

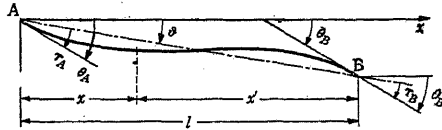
第 X 章 三連モーメントの定理及び

四連モーメントの定理

§ 72. 部材の變形と曲げモーメントとの關係

第 285 圖に於ける AB を、變形前は x -軸に平行であつた直線部材の變形後の位置と形狀を示すものとする。然るとき圖示の角 θ は部材 AB が全體として回轉した角であつて之

を部材回轉角 (或は單に部材角) と言ひ、 θ_A 及び θ_B は部材の A 及び B に於ける回轉角であつて之を節點回轉角 (或は單に節點角) と言ふ。而して A, B を結ぶ直線と A, B に於ける切線との間の角 τ_A, τ_B を切線角と言ふ。之等の角はすべて時針の方向に回轉する場合を正とする。



第 285 圖

節點角であつて之を節點回轉角 (或は單に節點角) と言ふ。而して A, B を結ぶ直線と A, B に於ける切線との間の角 τ_A, τ_B を切線角と言ふ。之等の角はすべて時針の方向に回轉する場合を正とする。

扱て切線角 τ_A は、§ 46 に於て説明せる所に依り、部材 AB を單純梁と考へ、之に曲げモーメント M_x の $1/EI$ が分布荷重として作用するものと假定する場合の A に於ける反力に等しく、 τ_B は之と同様に M_x/EI に依る B に於ける反力に負號を付けたものに等しい。故に EI を常數とすれば

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l M_x (l-x) dx, \\ \tau_B &= - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l M_x x dx \end{aligned} \right\} \quad (72.1)$$

になる。然るに AB の兩端に於ける曲げモーメントを M_A, M_B とし、AB を單純梁と假定するとき、之に直接に作用する荷重に依る曲げモーメントを $M_{x,0}$ とすれば、 M_x は一般に

$$M_x = M_{x,0} + M_A \frac{l-x}{l} + M_B \frac{x}{l} \quad (72.2)$$

であるから、之を(72.1)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= + \frac{l}{6EI} \left[2M_A + M_B + \frac{6}{l^2} \int_0^l M_{x,0} (l-x) dx \right], \\ \tau_B &= - \frac{l}{6EI} \left[M_A + 2M_B + \frac{6}{l^2} \int_0^l M_{x,0} x dx \right] \end{aligned} \right\} \quad (72.3)$$

になる。茲に於て(47.6)或は(55.4)と同様に

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{l} \int_0^l M_{x,0} (l-x) dx, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{l} \int_0^l M_{x,0} x dx \quad (72.4)$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= + \frac{1}{EI} \left[\frac{l}{6} (2M_A + M_B) + \mathfrak{U} \right], \\ \tau_B &= - \frac{1}{EI} \left[\frac{l}{6} (M_A + 2M_B) + \mathfrak{B} \right] \end{aligned} \right\} \quad (72.5)$$

になる。\$\mathfrak{U}\$ 及び \$\mathfrak{B}\$ は既に § 47 或は § 55 に於て説明せるが如く AB を単純梁と考へ之に直接に作用する荷重に依る曲げモーメント \$M_{x,0}\$ を荷重とする場合の A 及び B に於ける反力であつて、諸種の荷重に對する \$\mathfrak{U}\$ 及び \$\mathfrak{B}\$ の値は第 5 表(第 224 頁)に示してある。

次に節點回轉角 \$\theta_A\$ 及び \$\theta_B\$ は \$\theta_A = \tau_A + \vartheta\$, \$\theta_B = \tau_B + \vartheta\$ であるから

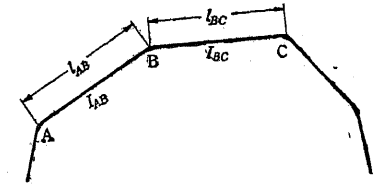
$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= + \frac{1}{EI} \left[\frac{l}{6} (2M_A + M_B) + \mathfrak{U} \right] + \vartheta, \\ \theta_B &= - \frac{1}{EI} \left[\frac{l}{6} (M_A + 2M_B) + \mathfrak{B} \right] + \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (72.6)$$

