

第 XI 章 撓 角 法

§ 85. 總 說

凡そラーメン或は連続梁に対しては既に記述せるが如き解法の他に種々なる解法がある。茲に記述せんとする撓角法もまた其のうちの一つであつて、之は主として高層多スパンの矩形ラーメンに應用せられるが、之に依つて任意の形状のラーメン或は連続梁を解くことも勿論可能である。撓角法が他の解法と相違する點は、曲げモーメント或は反力等を未知數とする代りに節點及び部材の回轉角を直接の未知數に選ぶことである。

撓角法に於て假定せられることは勿論他種の解法に於て假定せられることと同じであり、而して部材に作用する曲げモーメント及び剪斷力の正負に關しては勿論構造力學一般の規約に従ひ、力のモーメント及び回轉角もすべて時計廻りを正とする。但し撓角法に於ては部材の兩端に於ける曲げモーメントの代りに材端モーメントを考へる。材端モーメントとは或る一つの部材を切取つて考へる場合、その



第 326 圖

の兩端に外力として作用するものと考へられる力のモーメントであつて之を示すには例へば第 326 圖の如く部材 AB の A 端に作用する材端モーメントを M_{AB} 、B 端に作用するものを M_{BA} の如くにして示す。材端モーメントは力のモーメントであり、力のモーメントは時計廻りを正とするから、材端モーメントもすべて時計廻りが正である。従つて部材 AB に就て其の曲げモーメント及び剪斷力の正負を

定めるべき視點を第 326 圖の如く部材の下方にとるものとすれば、正の M_{AB} は A に對して正の曲げモーメントを與へ、正の M_{BA} は B に對して負の曲げモーメントを與へる。故に A、B に於ける曲げモーメントを M_A, M_B とすれば

$$M_A = M_{AB}, \quad M_B = -M_{BA} \quad (85.1)$$

になる。但し場合に依つては材端モーメントを用ひずに曲げモーメントに依る方が便利であることもある。何れにしても材端モーメント或は材端の曲げモーメントが求められれば、部材中間の曲げモーメント、剪斷力或は支點の反力は(74.1)と同様にして求められる。

扱て第 326 圖の部材 AB の節點回轉角 θ_A, θ_B は既に(72.6)式に於て與へられて居り、此の式の曲げモーメント M_A, M_B を材端モーメント M_{AB}, M_{BA} で置換へれば

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= + \frac{1}{EI} \left[\frac{l}{6} (2M_{AB} - M_{BA}) + \mathfrak{A} \right] + \vartheta, \\ \theta_B &= - \frac{1}{EI} \left[\frac{l}{6} (M_{AB} - 2M_{BA}) + \mathfrak{B} \right] + \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (85.2)$$

になり、此の兩式より M_{AB}, M_{BA} を解けば

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{l} (2\theta_A + \theta_B - 3\vartheta) - \frac{2}{l} (2\mathfrak{A} - \mathfrak{B}), \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{l} (2\theta_B + \theta_A - 3\vartheta) + \frac{2}{l} (2\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) \end{aligned} \right\} \quad (85.3)$$

になる。

上式は兩端が剛節或は固定端の場合の式であるが、若し B 或は A が滑節のときには $M_{BA} = 0$ 或は $M_{AB} = 0$ であるから(85.2)の第一式或は第二式より

$$\left. \begin{aligned} \text{Bが滑節: } M_{AB} &= \frac{3EI}{l} (\theta_A - \vartheta) - \frac{3}{l} \mathfrak{A}, \\ \text{Aが滑節: } M_{BA} &= \frac{3EI}{l} (\theta_B - \vartheta) + \frac{3}{l} \mathfrak{B} \end{aligned} \right\} \quad (85.4)$$

になる。

上記の(85.3),(85.4)は材端モーメントと節點回轉角 θ , 部材回轉角 ϕ との關係を示す撓角法の基本式であつて, I/l を其の部材の剛度と言ふ。

計算を簡單にするために或る特定の部材又は假想部材の剛度 I_C/l_C を基準剛度として選び, 任意の部材に就て一般に

$$\varphi = \frac{2EI_C}{l_C} \theta, \quad \phi = -\frac{6EI_C}{l_C} \theta, \quad k = \frac{I \cdot l_C}{I_C \cdot l} \quad (85.5)$$

と置換へ, 更に

$$\left. \begin{aligned} C_{AB} &= \frac{2}{l} (2\mathcal{U} - \mathcal{B}), & C_{BA} &= \frac{2}{l} (2\mathcal{B} - \mathcal{U}), \\ H_{AB} &= \frac{3}{l} \mathcal{U}, & H_{BA} &= \frac{3}{l} \mathcal{B} \end{aligned} \right\} \quad (85.6)$$

とすれば, 兩端が剛節又は固定端のときには

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k(2\varphi_A + \varphi_B + \phi) - C_{AB}, \\ M_{BA} &= k(2\varphi_B + \varphi_A + \phi) + C_{BA}; \end{aligned} \right\} \quad (85.7)$$

B或はAが滑節の場合には

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{k}{2} (3\varphi_A + \phi) - H_{AB}, & M_{BA} &= 0; \\ M_{BA} &= \frac{k}{2} (3\varphi_B + \phi) + H_{BA}, & M_{AB} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (85.8)$$

になる。上記の k は無名數であつて之を部材の剛比と呼び, φ, ϕ, C 及び H はすべて力のモーメントに等しきデメンションを有する數である。

§ 86. 荷 重 項

前記 C 或は H は撓角法の荷重項と呼ばれるものであつて, (85.6)の \mathcal{U} 及び \mathcal{B} に(72.4)の値を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} C_{AB} &= \frac{2}{l} (2\mathcal{U} - \mathcal{B}) = \frac{2}{l^2} \int_0^l M_{x,0} (2l - 3x) dx, \\ C_{BA} &= \frac{2}{l} (2\mathcal{B} - \mathcal{U}) = \frac{2}{l^2} \int_0^l M_{x,0} (3l - x) dx; \\ H_{AB} &= \frac{3}{l} \mathcal{U} = \frac{3}{l^2} \int_0^l M_{x,0} (l - x) dx, \\ H_{BA} &= \frac{3}{l} \mathcal{B} = \frac{3}{l^2} \int_0^l M_{x,0} x dx \end{aligned} \right\} \quad (86.1)$$

になり, 且つ C と H との間には

$$\left. \begin{aligned} C_{AB} &= \frac{2}{3} (2H_{AB} - H_{BA}), & C_{BA} &= \frac{2}{3} (2H_{BA} - H_{AB}); \\ H_{AB} &= C_{AB} + \frac{1}{2} C_{BA}, & H_{BA} &= C_{BA} + \frac{1}{2} C_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (86.2)$$

の關係がある。

諸種の荷重に對する C 及び H の値は(86.1)式に依つて, 或は第5表の \mathcal{U} 及び \mathcal{B} の値を利用することに依つて求めることが出来るが, 便宜上諸種の荷重に對する C 及び H の値を掲げれば第10表の如くなる。但し本表に於ては左端をA, 右端をBとする。

C 及び H の具體的意義は次の如くである。即ち部材ABを兩端固定梁とすれば $\theta_A = \theta_B = \phi = 0$ であるから, 固定端に於ける曲げモーメントは

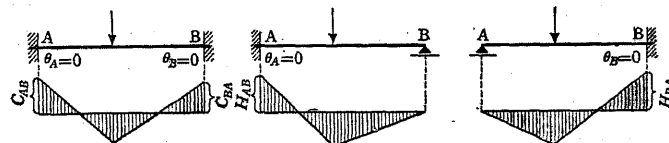
$$M_A = M_{AB} = -C_{AB}, \quad M_B = -M_{BA} = -C_{BA};$$

またAが固定端, Bが回轉端の梁と考へれば $\theta_A = \phi = 0$ であるから(85.7)

