第XII章　階差方程式の應用

§93.　階差及び階差方程式

連續梁,一層連續ラーメン,フィレンデール構桁等の如き連續性を有する構造物の弾性方程式或は集成壓縮材の挫屈に關する問題の解法に於ては階差方程式が極めて便利に應用せられる場合が甚だ多い.階差方程式の一般理論及び其の應用を詳細に記述することは本書の範圍外のことであり,また紙數の關係上不可能であるので,詳細は專門的の著書及び文獻(章末記載の文獻參照)に讓り,茲には應用に必要なる程度の概說を記述し然る後二三の問題に對する應用を示すことにする.

今 $y=f(x)$ を自變數 x の連續なる或は不連續なる,但し考慮する範圍に於ては有限値を有する任意の實函數とする.自變數 x は連續變數であつても不連續變數であつてもかまはない.即ち x はただ個々の特定なる値,例へば $0,1,2,\ldots$ 等の値のみをとり得るが如き變數であつてもかまはない.かかる x 及び y に對し,Δx を x の一定なる間隔とし,一般に $x=x, x+n\Delta x$ (但し n は正の整數とする)に於ける y の値を $y_x, y_{x+n\Delta x}$ とすれば

$$\Delta y_x = y_{x+\Delta x} - y_x$$

を y_x の第一階の階差(通常略して單に階差)と言ひ

$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+\Delta x} - \Delta y_x = y_{x+2\Delta x} - 2y_{x+\Delta x} + y_x$$

を第二階の階差,そして一般に

$$\begin{aligned}\Delta^n y_x &= \Delta^{n-1} y_{x+\Delta x} - \Delta^{n-1} y_x \\ &= y_{x+n\Delta x} - \binom{n}{1} y_{x+(n-1)\Delta x} + \binom{n}{2} y_{x+(n-2)\Delta x} - + \cdots\end{aligned}$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}y_{x+\Delta x}+(-1)^n y_x \qquad (93.1)$$

を第 n 階の階差と言ふ.

上記と逆に y の個々の値 $y_{x+\Delta x}, y_{x+2\Delta x}, \dots$ を y_x 及び其の階差を以てあらはすことも出來る. 即ち

$$\left.\begin{aligned} y_{x+\Delta x} &= y_x + \Delta y_x, \\ y_{x+2\Delta x} &= y_{x+\Delta x}+\Delta y_{x+\Delta x} = y_x+2\Delta y_x+\Delta^2 y_x, \\ y_{x+n\Delta x} &= y_x+\binom{n}{1}\Delta y_x+\binom{n}{2}\Delta^2 y_x+\cdots+\binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}y_x+\Delta^n y_x. \end{aligned}\right\} \qquad (93.2)$$

以下の記述に於ては特に明記せざる限り x の間隔 Δx を 1 に等しくとる. 然るときは前記諸式は次の如くになる.

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_x &= y_{x+1}-y_x, \\ \Delta^2 y_x &= y_{x+2}-2\,y_{x+1}+y_x, \\ \Delta^n y_x &= y_{x+n}-\binom{n}{1}y_{x+n-1}+\binom{n}{2}y_{x+n-2}-+\cdots \\ &\quad +(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}y_{x+1}+(-1)^n y_x; \end{aligned}\right\} \qquad (93.3)$$

$$\left.\begin{aligned} y_{x+1} &= y_x+\Delta y_x, \\ y_{x+2} &= y_x+2\Delta y_x+\Delta^2 y_x, \\ y_{x+n} &= y_x+\binom{n}{1}\Delta y_x+\binom{n}{2}\Delta^2 y_x+\cdots+\binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}y_x+\Delta^n y_x. \end{aligned}\right\} (93.4)$$

扨て x, y_x 及び y_x の階差を含む方程式:

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x)=0 \qquad (93.5)$$

を階差方程式と呼び, 此の階差に $\Delta x=1$ として (93.3) の値を代入すれば上式は

$$\Phi(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n})=0 \qquad (93.6)$$

の形になる. 以下 (93.6) を階差方程式の基本型とする.

Φ は任意の函數であるが, 構造力學に於ける實際的問題に出現する階差方程式に於ては (93.6) の左邊はすべて $y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}$ に就ての一次式になる. かかる階差方程式を線型階差方程式 (或は一次階差方程式) と言ひ, 一般に

$$\sum_{i=0}^{n} a_{xi}y_{x+i}=K_x, \qquad (93.7)$$

或は

$$a_{x0}y_x+a_{x1}y_{x+1}+a_{x2}y_{x+2}+\cdots+a_{xn}y_{x+n}=K_x, \qquad (93.8)$$

と書くことが出來る. 但し a_{xi} 及び K_x は常數或は x のみの函數である. しかして (93.8) を n 階の線型階差方程式と言ふ. 但し方程式の階數は, 方程式中に含まれる階差の最高階數或は (93.8) 式の n のみに依つて定まるものではなく, 一つの階差方程式中の y の添字のうち最小のものを $x+k$, 最大のものを $x+n$ とすれば其の階數は $n-k$ になる. 例へば

$$a\,y_{x-1}+b\,y_x+c\,y_{x+2}=K_x$$

は $2-(-1)=3$, 即ち三階の階差方程式であり, また

$$\Delta^3 y_x+y_x+c=0$$

は, 之を書き換へれば

$$3y_{x+1}-3y_{x+2}+y_{x+3}=-c$$

になるが故に二階の階差方程式になる.

尚 (93.7) 或は (93.8) に於て $K_x=0$ なる方程式を同次の方程式と言ひ, 然らざる場合には非同次の方程式と言ふ. 構造力學上の問題に於ては K_x は一般に荷重項に相當する.

§ 94. 線型階差方程式の解法に就て

以下の記述に於ては問題をすべて線型階差方程式に限定する. それは階差方程式のうち此の種類のものが實際問題に於て重要であるためと, 一つには此の種類の階差方式程に於てのみ一般的の理論的考察が可能であるからである.

今 n 階の同次線型階差方程式:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{xi}\, y_{x+i} = 0 \qquad (94.1)$$

に於て $x=k, k+1, \ldots, k+r$ とすれば次の如き $r+1$ 個の方程式が得られる.

$$\left.\begin{aligned} &a_{k0}\, y_k + a_{k1}\, y_{k+1} + \cdots + a_{kn}\, y_{k+n} = 0, \\ &a_{k+1,0}\, y_{k+1} + a_{k+1,1} y_{k+2} + \cdots + a_{k+1,n} y_{k+1+n} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{k+r,0}\, y_{k+r} + a_{k+r,1}\, y_{k+r+1} + \cdots + a_{k+r,n}\, y_{k+r+n} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (94.2)$$

本式は $x=k$ より $x=k+r$ までの間に於ては(94.1)の階差方程式と同等であつて, 此の $r+1$ 個の方程式を聯立方程式と考へて之より y を求めようとすれば, 未知數 y の數は $n+r+1$ であるが故に n 個の y は之を任意に選ぶことが出來る. 而して n 個の y を任意に選びたるものとすれば, 殘りの $r+1$ 個の y は(94.2)を解くことに依つて前に任意に選びたる n 個の y の一次函數として決定せられる. 從つて(94.1)の如き n 階の線型階差方程式の解には一般に n 個の任意の常數が含まれるべきことが知られる. かかる解を我々は一般解と言ふ.

今(94.1)の階差方程式の特別解(略して特解と言ふ)の一つ, 即ち(94.1)の y に代入すれば此の方程式を滿足する x の函數の一つを $\eta(x)$ とすれば, 之

に任意の常數 C を乘じたる $C\eta(x)$ もまた(94.1)を滿足する解である. 從つて $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を n 個の任意の常數, $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$ を(94.1)の n 個の特解とすれば, (94.1)の一般解は

$$y_x = C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x) + \cdots + C_n\eta_n(x) \qquad (94.3)$$

になる筈である. 但し(94.3)が一般解であるためには n 個の特解 $\eta_1(x)$, $\eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$ はお互に一次的に獨立でなければならない. 即ち任意の x に對して

$$\begin{vmatrix} \eta_1(x) & \eta_2(x) & \cdots & \eta_n(x) \\ \eta_1(x+1) & \eta_2(x+1) & \cdots & \eta_n(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_1(x+n-1) & \eta_2(x+n-1) & \cdots & \eta_n(x+n-1) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (94.4)$$

でなければならない.

(94.3)中の n 個の特解が互に一次的に獨立でなければならないことは次の如くにして了解せられる. 例へば若し或る二つの特解 η_i, η_k が一次的に

$$a\,\eta_i + b\,\eta_k = 0$$

なる關係を有するものとすれば, 一般解中に於ける $C_i\eta_i + C_k\eta_k$ は

$$C_i\eta_i + C_k\eta_k = \left(C_i - \frac{a}{b}C_k\right)\eta_i$$

になり, $C_i - \dfrac{a}{b}C_k$ は之を一つの任意の常數と考へられるが故に, 一般解中に於ける任意の常數の數が $n-1$ になるからである.

かくの如く互に一次的に獨立なる n 個の特解の組を基本解と言ふ. 一般に n 階の線型階差方程式には n 個より多くの特解は存在しない. 何となれば前記 n 個の基本解の他に若し η' が一つの特解でありとすれば, (94.1)の y に $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 及び η' を代入することに依つて得られる次の $n+1$ 個の方程式:

$$a_{x0}\,\eta_1(x)+a_{x1}\,\eta_1(x+1)+\cdots+a_{xn}\,\eta_1(x+n)=0,$$
$$a_{x0}\,\eta_2(x)+a_{x1}\,\eta_2(x+1)+\cdots+a_{xn}\,\eta_2(x+n)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{x0}\,\eta_n(x)+a_{x1}\,\eta_n(x+1)+\cdots+a_{xn}\,\eta_n(x+n)=0,$$
$$a_{x0}\,\eta'(x)+a_{x1}\,\eta'(x+1)+\cdots+a_{xn}\,\eta'(x+n)\ =0$$

が同時に成立しなければならない．そのためには，係數aが全部零に等しくなることはないから，次の行列式：

$$\begin{vmatrix} \eta_1(x) & \eta_1(x+1) & \cdots & \eta_1(x+n) \\ \eta_2(x) & \eta_2(x+1) & \cdots & \eta_2(x+n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_n(x) & \eta_n(x+1) & \cdots & \eta_n(x+n) \\ \eta'(x) & \eta'(x+1) & \cdots & \eta'(x+n) \end{vmatrix}$$

が零に等しくなければならない．然るに此の行列式が零に等しきことはη'と基本解$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$との間に一次的の關係が存在することを意味し，從つてη'は獨立なる特解ではないことになる．

次にn階の非同次線型階差方程式：

$$\sum_{i=0}^{n} a_{yi}\,y_{x+i}=K_x \qquad (94.5)$$

を考へる．今此の方程式の特解の一つを$\eta_0(x)$としz_xをxの函數とすれば$y_x=\eta_0(x)+z_x$と置くことに依り(94.5)式は

$$\sum_{i=0}^{n} a_{xi}\,z_{x+i}=0$$

になる．然るに本式は前に說明せる同次方程式(94.1)であつて，從つて上式の一般解は(94.1)の一般解に等しくなる．故に非同次方程式(94.5)の一般解は非同次方程式の特解の一つと之に附隨する同次方程式(94.1)の一般解との和になる．即ち(94.5)の一般解は次の如くになる．

$$y_x=\eta_0(x)+C_1\eta_1(x)+C_2\eta_2(x)+\cdots+C_n\eta_n(x). \qquad (94.6)$$

上記の如くn階の階差方程式の一般解にはn個の任意の常數が含まれるから，與へられたる實際問題に適合する解を得るためには此のn個の常數を問題に適合する樣に定める必要がある．それにはn個の條件が必要であつて，此の條件は一般に邊緣條件又は境界條件と呼ばれて居る．かかる條件は與へられたる問題に應じて夫々容易に求め得るものであつて，之に依つて常數を決定することも大なる手數を要することではない．

§ 95. 常數係數の同次線型階差方程式

線型階差方程式の一般解法は上記の如くであるが其の解を具體的に解析的に求め得る場合は餘り多くはない．そのうちでも其の解が簡單に求められ且つ實際問題に廣く應用せられるのは以下に記述する常數係數の線型階差方程式である．

i. 一般解.