になる。

§ 73. 三連モーメントの定理

今、第 286 圖の如き剛節部材のつながりに於て相つながる任意の二部材

AB, BC をとり、其の長さ、断面二次モーメント及び部材回轉角を夫々 \$l_{AB}, l_{BC}, I_{AB}, I_{BC}, \vartheta_{AB}, \vartheta_{BC}\$ とすれば部材 AB の節點 B に於ける節點回轉角は(72.6)の第二式より



第 286 圖

$$\theta_B = - \frac{1}{EI_{AB}} \left[\frac{l_{AB}}{6} (M_A + 2M_B) + \mathfrak{B}_{AB} \right] + \vartheta_{AB}$$

になり、同様にして部材 BC の節點 B に於ける節點回轉角 \$\theta'_B\$ は(72.6)の第一式より

$$\theta'_B = + \frac{1}{EI_{BC}} \left[\frac{l_{BC}}{6} (2M_B + M_C) + \mathfrak{U}_{BC} \right] + \vartheta_{BC}$$

になる。然るに B は剛節節點であるから部材 AB と BC との B に於ける回轉角は相等しく、従つて上記二式の右邊は相等しくなければならない。即ち

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{EI_{AB}} \left[\frac{l_{AB}}{6} (M_A + 2M_B) + \mathfrak{B}_{AB} \right] + \vartheta_{AB} \\ & = \frac{1}{EI_{BC}} \left[\frac{l_{BC}}{6} (2M_B + M_C) + \mathfrak{U}_{BC} \right] + \vartheta_{BC}, \end{aligned}$$

之を書換へれば

$$\begin{aligned} & \frac{l_{AB}}{I_{AB}} M_A + 2 \left(\frac{l_{AB}}{I_{AB}} + \frac{l_{BC}}{I_{BC}} \right) M_B + \frac{l_{BC}}{I_{BC}} M_C \\ & = - 6 \left(\frac{\mathfrak{B}_{AB}}{I_{AB}} + \frac{\mathfrak{U}_{BC}}{I_{BC}} \right) + 6E(\vartheta_{AB} - \vartheta_{BC}) \end{aligned} \quad (73.1)$$

になる。本式は三連モーメントの定理或は Clapeyron の定理と呼ばれるものの一般式であつて、式を簡単にするために任意の適當なる部材の断面二次モーメントを基準断面二次モーメント \$I_0\$ とし

$$l'_{AB} = \frac{I_0}{I_{AB}} l_{AB}, \quad l'_{BC} = \frac{I_0}{I_{BC}} l_{BC} \quad (73.2)$$

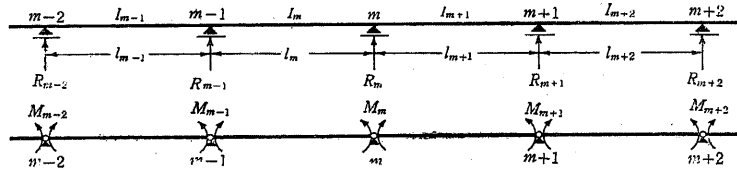
と置けば

$$l'_{AB} M_A + 2(l'_{AB} + l'_{BC}) M_B + l'_{BC} M_C = -6 \left(\frac{l'_{AB}}{l_{AB}} \mathfrak{B}_{AB} + \frac{l'_{BC}}{l_{BC}} \mathfrak{B}_{BC} \right) + 6 E I_C (\vartheta_{AB} - \vartheta_{BC}) \quad (73.3)$$

になる。之等の式を適當に應用することに依つて連続梁或はラーメンの問題を比較的簡単に解決することが出来る。

§ 74. 連続梁への應用

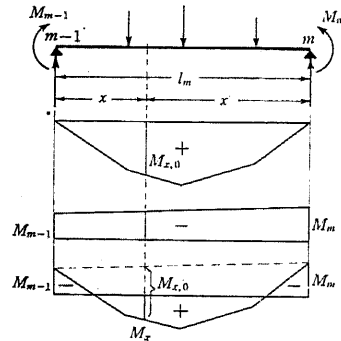
第 287 圖の如き連続梁に於て各支點上の曲げモーメント M_{m-1}, M_m, M_{m+1} 等を不静定力に選べば、此の場合の静定基本系は圖示の如き滑節部材のつながりになる。此の滑節部材の各々は夫々一つの單純梁と見做すことが出来るから、若し何等かの方法に依つて支點上の曲げモーメントが求められ