の第一式より

$$M_A = M_{AB} = -H_{AB};$$

同様にしてBが固定端, Aが回轉端の梁と考へれば



第 327 圖

第 10 表 撓角法の荷重項

| 荷重圖 | C_{AB} | C_{BA} | H_{AB} | H_{BA} |
|-----|--|-------------------------------|---|--------------------------------|
| | $\frac{Pl}{8}$ | | | $\frac{3Pl}{16}$ |
| | $\frac{Pab^2}{l^2}$ | $\frac{Pa^2b}{l^2}$ | $\frac{Pab(l+b)}{2l^2}$ | $\frac{Pab(l+a)}{2l^2}$ |
| | $\frac{pl^2}{12}$ | | | $\frac{pl^2}{8}$ |
| | $C_{AB} = \frac{pa^2}{12l^2}(6l^2 - 8al + 3a^2)$ $C_{BA} = \frac{pa^3}{12l^2}(4l - 3a)$ | | $\frac{pa^2(2l-a)^2}{8l^2}$ | $\frac{pa^2(2l^2-a^2)}{8l^2}$ |
| | $\frac{pl^2}{30}$ | $\frac{pl^2}{20}$ | $\frac{7pl^2}{120}$ | $\frac{pl^2}{15}$ |
| | $\frac{(3p_a + 2p_b)l^2}{60}$ | $\frac{(2p_a + 3p_b)l^2}{60}$ | $\frac{(8p_a + 7p_b)l^2}{120}$ | $\frac{(7p_a + 8p_b)l^2}{120}$ |
| | $C_{AB} = \frac{p}{60} \left[2a^2 + \frac{3b}{l}(2l^2 - b^2) \right]$ $C_{BA} = \frac{p}{60} \left[2b^2 + \frac{3a}{l}(2l^2 - a^2) \right]$ | | $H_{AB} = \frac{p(l+b)}{120l}(7l^2 - 3b^2)$ $H_{BA} = \frac{p(l+a)}{120l}(7l^2 - 3a^2)$ | |
| | $C_{AB} = \frac{pa^2}{30l^2}(10l^2 - 15al + 6a^2)$ $C_{BA} = \frac{pa^3}{20l^2}(5l - 4a)$ | | $H_{AB} = \frac{pa^2}{120l^2}(40l^2 - 45al + 12a^2)$ $H_{BA} = \frac{pa^2}{30l^2}(5l^2 - 3a^2)$ | |
| | $C_{AB} = \frac{pa^2}{60l^2}(10l^2 - 10al + 3a^2)$ $C_{BA} = \frac{pa^3}{60l^2}(5l - 3a)$ | | $H_{AB} = \frac{pa^2}{120l^2}(20l^2 - 15al + 3a^2)$ $H_{BA} = \frac{pa^2}{120l^2}(10l^2 - 3a^2)$ | |
| | $-\frac{Mb(2l-3b)}{l^2} + \frac{Ma(2l-3a)}{l^2}$ | | $-\frac{M(l^2-3b^2)}{2l^2}$ | $+\frac{M(l^2-3a^2)}{2l^2}$ |
| | M_A | M_B | $M_A + \frac{M_B}{2}$ | $M_B + \frac{M_A}{2}$ |

$$M_B = -M_{BA} = -H_{BA}$$

になる。故に C は両端固定梁の固定端に於ける曲げモーメントの絶対値に等しく、 H は一端固定、他端回転端の梁の固定端に於ける曲げモーメントの絶対値に等しくなる(第 327 圖参照)。

§ 87. 撓角法の基本方程式

今任意の節点 m に於て之に剛結せられる部材を $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ とし、之等の部材の材端 m に作用する材端モーメントを $M_{m1}, M_{m2}, \dots, M_{mn}, \dots$ とすれば、部材の方より節点に向つて作用するモーメントは $-M_{m1}, -M_{m2}, \dots, -M_{mn}, \dots$ になる。故に節点 m に外力として直接に作用するモーメントを \bar{M}_m とすれば之等のモーメントの和は零でなければならない。之より

$$-\sum_n M_{mn} + \bar{M}_m = 0 \quad \text{或は} \quad \sum_n M_{mn} = \bar{M}_m \quad (87.1)$$

を得る。之を撓角法に於ては節点方程式と言ひ、若し $\bar{M}_m = 0$ のときには

$$\sum_n M_{mn} = 0 \quad (87.2)$$

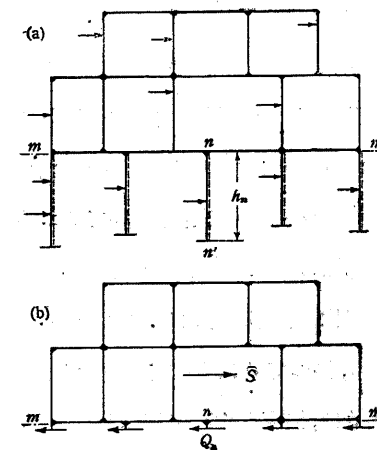
になる。

次に第 328 圖の如きラーメンの任意の水平層 $m-m$ に於て其の下方にある柱材のうちの任意の一つを $n'n$ とし、部材 $n'n$ の上端 n に於ける剪断力を Q_n とすれば一般に

$$Q_n = Q_{n,0} - \frac{M_{n'n} + M_{n'n'}}{h_n}$$

である。但し $Q_{n,0}$ は $n'n$ を単純梁

とするときの直接荷重に依る n に於ける剪断力である。此の剪断力 Q_n は



第 328 圖

水平層 $m-m$ 以上の部分に對し第 328 圖(b)に示すが如き方向の水平力として作用し、從つて $m-m$ 以上の部分に作用する外力の水平分力の和(右向を正とす)を \bar{S}_m とすれば、水平方向の釣合條件より

$$\sum Q_n = \bar{S}_m \quad (87.3)$$

でなければならない。此の Q_n に前記の値を代入すれば

$$\sum_n \frac{M_{nn} + M_{nn'}}{h_n} = \sum_n Q_{n,p} - \bar{S}_m \quad (87.4)$$

になる。(87.3)或は(87.4)を層方程式と言ふ。荷重が總て鉛直なる場合、或は荷重が總て左右對稱である場合には(87.4)の右邊は 0 に等しく、從つて

$$\sum_n \frac{M_{nn} + M_{nn'}}{h_n} = 0 \quad (87.5)$$

になる。

上記の節點方程式及び層方程式は之を材端モーメントを以て表はしたが、實際の計算に於ては之等の材端モーメントに(85.3), (85.4) 或は(85.7), (85.8)の値を代入するから結局に於ては θ と ϕ 或は φ と ψ に關する方程式になる。

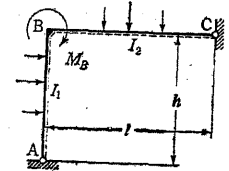
剛節節點に於ては部材は完全に剛結せられるものと假定する。故に剛節節點に集まる部材の該節點に於ける節點回轉角 θ 、從つて φ はすべて相等しくなり、未知數となるべき θ 又は φ の數は剛節節點の數に等しくなる。

次にラーメンの計算に於てはスパン長又は層高の變化は之を無視するから節點の變位は水平の方向にのみ起り且つ同一層にあるすべての節點の水平變位は相等しくなる。故にラーメンの水平部材即ち梁に於ては部材回轉角 ϕ 、從つて ψ はすべて 0 になり、且つ同一層にある鉛直材即ち柱材の ϕ 或は ψ は、柱高がすべて相等しき場合にはすべて相等しく、柱高が不等なる場合には其の柱高に反比例する。從つて未知數となるべき ϕ 或は ψ の數はラーメンの層數に等しくなる。

故に一つのラーメンに於て剛節節點の數を m 、層數を n とすれば未知數 θ, ϕ 或は φ, ψ の總數は $m+n$ になる。之に對し上記の如く各節點に於て各一個の節點方程式、各層に於て各一個の層方程式、全體に於て $m+n$ 個の方程式が得られ、之等を聯立方程式として解くことに依つてすべての θ, ϕ 又は φ, ψ が決定せられ、之を(85.3), (85.4) 又は(85.7), (85.8)に代入すれば材端モーメントが求められるのである。尙 ϕ 又は ψ がすべて 0 に等しき構造又は荷重状態に於ては未知數は m 個の θ 又は φ のみであつて、之に對しては層方程式を立てる必要なく、單に節點方程式のみで問題を解く事が出来る。