(94.1)に於てすべてのa_{xi}をxに無關係なる常數とすれば

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,y_{x+i}=0, \qquad (95.1)$$

詳しく書けば

$$a_0\,y_x+a_1\,y_{x+1}+a_2\,y_{x+2}+\cdots+a_n\,y_{x+n}=0 \qquad (95.2)$$

になる．

此の方程式の解を求めるために

$$y_x=\beta^x \qquad (95.3)$$

と置いて之を前式に代入すれば

$$a_0\,\beta^x+a_1\,\beta^{x+1}+a_2\,\beta^{x+2}+\cdots+a_n\,\beta^{x+n}=0$$

になり，之より共通なる因數 β^x を省けば

$$a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \cdots + a_n\beta^n = 0 \qquad (95.4)$$

を得る．即ち(95.3)が(95.1)又は(95.2)の解であるためには β は(95.4)を滿足しなければならない．(95.4)を與へられたる階差方程式の特性方程式と言ひ，$a_n \neq 0$ とすれば(95.4)は一般にすべて0に等しくない n 個の根を有し，之を $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ とすれば

$$y_x = \beta_i^x \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (95.5)$$

が求める所の特解になる．而して此の n 個の特解に依つて(94.4)の行列式を作れば

$$\begin{vmatrix} \beta_1^x & \beta_2^x & \cdots & \beta_n^x \\ \beta_1^{x+1} & \beta_2^{x+1} & \cdots & \beta_n^{x+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^{x+n-1} & \beta_2^{x+n-1} & \cdots & \beta_n^{x+n-1} \end{vmatrix} = (\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)^x \prod_{i,k}(\beta_i - \beta_k),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 2, 3, \ldots, n;\ i < k)$$

になり，若し $\beta_i \neq \beta_k$ ならば，即ち(95.4)式の n 根がすべて相違する場合には上記の行列式は零にならず，從つて(95.5)の n 個の特解の組は基本解になる．故に此の場合には(95.1)の一般解は

$$y_x = C_1\beta_1^x + C_2\beta_2^x + \cdots + C_n\beta_n^x \qquad (95.6)$$

になる．

若し特性方程式(95.4)の根のうち相等しきものがある場合，即ち重根が存在する場合には前記の行列式は零に等しくなり(95.5)の n 個の特解は基本解ではなくなる．然し此の場合には，例へば β_k を重根とし其の重複數を m とすれば

$$\beta_k^x, \quad x\beta_k^x, \quad x^2\beta_k^x, \quad \cdots, \quad x^{m-1}\beta_k^x$$

の各々が(95.1)を滿足し[1]，且つ之等と殘餘の互に相違する特解 β^x とが一次的に獨立なる基本解を構成することを證明することが出來，從つて此の場合の階差方程式(95.1)の一般解は一般に次の如く書きあらはすことが出來る．

$$y_x = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots + C_mx^{m-1})\beta_1^x$$
$$+ C_{m+1}\beta_2^x + C_{m+2}\beta_3^x + \cdots + C_n\beta_{n-m}^x. \qquad (95.7)$$

また若し特性方程式が複素根を有する場合には，方程式の係數が實數であるとすれば，一つの複素根に對してそれに共軛なる複素根があるから，之を適當に組合せることに依つて實函數を作ることが出來る．

例へば $\beta_1 = a + bi, \beta_2 = a - bi$ が共軛なる複素根とすれば

$$\rho = |\sqrt{a^2 + b^2}|, \quad \tan\varphi = b/a$$

とすることに依つて

$$\beta_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \beta_2 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

になり，從つて一般解中の $C_1\beta_1^x + C_2\beta_2^x$ は

$$C_1\beta_1^x + C_2\beta_2^x = \rho^x[C_1(\cos\varphi x + i\sin\varphi x) + C_2(\cos\varphi x - i\sin\varphi x)]$$
$$= \rho^x[(C_1 + C_2)\cos\varphi x + i(C_1 - C_2)\sin\varphi x]$$

になる．然るに C_1, C_2 は共に任意の常數であるから

$$C_1 + C_2 = C_1', \quad i(C_1 - C_2) = C_2'$$

とすれば上式は

$$C_1'\rho^x\cos\varphi x + C_2'\rho^x\sin\varphi x \qquad (95.8)$$

になり，かくして實函數の二つの特解が得られる．

1) Bleich-Melan: "*Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik*", 55, Berlin (1927).

更に特性方程式の根の中に m 重の複素根がある場合には,(95.1)の一般解が

$$y_x=(C_1+C_2x+\cdots+C_mx^{m-1})\rho^x\cos\varphi x$$
$$+(C_{m+1}+C_{m+2}x+\cdots+C_{2m}x^{m-1})\rho^x\sin\varphi x+\cdots \tag{95.9}$$

の形にあらはされることは上述の事柄より容易に了解せられる.

ii. 二階の場合.

係數が常數である二階の同次階差方程式を一般に

$$a\,y_{x-1}+b\,y_x+c\,y_{x+1}=0 \tag{95.10}$$

とする. 之に從屬する特性方程式は

$$a+b\beta+c\beta^2=0 \tag{95.11}$$

であつて,此の根は一般に

$$\beta_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c},\quad \beta_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c} \tag{95.12}$$

になり,(95.10)の一般解は次の如くになる.

$$y_x=C_1\beta_1^x+C_2\beta_2^x. \tag{95.13}$$

若し $b^2-4ac>0$ ならば β_1,β_2 は實根になる. 此の場合には双曲線函數を利用することに依つて(95.13)の一般解を別の形に變換することが出來る. 即ち

$$\rho=\sqrt{\frac{a}{c}},\quad \cosh\varphi=-\frac{b}{2c\rho} \tag{95.14}$$

と置けば[1)]

$$\beta_1=\rho\,e^{\varphi},\quad \beta_2=\rho\,e^{-\varphi}$$

になり,之を(95.13)に代入すれば

$$y_x=\rho^x(C_1e^{\varphi x}+C_2e^{-\varphi x}), \tag{95.15}$$

或は A 及び B を任意の常數とすれば

1) 但し $\sqrt{a/c}$ の符號は $-b/(2c\rho)$ が正になるが如くに選ぶ.

$$y_x=\rho^x(A\sinh\varphi x+B\cosh\varphi x) \tag{95.16}$$

になる.

若し $b^2-4ac<0$ ならば β_1,β_2 は共軛なる複素根になり, i に說明せる所に從つて

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\left|\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4c^2}+\frac{b^2}{4c^2}}\right|=\left|\sqrt{\frac{a}{c}}\right|,\\ \tan\varphi&=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{-b}\quad \text{即ち}\quad \cos\varphi=-\frac{b}{2c\rho}\end{aligned}\right\}$$

と置けば(95.8)に依つて y_x は次の如くになる.

$$y_x=\rho^x(A\sin\varphi x+B\cos\varphi x). \tag{95.17}$$

若し $b^2-4ac=0$ ならば $\beta_1=\beta_2$, 即ち二重根になり,此の場合の一般解は(95.7)に依つて

$$y_x=\left(-\frac{b}{2c}\right)^x(A+Bx) \tag{95.18}$$

になる.

§96. 常數係數の線型階差方程式に變換し得る階差方程式

i. 線型階差方程式:

$$y_{x+n}+a_1p(x)\cdot y_{x+n-1}+a_2p(x)\cdot p(x-1)\cdot y_{x+n-2}+\cdots$$
$$\cdots+a_np(x)\cdot p(x-1)\cdots p(x-n+1)\cdot y_x=K_x \tag{96.1}$$

に於て $a_1,a_2,\ldots,a_n$ を與へられたる常數, $p(x)$ を與へられたる x の函數とする. 茲に於て z_x を x の函數とし

$$y_x=p(x-n)\cdot p(x-n-1)\cdots p(2)\cdot p(1)\cdot z_x \tag{96.2}$$

と置けば

$$y_{x+n}=p(x)\cdot p(x-1)\cdots p(2)\cdot p(1)\cdot z_{x+n},$$
$$y_{x+n-1}=p(x-1)\cdot p(x-2)\cdots p(1)\cdot z_{x+n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

になり，之を(96.1)に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} &z_{x+n}+a_1z_{x+n-1}+a_2z_{x+n-2}+\cdots+a_nz_x=K'_x,\\ &K'_x=\frac{K_x}{p(x)\cdot p(x-1)\cdots p(1)} \end{aligned}\right\} \tag{96.3}$$

を得る．之即ち常數係數の n 階の線型階差方程式である．

ii. y_{x+i} の係數が a_ib^{x+i} (但し a, b は常數)である階差方程式:

$$a_0b^xy_x+a_1b^{x+1}y_{x+1}+a_2b^{x+2}y_{x+2}+\cdots+a_nb^{x+n}y_{x+n}=K_x \tag{96.4}$$

は，此の兩邊を b^x にて割れば

$$a_0y_x+a_1b\,y_{x+1}+a_2b^2y_{x+2}+\cdots+a_nb^ny_{x+n}=\frac{K_x}{b^x} \tag{96.5}$$

の常數係數の階差方程式になる．

iii. 次の型式の二階の線型階差方程式:

$$p(x)\cdot y_{x-1}+2\,[p(x)+p(x+1)]\,y_x+p(x+1)\cdot y_{x+1}=K_x \tag{96.6}$$

は構造力學に於て三連モーメントの定理或は其他の問題に屢々現れる階差方程式である．今 z_x 及び w_x を x の函數とし

$$y_x=\frac{z_x}{w_x} \tag{96.7}$$

と置き，之を(96.6)に代入し，其の兩邊を w_x にて割れば

$$\frac{p(x)}{w_{x-1}w_x}z_{x-1}+2\,\frac{p(x)+p(x+1)}{w_x^2}z_x+\frac{p(x+1)}{w_xw_{x+1}}z_{x+1}=\frac{K_x}{w_x} \tag{96.8}$$

になる．玆に於て b を任意に選べる常數とし

$$\frac{p(x)}{w_{x-1}w_x}=\frac{p(x+1)}{w_xw_{x+1}}=1,\qquad \frac{p(x)+p(x+1)}{w_x^2}=b \tag{96.9}$$

なるが如くに w_x を選びたるものとすれば(96.8)式は

$$z_{x-1}+2\,b\,z_x+z_{x+1}=\frac{K_x}{w_x} \tag{96.10}$$

の z_x に關する常數係數の階差方程式になる．

w_x は次の如くにして決定せられる．即ち(96.9)の最初の式より

$$p(x)=w_{x-1}w_x,\quad p(x+1)=w_xw_{x+1}$$

になり，之を(96.9)の第二式に代入して變化すれば

$$w_{x-1}-b\,w_x+w_{x+1}=0 \tag{96.11}$$

になる．之即ち w_x に關する階差方程式であつて其の特性方程式:

$$\alpha^2-b\,\alpha+1=0 \tag{96.12}$$

の兩根を α 及び $1/\alpha$ とすれば w_x は一般に

$$w_x=A\,\alpha^x+B\,\alpha^{-x} \tag{96.13}$$

になる．但し(96.12)の b は之を任意に選び得るが故に α もまた任意のパラメーターになる．若し $b=\pm2$ の場合には特性方程式(96.12)の兩根は 1 又は -1 の二重根になり，從つて w_x の一般解は

$$w_x=(\pm1)^x(A+B\,x) \tag{96.13'}$$

になる．

(96.13)又は(96.13′)の w_x は(96.9)の最初の式，即ち $w_{x-1}w_x=p(x)$ を滿足しなければならない．故に一般に

$$[A\,\alpha^{x-1}+B\,\alpha^{-(x-1)}]\,[A\,\alpha^x+B\,\alpha^{-x}]=p(x), \tag{96.14}$$

或は特に $b=\pm2$ の場合には

$$\pm[A+B(x-1)]\,[A+B\,x]=p(x) \tag{96.14'}$$

でなければならない．依つて(96.6)の階差方程式を(96.10)の形の常數係數の階差方程式に變換するには w_x の一般解の常數 A, B 及び α を(96.14)又は(96.14′)を滿足する樣に選ぶ必要があり，逆に(96.6)に於て其の係數 $p(x)$ が丁度(96.14)又は(96.14′)の左邊に等しき形の函數なる場合には之を(96.10)の常數係數の階差方程式に變換することが出來る．

z_x は(96.10)より求められる．然るに(96.12)に依つて一般に

$$b=\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

であるから

$$z_{x-1}+2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)z_x+z_{x+1}=\frac{K_x}{w_x} \qquad (96.15)$$

になり，此の特解を $z_0(x)$ とし，特性方程式：

$$\beta^2+2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\beta+1=0 \qquad (96.16)$$

の兩根を β 及び β^{-1} とすれば z_x の一般解は

$$z_x=z_0(x)+C_1\beta^x+C_2\beta^{-x} \qquad (96.17)$$

になる．かくして w_x 及び z_x が求められれば y_x は(96.7)に依つて決定せられる．

§97. 聯立線型階差方程式

$y_x, z_x, w_x, \ldots$ を獨立變數 x の函數とすれば

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=0}^{k} a_i y_{x+i}+\sum_{i=0}^{m} b_i z_{x+i}+\sum_{i=0}^{n} c_i w_{x+i}+\cdots=K_x, \\
\sum_{i=0}^{k'} a'_i y_{x+i}+\sum_{i=0}^{m'} b'_i z_{x+i}+\sum_{i=0}^{n'} c'_i w_{x+i}+\cdots=K'_x, \\
\sum_{i=0}^{k''} a''_i y_{x+i}+\sum_{i=0}^{m''} b''_i z_{x+i}+\sum_{i=0}^{n''} c''_i w_{x+i}+\cdots=K''_x, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \qquad (97.1)$$