第 287 圖

れば、連続梁の任意の断面に於ける断面力及び各支點に於ける反力は、各スパンを夫々單純梁とするときの與へられたる荷重に依る値と支點上の曲げモーメントのみに依る値とを加へることに依つて求められる。

例へば第 288 圖の如く支點 $m-1, m$ の間に於て $m-1$ より任意の距離 x に



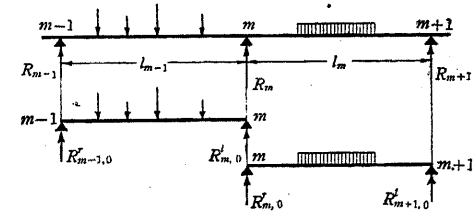
第 288 圖

於ける連続梁としての曲げモーメント M_m 及び剪断力 Q_m は、此のスパンを單純梁とするときの曲げモーメント及び剪断力を $M_{m,0}$ 及び $Q_{m,0}$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} M_m &= M_{m,0} + M_{m-1} \frac{x'}{l_m} + M_m \frac{x}{l_m}, \\ Q_m &= Q_{m,0} + \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} \end{aligned} \right\} \quad (74.1)$$

に依つて求められる。

之と同様に第 289 圖の如く支點 m に於ける反力を R_m 、其の左右のスパンを夫々單純梁と假定するとき之等に直接に作用する荷



第 289 圖

重に依る m に於ける反力を B_m 及び A_{m+1} とすれば、一般に

$$R_m = B_m + A_{m+1} + \frac{M_{m-1} - M_m}{l_m} + \frac{M_{m+1} - M_m}{l_{m+1}} \quad (74.2)$$

になる。但し第 289 圖に就て $B_m = R_{m,0}^l, A_{m+1} = R_{m,0}^r$ である。

扱て各支點上の曲げモーメントの決定には前節の三連モーメントの定理が便利に應用せられる。即ち第 287 圖の連続梁の各支點を節點と考へれば、此の連続梁は第 286 圖の剛節部材のつながりが特に水平の一直線になつた場合に外ならない。従つて一般に $m-1, m$ 間のスパンを l_m 、此のスパンに於ける $I, \vartheta, \mathfrak{B}$ 及び \mathfrak{B} に對してすべて m の添字を附けるものとすれば(73.3)に依つて

$$l'_m M_{m-1} + 2(l'_m + l'_{m+1}) M_m + l'_{m+1} M_{m+1} = -6 \left(\frac{l'_m}{l_m} \mathfrak{B}_m + \frac{l'_{m+1}}{l_{m+1}} \mathfrak{B}_{m+1} \right) + 6 E I_C (\vartheta_m - \vartheta_{m+1}) \quad (74.3)$$

を得る。但し l'_m は(73.2)の如く

$$l'_m = \frac{I_C}{I_m} l_m \quad (74.4)$$

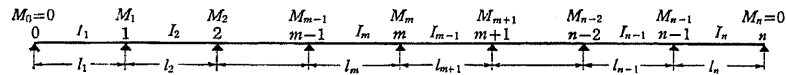
である。

以下の記述に於ては特に明記せざる限り支點は變位せざるものとする。

然るときは δ はすべて 0 になるから

$$\frac{l'_m M_{m-1} + 2(l'_m + l'_{m+1})M_m + l'_{m+1} M_{m+1}}{6} = -\left(\frac{l'_m}{l_m} \mathfrak{B}_m + \frac{l'_{m+1}}{l_{m+1}} \mathfrak{B}_{m+1}\right) \quad (74.5)$$

になる。本式は支點が變位せざる連続梁の基本方程式であつて、かくの如き方程式が各支點毎に成立し、例へば第 290 圖の如き n スパンの連続梁に



第 290 圖

於ては $n-1$ 個の未知曲げモーメント M_1, M_2, \dots, M_{n-1} に對して $n-1$ 個の方程式が得られ、之に依つてすべての M_1, M_2, \dots, M_{n-1} を決定することが出来る。但し支點 1 或は $n-1$ に於ける方程式に於ては M_0 或は M_n を零としなければならない。

