ',τ'ヲ分解シテ求ムル事モ出來ル,然シ次ノ如クスルガ最モ簡單デアラウ,卽チ座標軸ヲ變更シ主軸ヲ座標軸ニ擇ベバ Fig. 99 ハ Fig. 101 ノ如クナル,此圖上ノ X,Y 軸ヲ主軸ト一致スルモノトスレバ$\tau=0$トナリσ_x及σ_yハ主應力トナル,故ニ X 軸トφヲナス第三面ニ於ケル應力ヲ直接p_{nx},p_{ny}ニ分解シ平衡條件ヲ用フレバ

$$p_{nx}.dF=\sigma_x.dF.sin\,\varphi,$$

$$p_{ny}.dF=\sigma_y.dF.cos\,\varphi,$$

$$\therefore\ \ p_{nx}=\sigma_x sin\,\varphi,\ \ p_{ny}=\sigma_y.cos\,\varphi.$$

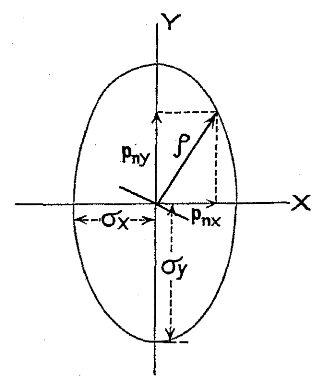

Fig. 102.

此二式ヨリφヲ消去スル爲メ自乘ノ和ヲ求メ

$$\left(\frac{p_{nx}}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{p_{ny}}{\sigma_y}\right)^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (84)$$

此式ハσ_x及σ_yヲ長短軸トスル楕圓ヲ表ハス Fig. 102 ハ此楕圓ヲ示スモノデアル。

以上ハ物體內ノ一點ノ應力ヲ一般的ニ説明シタモノデアツテ應力ハ常ニ楕圓ヲ以テ與ヘラレルモノデアル,其特殊ノ場合

ハ $\sigma_x=\sigma_y$ ナル時デアッテ楕圓ハ圓トナリ $\tau'=0$ トナリアラユル方向ノ應力ガ主應力トナル,コレハ靜止狀態ニアル液體內部ノ應力分布ヲ示スモノデアル。

例題第十一。 例題第十ニ於テ Fig. 98 ニ示シタ直應力及應剪力ヲ合成シテ應力楕圓ヲ作圖セヨ。

(答) Fig.103 參照。簡單ナル圖式合成ニ依リ所要ノ應力楕圓ヲ得ル。

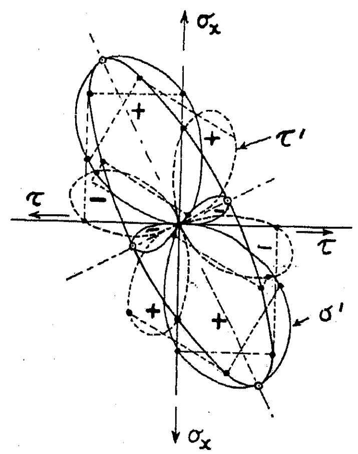

Fig. 103.

第六節 眞應力 (True Stresses or Reduced Stresses)

眞應力トハ眞變形 (True strain) ニ相當スル應力ヲ云ヒコレガ構造物强度ノ尺度 (Measure) トナルモノデアル,今 $\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}, \sigma_{\mathrm{III}}$ ヲ或點ニ於ケル主應力トスレバ是等ハ互ニ直角ヲ爲スモノデアル,從ッテ生ズベキ變形ハ相互ノ作用ニ因ル横縮 (Lateral contraction) ノ影響ヲ受ケルベク今「ポアッソン」比ヲ考ヘニ入レテ眞變形ヲ求ムレバ

$$\varepsilon_{\mathrm{I}}=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_{\mathrm{I}}-\frac{\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}}{m}\right)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{II}}=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_{\mathrm{II}}-\frac{\sigma_{\mathrm{III}}+\sigma_{\mathrm{I}}}{m}\right)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{III}}=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_{\mathrm{III}}-\frac{\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}}{m}\right)$$

コレト同ジ變形ヲ生ズル應力ガ眞應力デナケレバナラヌ,故ニ眞應力ハ

$$\left.\begin{aligned}{}_{red}\sigma_{\mathrm{I}}&=\varepsilon_{\mathrm{I}}\mathrm{E}=\sigma_{\mathrm{I}}-\frac{\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}}{m}\\ {}_{red}\sigma_{\mathrm{II}}&=\varepsilon_{\mathrm{II}}\mathrm{E}=\sigma_{\mathrm{II}}-\frac{\sigma_{\mathrm{III}}+\sigma_{\mathrm{I}}}{m}\\ {}_{red}\sigma_{\mathrm{III}}&=\varepsilon_{\mathrm{III}}\mathrm{E}=\sigma_{\mathrm{III}}-\frac{\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}}{m}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(85)$$