の如き階差方程式の組を聯立階差方程式と言ふ．上式に於ける $a, b, c, \ldots$ は x に無關係なる係數である．而して(97.1)の聯立階差方程式を構成する階差方程式の各々は常數係數の線型階差方程式であるが故に(97.1)は常數係數の聯立線型階差方程式である．之を構成する階差方程式の數は未知數 $y_x, z_x, w_x, \ldots$ の數に一致しなければならない．$k, m, n, \ldots;\ k', m', n', \ldots;\ k'', m'', n'', \ldots;\ \ldots$ は各々の階差方程式に於ける $y_x, z_x, w_x, \ldots$ の階位數である．

今(97.1)の第二，第三，… 式より $z, w, \ldots$ を y の函數として解き之を第一式に代入するものとすれば y のみに關する一つの階差方程式が得られる．而して $k, k', \ldots;\ m, m', \ldots;\ n, n' \ldots;\ \ldots$ のうち最大なるものを夫々 $\bar{k}, \bar{m}, \bar{n}, \ldots$ とすれば，上記の如く $z, w, \ldots$ を消去することに依つて得られる y のみに關する階差方程式の階位數 s は

$$s \leqq \bar{k}+m+\bar{n}+\cdots$$

である．かくして y のみに關する階差方程式より y_x の一般解を求むれば，他の未知數 $z_x, w_x, \ldots$ は y_x の一般解を基準として之を決定することが出來る．然るに y_x の一般解には一般に s 個の任意常數が含まるべきが故に，$z_x, w_x, \ldots$ の一般解にも之に相等しき s 個の常數が含まるべきことになる．

上記の解法は所謂消去法であるが，階差方程式の係數が常數係數である場合には次の如き順序に依ればよい．即ち $y, z, \ldots$ に關する階差の演算を記號的に $D_1(y), D_2(z), \ldots$ 等にてあらはすものとし，例へば y 及び z に關する聯立階差方程式：

$$\left.\begin{array}{l}
D_1(y)+D_2(z)=K_x, \\
D'_1(y)+D'_2(z)=K'_x,
\end{array}\right\} \qquad (97.2)$$

に就て說明する．今此の第一式に就て D'_2 の演算を行ひ，第二式に就て D_2 の演算を行へば

$$D'_2[D_1(y)]+D'_2[D_2(z)]=D'_2(K_x),$$
$$D_2[D'_1(y)]+D_2[D'_2(z)]=D_2(K'_x)$$

を得る．然るに $D'_2[D_2(z)]=D_2[D'_2(z)]$ なるが故に上式の兩邊を減算することに依つて

$$D'_2[D_1(y)]-D_2[D'_1(y)]=D'_2(K_x)-D_2(K'_x) \qquad (97.3)$$

を得る．本式は卽ち y のみに關する階差方程式である．かくの如き方法は

一般に $y, z, w, \ldots$ に關する聯立階差方程式に對しても同樣に應用することが出來る.

(97.1)の如き聯立階差方程式の一般解は上記の消去法に依らずとも之を直接に求めることも出來る. 然しそれには各階差方程式が同次方程式であるか, 或は非同次の場合には特解 $y_0(x), z_0(x), w_0(x), \ldots$ が容易に求め得られることが必要である.

今, 聯立同次階差方程式, 即ち(97.1)の右邊がすべて零に等しき場合の一般解を求めるために, $A, B, C, \ldots$ を任意の常數とし

$$y_x = A\beta^x, \quad z_x = B\beta^x, \quad w_x = C\beta^x, \quad \ldots \tag{97.4}$$

と置き, 之を(97.1)に代入して其の右邊を零とすれば

$$\left.\begin{aligned} &A\sum_{i=0}^{k} a_i\beta^i + B\sum_{i=0}^{m} b_i\beta^i + C\sum_{i=0}^{n} c_i\beta^i + \cdots = 0, \\ &A\sum_{i=0}^{k'} a_i'\beta^i + B\sum_{i=0}^{m'} b_i'\beta^i + C\sum_{i=0}^{n'} c_i'\beta^i + \cdots = 0, \\ &A\sum_{i=0}^{k''} a_i''\beta^i + B\sum_{i=0}^{m''} b_i''\beta^i + C\sum_{i=0}^{n''} c_i''\beta^i + \cdots = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{97.5}$$

を得る. 本式を $A, B, C, \ldots$ に關する聯立方程式と考へれば, $A, B, C, \ldots$ が零以外の値であるためには次の行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum a_i\beta^i & \sum b_i\beta^i & \sum c_i\beta^i & \cdots \\ \sum a_i'\beta^i & \sum b_i'\beta^i & \sum c_i'\beta^i & \cdots \\ \sum a_i''\beta^i & \sum b_i''\beta^i & \sum c_i''\beta^i & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{97.6}$$

であることが必要である. 本式は即ち(97.1)に對する特性方程式であつて, 本式の β の次數は s になるが故に之より一般に β の s 個の根が得られる.

$\Delta = 0$ なることは(97.4)の $A, B, C, \ldots$ が互に一次的に獨立ではないことを意味する. 即ち $A, B, C, \ldots$ のうち任意の一つを任意に決定すれば他のものはすべて之に依つてあらはされることになる. 例へば $A = 1$ とすれば

$$A = 1, \quad B = \alpha'\cdot 1, \quad C = \alpha''\cdot 1, \quad \ldots$$

になり, $\alpha', \alpha'', \ldots$ は (97.5)を滿足するが如くに定める. そのために上記の $A, B, C, \ldots$ を(97.5)に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} &\alpha'\sum b_i\beta^i + \alpha''\sum c_i\beta^i + \cdots = -\sum a_i\beta^i, \\ &\alpha'\sum b_i'\beta^i + \alpha''\sum c_i'\beta^i + \cdots = -\sum a_i'\beta^i, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{97.7}$$

になり, 之より $\alpha', \alpha'', \ldots$ を定めることが出來る. 但し $y_x, z_x, w_x, \ldots$ の數を n とすれば(97.5)式は n 個の式を含むが故に(97.7)にもまた n 個の式が含まれるが, $\alpha', \alpha'', \ldots$ を決定するに必要なるはそのうちの任意の $n-1$ 個の式であつて, 殘りの一式は他の $n-1$ 個の式と一次的に獨立ではなく, 計算結果の檢算に之を使用することが出來る.

かくして $\beta, \alpha', \alpha'', \ldots$ を決定すれば (97.1)の同次方程式の特解は(97.4)に依つて

$$y_x = \beta^x, \quad z_x = \alpha'\beta^x, \quad w_x = \alpha''\beta^x, \quad \ldots$$

になる. 然るに β には一般に s 個の異なる根があり, 之を $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_s$ とすれば, 此の各々に對して夫々 $\alpha', \alpha'', \ldots$ が決定せられるが故に, 例へば β_i に對する $\alpha', \alpha'', \ldots$ を $\alpha_i', \alpha_i'', \ldots$ とすれば, 同次方程式に於ける $y_x, z_x, w_x, \ldots$ の一般解は

$$\left.\begin{aligned} y_x &= C_1\beta_1^x + C_2\beta_2^x + \cdots + C_s\beta_s^x, \\ z_x &= C_1\alpha_1'\beta_1^x + C_2\alpha_2'\beta_2^x + \cdots + C_s\alpha_s'\beta_s^x, \\ w_x &= C_1\alpha_1''\beta_1^x + C_2\alpha_2''\beta_2^x + \cdots + C_s\alpha_s''\beta_s^x, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{97.8}$$

になる.

前述の如く聯立階差方程式の組は消去法に依つて唯一の階差方程式,例へば y のみを未知數とする階差方程式に變換し得るが故に,若し特性方程式(97.6)の根のうちに重根が存在する場合には,例へば β を m 重根とすれば,§ 95 に於て說明せる所に依り,β^x の他に

$$x\beta^x,\quad x^2\beta^x,\quad \ldots,\quad x^{m-1}\beta^x$$

が y_x の特解になる.而して之に對應する他の未知數 $z_x, w_x, \ldots$ の特解は上記の y_x の特解の一次函數として示される.以下特に二重根の場合に就て說明する.

例へば今 β を特性方程式(97.6),$\Delta=0$ の二重根とすれば

$$y_x=\beta^x,\quad z_x=\alpha'\beta^x,\quad w_x=\alpha''\beta^x,\quad \ldots$$

の他に

$$y_x=x\beta^x,\quad z_x=\alpha'(x+\gamma')\beta^x,\quad w_x=\alpha''(x+\gamma'')\beta^x,\ \ldots \tag{97.9}$$

もまた特解になる.そのためには $\gamma', \gamma'', \ldots$ は次に說明するが如くに選ばれなければならない.扨て(97.9)を(97.1)に相當する聯立同次階差方程式に代入すれば

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} a_i(x+i)\beta^{x+i}+\alpha'\sum_{i=0}^{m} b_i(x+\gamma'+i)\beta^{x+i}+\alpha''\sum_{i=0}^{n} c_i(x+\gamma''+i)\beta^{x+i}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\cdots=0,\\
&\sum_{i=0}^{k'} a'_i(x+i)\beta^{x+i}+\alpha'\sum_{i=0}^{m'} b'_i(x+\gamma'+i)\beta^{x+i}+\alpha''\sum_{i=0}^{n'} c'_i(x+\gamma''+i)\beta^{x+i}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\cdots=0,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

になり,之より β^x を省略して書き換へれば

$$\begin{aligned}
&x\Big[\sum a_i\beta^i+\alpha'\sum b_i\beta^i+\alpha''\sum c_i\beta^i+\cdots\Big]\\
&\qquad+\Big[\sum a_i\,i\,\beta^i+\alpha'\sum b_i(\gamma'+i)\beta^i+\alpha''\sum c_i(\gamma''+i)\beta^i+\cdots\Big]=0,\\
&x\Big[\sum a'_i\beta^i+\alpha'\sum b'_i\beta^i+\alpha''\sum c'_i\beta^i+\cdots\Big]\\
&\qquad+\Big[\sum a'_i\,i\,\beta^i+\alpha'\sum b'_i(\gamma'+i)\beta^i+\alpha''\sum c'_i(\gamma''+i)\beta^i+\cdots\Big]=0,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

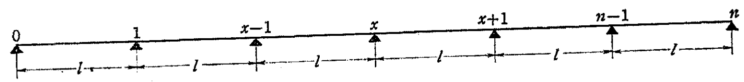
を得る.本式は x の任意の値に對して成立しなければならない,即ち x に無關係に成立しなければならない.そのためには上式に於ける x の係數及び x に無關係なる項はすべて同時に零にならなければならない.然るに上式に於ける x の係數をすべて零に等しとすることは前述の(97.7)と全く同じことであつて,$\alpha', \alpha'', \ldots$ が(97.7)より決定されたものとすれば此の條件は必然的に滿足せられる.從つて玆に於ては x に無關係なる項を零に等しと置けば十分であつて,かくして

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma'\alpha'\sum b_i\beta^i+\gamma''\alpha''\sum c_i\beta^i+\cdots\\
&\qquad=-\Big[\sum a_i i\beta^i+\alpha'\sum b_i i\beta^i+\alpha''\sum c_i i\beta^i+\cdots\Big],\\
&\gamma'\alpha'\sum b'_i\beta^i+\gamma''\alpha''\sum c'_i\beta^i+\cdots\\
&\qquad=-\Big[\sum a'_i i\beta^i+\alpha'\sum b'_i i\beta^i+\alpha''\sum c'_i i\beta^i+\cdots\Big],\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{97.10}$$

を得る.本式は即ち $\gamma', \gamma'', \ldots$ を決定する方程式である.本式には一般に n 個の式が含まれるが,そのうちの任意の一式は殘りの $n-1$ 式と一次的に獨立でないから,上記のうち任意の $n-1$ 式に依つて $n-1$ 個の $\gamma', \gamma'', \ldots$ を決定することが出來る.