若し左端 0 が固定端なる場合には茲に作用すべき曲げモーメント M_0 が未知數に加へられ、従つて支點 0 に於ても三連モーメントの式を立てる必要がある。今、假りに(74.5)式に於て $l'_m = 0$, 即ち $I_m = \infty$ とすれば

$$2M_m + M_{m+1} = -\frac{6}{l_{m+1}} \mathfrak{B}_{m+1}$$

になる。然るに $I_m = \infty$ なることは支點 m の左方のスパンが全く變形せざることを意味し、従つて支點 m が固定端なる場合と同等になる。故に前記の如く左端 0 が固定端なるときの $m=0$ に對する三連モーメントの式は

$$2M_0 + M_1 = -\frac{6}{l_1} \mathfrak{B}_1 \quad (74.6)$$

になり、同様にして右端 n が固定端なるときの $m=n$ に對する式は

$$M_{n-1} + 2M_n = -\frac{6}{l_n} \mathfrak{B}_n \quad (74.7)$$

になる。

特に各スパンが等長であつて I が全長にわたつて常數の場合には

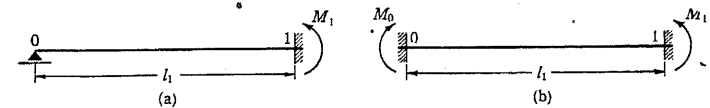
$$l'_1 = l'_2 = \dots = l'_m = \dots = l'_n = l$$

とすることが出来、従つて三連モーメントの一般式は

$$\frac{M_{m-1} + 4M_m + M_{m+1}}{6} = -\frac{6}{l} (\mathfrak{B}_m + \mathfrak{B}_{m+1}) \quad (74.8)$$

になる。而して此の場合の(74.6)或は(74.7)に於ては單に l_1 或は l_n を l とすればよい。

上記の諸式は連続梁に對してのみならず、既に §57 に於て記述せる一端移動端、他端固定の梁、或は §67 に於て記述せる兩端固定梁の解法にも極めて便利に應用せられる。例へば第 291 圖(a)の梁を連続梁の最左端のスパン



第 291 圖

ンと考へ、支點 1 が固定端である條件の代りに $I_2 = \infty$, 即ち $l'_2 = 0$ とし、且つ $M_0 = 0$ とすれば、(74.5)より

$$2l'_1 M_1 = -6 \frac{l'_1}{l_1} \mathfrak{B}_1 \quad \text{即ち} \quad M_1 = -\frac{3\mathfrak{B}_1}{l_1} \quad (74.9)$$

を得る。之は §57 に於て導來せる(57.2)に全く等しい。

之と同様に第 291 圖(b)の梁を支點 0 が固定端である連続梁の最左スパンと考へれば、(74.6)より

$$2M_0 + M_1 = -\frac{6}{l_1} \mathfrak{M}_1$$

になり、また之を右端1が固定端である連続梁の最右スパンと考へ、(74.7)

に於て $n=1$ とすれば

$$M_0 + 2M_1 = -\frac{6}{l_1} \mathfrak{B}_1$$

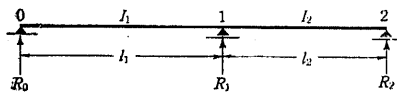
を得、此の兩式より M_0, M_1 を求むれば

$$M_0 = -\frac{2}{l_1}(2\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{B}_1), \quad M_1 = -\frac{2}{l_1}(2\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{M}_1) \quad (74.10)$$

になる。之は §67 に於て導來せる (67.1) に全く等しい。以下、先づ簡單なる場合に對し前記諸式の應用を示し、次に連続梁の一般解法を記述することにする。

§ 75. 二スパンの連続梁

第 292 圖の如き二スパンの連続梁に就て $M_0 = M_2 = 0$ なることを考慮して三連モーメントの



第 292 圖

定理の一般式(74.5)を $m=1$ として書けば

$$2(l'_1 + l'_2)M_1 = -6\left(\frac{l'_1}{l_1}\mathfrak{B}_1 + \frac{l'_2}{l_2}\mathfrak{M}_2\right)$$

になり、茲に於て

$$k_1 = \frac{l'_1}{2(l'_1 + l'_2)}, \quad k_2 = \frac{l'_2}{2(l'_1 + l'_2)}$$

と置けば

$$M_1 = -6\left(\frac{k_1}{l_1}\mathfrak{B}_1 + \frac{k_2}{l_2}\mathfrak{M}_2\right) \quad (75.1)$$