§ 88. 肘形ラーメン

最も簡單なる例題として第 329 圖の如き回轉端の肘形ラーメンを考へる。A, B, C の三點は三角形を形成し A, C が不動なる以上節點 B も不動になり、從つて部材角 ϕ 、從つて ψ はすべて 0 になる。



第 329 圖

而して剛節節點は B のみであるから未知數は θ_B 或は φ_B の一個になる。之に對して節點 B に於ける節點方程式を(87.1)に從つて作れば

$$M_{BA} + M_{BC} = \bar{M}_B \quad (88.1)$$

になる。

今柱材 AB を基準部材に選べば、柱材の剛比は 1 になり、梁 BC の剛比 k は

$$k = \frac{I_2 h^3}{I_1 l}$$

になり、AB, BC 共に一端滑節であるから(85.8)より

$$M_{BA} = \frac{3}{2} \varphi_B + H_{BA}, \quad M_{BC} = \frac{3k}{2} \varphi_B - H_{BC} \quad (88.2)$$

になり之を(88.1)に代入し、それより φ_B を求むれば

$$\varphi_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{-H_{BA} + H_{BC} + \bar{M}_B}{1+k} \quad (88.3)$$

を得、之を(88.2)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= \frac{k H_{BA} + H_{BC} + \bar{M}_B}{1+k}, \\ M_{BC} &= \frac{-k H_{BA} - H_{BC} + k \bar{M}_B}{1+k} \end{aligned} \right\} \quad (88.4)$$

になる。

両端 A, C が固定の場合には三次の不静定であるが θ 従つて ψ は回轉端の場合と同様に 0 であり、且つ固定の條件より

$$\theta_A = \theta_C = 0 \quad \text{或は} \quad \varphi_A = \varphi_C = 0$$

であるから未知量は θ_B 或は φ_B の一つのみになる。此の場合には (85.7) より

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \varphi_B - C_{AB}, & M_{BA} &= 2\varphi_B + C_{BA}, \\ M_{BC} &= 2k\varphi_B - C_{BC}, & M_{CB} &= k\varphi_B + C_{CB} \end{aligned} \right\} \quad (88.5)$$

であつて之を節點方程式(88.1)に代入すれば

$$\varphi_B = \frac{-C_{BA} + C_{BC} + \bar{M}_B}{2(1+k)} \quad (88.6)$$

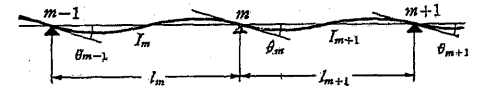
を得、之を(88.5)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= -C_{AB} - \frac{C_{BA} - C_{BC} - \bar{M}_B}{2(1+k)}, \\ M_{BA} &= \frac{k C_{BA} + C_{BC} + \bar{M}_B}{1+k}, \\ M_{BC} &= -\frac{k C_{BA} + C_{BC} - k \bar{M}_B}{1+k}, \\ M_{CB} &= +C_{CB} + k \frac{C_{BA} - C_{BC} - \bar{M}_B}{2(1+k)} \end{aligned} \right\} \quad (88.7)$$

になる。

§ 89. 連続梁への應用

第 330 圖の如き連続梁に於て支點が變位せざるものとすれば各スパンの部材回



第 330 圖

轉角はすべて零に等しくなる。今スパン l_m の左右の兩端に於ける材端モーメントを $M_{m-1,m}$, $M_{m,m-1}$ とし、其の剛比を

$$k_m = \frac{I_m l_C}{I_C l_m}$$

とすれば(85.7)より

$$\left. \begin{aligned} M_{m-1,m} &= k_m(2\varphi_{m-1} + \varphi_m) - C_{m-1,m}, \\ M_{m,m-1} &= k_m(2\varphi_m + \varphi_{m-1}) + C_{m,m-1} \end{aligned} \right\} \quad (89.1)$$

になり、同様にしてスパン l_{m+1} に対しては

$$\left. \begin{aligned} M_{m,m+1} &= k_{m+1}(2\varphi_m + \varphi_{m+1}) - C_{m,m+1}, \\ M_{m+1,m} &= k_{m+1}(2\varphi_{m+1} + \varphi_m) + C_{m+1,m} \end{aligned} \right\} \quad (89.2)$$

を得る。支點上の曲げモーメントを M_{m-1} , M_m , M_{m+1} とすれば

$$M_{m-1} = M_{m-1,m}, \quad M_m = -M_{m,m-1} = M_{m,m+1}, \quad M_{m+1} = -M_{m+1,m} \quad (89.3)$$

である。

故に(89.1)及び(89.2)より φ_{m-1} , φ_m , φ_{m+1} を消去すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_m} M_{m-1} + 2\left(\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_{m+1}}\right) M_m + \frac{1}{k_{m+1}} M_{m+1} \\ = -\frac{C_{m-1,m} + 2C_{m,m-1}}{k_m} - \frac{2C_{m,m+1} + C_{m+1,m}}{k_{m+1}} \end{aligned} \quad (89.4)$$

を得る。之即ち(74.5)の三連モーメントの定理の式である。

扱て φ を未知数とする方程式を得るには支點 m に於ける節點方程式:

$$M_{m,m-1} + M_{m,m+1} = 0$$

に(89.1), (89.2)の値を代入すればよい。即ち

$$k_m \varphi_{m-1} + 2(k_m + k_{m+1})\varphi_m + k_{m+1}\varphi_{m+1} = -C_{m,m-1} + C_{m,m+1} \quad (89.5)$$

を得る。之が撓角法に於ける連続梁の基本方程式である。

n スパンの連続梁の両端を $0, n$ とし、之が固定端なるときには、 $\varphi_0 = 0, \varphi_n = 0$ であるから、(89.5) の $m = 1$ 或は $m = n - 1$ の式に於ては $\varphi_0 = 0$ 或は $\varphi_n = 0$ とすればよい。即ち

$$\left. \begin{aligned} 2(k_1 + k_2)\varphi_1 + k_2\varphi_2 &= -C_{1,0} + C_{1,2}, \\ k_{n-1}\varphi_{n-2} + 2(k_{n-1} + k_n)\varphi_{n-1} &= -C_{n-1,n-2} + C_{n-1,n} \end{aligned} \right\} \quad (89.6)$$

になる。

之と反対に両端 $0, n$ が回転端のときには

$$\begin{aligned} M_{1,0} &= \frac{3k_1}{2}\varphi_1 + H_{1,0}, \\ M_{n-1,n} &= \frac{3k_n}{2}\varphi_{n-1} - H_{n-1,n} \end{aligned}$$

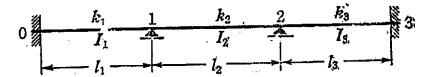
であるから $m = 0, m = n - 1$ に對する方程式は

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{2}k_1 + 2k_2\right)\varphi_1 + k_2\varphi_2 &= -H_{1,0} + C_{1,2}, \\ k_{n-1}\varphi_{n-2} + \left(2k_{n-1} + \frac{3}{2}k_n\right)\varphi_{n-1} &= -C_{n-1,n-2} + H_{n-1,n} \end{aligned} \right\} \quad (89.7)$$

になる。

(89.5)式は(78.2)式と全く同形であつて、従つて上記の方程式の解は § 78 に説明せる方法に依つて之を求めることが出来る。三連モーメントの定理に依る場合と撓角法に依る場合との未知数の數、従つて方程式の數を比較すれば、両端が回転端なるときには兩者とも同じであるが、両端が固定端なるときには三連モーメントの定理に依れば、スパン數を n とすれば、 $n + 1$ 個の支點曲げモーメントが未知數となるに反し、撓角法に於ては $n - 1$ 個

の中間支點の φ が未知數になる。従つて両端が回転端の連続梁に對しては支點曲げモーメントを直接の未知數とする關係上三連モーメントの定理を應用する方が好ましく、之に反して両端固定の場合には未知數の數が 2 だけ少い關係上撓角法に依る方が便利である。