§ 98. 斷面一樣にしてスパン相等しき連續梁

階差方程式の應用問題として先づ最初に第 340 圖の如き n スパンの連續梁を考へる.支點 x 上の曲げモーメントを M_x とすれば,梁の斷面が一樣であり且つスパンが相等しき場合には(74.8)の三連モーメントの定理に依り



第 340 圖

$$M_{x-1}+4M_x+M_{x+1}=-K_x,\quad K_x=\frac{6}{l}(\mathfrak{B}_x+\mathfrak{A}_{x+1}) \tag{98.1}$$

になる．本式は即ち M_x に關する常數係數の二階線型階差方程式であつて，其の一般解は § 95, ii に依つて求められる．

(98.1)の一般解を求めるに先立ち，之に對應する同次方程式：

$$M_{x-1}+4M_x+M_{x+1}=0 \tag{98.2}$$

の一般解を求める．之に附隨する特性方程式は

$$\beta^2+4\beta+1=0 \tag{98.3}$$

であつて，此の根のうち絕對値の小なるものを β とすれば

$$\beta=-2+\sqrt{3}=-0{\cdot}2679,\quad \beta^{-1}=-2-\sqrt{3}=-3{\cdot}7321 \tag{98.4}$$

が(98.3)の兩根であつて，從つて同次方程式(98.2)の一般解は

$$M_x=C_1\beta^x+C_2\beta^{-x} \tag{98.5}$$

になる．故に，之に非同次方程式(98.1)の一つの特解を加へれば，それが(98.1)の一般解になる．然し任意の荷重項 K_x に就て(98.1)の特解を求めることは不可能であるので，以下二三の特殊なる荷重狀態に就て說明する．

i. 各スパンに相等しき荷重が作用する場合．

此の場合には荷重項 K_x はすべて相等しくなる，即ち x に無關係なる常數になる．K_x が常數なる場合には常數係數の階差方程式の特解もまた常數でなければならない．實際本例の場合に於て K_x を單に K とすれば(98.1)の特解は $-K/6$ になり，從つて M_x の一般解は

$$M_x=C_1\beta^x+C_2\beta^{-x}-\frac{K}{6} \tag{98.6}$$

になる．

常數 C_1, C_2 は兩端に於ける邊緣條件より定められる．即ち兩端 0 及び n を回轉端とすれば $M_0=0$ 及び $M_n=0$ でなければならないから

$$C_1+C_2-\frac{K}{6}=0 \quad 及び \quad C_1\beta^n+C_2\beta^{-n}-\frac{K}{6}=0$$

になり，之より

$$C_1=\frac{K}{6(1+\beta^n)},\quad C_2=\frac{\beta^nK}{6(1+\beta^n)}$$

を得，之を(98.6)に代入して整理すれば次の如くになる．

$$M_x=-\frac{K}{6}\left[1-\frac{\beta^x+\beta^{n-x}}{1+\beta^n}\right],\quad (x=0,1,2,\ldots,n). \tag{98.7}$$

$\beta=-0{\cdot}2679$ なるが故にスパン數 n が大なる場合には 1 に對して β^n を省略することが出來る．即ち

$$M_x=-\frac{K}{6}(1-\beta^x-\beta^{n-x}) \tag{98.8}$$

になり，またかくの如く n が大なる場合の中央附近の支點に對しては β^x, β^{n-x} は共に 0 に近くなるが故に

$$M_x \fallingdotseq -\frac{K}{6} \tag{98.9}$$

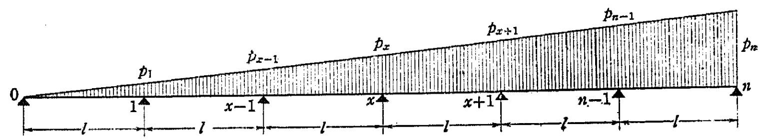
とすることが出來る．

本場合の例として連續梁の全長に等分布荷重 p が滿載する場合を考へれば $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=pl^3/24$, $K=pl^2/2$ なるが故に，一般に

$$M_x=-\frac{pl^2}{12}\left[1-\frac{\beta^x+\beta^{n-x}}{1+\beta^n}\right] \tag{98.10}$$

になり，多スパンの連續梁の中央附近の支點に於ては近似的に $M_x=-pl^2/12$ とすることが出來る．

ii. 等變分布荷重を受ける場合．



第 341 圖

第341圖の等變分布荷重が作用するときには，支點 x に於ける荷重強度を p_x とすれば

$$\mathfrak{B}_x=\frac{l^3}{360}(7\,p_{x-1}+8\,p_x),\quad \mathfrak{A}_{x+1}=\frac{l^3}{360}(8\,p_x+7\,p_{x+1}),$$

$$K_x=\frac{l^2}{60}(7\,p_{x-1}+16\,p_x+7\,p_{x+1})$$

になる．然るに等變分布荷重の假定に依り一般に

$$p_x:p_n=x:n$$

であるから

$$K_x=\frac{p_n\,l^2}{2\,n}\,x,$$

從つて此の場合には

$$M_{x-1}+4\,M_x+M_{x+1}=-\frac{p_n l^2}{2n}x \qquad (98.11)$$

になる．此の特解を求めるために $M_x=\alpha x$ とし之を上式に代入すれば $\alpha=-p_n l^2/12n$ を得，從つて M_x の一般解は

$$M_x=C_1\beta^x+C_2\beta^{-x}-\frac{p_n\,l^2}{12\,n}\,x. \qquad (98.12)$$

常數 C_1, C_2 は邊緣條件 $M_0=0$ 及び $M_n=0$ より定める．即ち

$$C_1+C_2=0,\quad C_1\beta^n+C_2\beta^{-n}-\frac{p_n\,l^2}{12}=0$$

より

$$C_1=-C_2=-\frac{p_n\,l^2}{12}\cdot\frac{\beta^n}{1-\beta^{2n}}$$

を得，之を(98.12)に代入すれば

$$M_x=-\frac{p_n\,l^2}{12}\left[\frac{x}{n}-\frac{\beta^{n-x}-\beta^{n+x}}{1-\beta^{2n}}\right] \qquad (98.13)$$

を得る．本場合に於ても n が大なる場合には β^{2n} を1に對して省略することが出來る．

iii. 一スパンにのみ荷重が作用する場合.

第 m スパンにのみ荷重が作用するときには K_{m-1}, K_m 以外の K_x はすべて零に等しくなるから

$$\left.\begin{aligned}
&0<x<m-1: && M_{x-1}+4\,M_x+M_{x+1}=0,\\
&x=m-1: && M_{m-2}+4\,M_{m-1}+M_m=-K_{m-1},\\
&x=m: && M_{m-1}+4\,M_m+M_{m+1}=-K_m,\\
&m<x<n: && M_{x-1}+4\,M_x+M_{x+1}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (98.14)$$

になる．此のうち最初及び最後の階差方程式の一般解は(98.5)であるから，本場合に於ては

$$\left.\begin{aligned}
&0\leqq x\leqq m-1: && M_x=A\,\beta^x+B\,\beta^{-x},\\
&m\leqq x\leqq n: && M_x=C\,\beta^x+D\,\beta^{-x}
\end{aligned}\right\} \qquad (98.15)$$

とする．此の四個の常數は，邊緣條件 $M_0=0$ 及び $M_n=0$，即ち

$$A+B=0\quad 及び\quad C\,\beta^n+D\,\beta^{-n}=0,$$

及び $x=m-1, x=m$ に於ける境界條件，即ち(98.15)を(98.14)の第二及び第三式に代入することに依つて得られる式：

$$A\,\beta^{m-2}+B\,\beta^{-(m-2)}+4(A\,\beta^{m-1}+B\,\beta^{-(m-1)})+C\,\beta^m+D\,\beta^{-m}=-K_{m-1},$$

$$A\,\beta^{m-1}+B\,\beta^{-(m-1)}+4(C\,\beta^m+D\,\beta^{-m})+C\,\beta^{m+1}+D\,\beta^{-(m+1)}=-K_m$$

の四式より定められる．即ち

$$\left.\begin{aligned}
A&=-B\\
&=-\frac{\beta}{(1-\beta^2)(1-\beta^{2n})}[K_{m-1}(\beta^{m-1}-\beta^{2n-(m-1)})+K_m(\beta^m-\beta^{2n-m})],\\
C&=-\beta^{-2n}D\\
&=-\frac{\beta}{(1-\beta^2)(1-\beta^{2n})}[K_{m-1}(\beta^{m-1}-\beta^{-(m-1)})+K_m(\beta^m-\beta^{-m})]
\end{aligned}\right\} \qquad (98.16)$$

になり，かくして A, C を決定すれば

$$\left.\begin{aligned}
&0\leqq x\leqq m-1: && M_x=A(\beta^x-\beta^{-x}),\\
&m\leqq x\leqq n: && M_x=C(\beta^x-\beta^{2n-x})
\end{aligned}\right\} \qquad (98.17)$$

になる．尙(98.16)の分母に於ける $1-\beta^{2n}$ は十分近似的に1に等しとすることが出來る．之に依る誤差は $n=2$ の場合に於ても約0·5％に過ぎない．而して

$$\frac{\beta}{1-\beta^2}=-\frac{\sqrt{3}}{6}=-0{\cdot}2887$$

である．

例へば第 m スパンにのみ等分布荷重 p が作用するときには

$$K_{m-1}=K_m=\frac{6}{l}\cdot\frac{p\,l^3}{24}=\frac{p\,l^2}{4}$$

であるから，$1-\beta^{2n}\fallingdotseq 1$ とすれば

$$A=-\frac{\beta(\beta^{m-1}-\beta^{2n-m})}{1-\beta}\cdot\frac{p\,l^2}{4},\quad C=-\frac{\beta(\beta^{m-1}-\beta^{-m})}{1-\beta}\cdot\frac{p\,l^2}{4}$$

になり，從つて

$$\left.\begin{aligned}0\leqq x\leqq m-1:\quad M_x&=-\frac{p\,l^2}{4}\cdot\frac{\beta(\beta^{m-1}-\beta^{2n-m})}{1-\beta}(\beta^x-\beta^{-x}),\\ m\leqq x\leqq n:\quad M_x&=-\frac{p\,l^2}{4}\cdot\frac{\beta(\beta^{m-1}-\beta^{-m})}{1-\beta}(\beta^x-\beta^{2n-x})\end{aligned}\right\}\quad(98.18)$$

になる．

また第 m スパンに於て支點 $m-1$ より ξl，支點 m より $\xi' l$ の距離に單位集中荷重 $P=1$ が作用する場合には

$$K_{m-1}=1\cdot\xi'(1-\xi'^2)\cdot l=f_1(\xi')\cdot l,$$

$$K_m=1\cdot\xi(1-\xi^2)\cdot l=f_1(\xi)\cdot l$$

であるから，$1-\beta^{2n}\fallingdotseq 1$ とすれば(98.16)，(98.17)の第二式より

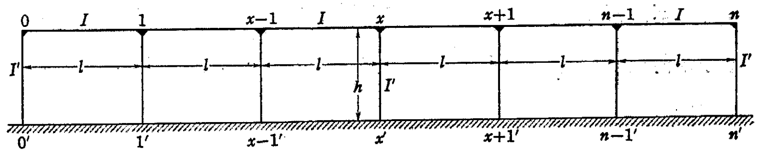
$$\begin{aligned}M_x=-\frac{\beta\,l}{1-\beta^2}[f_1(\xi')\cdot(\beta^{m-1}-\beta^{-(m-1)})\\ +f_1(\xi)\cdot(\beta^m-\beta^{-m})]\cdot(\beta^x-\beta^{2n-x})\end{aligned}\qquad(98.19)$$

になり，之に依つて支點上の曲げモーメントに對する影響線を得ることが出來る．即ち上式は載荷スパンより右方にある支點上の曲げモーメントを示すが故に，本式に於て $m=1,2,\ldots,x$ とすれば支點 x より左方に $P=1$ が作用する場合の M_x に對する影響線縱距が得られる．從つて順次に $x=1,2,\ldots,n-1$ と置き，各々の x に就て $m=1,2,\ldots,x$ とすれば M_1 に對しては0〜1間の，M_2 に對しては0〜2間の，…，M_{n-1} に對しては0〜$n-1$ 間の影響線が得られる．然るに一般に M_{n-x} の影響線の支點 $n-x$ より左方の部分は M_x の影響線の支點 x より右方の部分に相等しきが故に，上記の如くにして求めたる M_{n-x} の影響線の $n-x$ より左方の部分を M_x の影響線の x より左方の部分に續けて其の右方に左右反轉して描けば M_x の影響線の全體を得ることが出來る．

§ 99. 一層連續ラーメン

i. 柱脚固定の場合．

柱脚固定の一層連續ラーメンに就ては既に §90 に於て說明せるが如く一般に(90.4)或は(90.9)の諸式が成立する．之等の諸式は之を φ に關する二階の線型階差方程式と見做すことが出來るが係數及び荷重項が任意の函數なる場合に其の一般解を求めることは不可能である．それで問題を簡單にするために第342圖に示すが如く，スパン l，柱高 h，梁及び柱材の斷面二次モーメント I 及び I' を常數とし，且つ柱材の部材回轉角 ϑ を0と假定すれば[1]，梁に鉛直荷重が作用する場合に對して(90.4)より



第 342 圖

1) 此の假定を實現するためには梁の節點が水平變位を起さざる樣に任意の一節點を水平方向に對して支持する必要がある．然しさうでない場合に於ても此の假定に基因する誤差は鉛直荷重に對しては極めて僅少である．

$$
\left.\begin{array}{lll}
x=0: & 2(1+k)\varphi_0+\varphi_1 & = \qquad +C_{01},\\
0<x<n: & \varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1} & =-C_{x,x-1}+C_{x,x+1},\\
x=n: & \varphi_{n-1}+2(1+k)\varphi_n & =-C_{n,n-1}
\end{array}\right\} \qquad (99.1)
$$