を得る。

M_1 がわかれば反力及び断面力は(74.1)及び(74.2)より求められる。但し

$M_0 = M_2 = 0$ なることを考慮し、 x 或は x' の原點を夫々各スパン毎にスパンの左端或は右端にとるものとすれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \text{反力:} \quad R_0 &= A_1 + \frac{M_1}{l_1}, \quad R_2 = B_2 + \frac{M_1}{l_2}, \\ R_1 &= B_1 + A_2 - \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)M_1; \end{aligned} \right\} \quad (75.2)$$

$$\text{左スパン:} \quad M_x = M_{x,0} + M_1 \frac{x}{l_1}, \quad Q_x = Q_{x,0} + \frac{M_1}{l_1}; \quad (75.3)$$

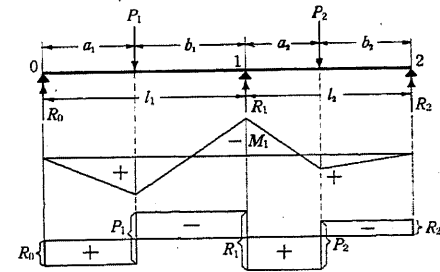
$$\text{右スパン:} \quad M_x = M_{x,0} + M_1 \frac{x'}{l_2}, \quad Q_x = Q_{x,0} - \frac{M_1}{l_2}. \quad (75.4)$$

例へば第 293 圖の如く集中

荷重 P_1, P_2 が作用するときには第 5 表より

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{P_1 l_1^2}{6} \left(\frac{a_1}{l_1} - \frac{a_1^3}{l_1^3} \right),$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{P_2 l_2^2}{6} \left(\frac{b_2}{l_2} - \frac{b_2^3}{l_2^3} \right)$$



第 293 圖

であるから

$$M_1 = -k_1 P_1 l_1 \left(\frac{a_1}{l_1} - \frac{a_1^3}{l_1^3} \right) - k_2 P_2 l_2 \left(\frac{b_2}{l_2} - \frac{b_2^3}{l_2^3} \right) \quad (75.5)$$

になり、曲げモーメント圖及び剪斷力圖は夫々圖示の如くなる。

また第 294 圖の如く等分布荷重 p_1, p_2 が作用するときには

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{p_1 l_1^3}{24}, \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{p_2 l_2^3}{24}$$

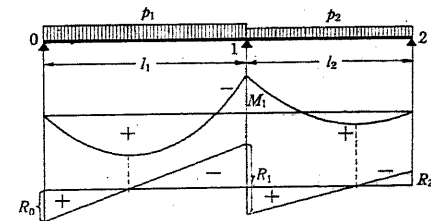
であるから

$$M_1 = -\frac{1}{4}(k_1 p_1 l_1^2 + k_2 p_2 l_2^2) \quad (75.6)$$

になる。此の場合に於て $l_1 = l_2$

$= l, I_1 = I_2$ ならば $k_1 = k_2 = \frac{1}{4}$

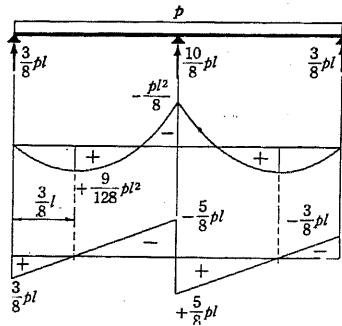
になり



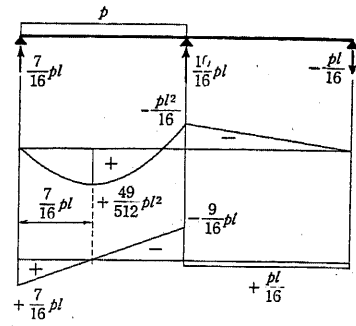
第 294 圖

$$M_1 = -\frac{(p_1 + p_2)l^2}{16} \quad (75.7)$$

になる。之に依り $p_1 = p_2 = p$ 及び $p_1 = p, p_2 = 0$ の場合の反力、曲げモーメント及び剪断力を求めれば夫々第 295 圖及び第 296 圖の如くなる。



第 295 圖 $p_1 = p_2 = p$.



第 296 圖 $p_1 = p, p_2 = 0$.