此三式ノ內何レガ大ナル應力トナルカ卽チ其材料ハ此三ツノ應力ノ內ノ何レニヨッテ支配セラルルカヲ實際ニ當ッテ算定シ考察スレバヨイノデアル。

次ニ簡單ナル場合ヲ採リ平面的ニ考ヘテ主應力ヲ $\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}$ トセバ眞變形ハ横縮ヲ考ヘニ入レテ

$$\varepsilon_{\mathrm{I}}=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_{\mathrm{I}}-\frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{II}}\right)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{II}}=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_{\mathrm{II}}-\frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{I}}\right)$$

故ニ眞應力ハ

$$\left.\begin{aligned} {}_{red}\sigma_{\mathrm{I}} &= \sigma_{\mathrm{I}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{II}} \\ {}_{red}\sigma_{\mathrm{I}} &= \sigma_{\mathrm{II}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{I}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (86)$$

此二式ノ內何レカ大ナル方ヲ採レバヨイ。

前ニ第四節ニ說明シタ如ク主應力ハ(81)式ニヨツテ與ヘラレ

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}$$

$$\sigma_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma_r+\sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}$$

此値ヲ(86)式ニ插入シ

$${}_{red}\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{\mathrm{I}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{II}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}$$

$${}_{red}\sigma_{\mathrm{II}} = \sigma_{\mathrm{II}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{I}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_x+\sigma_y) - \frac{m+1}{2m}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}$$

卽チ一般的ニ書キ

$$\sigma_{red} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_x+\sigma_y) \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}$$

此式ノ m ナル横縮係數ヲ

$m=4$ ト採レバ $\sigma_{red} = \frac{3}{8}(\sigma_x+\sigma_y) \pm \frac{5}{8}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}$ ……………… (87)

$m=3$ ト採レバ $\sigma_{red} = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y) \pm \frac{2}{3}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}$

$m=\frac{10}{3}$ ト採レバ $\sigma_{red} = 0.35(\sigma_x+\sigma_y) \pm 0.65\sqrt{4\tau^2+(\sigma_y-\sigma_x)^2}$

以上說明シタ所ニヨリ明カナルガ如ク(81)式ハ一點ニ存スル最大及最小主應力ヲ與フルモノデアルガ實ハ見掛ケノ應力 (Apparent stress) ニ過ギナイ,コレニ横縮ノ影響ヲ考ヘタモノガ(87)式デアツテ主軸ニ於ケル眞應力ヲ與ヘルモノデアル。

問 題 集 第 五

(1)徑 $\frac{3''}{4}$ ノ綴鋲ニ 2000 # ノ張力ト 3000 # ノ剪力ト作用スル時合成最大應張及應剪力ノ量及方向ヲ求ム。

答 $\sigma_{max}=9420$ #/□″, 軸ト 54°23′, $\tau_{max}=7155$ #/□″, 9° 13′,

(2) 一ツノ軸 (shaft) 內ノ一點ニ於テ斷面內ニ 3tons/□″ ノ應剪力ト斷面ニ直角ナル 2tons/□″ ノ應張力トヲ有ス,最大直應力及應剪力ヲ求ム。

答 4.16 t/□″, 3.16 t/□″

(3) 應力ヲ受クル材料アリ,其一點ニ於テ直角ニ交ル二平面ニ受クル直應力ハ應張 5tons/□″ 及 3tons/□″ ニシテ今之等ノ平面ニ於ケル應剪力ガ 4tons/□″ ナリトセバ其點ニ生ズル最大直應力ノ量及之レニ直角ナル平面ノ方向如何。

答 8.12 t/□″; 5 t/□″ 應力ノ軸ニ對シ $22\frac{1^\circ}{2}$ ヲ有スル平面ニ直角トナル。

(4) 直方體アリ,稜長 AP=2.0cm, BP=1.6cm, CP=2.8cm ヲ有ス,平面 BC ニ於テ張力 670 kg, CA ニ於テ壓力 940 kg, AB ニ於テ壓力 730 kg 作用スル時三稜ノ伸縮何程カ但シ $E=2\times10^6$, $m=\frac{10}{3}$ トス。

答 AP, $\varepsilon_1=134\times10^{-6}$; BP, $\varepsilon_2=-72\times10^{-6}$; CP, $\varepsilon_3=-111\times10^{-6}$

(5) 彈性體內ニ作用スル主應力 σ_1, σ_2 及 σ_3 トコレニ相當スル主變形 ε_1 ε_2, 及 ε_3 トハ次ノ關係ヲ有スル事ヲ證明セヨ。

$$\sigma_1 = \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right)$$

$$\sigma_3 = \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right)$$

但 $e=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=$ 容積變化率。

(6) Hooke 氏法則ニ從ハザル物質アリ C. v. Bach 氏法則卽チ $\sigma^n=C\varepsilon$ ニ從フモノトシテ主應力 σ_1, σ_2, 及 σ_3 ト主變形 ε_1, ε_2 及 ε_3 トノ間ニ次ノ關係ノ存スル事ヲ證セヨ。

$$\sigma_1{}^n = \frac{m}{m+1}C\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right)$$

(7) 內徑 a ナル圓筒內ニ適合スル長 b ノ圓壔體アリ,長サノ方向ニ P ナル直壓ヲ受ケタル時圓筒壁ニ變形陷入ヲ生ゼザルモノトスレバ此壁ニ作用スル壓力度如何。 答 $\sigma=\frac{4P}{\pi a^2(m-1)}$