を得る．但し θ_x を節點 x の回轉角とすれば

$$\varphi_x=\frac{2EI}{l}\theta_x,\quad k=\frac{I'l}{Ih}$$

であり，$C_{x,x-1}$, $C_{x,x+1}$ 等は撓角法に於ける荷重項である．(99.1) の第二式は φ_x に關する常數係數の二階線型階差方程式であり，第一及び第三式は之に對する邊緣條件式に相當する．

(99.1)の第二式の一般解を求めるには先づ之に對應する同次方程式：

$$\varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1}=0 \qquad (99.2)$$

の一般解を知る必要がある．そのために之に附隨する特性方程式：

$$\beta^2+2(2+k)\beta+1=0$$

の根を求むれば

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1\\ \beta_2\end{array}\right\}=-(2+k)\pm\sqrt{(2+k)^2-1} \qquad (99.3)$$

になり，$\beta_1\beta_2=1$ であるから，$\beta_1=\beta$ とすれば(99.2)の一般解は

$$\varphi_x=C_1\beta^x+C_2\beta^{-x} \qquad (99.4)$$

になる．β は負數，其の絶對値は常に $2-\sqrt{3}=0{\cdot}2679$ より小である．

次に二三の特殊の荷重狀態に對して記述する．先づ梁のすべてのスパンに等分布荷重 p が作用する場合には $C_{x,x-1}$, $C_{x,x+1}$ 等はすべて $pl^2/12$ に等しきが故に

$$
\left.\begin{array}{lll}
x=0: & 2(1+k)\varphi_0+\varphi_1 & =+pl^2/12,\\
0<x<n: & \varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1} & =0,\\
x=n: & \varphi_{n-1}+2(1+k)\varphi_n & =-pl^2/12
\end{array}\right\} \qquad (99.5)
$$

になる．此の第二式を階差方程式と考へれば，其の一般解は (99.4) である．此の常數を定めるために(99.4)を(99.5)の第一及び第三式に代入すれば

$$2(1+k)(C_1+C_2)+C_1\beta+C_2\beta^{-1}=+pl^2/12,$$

$$C_1\beta^{n-1}+C_2\beta^{-(n-1)}+2(1+k)(C_1\beta^n+C_2\beta^{-n})=-pl^2/12$$

になり，之を解けば

$$
\left.\begin{array}{l}
C_1=+\dfrac{pl^2}{12}\cdot\dfrac{\beta^{-n}[2(1+k)+\beta]+[2(1+k)+\beta^{-1}]}{\beta^{-n}[2(1+k)+\beta]^2-\beta^n[2(1+k)+\beta^{-1}]^2},\\[2ex]
C_2=-\dfrac{pl^2}{12}\cdot\dfrac{[2(1+k)+\beta]+\beta^n[2(1+k)+\beta^{-1}]}{\beta^{-n}[2(1+k)+\beta]^2-\beta^n[2(1+k)+\beta^{-1}]^2}
\end{array}\right\} \qquad (99.6)
$$

になる．然しスパン數 n が大なる場合には上式の分子及び分母中の第二項は夫々第一項に對して省略することが出來るから

$$C_1=-C_2\beta^{-n}=+\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{1}{2(1+k)+\beta}=-\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{\beta}{1+2\beta} \qquad (99.7)$$

になり 從つて φ_x は次の如くになる．

$$\varphi_x=-\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{\beta(\beta^x-\beta^{n-x})}{1+2\beta}. \qquad (99.8)$$

若しラーメンの第 m スパンにのみ荷重が作用するときには $C_{m-1,m}$ 及び $C_{m,m-1}$ 以外のすべての C は 0 に等しいから，(99.1)より

$$
\left.\begin{array}{lll}
x=0: & 2(1+k)\varphi_0+\varphi_1 & =0,\\
0<x<m-1: & \varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1} & =0,\\
x=m-1: & \varphi_{m-2}+2(2+k)\varphi_{m-1}+\varphi_m & =+C_{m-1,m},\\
x=m: & \varphi_{m-1}+2(2+k)\varphi_m+\varphi_{m+1} & =-C_{m,m-1},\\
m<x<n: & \varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1} & =0,\\
x=n: & \varphi_{n-1}+2(1+k)\varphi_n & =0
\end{array}\right\} \qquad (99.9)
$$

を得る．此のうち $0<x<m-1$ 及び $m<x<n$ に對する式は (99.2)の同次方程式であり，其の解は(99.4)である．故に

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq x \leqq m-1: \quad & \varphi_x = A\beta^x + B\beta^{-x}, \\ m \leqq x \leqq n: \quad & \varphi_x = C\beta^x + D\beta^{-x} \end{aligned}\right\} \qquad (99.10)$$

とすれば，常數 A, B, C, D は(99.9)のうち $x=0$ 及び $x=n$ に於ける邊緣條件並に $x=m-1$ 及び $x=m$ に於ける境界條件式に(99.10)を代入して得られる式の合計四個の式より定められる．かくして簡單のために

$$a = \frac{2+\beta^{-1}}{2+\beta}, \quad b = -\frac{1-\beta^2}{\beta}(a^2-\beta^{2n}) \qquad (99.11)$$

とすれば

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{b}\left[-C_{m-1,m}(a\beta^{m-1}-\beta^{2n-m+1}) + C_{m,m-1}(a\beta^m - \beta^{2n-m})\right], \\ C &= \frac{a}{b}\left[-C_{m-1,m}(\beta^{m-1} - a\beta^{-(m-1)}) + C_{m,m-1}(\beta^m - a\beta^{-m})\right], \\ B &= -aA, \quad D = -\frac{\beta^{2n}}{a}C \end{aligned}\right\} \qquad (99.12)$$

になり，之を(99.10)に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq x \leqq m-1: \quad & \varphi_x = A(\beta^x - a\beta^{-x}), \\ m \leqq x \leqq n: \quad & \varphi_x = C\left(\beta^x - \frac{\beta^{2n-x}}{a}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (99.13)$$

になる．尙，通常の場合には a^2 に對して β^{2n} を省略することが出來，從つて $b = -a^2(1-\beta^2)/\beta$ とすることが出來る．

例へば第 m スパンにのみ等分布荷重 p が作用するときには

$$C_{m-1,m} = C_{m,m-1} = pl^2/12$$

であるから

$$A = -\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{1-\beta}{b}(a\beta^{m-1} + \beta^{2n-m}),$$

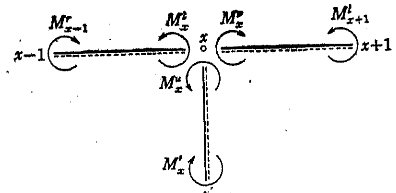
$$C = -\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{a(1-\beta)}{b}(\beta^{m-1} + a\beta^{-m})$$

になり，之を(99.13)に代入し，且つ $b = -a^2(1-\beta^2)/\beta$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} & 0 \leqq x \leqq m-1: \\ & \quad \varphi_x = +\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{\beta}{a^2(1+\beta)}(a\beta^{m-1} + \beta^{2n-m})(\beta^x - a\beta^{-x}), \\ & m \leqq x \leqq n: \\ & \quad \varphi_x = +\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{\beta}{a^2(1+\beta)}(\beta^{m-1} + a\beta^{-m})(a\beta^x - \beta^{2n-x}) \end{aligned}\right\} \qquad (99.14)$$

になる．

何れの荷重狀態に於ても上記の如くにして φ_x が求められれば，節點 x の左，右及び下に於ける曲げモーメント M_x^l, M_x^r, M_x^u 及び柱脚 x' に於ける曲げモーメント M_x' は(90.2)式に依つて求められる．但し本節の場合には $\psi=0$，且つ梁にのみ荷重が作用するものとするが故に



第 343 圖

$$\left.\begin{aligned} M_x^l &= -(2\varphi_x + \varphi_{x-1}) + C_{x,x-1}, \\ M_x^r &= +(2\varphi_x + \varphi_{x+1}) - C_{x,x+1}, \\ M_x^u &= -2k\varphi_x, \quad M_x' = k\varphi_x \end{aligned}\right\} \qquad (99.15)$$

になる．

ii. 柱脚回轉端の場合

柱脚がすべて回轉端である場合には(90.13)より

$$\left.\begin{aligned} x=0: \quad & \left(2+\frac{3}{2}k\right)\varphi_0 + \varphi_1 = +C_{01}, \\ 0<x<n: \quad & \varphi_{x-1} + \left(4+\frac{3}{2}k\right)\varphi_x + \varphi_{x+1} = -C_{x,x-1} + C_{x,x+1}, \\ x=n: \quad & \varphi_{n-1} + \left(2+\frac{3}{2}k\right)\varphi_n = -C_{n,n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (99.16)$$

になる．本式を(99.1)に比較すればただ $\varphi_0, \varphi_x, \varphi_n$ の係數が異なるだけであつて，其他はすべて相等しい．而して

$$k'=\frac{3}{4}k \qquad (99.17)$$

とすれば(99.16)は(99.1)と全く同じ形になる．故にiに於けるkの代りにk'を代入すればiに於て得たる結果はすべて其のまま柱脚が回轉端の場合に適用することが出來る．但し本場合に於ける曲げモーメントは(90.12)に從つて次の如くになる．

$$\left.\begin{aligned} M_x^l &= -(2\varphi_x+\varphi_{x-1})+C_{x,x-1},\\ M_x^r &= +(2\varphi_x+\varphi_{x+1})-C_{x,x+1},\\ M_x^u &= -\frac{3}{2}k\varphi_x, \qquad M_x'=0. \end{aligned}\right\} \qquad (99.18)$$

§100. 斷面一樣にしてスパン相等しき彈性支承上の連續梁

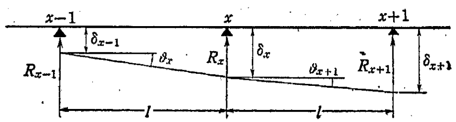
斷面一樣にしてスパンが相等しき連續梁に於て支點が變位する場合に對する三連モーメントの定理の式は，(73.1)より

$$M_{x+1}+4M_x+M_{x-1}+\frac{6EI}{l}(\vartheta_{x+1}-\vartheta_x)=-\frac{6}{l}(\mathfrak{B}_x+\mathfrak{A}_{x+1})$$

である(第344圖)參照．今，各支點の變位δが玆に作用する反力Rに正比例するものと假定すれば，一般に

$$\delta_x=c\cdot R_x \qquad (100.1)$$

とすることが出來る．cは支點の彈性條件に依つて定まる常數であつて，其のヂメンシヨンは[長]/[力]である．(100.1)を假定すれば



第 344 圖

$$\vartheta_{x+1}-\vartheta_x=\frac{1}{l}(\delta_{x+1}-2\delta_x+\delta_{x-1})=\frac{c}{l}(R_{x+1}-2R_x+R_{x-1})$$

になり，之を冒頭の式に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} M_{x+1}+4M_x+M_{x-1}+\mu(R_{x+1}-2R_x+R_{x-1})l &= -K_x,\\ \mu=\frac{6EI\cdot c}{l^3}, \qquad K_x &= \frac{6}{l}(\mathfrak{B}_x+\mathfrak{A}_{x+1}) \end{aligned}\right\} \qquad (100.2)$$

になる．μは無名數の常數である．

次に支點xに於ける鉛直方向の釣合條件(74.2)より，本場合の如くスパンが等しき場合には

$$M_{x+1}-2M_x+M_{x-1}-R_x l=-R_{x,0}\,l \qquad (100.3)$$

を得る．但し$R_{x,0}$は支點xの左右のスパンを單純梁と假定するときの支點xに於ける反力である．

(100.2)及び(100.3)はM_x及びR_xを未知數とする聯立階差方程式であり，M_x及びR_xに於ける最高の階位數は共に2であるから，$s=2+2=4$，卽ちM_x及びR_xの一般解には四個の任意常數が含まれねばならない．

扨て(100.2)，(100.3)の一般解を求めるに先立ち，之に相當する聯立同次階差方程式：

$$\left.\begin{aligned} M_{x+1}+4M_x+M_{x-1}+\mu(R_{x+1}-2R_x+R_{x-1})l &= 0,\\ M_{x+1}-2M_x+M_{x-1}-R_x l &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (100.4)$$

の一般解を求める．そのために先づ§97に從つて

$$M_x=\beta^x, \qquad R_x l=\alpha\cdot\beta^x \qquad (100.5)$$

と置き，之を(100.4)に代入すればα,βに關する聯立特性方程式：

$$\left.\begin{aligned} \beta^2+4\beta+1+\mu\alpha(\beta^2-2\beta+1) &= 0,\\ \beta^2-2\beta+1-\alpha\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (100.6)$$

を得る．本式よりα,βを求めるために先づ上記兩式よりβを消去すれば

$$\mu\alpha^2+\alpha+6=0 \qquad (100.7)$$

になり，之を解けば

$$\alpha_1=\frac{-1+\sqrt{1-24\mu}}{2\mu}, \qquad \alpha_2=\frac{-1-\sqrt{1-24\mu}}{2\mu} \qquad (100.8)$$

を得, 之を(100.6)の第二式に代入し, それよりβを解けば

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=\alpha_1 \text{ に對し}\\&\qquad\beta_1=1+\frac{\alpha_1}{2}-\sqrt{\left(1+\frac{\alpha_1}{2}\right)^2-1},\qquad \beta_1'=\beta_1^{-1};\\&\alpha=\alpha_2 \text{ に對し}\\&\qquad\beta_2=1+\frac{\alpha_2}{2}-\sqrt{\left(1+\frac{\alpha_2}{2}\right)^2-1},\qquad \beta_2'=\beta_2^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{100.9}$$

を得る. 故に(100.4)の聯立階差方程式の一般解は

$$\left.\begin{aligned}M_x&=C_1\beta_1^x+C_2\beta_2^x+C_3\beta_1^{-x}+C_4\beta_2^{-x},\\R_x l&=C_1\alpha_1\beta_1^x+C_2\alpha_2\beta_2^x+C_3\alpha_1\beta_1^{-x}+C_4\alpha_2\beta_2^{-x}\end{aligned}\right\}\tag{100.10}$$

になる.