鉛直荷重に対する影響線を得るために(75.5)式に於て

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 0, \quad a_1 = \xi l_1,$$

或は $P_1 = 0, \quad P_2 = 1, \quad b'_2 = \xi' l_2$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} M_{1(c_1)} &= -k_1 l_1 \cdot \xi(1 - \xi^2), \\ M_{1(c_2)} &= -k_2 l_2 \cdot \xi'(1 - \xi'^2) \end{aligned} \right\} \quad (75.8)$$

になり、此の $M_{1(c_1)}$ 及び $M_{1(c_2)}$ は夫々左或は右のスパンに於ける M_1 の影響線縦距を示すものである。而して $\xi(1 - \xi^2)$ は(75.10)にて示せる函数 $f_1(\xi)$ であつて、之を利用すれば

$$M_{1(c_1)} = -k_1 l_1 \cdot f_1(\xi), \quad M_{1(c_2)} = -k_2 l_2 \cdot f_1(\xi') \quad (75.9)$$

になる。種々なる ξ 或は ξ' の値に対する f_1 の値は第 6 表(第 230 頁)にあつて、之に依つて M_1 の影響線を描けば第 297 圖 (a) の如くなる。

両スパンを単純梁とするときの反力の影響線と M_1 の影響線とを(75.2)に従つて重合すれば反力に対する影響線が得られる。即ち $P_1 = 1$ 或は $P_2 = 1$ に対しては夫々

$$A_1 = 1 - \xi,$$

$$B_1 = \xi,$$

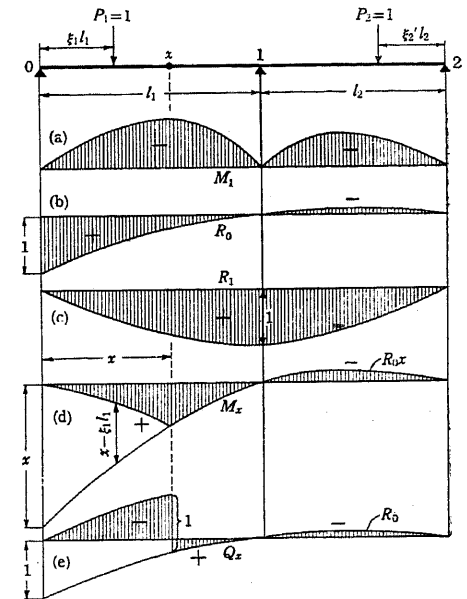
$$A_2 = B_2 = 0,$$

或は

$$A_1 = B_1 = 0,$$

$$A_2 = \xi',$$

$$B_2 = 1 - \xi'$$



第 297 圖

であるから R_0, R_1 の影響線縦

距は(75.2)より

$$\left. \begin{aligned} R_{0(c_1)} &= 1 - \xi - k_1 \cdot f_1(\xi), \\ R_{0(c_2)} &= -\frac{k_2 l_2}{l_1} f_1(\xi'); \end{aligned} \right\} \quad (75.10)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{1(c_1)} &= \xi + \frac{k_1 (l_1 + l_2)}{l_2} f_1(\xi), \\ R_{1(c_2)} &= \xi' + \frac{k_2 (l_1 + l_2)}{l_1} f_1(\xi') \end{aligned} \right\} \quad (75.11)$$

になり、之に依つて R_0 及び R_1 に対して第 297 圖 (b), (c) の如き影響線が得られる。

曲げモーメント及び剪断力の影響線に就ては次の如くに考へる方が簡単

である。即ち例へば左方のスパンに於て左端より x の距離の M_x, Q_x は $P=1$ が其の断面の右方に作用するときには

$$M_x = R_0 x, \quad Q_x = R_0$$

であり、 $P=1$ が断面の左方に作用するときには

$$M_x = R_0 x - 1(x - \xi l_1), \quad Q_x = R_0 - 1$$

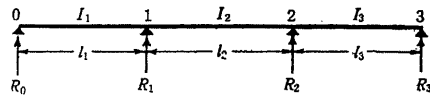
であるから R_0 の影響線を利用することに依つて第 297 圖(d), (e) の如き影響線が得られる。

§ 76. 三スパンの連続梁

第 298 圖の如き三スパンの

連続梁に於ては $M_0 = M_3 = 0$

であつて、 $m=1$ 及び $m=2$



第 298 圖

に對し三連モーメントの式を立てれば

$$\left. \begin{aligned} 2(l'_1 + l'_2)M_1 + l'_2 M_2 &= -K_1, \\ l'_2 M_1 + 2(l'_2 + l'_3)M_2 &= -K_2, \end{aligned} \right\} \quad (76.1)$$

$$K_1 = 6\left(\frac{l'_1}{l_1} \mathfrak{B}_1 + \frac{l'_2}{l_2} \mathfrak{Q}_1\right), \quad K_2 = 6\left(\frac{l'_2}{l_2} \mathfrak{B}_2 + \frac{l'_3}{l_3} \mathfrak{Q}_2\right) \quad (76.2)$$