第 331 圖

例へば第 331 圖の如き兩端固

定の三スパンの連続梁は、荷重を鉛直とし且つ軸方向力に依るスパン長の變化を無視するとするも、一般に四次の不靜定であるが、撓角法に於ては φ_1, φ_2 の二個のみが未知數になる。之に對して(89.6)の第一式及び第二式の n を 3 とせるものを書けば

$$\left. \begin{aligned} 2(k_1 + k_2)\varphi_1 + k_2\varphi_2 &= -C_{1,0} + C_{1,2}, \\ k_2\varphi_1 + 2(k_2 + k_3)\varphi_2 &= -C_{2,1} + C_{2,3} \end{aligned} \right\} \quad (89.8)$$

になり、之より φ_1, φ_2 を解けば

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{2(k_2 + k_3)(C_{1,0} - C_{1,2}) - k_2(C_{2,1} - C_{2,3})}{4(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}, \\ \varphi_2 &= +\frac{k_2(C_{1,0} - C_{1,2}) - 2(k_1 + k_2)(C_{2,1} - C_{2,3})}{4(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (89.9)$$

を得、之に依つて φ_1, φ_2 がわかれば M_0, M_1, M_2, M_3 は

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= +M_{0,1} = +k_1\varphi_1 - C_{0,1}; \\ M_1 &= -M_{1,0} = -2k_1\varphi_1 - C_{1,0} \\ &= +M_{1,2} = +k_2(2\varphi_1 + \varphi_2) - C_{1,2}; \\ M_2 &= -M_{2,1} = -k_2(2\varphi_2 + \varphi_1) - C_{2,1} \\ &= +M_{2,3} = +2k_3\varphi_2 - C_{2,3}; \\ M_3 &= -M_{3,2} = -k_3\varphi_2 - C_{3,2} \end{aligned} \right\} \quad (89.10)$$

に依つて求められる

特に $I_1: l_1 = I_2: l_2 = I_3: l_3$ の場合には $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ とすることが出来る, 従つて

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{15} [4(C_{1,0} - C_{1,2}) - (C_{2,1} - C_{2,3})], \\ \varphi_2 &= +\frac{1}{15} [(C_{1,0} - C_{1,2}) - 4(C_{2,1} - C_{2,3})]; \end{aligned} \right\} \quad (89.11)$$

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= -C_{0,1} - \frac{1}{15} [4(C_{1,0} - C_{1,2}) - (C_{2,1} - C_{2,3})], \\ M_1 &= -\frac{1}{15} [7C_{1,0} + 8C_{1,2} + 2C_{2,1} - 2C_{2,3}], \\ M_2 &= -\frac{1}{15} [-2C_{1,0} + 2C_{1,2} + 8C_{2,1} + 7C_{2,3}], \\ M_3 &= -C_{3,2} - \frac{1}{15} [(C_{1,0} - C_{1,2}) - 4(C_{2,1} - C_{2,3})] \end{aligned} \right\} \quad (89.12)$$

になる.

例へば $l_1 = l_2 = l_3 = l, I_1 = I_2 = I_3$ の連続梁に等分布荷重 p が作用するときには上記の荷重項 C はすべて $pl^2/12$ に等しいから

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

$$M_0 = M_1 = M_2 = M_3 = -\frac{pl^2}{12}$$

になり, 各スパンの中點に於ける正の曲げモーメントの最大値は $pl^2/24$ になる. 之等の値はすべて各スパンを夫々両端固定梁とせる場合の値に等しい.

§ 90. 一層連続ラーメン

第 332 圖の如き一層連続ラーメンに於てスパン長及び柱高の變化を無視すれば, 各節點はすべて水平方向に相等しき變位をなすことになり, 従つて梁の部材回轉角はすべて 0 に等しく, 柱材の部材回轉角と柱高との積はすべて相等しくなる. 故に左端柱の部材回轉角を ϑ_0 , 任意の柱材 $m'm$ の部材

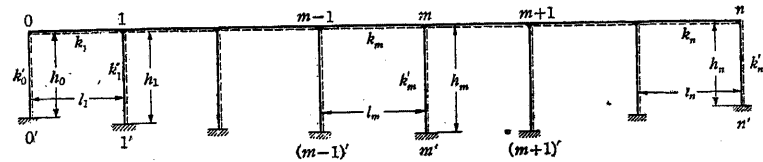
回轉角を ϑ_m とすれば, 一般に

$$\vartheta_m = \frac{h_0}{h_m} \vartheta_0, \quad \text{従つて} \quad \psi_m = \frac{h_0}{h_m} \psi_0 \quad (90.1)$$

とすることが出来る.

i. 柱脚固定の場合.

第 332 圖の如き柱脚固定の n スパン連続ラーメンは一般に $3n$ 次の不静定構造であるが, 撓角法としての未知數は, 柱脚に於ては $\theta = 0$ であるから



第 332 圖

$n + 1$ 個の節點回轉角 θ 又は φ と前述の如く左端柱の部材回轉角 ϑ_0 又は ψ_0 との合計 $n + 2$ 個になる. 今, 節點 m の左方にある梁の剛比を k_m , 節點 m に剛結する柱材の剛比を k'_m とすれば, 各部材の材端モーメントは (85.7) に依つて一般に次の如くなる.

$$\left. \begin{aligned} M_{m,m-1} &= k_m(2\varphi_m + \varphi_{m-1}) + C_{m,m-1}, \\ M_{m,m+1} &= k_{m+1}(2\varphi_m + \varphi_{m+1}) - C_{m,m+1}; \\ M_{mm'} &= k'_m(2\varphi_m + \psi_m) + C_{mm'}, \\ M_{m'm} &= k'_m(\varphi_m + \psi_m) - C_{m'm}. \end{aligned} \right\} \quad (90.2)$$

各節點に於ける節點方程式は

$$\left. \begin{aligned} m = 0: & \quad M_{01} = M_{00'} = 0, \\ 1 \leq m \leq n-1: & \quad M_{m,m-1} + M_{m,m+1} + M_{mm'} = 0, \\ m = n: & \quad M_{n,n-1} + M_{nn'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (90.3)$$

であつて, 之に前記の値を代入すれば

$$\left. \begin{aligned}
 m=0: & \quad 2(k_1 + k'_0)\varphi_0 + k_1\varphi_1 + k'_0\psi_0 = C_{01} - C_{00'}, \\
 1 \leq m \leq n-1: & \\
 & \quad k_m\varphi_{m-1} + 2(k_m + k_{m+1} + k'_m)\varphi_m + k_{m+1}\varphi_{m+1} + k'_m\psi_m \\
 & \quad \quad \quad = -C_{m,m-1} + C_{m,m+1} - C_{mm'}, \\
 m=n: & \quad k_n\varphi_{n-1} + 2(k_n + k'_n)\varphi_n + k'_n\psi_n = -C_{n,n-1} - C_{nn'}
 \end{aligned} \right\} (90.4)$$

になる。

次に梁に作用する荷重の水平分力の和(右向を正)を \bar{S} とすれば、層方程式は(87.4)に依つて

$$\sum_0^n \frac{M_{mm'} + M_{m'm}}{h_m} = \sum_0^n Q_{m,0} - \bar{S} \quad (90.5)$$

になり、之に(90.2)の値を代入して整理すれば

$$\sum_0^n \frac{k'_m}{h_m} (3\varphi_m + 2\psi_m) = \sum_0^n \left(Q_{m,0} + \frac{C_{m'm} - C_{mm'}}{h_m} \right) - \bar{S} \quad (90.6)$$

になる。若し柱高がすべて h に相等しき場合には ψ_m もまたすべて相等しくなり、之を ψ とすれば上式は

$$3 \sum_0^n k_m \varphi_m + 2\psi \sum_0^n k'_m = \sum_0^n (C_{m'm} - C_{mm'}) - (\bar{S} - \sum_0^n Q_{m,0})h \quad (90.7)$$

になる。本式右邊の $(\bar{S} - \sum_0^n Q_{m,0})h$ はラーメンに作用するすべての荷重の水平分力の柱脚に對するモーメントの總和に等しい。