若し $1-24\mu<0$, 即ち $\mu>1/24$ なる場合には α,β は複素數になる. かかる場合には簡單のために

$$a=\frac{1}{2\mu},\quad b=\frac{\sqrt{24\mu-1}}{2\mu}$$

とすれば

$$\alpha_1=-a+ib,\quad \alpha_2=-a-ib\tag{100.11}$$

になり, 更に

$$\rho=|\sqrt{p^2+q^2}|,\quad \tan\varphi=q/p,$$

$$p=\frac{2-a}{2}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left\{\left(\frac{2-a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2-1\right\}^2+\left\{\frac{(2-a)b}{2}\right\}^2}+\left(\frac{2-a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2-1\right]},$$

$$q=\frac{b}{2}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left\{\left(\frac{2-a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2-1\right\}^2+\left\{\frac{(2-a)b}{2}\right\}^2}-\left(\frac{2-a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+1\right]}$$

と置けば

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad \beta_1'=\frac{1}{\rho}(\cos\varphi-i\sin\varphi);\\\beta_2&=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi),\quad \beta_2'=\frac{1}{\rho}(\cos\varphi+i\sin\varphi)\end{aligned}\right\}\tag{100.12}$$

になる. 從つて(100.11), (100.12)を(100.10)に代入すれば此の場合の一般解が得られる. 而して一般に

$$(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^x=\cos x\varphi\pm i\sin x\varphi$$

なることを考慮し, 一般解に於て實數部と虛數部とを分離し, 且つ新しき任意常數:

$$A=C_1+C_2,\quad B=i(C_1-C_2),\quad C=C_3+C_4,\quad D=-i(C_3-C_4)$$

を導入すれば M_x 及び $R_x l$ の一般解は次の如くになる.

$$\left.\begin{aligned}M_x&=\Psi_1(x),\\R_x l&=-a\cdot\Psi_1(x)-b\cdot\Psi_2(x);\end{aligned}\right\}\tag{100.13}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1(x)&=\rho^x(A\cos x\varphi+B\sin x\varphi)+\rho^{-x}(C\cos x\varphi+D\sin x\varphi),\\\Psi_2(x)&=\rho^x(A\sin x\varphi-B\cos x\varphi)-\rho^{-x}(C\sin x\varphi-D\cos x\varphi).\end{aligned}\right\}\tag{100.14}$$

若し $1-24\mu=0$, 即ち $\mu=1/24$ なる場合には

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1=\alpha_2&=-\frac{1}{2\mu}=-12,\\\beta_1=\beta_2&=-5-2\sqrt{6}\end{aligned}\right\}\tag{100.15}$$

になり, 特解が二組に減ずる. 然し此の場合には§97に於て說明せるが如く

$$\left.\begin{aligned}&M_x=x\beta_1^x,\qquad R_x l=\alpha_1(x+\gamma_1)\beta_1^x\\\text{及び}\quad&M_x=x\beta_1^{-x},\quad R_x l=\alpha_1(x+\gamma_2)\beta_1^{-x}\end{aligned}\right\}\tag{100.16}$$

が特解になる. 此の γ_1 及び γ_2 を定めるために(100.16)を(100.3)に代入すれば

$$(x+1)\beta_1^2-2x\beta_1+(x-1)-\alpha_1(x+\gamma_1)\beta_1=0,$$

$$(x+1)-2x\beta_1+(x-1)\beta_1^2-\alpha_1(x+\gamma_2)\beta_1=0$$

になり, 玆に於て(100.6)の第二式の關係を考慮すれば

$$\beta_1^2-1-\alpha_1\beta_1\gamma_1=0,$$

$$1-\beta_1^2-\alpha_1\beta_1\gamma_2=0$$

になり，之より

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{\beta_1^2 - 1}{\alpha_1 \beta_1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

を得る．かくして此の場合に於ける(100.4)の一般解は次の如くになる．

$$\left.\begin{aligned} M_x &= (C_1 + C_2 x)(-5 - 2\sqrt{6})^x + (C_3 + C_4 x)(-5 - 2\sqrt{6})^{-x}, \\ R_x l &= -4[3C_1 + C_2(3x + \sqrt{6})](-5 - 2\sqrt{6})^x \\ &\quad - 4[3C_3 + C_4(3x - \sqrt{6})](-5 - 2\sqrt{6})^{-x}. \end{aligned}\right\} \tag{100.17}$$

上記の如くにして求めたる解は(100.4)の一般解である．故に(100.2)，(100.3)の非同次方程式の一般解は，上記の解に(100.2)，(100.3)の特解を加へることに依つて求められる．然し任意の荷重項に對して非同次方程式の特解を求めることは極めて困難であつて，かかる場合には§98或は§99に於て爲せるが如く任意の一スパンにのみ荷重が作用する場合を考へ，之に依つて影響線を求める方法を採用するのが適當である．例へば左端が0，右端がnであるnスパンの場合に，第mスパンにのみ荷重が作用するものとすれば，$x=m-1$及び$x=m$以外の荷重項はすべて零であるから，$0<x<m-1$及び$m<x<n$に對して(100.4)の同次方程式が成立する．從つて其の一般解は(100.10)，(100.14)或は(100.17)に依つて與へられる．但し之等の一般解中の任意常數は$0 \leqq x \leqq m-1$と$m \leqq x \leqq n$に對し夫夫異なつたものになり，從つて合計八個の常數を決定する必要がある．それには次の如き八個の邊緣條件及び境界條件がある．即ち

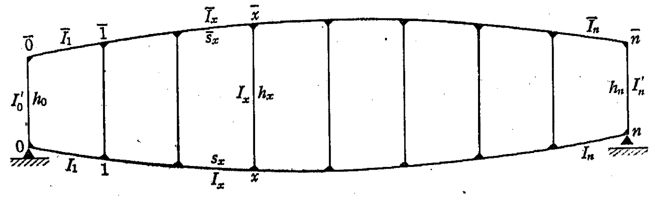
1. $x=0$に於て$M_0=0$;　$x=n$に於て$M_n=0$;
2. $x=0$及び$x=n$に於ける鉛直方向の釣合條件;
3. $x=m-1$及び$x=m$に於ける(100.2)及び(100.3)式

である．但し之等の條件より八個の任意常數を決定する順序の詳細は玆には省略する．

之に就ては例へば章末に示す文獻のうち(22)或は(30)を參照され度い．

§101．フィレンデール桁

第345圖に示すが如き構造をフィレンデール桁と言ふ．之は恰も普通のトラスより斜材を除去し，其の代りに弦材と柱材とを剛結したものであつて，前世紀の終りに於て白耳義のA. Vierendeel[1]が始めて提案し橋梁その他曲げを受くる部材に應用したものである．其の後此の種の型式の橋梁は實際に多數架設せられ，其の理論に就ても各方面に於て詳細に論ぜられ各種の解法が發表せられた[2]．以下に説明するのはBleichに依つて提案せら



第　345　圖

1) *Les ponts architecturaux en métal*, Ann. Trav. Publ. Belg. (1896), 725. "*Essais officiels du ponts système Vierendeel à Tervueren*", (1897). "*Longerons en trelles et longerons à arcades*" Bruxelles et Paris (1897). *Théorie générale des Poutres Vierendeel*, Mém. Soc. ing. civ. France (1900). *Le système Vierendeel aux États-Unis*, Ann. Trav. Publ. Belg. (1902), 310. "*Cours de stabilité des constructions*", Paris (1903), Tome V; (1920) Tome IV. *Eisenbetonträger für grosse Spannweiten (System Vierendeel)*, B. u. E. (1907). *Der Vierendeelträger im Brückenbau*, Eisenbau (1911). *Einige Betrachtungen über das Wesen des Vierendeelträgers*, Eisenbau (1912). *Ueber die Festigkeit eines Vierendeelknotens*, Eisenbau (1913).

2) Lambin, A. et Christophe, P.: *Le ponts Vierendeel*, Ann. Trav. Publ. Belg. (1898), 53. Joyant, M.: *Note sur les calculs de stabilité des ponts en arcades du système Vierendeel*, Ann. Trav. Publ. Belg. (1902), 223. Morizot, A.: *Les ponts métalliques, système Vierendeel*, Gen. civ. (1905), 108. Patton, E.: *Ueber diagonallose Träger*, Zentralbl. d. Bauverw. (1907). Kalmer: *Beitrag zur Berechnung der Eisenbetonträger nach System Vierendeel*, B. u. E. (1908). Frandsen, P.: *Beitrag zur Theorie der Vierendeelträger*, B. u. E. (1909). Mann, L.: "*Statische Berechnung steifer Vierecksnetze*", Berlin (1909). *

れた四連モーメントの定理に依る彈性方程式の誘導と階差方程式としての其の解法である.

i. 彈性方程式.

第 345 圖の如く n 個の格間を有するフィレンデール桁は一般に內部的に $3n$ 次の不靜定であつて從つて一般には $3n$ 個の彈性方程式を解く必要がある. 然し以下に說明するが如き適當なる假定を設けることに依つてただ n 個の彈性方程式を解けばよいことになる.

今, 荷重はすべて節點に集中して作用するものと假定し, 且つ柱材の長さの變化(之は一般に極めて僅少である)を無視するものとすれば上弦材及び下弦材の撓みは全く相等しくなる. 故に或る一つの格間に於て下弦材の斷面二次モーメント, 長さ及び水平に對する角を I, s, α, 上弦材のそれを $\bar{I}, \bar{s}, \bar{\alpha}$

* v. Balicki, R.: "*Einflusslinien für die Berechnung paralleler Vierendeelträgers*", Forschungsarb. a. d. Geb. d. Eisenbetonbaues, XII, Berlin (1910). Ostenfeld, A.: *Beitrag zur Berechnung von Vierendeelträgern*, B. u. E. (1910). Marcus, H.: *Beitrag zur Theorie der Vierendeelschen Träger*, Arm. Beton (1910). Freitag, L.: "*Gesetzmässigkeiten in der Statik des Vierendeelträgers, nebst Verfahren zur unmittelbaren Gewinnung der Einflusslinien durch Reihenbildung*", München u. Berlin (1911). Reiche, E.: "*Vierendeelträger mit parallelen Gurten*", Wien (1911). Mann, L.: *Das strebenlose Fachwerk*, Festschr. Müller-Breslau, Leipzig (1912). Mohr, O.: *Die Berechnung der Pfostenträger*, Eisenbau (1912). Czech, F.: *Der Vierendeelträger in der Geschichte des Eisenbaues*, Eisenbau (1912). Seydel: *Zur Frage der baulichen Durchbildung des Pfostenträgers*, Eisenbau (1912). Busse, R.: *Entwurf einer Rahmenbrücke über die Ems*, Eisenbau (1912). Ostenfeld, A.: *Beitrag zur Berechnung von Vierendeelträgern*, Eisenbau (1912). Schlendera, M.: *Vierendeelbalken mit Kahneiseneinlagen*, B. u. E. (1912). Mecklenbeck, M. u. Ehrlich: *Knotenpunkte von Vierendeelträgern und verwandte Gebilde*, Eisenbau (1913). Czech, F.: *Kriegsbrücken im Vierendeelsystem*, Eisenbau (1913). Wansleben, F.: *Die Berechnung doppeltsymmetrischer Pfostenträger*, Eisenbau (1913). Engesser, F.: *Die Berechnung der Rahmenträger*, Z. f. Bauw. (1913). Mehrtens: *Die Ausbildung der Knoten von Vierendeelträgern*, Eisenbau (1914). Grüning, M.: *Die Spannungen im Knotenpunkt eines Vierendeelträgers*, Eisenbau (1914). Putlitz, W.: *Berechnung von Vie-***