になり、之より

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{2(l'_2 + l'_3)K_1 - l'_2 K_2}{4(l'_1 + l'_2)(l'_2 + l'_3) - l'^2_2}, \\ M_2 &= -\frac{2(l'_1 + l'_2)K_2 - l'_2 K_1}{4(l'_1 + l'_2)(l'_2 + l'_3) - l'^2_2} \end{aligned} \right\} \quad (76.3)$$

を得る。 M_1, M_2 がわかれば反力は(74.2)に依り

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= A_1 + \frac{M_1}{l_1}, \quad R_3 = B_3 + \frac{M_2}{l_3}, \\ R_1 &= B_1 + A_2 - \frac{M_1}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_2}, \\ R_2 &= B_2 + A_3 - \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_2}{l_3} \end{aligned} \right\} \quad (76.4)$$

より計算せられ、各スパンの曲げモーメント及び剪断力は

$$\left. \begin{aligned} 0 \sim 1: \quad M_x &= M_{x,0} + M_1 \frac{x}{l_1}, & Q_x &= Q_{x,0} + \frac{M_1}{l_1}; \\ 1 \sim 2: \quad M_x &= M_{x,0} + M_1 \frac{x'}{l_2} + M_2 \frac{x}{l_2}, & Q_x &= Q_{x,0} + \frac{M_2 - M_1}{l_2}; \\ 2 \sim 3: \quad M_x &= M_{x,0} + M_2 \frac{x'}{l_3}, & Q_x &= Q_{x,0} - \frac{M_2}{l_3} \end{aligned} \right\} \quad (76.5)$$

より算出することが出来る。

特に $l_1 = l_2 = l_3 = l, I_1 = I_2 = I_3$ の場合には

$$l'_1 = l'_2 = l'_3 = l$$

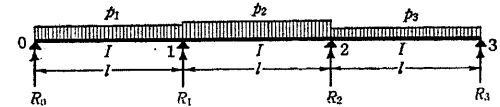
とすることが出来、従つて

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{4K_1 - K_2}{15l} = -\frac{2}{5l} [4(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{Q}_2) - (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{Q}_3)], \\ M_2 &= -\frac{4K_2 - K_1}{15l} = -\frac{2}{5l} [4(\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{Q}_3) - (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{Q}_2)] \end{aligned} \right\} \quad (76.6)$$

になる。例へば第 299 圖

の如く等分布荷重 $p_1, p_2,$

p_3 が作用するときには



第 299 圖

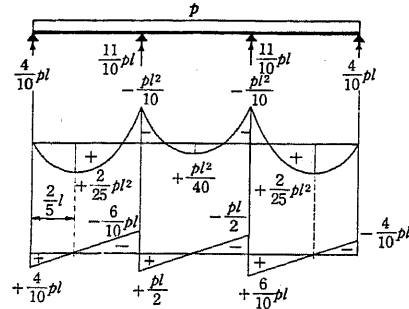
$$\mathfrak{B}_1 = \frac{p_1 l^2}{24}, \quad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{B}_2 = \frac{p_2 l^2}{24}, \quad \mathfrak{Q}_3 = \frac{p_3 l^2}{24}$$

であるから

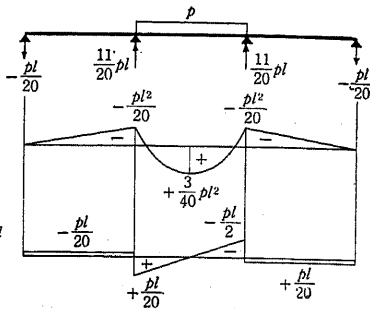
$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{l^2}{60} (4p_1 + 3p_2 - p_3), \\ M_2 &= -\frac{l^2}{60} (-p_1 + 3p_2 + 4p_3); \\ R_0 &= \frac{l}{60} (26p_1 - 3p_2 + p_3), \\ R_1 &= \frac{l}{20} (13p_1 + 11p_2 - 2p_3), \\ R_2 &= \frac{l}{20} (-2p_1 + 11p_2 + 13p_3), \\ R_3 &= \frac{l}{60} (p_1 - 3p_2 + 26p_3) \end{aligned} \right\} \quad (76.7)$$

$$(76.8)$$

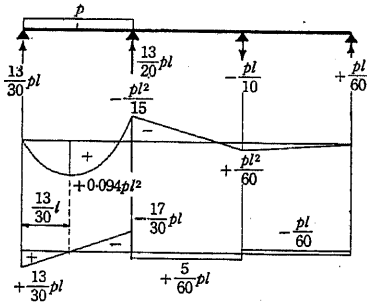
になり、曲げモーメント及び剪断力は(76.5)より容易に求められる。二三の特殊なる荷重状態に於ける曲げモーメント圖及び剪断力圖を第 300 圖乃至第 303 圖に示す。