(90.4)及び(90.6)の兩式中の ψ_m には(90.1)の値を代入すべきである。かくして $n+1$ 個の φ と1個の ψ_0 とに對し(90.4)より $n+1$ 個の節點方程式、(90.6)又は(90.7)より1個の層方程式を得、之に依つてすべての φ と ψ とを決定することが出来る。

之等の方程式を解くには先づ(90.4)を φ のみに關する方程式と考へて、之より φ を解く。即ち

$$\left. \begin{aligned}
 a_m &= k_m, \quad m=0, 1, 2, \dots, n; \\
 b_0 &= 2(k_1 + k'_0), \quad b_n = 2(k_n + k'_n), \\
 b_m &= 2(k_m + k_{m+1} + k'_m), \quad m=1, 2, \dots, (n-1); \\
 K_0 &= -C_{01} + C_{00'}, \quad K_n = C_{n,n-1} + C_{nn'}, \\
 K_m &= C_{m,m-1} - C_{m,m+1} + C_{mm'}, \quad m=1, 2, \dots, (n-1)
 \end{aligned} \right\} (90.8)$$

と置けば(90.4)式は

$$\left. \begin{aligned}
 b_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 &= -k'_0\psi_0 - K_0, \\
 a_1\varphi_0 + b_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 &= -k'_1\psi_0 \frac{h_0}{h_1} - K_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_m\varphi_{m-1} + b_m\varphi_m + a_{m+1}\varphi_{m+1} &= -k'_m\psi_0 \frac{h_0}{h_m} - K_m, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{n-1}\varphi_{n-2} + b_{n-1}\varphi_{n-1} + a_n\varphi_n &= -k'_{n-1}\psi_0 \frac{h_0}{h_{n-1}} - K_{n-1}, \\
 a_n\varphi_{n-1} + b_n\varphi_n &= -k'_n\psi_0 \frac{h_0}{h_n} - K_n
 \end{aligned} \right\} (90.9)$$

になる。然るに本式は連続梁に關する(78.2)式と全く同形であつて、§78に於て説明せる方法に依つて係數 c を決定すれば、 φ の解は一般に

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_m &= c_{m0}(k'_0\psi_0 + K_0) + c_{m1}\left(k'_1\psi_0 \frac{h_0}{h_1} + K_1\right) + \dots \\
 &+ c_{mm}\left(k'_m\psi_0 \frac{h_0}{h_m} + K_m\right) + \dots + c_{mn}\left(k'_n\psi_0 \frac{h_0}{h_n} + K_n\right), \\
 &\quad (m=0, 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \right\} (90.10)$$

或は

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_m &= \varphi'_m + \varphi''_m, \\
 \varphi'_m &= c_{m0}K_0 + c_{m1}K_1 + \dots + c_{mm}K_m + \dots + c_{mn}K_n, \\
 \varphi''_m &= \psi_0 h_0 \left(c_{m0} \frac{k'_0}{h_0} + c_{m1} \frac{k'_1}{h_1} + \dots + c_{mm} \frac{k'_m}{h_m} + \dots + c_{mn} \frac{k'_n}{h_n} \right).
 \end{aligned} \right\} (90.11)$$

になる。此の φ の解の中には未知量たる ψ_0 が含まれて居るが、此の解を

(90.6)又は(90.7)の層方程式に代入すれば茲に ψ_0 のみを未知数とする方程式が得られ、之に依つて ψ_0 を決定することが出来る。かくして ψ_0 がわかれば其の値を(90.10)又は(90.11)に代入することに依つて φ の値を決定することが出来る。 φ 及び ψ がわかれば(90.2)式に依つて各部材の材端モーメントの値が決定せられる。

ラーメンの構造及び荷重が左右對稱であるがために節點の水平變位が起らない場合、或は左又は右の端節點0又はnが水平に變位せざる様に支持せられる場合にはすべての ψ は零になるから、かかる場合には層方程式を考へる必要なく、單に節點方程式のみに依つて φ を求めることが出来る。

ii. 柱脚同轉端の場合.

柱脚がすべて同轉端の場合には $M_{m'm} = 0$ であつて、柱材 $m'm$ の荷重項を $H_{mm'}$ とすれば(85.7), (85.8)より

$$\left. \begin{aligned} M_{m,m-1} &= k_m(2\varphi_m + \varphi_{m-1}) + C_{m,m-1}, \\ M_{m,m+1} &= k_{m+1}(2\varphi_m + \varphi_{m+1}) - C_{m,m+1}, \\ M_{mm'} &= \frac{1}{2} k'_m(3\varphi_m + \psi_m) + H_{mm'} \end{aligned} \right\} \quad (90.12)$$

になり、之を節點方程式(90.3)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} m=0: & \left(2k_1 + \frac{3}{2}k'_0\right)\varphi_0 + k_1\varphi_1 + \frac{k'_0}{2}\psi_0 = C_{01} - H_{00'}, \\ 1 \leq m \leq n-1: & k_m\varphi_{m-1} + \left(2k_m + 2k_{m+1} + \frac{3}{2}k'_m\right)\varphi_m + k_{m+1}\varphi_{m+1} + \frac{k'_m}{2}\psi_m \\ & = -C_{m,m-1} + C_{m,m+1} - H_{mm'}, \\ m=n: & k_n\varphi_{n-1} + \left(2k_n + \frac{3}{2}k'_n\right)\varphi_n + \frac{k'_n}{2}\psi_n = -C_{n,n-1} - H_{nn'} \end{aligned} \right\} \quad (90.13)$$

を得、層方程式(90.5)に代入すれば

$$\frac{1}{2} \sum_0^n \frac{k'_m(3\varphi_m + \psi_m)}{h_m} = \sum_0^n \left(Q_{m,0} - \frac{H_{mm'}}{h_m} \right) - \bar{S}, \quad (90.14)$$

若し柱高がすべて相等しき場合には

$$\frac{3}{2} \sum_0^n k'_m \varphi_m + \frac{\psi}{2} \sum_0^n k'_m = - \sum_0^n H_{mm'} - \left(\bar{S} - \sum_0^n Q_{m,0} \right) h \quad (90.15)$$

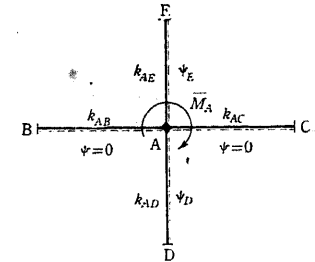
になる。

之等の方程式の解法の順序は固定端の場合と全く同様である。

§ 91. 高層多スパンの矩形ラーメン

i. 節點方程式の標準形.

第333圖を高層多スパンのラーメンのうち任意の節點Aに集まる四部材とし、Aに於て之等の部材に作用する材端モーメントを式(85.7)に従つて書けば



第 333 圖

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k_{AB}(2\varphi_A + \varphi_B) + C_{AB}, \\ M_{AC} &= k_{AC}(2\varphi_A + \varphi_C) - C_{AC}, \\ M_{AD} &= k_{AD}(2\varphi_A + \varphi_D + \psi_{AD}) + C_{AD}, \\ M_{AE} &= k_{AE}(2\varphi_A + \varphi_E + \psi_{AE}) - C_{AE} \end{aligned} \right\} \quad (91.1)$$

になり、之を節點方程式(87.1)に代入すれば φ 及び ψ に関する次の形の方程式が得られる。

$$j_A \varphi_A + k_{AB} \varphi_B + k_{AC} \varphi_C + k_{AD} \varphi_D + k_{AE} \varphi_E + k_{AD} \psi_{AD} + k_{AE} \psi_{AE} = \mathfrak{M}_A \quad (91.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し} \quad j_A &= 2(k_{AB} + k_{AC} + k_{AD} + k_{AE}), \\ \mathfrak{M}_A &= -C_{AB} + C_{AC} - C_{AD} + C_{AE} + \bar{M}_A \end{aligned} \right\} \quad (91.3)$$