とし, 下弦材の任意の橫斷面に作用する曲げモーメントを M, 之と同一鉛直線上にある上弦材の橫斷面に作用する曲げモーメントを $\bar{M}$ とし, 上下兩弦材共に其の下方に視點をとつて M 又は $\bar{M}$ の正負を決定するものとすれば

$$\frac{\bar{M}}{E\bar{I}\cos\bar{\alpha}}=\frac{M}{EI\cos\alpha}$$

でなければならない. 此の關係を書き換へれば

$$\frac{\bar{M}}{M}=\frac{\bar{I}\cos\bar{\alpha}}{I\cos\alpha}=\frac{\bar{I}s}{I\bar{s}}$$

になり, 玆に於て

$$\frac{\bar{I}s}{I\bar{s}}=1,\quad 即ち\quad \frac{\bar{I}}{I}=\frac{\bar{s}}{s}=\frac{\sec\bar{\alpha}}{\sec\alpha} \tag{101.1}$$

と假定すれば, 一般に

$$\bar{M}=M \tag{101.2}$$

になる. また上下兩弦材の撓みが相等しくなることから, 同一格間に於け

***rendeelträgern mit Hilfe des Verfahrens der starren Ersatzstäbe*, Eisenbau (1914, 1915). Pöschl, Th.: *Ueber eine neue angenäherte Berechnung der Rahmenträger*, Arm. Beton (1914). Enyedi, B.: *Zeichnerische Untersuchung der Vierendeelträger mit parallelen Gurten*, B. u. E. (1914). Lührs, J.: *Die statische Berechnung des Rahmenträgers*, Eisenbau (1915). Ljungberg, K.: *Beitrag zur Berechnung von Rahmenbalken*, Eisenbau (1916). Bleich, F.: "*Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes*", Berlin (1918), 125. Engesser, F.: "*Die Berechnung der Rahmenträger mit besonderer Rücksicht auf die Anwendung*", Berlin (1919). Lerch, K.: *Berechnung des Vierendeelträgers mit Hilfe von mehrgliederigen Elastizitätsgleichungen*, Eisenbau (1920). Kriso, K.: "*Statik der Vierendeelträger*", Berlin (1922). Schmidt, E.: *Ermittlung statisch unbestimmten Grössen hochgradig statisch unbestimmter Rahmen unter Anwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme*, Bautechn. (1926). Bleich, F. u. Melan, E.: "*Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik*", Berlin u. Wien (1927). 吉町: 平行弦を有する重框構の一解法, 土學, **3**(1917), 1433. シビル社: "復興局橋梁設計計算集, I", 41(昭和 6 年). 中島: 四邊形構桁の解法, 土木工學, **4** (1935). 鷹部屋: フィレンデールトラスの實用的計算と X 分配法, 土木工學, **4** (1935); **5** (1936). 中島: 平行弦フィレンデール桁, 土木工學, **6**(1937). 鷹部屋: フィレンデール構橋の實用計算法に就て, 土學, **23**(1937), 793; 北工紀, **4-2** (1937). 佐藤: 上下弦に任意の慣性モーメントを有するフィレンデール構の應力算定法, 土學, **25** (1939), 599. 小野: 一般フィレンデールトラスの應力計算に就て, 土學, **25** (1939), 1173.

る下弦材及び上弦材の部材回轉角を ϑ 及び $\bar{\vartheta}$ とすれば十分近似的に

$$\bar{\vartheta} = \vartheta \qquad (101.3)$$

とすることが出來る[1].

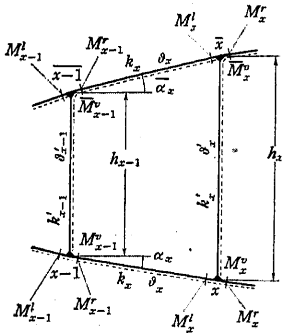
以上の關係を考慮して下弦節點 x 或は上弦節點 $\bar{x}$ の左及び右に於ける曲げモーメントを M^l_x, M^r_x, 柱材の下端及び上端に於ける曲げモーメントを $M^v_x, \overline{M}^v_x$ とし, 柱材に關してはすべて其の右側に視點をとつて曲げモーメントの正負を定むるものとすれば(第346圖)

$$M^l_x - M^r_x - M^v_x = 0, \quad M^l_x - M^r_x + \overline{M}^v_x = 0$$

であるから

$$-\overline{M}^v_x = M^v_x = M^l_x - M^r_x \qquad (101.4)$$

になる. かくの如くにしてフィレンデール桁の解析に於ては下弦材又は上弦材の節點のみに就て其の彈性條件を考慮すればよいことになる.



第 346 圖

扨て彈性方程式を導くために或る適當なる部材の斷面二次モーメント I_C 及び長さ s_C を基準とし

$$k_x = \frac{I_C\, s_x}{I_x\, s_C} = \frac{I_C\, \bar{s}_x}{I_x\, s_C}, \quad k'_x = \frac{I_C\, h_x}{I'_x\, s_C}, \quad \rho = \frac{6EI_C}{s_C}$$

と置き, 柱材 $x \sim \bar{x}$ の部材回轉角を ϑ^v_x とし, 四連モーメントの定理(83.2)を

$$\overline{x-1} \sim (x \sim 1) \sim x \quad 及び \quad (x-1) \sim x \sim \bar{x}$$

に適用すれば

$$-k'_{x-1}(\overline{M}^v_{x-1} + 2\,\overline{M}^v_{x-1}) + k_x(2M^r_{v-1} + M^l_x) = \rho(\vartheta'_{x-1} - \vartheta_x),$$

$$k_x(M^r_{x-1} + 2M^l_x) + k'_x(2M^v_x + M^v_x) = \rho(\vartheta_x - \vartheta'_x)$$

を得, $\overline{M}^v_{x-1}$ 及び $\overline{M}^v_x$ に(101.4)の關係を代入すれば

1) 上下兩弦材が平行なる場合, 部材の長さの變化を無視すれば嚴密に成立する.

$$-k'_{x-1}M^v_{x-1} + k_x(2M^r_{x-1} + M^l_x) = \rho(\vartheta'_{x-1} - \vartheta_x),$$

$$k_x(M^r_{x-1} + 2M^l_x) + k'_xM^v_x = \rho(\vartheta_x - \vartheta'_x)$$

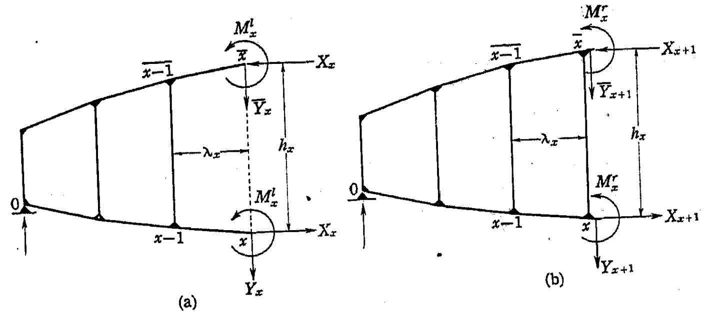
になり, 此の兩式の兩邊を夫々加へ合せれば

$$-k'_{x-1}M^v_{x-1} + 3\,k_x(M^r_{x-1} + M^l_x) + k'_xM^v_x = \rho(\vartheta'_{x-1} - \vartheta'_x)$$

になる. 然るに $\vartheta'_{x-1} - \vartheta'_x$ は $x-1$ 及び x に於ける柱材の部材回轉角の差であつて, 柱材に於けると同樣に弦材の長さの變化をも無視するものとすれば $\vartheta'_{x-1} - \vartheta'_x = 0$ とすることが出來, 從つて

$$-k'_{x-1}M^v_{x-1} + 3\,k_x(M^r_{x-1} + M^l_x) + k'_xM^v_x = 0 \qquad (101.5)$$

になる. 之卽ち求める彈性方程式であるが, 本式は性質の異なる曲げモーメントに依つて示されて其の取扱に不便であるので次の如くに變換する.



第 347 圖

卽ち荷重はすべて鉛直に作用するものとし第347圖に就て

$X_x = x - \bar{x}$ の左(卽ち第 x 格間)に於ける弦材の切斷面に作用すべき水平力,

$Y_x, \overline{Y}_x = x - \bar{x}$ の左(卽ち第 x 格間)に於ける下弦材或は上弦材の切斷面に作用すべき鉛直力,

$M_{x,0} = x - \bar{x}$ より左方に作用する外力の x 又は $\bar{x}$ に對するモーメント(卽

ちフィレンデール桁を單純梁にて置換へたる場合の $x-\bar{x}$ の位置に於ける曲げモーメント),

$Q_{x,0}=x-\bar{x}$ より左方に作用する外力の合力(即ち第 x 格間に於ける剪斷力)

とする. $X_x, Y_x, \overline{Y}_x$ の正の方向は第347圖に示せる方向とし, $M_{x,0}$ 及び $Q_{x,0}$ の正負は單純梁に於けると同樣に定める. 然るときは節點 x に於けるモーメントの釣合條件より

$$M_x^l=\frac{1}{2}(M_{x,0}-X_x h_x),\quad M_x^r=\frac{1}{2}(M_{x,0}-X_{x+1}h_x) \qquad (101.6)$$

を得, 從つて(101.4)より

$$M_x^v=M_x^l-M_x^r=\frac{1}{2}(X_{x+1}-X_x)h_x \qquad (101.7)$$

になる.

また第347圖(a)より明かなるが如く

$$M_{x-1}^r=M_x^l+X_x\lambda_x\tan\alpha_x-Y_x\lambda_x,$$

$$M_{x-1}^r=M_x^l+X_x\lambda_x\tan\bar{\alpha}_x-\overline{Y}_x\lambda_x$$

なるが故に此の兩式の兩邊を減算すれば

$$0=X_x\lambda_x(\tan\alpha_x-\tan\bar{\alpha}_x)-(Y_x-\overline{Y}_x)\lambda_x$$

即ち

$$Y_x-\overline{Y}_x=X_x(\tan\alpha_x-\tan\bar{\alpha}_x)$$

になる. 然るに鉛直方向の釣合條件より

$$Y_x+\overline{Y}_x=Q_{x,0}$$

なるが故に上記兩式より $Y_x, \overline{Y}_x$ を求むれば次の如くになる.

$$\left.\begin{aligned}Y_x&=\frac{1}{2}[Q_{x,0}+X_x(\tan\alpha_x-\tan\bar{\alpha}_x)],\\ \overline{Y}_x&=\frac{1}{2}[Q_{x,0}-X_x(\tan\alpha_x-\tan\bar{\alpha}_x)].\end{aligned}\right\} \qquad (101.8)$$

而して下弦材, 上弦材及び柱材の軸方向力を L, U 及び V とすれば

$$\left.\begin{aligned}L_x&=X_x\cos\alpha_x+Y_x\sin\alpha_x\\ &=X_x\Big[\cos\alpha_x+\frac{\sin\alpha_x}{2}(\tan\alpha_x-\tan\bar{\alpha}_x)\Big]+\frac{1}{2}Q_{x,0}\sin\alpha_x,\\ U_x&=-X_x\cos\bar{\alpha}_x-\overline{Y}_x\sin\bar{\alpha}_x\\ &=-X_x\Big[\cos\bar{\alpha}_x-\frac{\sin\bar{\alpha}_x}{2}(\tan\alpha_x-\tan\bar{\alpha}_x)\Big]-\frac{1}{2}Q_{x,0}\sin\alpha_x,\\ V_x&=Y_{x+1}-Y_x\\ &=\frac{1}{2}[X_{x+1}(\tan\alpha_{x+1}-\tan\bar{\alpha}_{x+1})-X_x(\tan\alpha_x-\tan\bar{\alpha}_x)\\ &\qquad+Q_{x+1,0}-Q_{x,0}]\end{aligned}\right\} \qquad (101.9)$$

になる. かくの如くフィレンデール桁の各部材の曲げモーメント其他を決定するには各格間に於ける水平力 X を求むればよいことになる. 此の X は彈性方程式(101.5)より決定せられる. 即ち(101.6)及び(101.7)を(101.5)に代入すれば X のみを未知數とする方程式:

$$k_{x-1}'h_{x-1}X_{x-1}-[k_{x-1}'h_{x-1}+3k_x(h_{x-1}+h_x)+k_x'h_x]X_x+k_x'h_xX_{x+1}$$
$$=-3k_x(M_{x-1,0}+M_{x,0}) \qquad (101.10)$$

になる. 之即ち X_x に關する階差方程式である. 但し $x=1$ 及び $x=n$ に於ては $X_x=0, M_{0,0}=0$ 或は $X_{n+1}=0, M_{n,0}=0$ であるから

$$\left.\begin{aligned}x=1:&\quad -[k_0'h_0+3k_1(h_0+h_1)+k_1'h_1]X_1+k_1'h_1X_2=-3k_1M_{1,0},\\ x=n:&\quad k_{n-1}'h_{n-1}X_{n-1}-[k_{n-1}'h_{n-1}+3k_n(h_{n-1}+h_n)+k_n'h_n]X_n\\ &\qquad=-3k_nM_{n-1,0}\end{aligned}\right\}. \qquad (101.11)$$

になる.

ii. 弦材及び柱材の斷面が夫々一樣なる平行弦フィレンデール桁.