此の j_A を節點Aの節點剛度、 \mathfrak{M}_A を節點Aに於ける節點方程式の荷重項と

言ふ。 \bar{M}_A は節点 A に荷重として直接に作用するモーメントである。

上式は矩形ラーメンに於ける節点方程式の一般形であるが、二三の特別な場合を挙げれば次の如くなる。

- (1) 一端が固定の場合、例へば D が固定端ならば $\varphi_D = 0$ とすればよい。
- (2) 一端が回転端の場合、例へば D が回転端の場合には

$$M_{AD} = k_{AD}(1.5\varphi_A + 0.5\psi_{AD}) + H_{AD}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} j'_A + k_{AB}\varphi_B + k_{AC}\varphi_C + k_{AD}\varphi_D + k_{AE}\varphi_E \\ + 0.5k_{AD}\psi_{AD} + k_{AE}\psi_{AE} &= \mathfrak{M}'_A, \\ j'_A &= 2(k_{AB} + k_{AC} + k_{AE}) + 1.5k_{AD}, \\ \mathfrak{M}'_A &= -C_{AB} + C_{AC} - H_{AD} + C_{AE} + \bar{M}_A \end{aligned} \right\} \quad (91.4)$$

になる。

- (3) ラーメンの構造及び荷重が左右対称の場合にはすべての ψ は零に等しくなる。特に A と C が左右対称の位置にあるとき、即ち対称軸が AC の中点を通る場合には $\varphi_C = -\varphi_A$ であるから

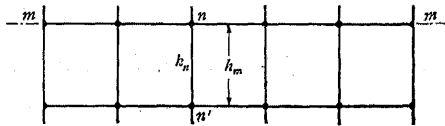
$$\left. \begin{aligned} j'_A\varphi_A + k_{AB}\varphi_B + k_{AD}\varphi_D + k_{AE}\varphi_E &= \mathfrak{M}'_A, \\ j'_A &= 2(k_{AB} + k_{AD} + k_{AE}) + k_{AC} \end{aligned} \right\} \quad (91.5)$$

になり、また節点 C が対称軸上にある場合には $\varphi_C = 0$ とすればよい。

- (4) 隅角部又は側柱の節点に於けるが如く部材が四本以下の場合には、缺けたる部材の剛比及び荷重項を 0 と置けばよい。

ii. 層方程式の標準形.

第 384 圖の $m-m$ をラーメン中の任意の一層とし、此のうち任意の節点を n 、其の



第 384 圖

下方の節点を n' 、柱 nn' の剛比を k_n とする。此の層にある柱材の部材回転角 θ 、従つて ψ はすべて相等しいから之を ψ_m とすれば柱材 nn' の材端モーメントは

$$\left. \begin{aligned} M_{nn'} &= k_n(2\varphi_n + \varphi_{n'} + \psi_m) + C_{nn'}, \\ M_{n'n} &= k_n(2\varphi_{n'} + \varphi_n + \psi_m) - C_{n'n} \end{aligned} \right\} \quad (91.6)$$

になり、之を層方程式の一般式(87.4)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \sum k_n(\varphi_n + \varphi_{n'}) + f_m\psi_m &= \mathfrak{S}_m, \\ f_m &= \frac{2}{3} \sum k_n, \\ \mathfrak{S}_m &= \frac{1}{3} [\sum(C_{n'n} - C_{nn'}) + (\sum Q_{n,0} - \bar{S}_m)h_m] \end{aligned} \right\} \quad (91.7)$$

になる。本式は高層矩形ラーメンに於ける層方程式の標準形であつて、 f_m を層剛度、 \mathfrak{S}_m を層方程式の荷重項と言ふ。 f_m は一層にある柱材の剛比の總和の $2/3$ 倍に等しい。 $Q_{n,0}$ が柱材 $n'n$ を単純梁とすると、之に直接に作用する荷重に依る n に於ける剪断力であり、 \bar{S}_m が層 $m-m$ 及び其の上部に作用する荷重の水平分力の總和であることは § 87 に於て説明した通りである。

二三の特別な場合に対する層方程式を掲げれば次の如くである。

- (1) 柱脚が全部固定端の場合には $\varphi_{n'} = 0$ であるから

$$\sum k_n\varphi_n + f_m\psi_m = \mathfrak{S}_m. \quad (91.8)$$

- (2) 柱脚が全部回転端の場合には

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum k_n\varphi_n + f'_m\psi_m &= \mathfrak{S}'_m, \\ f'_m &= \frac{1}{6} \sum k_n, \\ \mathfrak{S}'_m &= \frac{1}{3} [-\sum H_{nn'} + (\sum Q_{n,0} - \bar{S}_m)h_m]. \end{aligned} \right\} \quad (91.9)$$

(3) 層 $m-m$ の下の柱に中間荷重がない場合には柱脚の条件の如何に拘らず

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{3} \bar{S}_m h_m. \quad (91.10)$$

(4) 鉛直荷重の場合にはすべての層方程式に於て $\mathcal{E} = 0$ である.

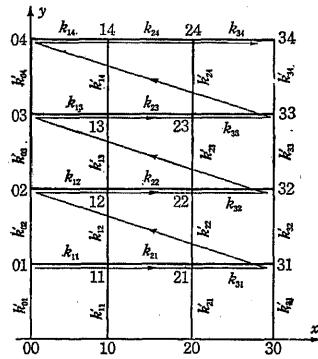
(5) ラーメンの構造及び荷重が左右対称の場合にはすべての ψ 及び \mathcal{E} は 0 になり, 従つて層方程式は unnecessary になる.

iii. 機械的作表法.

高層多スパンのラーメンに於けるが如く多数の節點が存在する場合に, 節點方程式及び層方程式を或る一定の表示規則に従つて機械的に書き下すには, 節點を文字又は番號にて示すよりも次の如く座標式に示す方が便利である.

座標式記號法の一例は第 335 圖である. 即ち左下隅を原點 (00) とし, 左端柱より第 x 番目の柱と第 y 層の梁との交點を一般に (xy) とする. 従つて x は柱の位置, y は層の位置を示し, また同一柱内の節點では x が等しく, 同一層内の節點では y が等しくなる. 之に従つて他の諸量を次の如くに表はす.

- φ_{xy} : 節點 (xy) に於ける $\varphi = 2EI_C/l_C \cdot \theta$,
- j_{xy} : 節點 (xy) の節點剛度,
- \mathfrak{M}_{xy} : 節點 (xy) に於ける節點方程式の荷重項,
- ψ_y : 第 y 層の $\psi = -6EI_C/l_C \cdot \theta$,
- f_y : 第 y 層の層剛度,



第 335 圖

- \mathcal{E}_y : 第 y 層の層方程式の荷重項,
- k_{xy} : 節點 (xy) の左にある梁の剛比,
- k'_{xy} : 節點 (xy) の下にある柱の剛比.

かくして第 335 圖のラーメンに就て節點 (01), (11), ... に於ける節點方程式を (91.2) に従つて作れば

$$(01): j_{01}\varphi_{01} + k_{11}\varphi_{11} + k'_{02}\varphi_{02} + k'_{01}\psi_1 + k'_{02}\psi_2 = \mathfrak{M}_{01},$$

$$(11): k_{11}\varphi_{01} + j_{11}\varphi_{11} + k_{21}\varphi_{21} + k'_{12}\varphi_{12} + k'_{11}\psi_1 + k'_{12}\psi_2 = \mathfrak{M}_{11},$$

を得, (91.7) に従つて層方程式を作れば

$$\text{第 1 層: } k'_{01}\varphi_{01} + k'_{11}\varphi_{11} + k'_{21}\varphi_{21} + k'_{31}\varphi_{31} + f_1\psi_1 = \mathcal{E}_1,$$

$$\text{第 2 層: } k'_{02}\varphi_{01} + k'_{12}\varphi_{11} + k'_{22}\varphi_{21} + k'_{32}\varphi_{31}$$

$$+ k'_{02}\varphi_{02} + k'_{12}\varphi_{12} + k'_{22}\varphi_{22} + k'_{32}\varphi_{32} + f_2\psi_2 = \mathcal{E}_2,$$

になり, 之等の方程式の未知數, 係數, 荷重項を方形の欄内に配置して表示すれば第 11 表の如くなる.

此の表を一見すれば其の配列に或る規則的的關係があり, 且つ其の規則が如何なるものであるかも容易に了解し得る處であるが, 茲に念のために若干の説明を加へる.

- (1) 先づ碁盤目の區劃を作り最上行に未知量 φ 及び ψ を記入する. 未知量の配置順序は左から右に且つ下から上に第 335 圖の矢印の順序に φ を配列し, 次に ψ を下より上の順にとつて配列する.
- (2) 左側の列に節點方程式の準據する節點の記號及び層方程式の層の位置を念のために記入する. 其の順序は前記未知量の順序に従ふ.
- (3) 係數を配置する部分は縦横同數の區劃を有し, 未知量が n 個の場合

第 11 表

| 種別 | 位置 | 邊の係數 | | | | | | | | | | | | | | | | 荷重項 | | | | | | | |
|-------|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|--------------------|--------------------|
| | | φ_{01} | φ_{11} | φ_{21} | φ_{31} | φ_{02} | φ_{12} | φ_{22} | φ_{32} | φ_{03} | φ_{13} | φ_{23} | φ_{33} | φ_{04} | φ_{14} | φ_{24} | φ_{34} | | φ_1 | φ_2 | φ_3 | φ_4 | | | |
| 節點方程式 | 01 | k_{01} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{01} | |
| | 11 | k_{11} | k_{11} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{11} |
| | 21 | k_{21} | k_{21} | k_{21} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{21} |
| | 31 | k_{31} | k_{31} | k_{31} | k_{31} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{31} |
| | 02 | k_{02} | | | | k_{02} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{02} |
| | 12 | k_{12} | k_{12} | k_{12} | k_{12} | k_{12} | k_{12} | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{12} |
| | 22 | k_{22} | k_{22} | k_{22} | k_{22} | k_{22} | k_{22} | k_{22} | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{22} |
| | 32 | k_{32} | k_{32} | k_{32} | k_{32} | k_{32} | k_{32} | k_{32} | k_{32} | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{32} |
| | 03 | k_{03} | | | | k_{03} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{03} |
| | 13 | k_{13} | k_{13} | k_{13} | k_{13} | k_{13} | k_{13} | k_{13} | k_{13} | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{13} |
| | 23 | k_{23} | k_{23} | k_{23} | k_{23} | k_{23} | k_{23} | k_{23} | k_{23} | k_{23} | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{23} |
| | 33 | k_{33} | k_{33} | k_{33} | k_{33} | k_{33} | k_{33} | k_{33} | k_{33} | k_{33} | k_{33} | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{33} |
| | 04 | k_{04} | | | | k_{04} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{04} |
| | 14 | k_{14} | k_{14} | k_{14} | k_{14} | k_{14} | k_{14} | k_{14} | k_{14} | k_{14} | k_{14} | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{14} |
| | 24 | k_{24} | k_{24} | k_{24} | k_{24} | k_{24} | k_{24} | k_{24} | k_{24} | k_{24} | k_{24} | k_{24} | | | | | | | | | | | | | \mathcal{M}_{24} |
| | 34 | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | k_{34} | \mathcal{M}_{34} |
| 層方程式 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{C}_1 | |
| | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{C}_2 | |
| | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{C}_3 | |
| | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | \mathcal{C}_4 | |

には $n \times n$ 区劃になる。

(4) 節點方程式に於て φ の係數を配置する部分を正方形と考へれば、其の左上隅より右下隅に至る對角線上の區劃に j を配置し、其の添字は φ の添字又は左側の節點記號に等しくとる。

φ の正方形は更に各層毎の小正方形に分割せられ、 j を含む基本小正方形毎に j の左及び上の區劃に j と同じ添字の k を記入する。基本小正方形の左右の小正方形の對角線上に k' を記入し、其の添字は其の上方にある φ の添字又は左にある節點記號に等しくとる。

(5) 節點方程式に於ける ψ の係數はすべて k' である。

(6) 層方程式の係數は φ の部分に於ては k' 、 ψ の部分に於ては f である。

(7) 荷重項の添字は左側の節點記號又は層記號に等しい。

(8) 係數はすべて j 及び f の對角線に就て對稱であり、此の關係を利用して實際作表後の正誤を調べることが出来る。

上述のことはすべて第一層の柱脚が固定の場合であるが、第一層の柱脚が回轉端のときには第一層に於ける節點方程式を(91.4)に従つて作り、層方程式を(91.9)に従つて作ればよい。

ラーメンの構造及び荷重が左右對稱の場合には前述の如く $\varphi = 0$ であつて層方程式は不必要になる。而して左右對稱の位置にある節點の回轉角 θ 、従つて φ はすべて絶対値が等しく符號が反對であるからラーメンの例へば左半分のみを考慮すれば十分である。スパン數が偶數の場合(第 336 圖)には中央柱の節點に於ては $\varphi = 0$ になり、スパン數が奇數の場合(第 337 圖)には中心線の左右の節點は對稱の位置にあり、従つて中心線の左にある節點の節點方程式は(91.5)に従ふ。第 12 表は第 336 圖の如き 8 スパンのラーメンに對する表である。第 337 圖の如き 7 スパンのラーメンに對しては第 12

第 12 表

| | | | | | | | | | | |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | φ_{01} | φ_{02} | φ_{03} | φ_{04} | φ_{05} | φ_{15} | φ_{25} | φ_{35} | φ_{45} | φ_{55} |
| 01 | j_{01} | k_{02} | | | | | | | | |
| 11 | k_{11} | k_{12} | | | | | | | | |
| 21 | j_{11} | k_{22} | | | | | | | | |
| 31 | k_{31} | k_{32} | | | | | | | | |
| 02 | k_{02} | j_{02} | k_{03} | | | | | | | |
| 12 | j_{12} | k_{12} | k_{13} | | | | | | | |
| 22 | k_{22} | j_{22} | k_{23} | | | | | | | |
| 32 | k_{32} | k_{32} | j_{32} | | | | | | | |
| 03 | j_{03} | k_{03} | k_{04} | | | | | | | |
| 13 | k_{13} | k_{13} | j_{13} | | | | | | | |
| 23 | k_{23} | j_{23} | k_{23} | | | | | | | |
| 33 | k_{33} | k_{33} | j_{33} | | | | | | | |
| 04 | k_{04} | k_{04} | j_{04} | | | | | | | |
| 14 | k_{14} | k_{14} | j_{14} | | | | | | | |
| 24 | k_{24} | k_{24} | j_{24} | | | | | | | |
| 34 | k_{34} | k_{34} | j_{34} | | | | | | | |
| 05 | j_{05} | k_{05} | k_{05} | | | | | | | |
| 15 | k_{15} | k_{15} | j_{15} | | | | | | | |
| 25 | k_{25} | j_{25} | k_{25} | | | | | | | |
| 35 | k_{35} | k_{35} | j_{35} | | | | | | | |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| | 15 | 25 | 35 | 45 |
| 05 | | | | |
| 04 | 14 | 24 | 34 | 44 |
| 03 | 13 | 23 | 33 | 43 |
| 02 | 12 | 22 | 32 | 42 |
| 01 | 11 | 21 | 31 | 41 |

第 336 圖

| | | | |
|----|----|----|----|
| | 15 | 25 | 35 |
| 05 | | | |
| 04 | 14 | 24 | 34 |
| 03 | 13 | 23 | 33 |
| 02 | 12 | 22 | 32 |
| 01 | 11 | 21 | 31 |

第 337 圖

表中の j_{3v} をすべて (91.5) に従つて $j_{3v} - k_{4v}$ にて置換へればよい。

iv. 方程式の反覆解法.