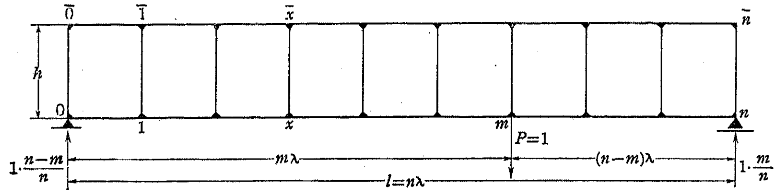
すべての格間長が λ に等しき平行弦フィレンデール桁に於て上下兩弦材の斷面二次モーメント I 及び柱材の斷面二次モーメント I' を常數とし

$$\nu=\frac{k}{k'}=\frac{I'\lambda}{Ih}$$

とすれば(101.10), (101.11)式より

$$\left.\begin{aligned}
&x=1: && -2(1+3\nu)X_1+X_2 &&= -\frac{3\nu}{h}M_{1,0},\\
&1<x<n: && X_{x-1}-2(1+3\nu)X_x+X_{x+1} &&= -\frac{3\nu}{h}(M_{x-1,0}+M_{x,0}),\\
&x=n: && X_{n-1}-2(1+3\nu)X_n &&= -\frac{3\nu}{h}M_{n-1,0}
\end{aligned}\right\} \quad (101.12)$$

になる.



第 348 圖

今, 鉛直荷重に對する影響線を得るために $P=1$ が節點 m に作用する場合を考へれば(第 348 圖)

$$1\leqq x\leqq m:\quad M_{x-1,0}=\frac{n-m}{n}(x-1)\lambda,\quad M_{x,0}=\frac{n-m}{n}x\,\lambda;$$

$$m<x\leqq n;\quad M_{x-1,0}=\frac{m}{n}(n-x+1)\lambda,\quad M_{x,0}=\frac{m}{n}(n-x)\lambda$$

であるから(101.12)は

$$\left.\begin{aligned}
&x=1: && -2(1+3\nu)X_1+X_2 &&= -\frac{3\nu\lambda}{h}\cdot\frac{n-m}{n},\\
&1<x\leqq m: && X_{x-1}-2(1+3\nu)X_x+X_{x+1} &&= -\frac{3\nu\lambda}{h}\cdot\frac{n-m}{n}(2x-1),\\
&m<x<n: && X_{x-1}-2(1+3\nu)X_x+X_{x+1} &&= -\frac{3\nu\lambda}{h}\cdot\frac{m}{n}(2n-2x+1),\\
&x=n: && X_{n-1}-2(1+3\nu)X_n &&= -\frac{3\nu\lambda}{h}\cdot\frac{m}{n}
\end{aligned}\right\} \quad (101.13)$$

になる. 此の第二, 第三式を階差方程式と考へ前述せる諸種の例に從つて其の一般解を求むれば

$$\left.\begin{aligned}
&x\leqq m:\quad X_x=A\beta^{x}+B\beta^{-x}+\frac{\lambda}{2h}\cdot\frac{n-m}{n}(2x-1),\\
&x>m:\quad X_x=C\beta^{x}+D\beta^{-x}+\frac{\lambda}{2h}\cdot\frac{m}{n}(2n-2x+1)
\end{aligned}\right\} \quad (101.14)$$

になる. 但し β は特性方程式:

$$\beta^2-2(1+3\nu)\beta+1=0$$

の根のうち數値の小なるもの, 即ち

$$\beta=1+3\nu-\sqrt{(1+3\nu)^2-1} \quad (101.15)$$

である.

四個の常數 A, B, C, D は $X_0=0, X_{n+1}=0$ の邊縁條件及び $x=m$, $x=m+1$ に於ける境界條件より決定する. 之等の條件を書き換へれば

$$A+B-\frac{\lambda}{2h}\cdot\frac{n-m}{n}=0,$$

$$C\beta^{n+1}+D\beta^{-(n+1)}-\frac{\lambda}{2h}\cdot\frac{m}{n}=0,$$

$$(A-C)\beta^{m+1}+(B-D)\beta^{-(m+1)}+\frac{\lambda}{2h}=0,$$

$$(A-C)\beta^{m}+(B-D)\beta^{-m}-\frac{\lambda}{2h}=0$$

の四式が得られ, 之を解けば

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{\lambda}{2h(\beta^{n+1}-\beta^{-(n+1)})}\left[\frac{m}{n}-\frac{n-m}{n}\beta^{-(n+1)}+\frac{\beta^{n-m+1}-\beta^{-n+m}}{1-\beta}\right],\\
B&=\frac{-\lambda}{2h(\beta^{n+1}-\beta^{-(n+1)})}\left[\frac{m}{n}-\frac{n-m}{n}\beta^{n+1}+\frac{\beta^{n-m+1}-\beta^{-n+m}}{1-\beta}\right],\\
C&=\frac{\lambda\beta^{-(n+1)}}{2h(\beta^{n+1}-\beta^{-(n+1)})}\left[\frac{m}{n}\cdot\beta^{n+1}-\frac{n-m}{n}+\frac{\beta^{-m}-\beta^{m+1}}{1-\beta}\right],\\
D&=\frac{-\lambda\beta^{n+1}}{2h(\beta^{n+1}-\beta^{-(n+1)})}\left[\frac{m}{n}\beta^{-(n+1)}-\frac{n-m}{n}+\frac{\beta^{-m}-\beta^{m+1}}{1-\beta}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (101.16)$$

になる. 之を(101.14)に代入すれば X_x を定めることが出來, 一定の x に對して m を變數と考へれば, それに依つて X_x に對する影響線が得られる.

また第 348 圖のフィレンデール桁のすべての下弦節點に相等しき集中荷重 P が作用する場合には

$$M_{x-1,0}=\frac{P\lambda}{2}(x-1)(n-x+1),\quad M_{x,0}=\frac{P\lambda}{2}x(n-x),$$

$$M_{x-1,0}+M_{x,0}=-\frac{P\lambda}{2}[2x^2-2(n+1)x+(n+1)]$$

であるから(101.12)より

$$X_{x-1}-2(1+3\nu)X_x+X_{x+1}=\frac{3\nu P\lambda}{2h}[2x^2-2(n+1)x+(n+1)] \tag{101.17}$$

になる．此の方程式の特解は

$$-\frac{P\lambda}{2h}\left[x^2-(n+1)x+\frac{n+1}{2}+\frac{1}{3\nu}\right]$$

であるから，一般解は

$$X_x=C_1\beta^x+C_2\beta^{-x}$$
$$-\frac{P\lambda}{2h}\left[x^2-(n+1)x+\frac{n+1}{2}+\frac{1}{3\nu}\right] \tag{101.18}$$

になる．然るに兩端に於ては $X_0=0$ 及び $X_{n+1}=0$ でなければならない．故に

$$C_1+C_2-\frac{P\lambda}{2h}\left[\frac{n+1}{2}+\frac{1}{3\nu}\right]=0,$$

$$C_1\beta^{n+1}+C_2\beta^{-(n+1)}-\frac{P\lambda}{2h}\left[\frac{n+1}{2}+\frac{1}{3\nu}\right]=0$$

でなければならない．之より C_1, C_2 を解けば

$$C_1=\frac{P\lambda}{2h}\left[\frac{n+1}{2}+\frac{1}{3\nu}\right]\frac{1}{1+\beta^{n+1}},\quad C_2=\beta^{n+1}C_1$$

になり，之を(101.18)に代入すれば

$$X_x=\frac{P\lambda}{2h}\left[\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{3\nu}\right)\left(\frac{\beta^x+\beta^{n-x+1}}{1+\beta^{n+1}}-1\right)-x(x-n-1)\right] \tag{101.19}$$

になる．若し格間數が大なる場合には 1 に對して β^{n+1} を省略することが出來るから

$$X_x=\frac{P\lambda}{2h}\left[\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{3\nu}\right)(\beta^x+\beta^{n-x+1}-1)-x(x-n-1)\right] \tag{101.20}$$

になる．

階差方程式に關する文獻

階差方程式の一般理論及び構造力學上に於ける其の應用に關する文獻の主なるものを掲ぐれば下記の如くである．

a. 階差方程式の一般理論に關するもの:—

(1) Schlömlich, O.: "*Theorie der Differenzen und Summen*", Halle (1848).

(2) Boole, G.: "*A treatise on the calculus of finite differences*", Cambridge (1860); 3 Ed., London (1880).

(3) Markoff, A.: "*Differenzenrechnung*", Leipzig (1896).

(4) Pascal, E.: "*Calcolo delle variazioni e calcolo delle diffenze finite*", Milano (1898).

(5) Seliwanoff, D.: "*Lehrbuch der Differenzenrechnung*", Leipzig (1904).

(6) Andoyer, H.: "*Calcul des différences et interpolation*", Enccl. d. sci. math., I, 4, Paris (1906).

(7) Seliwanoff, D.: "*Differenzenrechnung*", Enzkl. d. math. Wiss., I, Leipzig (1911).

(8) Wallenberg, G. u. Guldberg, A.: "*Theorie der linearen Differenzengleichungen*", Leipzig u. Berlin (1911).

(9) Funk, P.: "*Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen*", Berlin (1920).

(10) Melan, E.: *Ein Beitrag zur Auflösung linearer Differenzengleichungen mit beliebiger Störungsfunktion*, Eisenbau, **11** (1920), 88.

(11) Wallenberg, G.: *Die Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Technik*, Z.A.M.M. (1921), 138.

(12) Nörlund, N.: "*Vorlesungen über Differenzenrechnung*", Berlin (1924).

(13) Nörlund, N.: "*Neuere Untersuchungen über Differenzengleichungen*", Enzkl. d. math. Wiss., II, c, 7, Leipzig (1923).

(14) Bleich, F. u. Melan, E.: "*Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik*", Berlin u. Wien (1927).

b. 階差方程式を應用せる構造力學關係の文獻:—

(15) Bleich, F.: *Beitrag zur Berechnung des kontinuierlichen Trägers*, Oesterr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst (1904), 746.

(16) Mann, L.: "*Statische Berechnung steifer Vierecksnetze*", Diss. Berlin (1909).

(17) Bleich, F.: *Einflusslinien und Grösstmomente statisch unbestimmter durchlaufender Balken mit besonderer Rücksichtsnahme auf die Berechnung von Kranlaufbahnen*, Eisenbau (1910), 108.

(18) Müller-Breslau, H.: *Ueber exzentrisch gedrückte Stäbe und über Knickfestigkeit*, Eisenbau (1911), 339.

(19) Frandsen, F.: *Rechnerische Auflösung Clapeyronscher Gleichungen*, Eisenbau (1913), 440.

(20) Grüning, M.: *Berechnung gegliederter Druckstäbe*, Eisenbau (1913), 403.

(21) Rode, H.: *Beitrag zur Theorie der Knickerscheinungen*, Eisenbau (1916), 121.

(22) Grüning, M.: *Anwendung von Differenzengleichungen in der Statik hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke*, Eisenbau (1918), 122.

(23) Bleich, F.: *Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen*, Eisenbau (1919), 27.

(24) Wanke, J.: *Ueber die Berechnung von Bogenträgern in Verbindung mit einem Streckträger (Lohseträger)*, Eisenbau (1921), 262.

(25) Bleich, F.: *Einige Aufgaben über Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen*, Eisenbau (1922), 34.

(26) Fritsche, J.: "*Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzengleichungen*", Berlin (1923).

(27) Fritsche, J.: *Mehrgurtige Fachwerke als Windverband weitgespannter eiserner Brücken*, Bauing. (1924), 618.

(28) Fritsche, J.: *Zur Theorie steif bewehrter Gewölbe*, Bauing. (1925), 635.

(29) v. Mises, R. u. Ratzersdorfer, J.: *Die Knicksicherheit von Fachwerken*, Z.A.M.M. (1925), 218.

(30) Grüning, M.: "*Die Statik der ebenen Tragwerkes*", Berlin (1926).

(31) v. Mises, R. u. Ratzersdorfer, J.: *Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken*. Z.A.M.M. (1926), 181.

(32) 福田武雄: *Theorie der Roste und ihre Anwendungen*, 土學, **17**(1931), 335, 903; **18**(1932), 585; **19**(1933), 489, 791.

(33) 福田武雄: 一層ラーメンの面に垂直なる外力の影響, 應用力學聯合大會 (1931).

(34) 福田武雄: 格子の理論と其の應用に就て, 第二回工學大會 (1932); 土學, **18**(1932), 875.

(35) 高橋: 偏有限差方程式に依る高層剛節矩形架構の解法, 建雜, **48** (1934), 507.

(36) 安宅: 綾片の强度に就て, 土學, **25**(1939), 865.

(37) 小野: 軌條に生ずる應力及變形の計算法, 土學, **25**(1939), 1181.

(38) 小野: 連續アーチの計算, 土學, **27**(1941), 338.