上述の如く高層矩形ラーメンの未知量を決定すべき聯立方程式は之を機械的に且つ簡単に求めることが出来るが、之を解くことはかやうに簡単には行かない。之等の如く多數の未知数を有する聯立方程式を行列式に依る一般解法或は消去法に依つて解くことは殆んど不可能に近い努力と時間とを要し、かかる場合には以下に説明する反覆計算法に依つて比較的簡単に實用上十分なる解を得ることが出来る。

今(91.3)の節點方程式及び(91.7)の層方程式を書き換へれば

$$\varphi_A = \frac{1}{j_A} [\mathfrak{M}_A - (k_{AB}\varphi_B + k_{AC}\varphi_C + k_{AD}\varphi_D + k_{AE}\varphi_E + k_{AD}\psi_{AD} + k_{AE}\psi_{AE})], \quad (91.11)$$

$$\psi_m = \frac{1}{f_m} [\mathfrak{S}_m - \sum k_n(\varphi_n + \varphi_n)] \quad (91.12)$$

になる。

反覆計算法に於ては先づ φ 及び ψ に適當なる近似値を假定し、之を (91.11) 又は (91.12) の形の式に代入し、各式より j_A を係数とする φ_A 、 f_m を係数とする ψ_m を決定する。かくして求められた φ 及び ψ の値は第一近似値よりも眞の値に近いものであつて、此の第二近似値を利用して之よりも更に眞に近い第三近似値を求める。此の方法を順次繰返せば順次眞に近い値が得ら

れ、普通の場合には三、四回の計算で實用上十分なる値を得ることが出来る。

最初の第一近似値を假定するには、(91.11)又は(91.12)に於て k_{AB}, k_{AO}, \dots 又は k_n は j_A 又は f_m に比べて可成り小なる値であるから之等をすべて0とし

$$\varphi_A = \frac{M_A}{j_A}, \quad \varphi_m = \frac{G_m}{f_m} \quad (91.13)$$

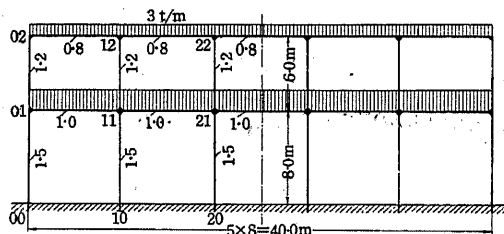
より計算すればよい。

上記の反覆計算法は單に高層矩形ラーメンの場合に限らず、連続梁其の他に關する方程式を解く場合にも應用し得るのは勿論である。

§ 92. 計算例題

計算例として第338圖の如き5スパン2層ラーメンの第一層に6t/m、第二層に3t/mの等分布荷重が作用する場合を計算する。部材の剛比は第一層の梁を1とし他は

すべて各部材の傍に記入した値であるものとする。



第338圖

本例題の場合にはラーメンの構造及び荷重

共に在右對稱であるからラーメンの左半分に就てのみ計算すればよく、また層方程式を考へる必要もない。先づ j を計算すれば(91.3)に依つて

$$\begin{aligned} j_{01} &= 2(1 + 1.5 + 1.2) = 7.4, & j_{02} &= 2(1.2 + 0.8) = 4, \\ j_{11} &= 2(1 + 1 + 1.5 + 1.2) = 9.4, & j_{12} &= 2(0.8 + 1.2 + 0.8) = 5.6, \\ j_{21} &= 9.4 - 1 = 8.4, & j_{22} &= 5.6 - 0.8 = 4.8 \end{aligned}$$

になる。

等分布荷重 p に依る荷重項 C は一般に $pl^2/12$ (第10表参照) であるから、第一層の梁に於ては

$$C = \frac{6 \times 8^2}{12} = 32 \text{ tm},$$

第二層の梁に於ては

$$C = \frac{3 \times 8^2}{12} = 16 \text{ tm}$$

であり、柱材には荷重が作用せざるが故に其の荷重項 C はすべて0である。故に(91.3)に依つて節點方程式の荷重項を計算すれば

$$M_{01} = 32 \text{ tm}, \quad M_{02} = 16 \text{ tm}$$

であり、他の節點に於ける M はすべて0になる。かくして此の場合の方程式を表示すれば第13表になる。

第13表

| 節點 | φ_{01} | φ_{11} | φ_{21} | φ_{02} | φ_{12} | φ_{22} | 荷重項 |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| 01 | 7.4 | 1 | | 1.2 | | | 32 tm |
| 11 | 1 | 9.4 | 1 | | 1.2 | | 0 |
| 21 | | 1 | 8.4 | | | 1.2 | 0 |
| 02 | 1.2 | | | 4 | 0.8 | | 16 tm |
| 12 | | 1.2 | | 0.8 | 5.6 | 0.8 | 0 |
| 22 | | | 1.2 | | 0.8 | 4.8 | 0 |

此の方程式を消去法に依つて解けば次の結果になる。

$$\begin{aligned} \varphi_{01} &= +3.906, & \varphi_{11} &= -0.376, & \varphi_{21} &= +0.038, \\ \varphi_{02} &= +2.897, & \varphi_{12} &= -0.340, & \varphi_{22} &= +0.047. \end{aligned}$$

今、假りに之を反覆計算法に依つて解くものとすれば第13表の各式より

$$\begin{aligned} \varphi_{01} &= \frac{1}{7.4} (32 - \varphi_{11} - 1.2 \varphi_{02}), & \varphi_{02} &= \frac{1}{4} (16 - 1.2 \varphi_{01} - 0.8 \varphi_{12}), \\ \varphi_{11} &= -\frac{1}{9.4} (\varphi_{01} + \varphi_{21} + 1.2 \varphi_{12}), & \varphi_{12} &= -\frac{1}{5.6} (1.2 \varphi_{11} + 0.8 \varphi_{02} + 0.8 \varphi_{22}), \end{aligned}$$

$$\varphi_{21} = -\frac{1}{8.4}(\varphi_{11} + 1.2\varphi_{22}), \quad \varphi_{22} = -\frac{1}{4.8}(1.2\varphi_{21} + 0.8\varphi_{12})$$

になり、先づ(91.13)に依つて第1近似値を求むれば

$$\varphi_{01} = \frac{32}{7.4} = +4.3, \quad \varphi_{02} = \frac{16}{4} = +4, \quad \varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_{21} = \varphi_{22} = 0$$

を得、之を前式に代入すれば次の第2近似値が得られる。

$$\varphi_{01} = +3.68, \quad \varphi_{11} = -0.46, \quad \varphi_{21} = 0,$$

$$\varphi_{02} = +2.71, \quad \varphi_{12} = -0.57, \quad \varphi_{22} = 0.$$

此の第2近似値を前式に代入すれば第3近似値が得られ、此の方法を反

第 14 表

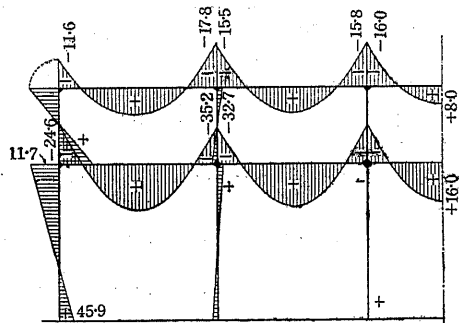
| | φ_{01} | φ_{11} | φ_{21} | φ_{02} | φ_{12} | φ_{22} |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 第 1 近 似 値 | 4.3 | 0 | 0 | 4.0 | 0 | 0 |
| 第 2 近 似 値 | 3.68 | -0.46 | 0 | 2.71 | -0.57 | 0 |
| 第 3 近 似 値 | 3.95 | -0.32 | 0.05 | 3.01 | -0.29 | 0.09 |
| 第 4 近 似 値 | 3.88 | -0.39 | 0.03 | 2.87 | -0.38 | 0.04 |
| 第 5 近 似 値 | 3.91 | -0.37 | 0.04 | 2.88 | -0.33 | 0.05 |
| 第 6 近 似 値 | 3.907 | -0.378 | 0.037 | 2.893 | -0.339 | 0.045 |
| 真 値 | 3.906 | -0.376 | 0.038 | 2.897 | -0.340 | 0.045 |

覆すれば第14表に示すが如

くになり、第6近似値に於て殆んど眞の値に一致する。

上記の φ の値よりラーメンに生ずる曲げモーメントを計算すれば第339圖の如くなる。端スパンを除く

他のスパンに於ては梁の曲



第 339 圖

げモーメントは両端固定梁のときと大差なく、柱材に於ては中間の柱材の曲げモーメントは之を無視し得る程度に僅少である。