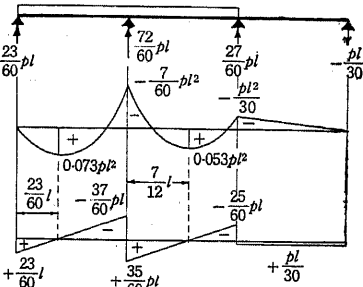
第 300 圖 $p_1 = p_2 = p_3 = p$.



第 301 圖 $p_1 = p_3 = p, p_2 = 0$.



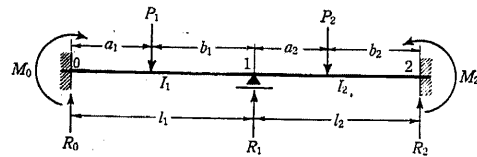
第 302 圖 $p_1 = p, p_2 = p_3 = 0$.



第 303 圖 $p_1 = p_2 = p, p_3 = 0$.

§ 77. 両端固定の二スパン連続梁

第 304 圖の如き両端固定の二スパン連続梁に於て両端 0 及び 2 に對しては夫々 (74.6) 或は (74.7)



第 304 圖

を適用し、中間支點 1 に對しては(74.5)を $m = 1$ として適用すれば

$$\left. \begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= -6 \frac{\mathfrak{A}_1}{l_1}, \\ l_1' M_0 + 2(l_1' + l_2') M_1 + l_2' M_2 &= -6 \left(\frac{l_1'}{l_1} \mathfrak{B}_1 + \frac{l_2'}{l_2} \mathfrak{A}_2 \right), \\ M_1 + 2M_2 &= -6 \frac{\mathfrak{B}_2}{l_2} \end{aligned} \right\} \quad (77.1)$$

になり、此の第一及び第三式より

$$M_0 = -\frac{M_1}{2} - \frac{3\mathfrak{A}_1}{l_1}, \quad M_2 = -\frac{M_1}{2} - \frac{3\mathfrak{B}_2}{l_2} \quad (77.2)$$

を得、之を(77.1)の第二式に代入し、それより M_1 を求むれば

$$M_1 = -\frac{2}{l_1' + l_2'} \left[\frac{l_1'}{l_1} (2\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1) + \frac{l_2'}{l_2} (2\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2) \right] \quad (77.3)$$

になる。

之に依つて M_1 が求められれば M_0, M_2 は(77.2)より計算せられ、反力及び曲げモーメント、剪断力は

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= A_1 + \frac{M_1 - M_0}{l_1}, & R_2 &= B_2 - \frac{M_2 - M_1}{l_2}, \\ R_1 &= B_1 + A_2 - \frac{M_1 - M_0}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_2}; \end{aligned} \right\} \quad (77.4)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \sim 1: & \quad M_x = M_{x,0} + M_0 \frac{x'}{l_1} + M_1 \frac{x}{l_1}, & Q_x &= Q_{x,0} + \frac{M_1 - M_0}{l_1}; \\ 1 \sim 2: & \quad M_x = M_{x,0} + M_1 \frac{x'}{l_2} + M_2 \frac{x}{l_2}, & Q_x &= Q_{x,0} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} \end{aligned} \right\} \quad (77.5)$$

より計算せられる。

例へば第 304 圖の如く集中荷重 P_1, P_2 が作用する場合には、第 5 表より多少の演算を行へば

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{P_1 a_1 b_1 (a_1 + 2b_1)}{6 l_1}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1)}{6 l_1},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{P_2 a_2 b_2 (a_2 + 2 b_2)}{6 l_2}, \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{P_2 a_2 b_2 (2 a_2 + b_2)}{6 l_2}$$

であつて之を(77.3)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -k_1 \frac{P_1 a_1^2 b_1}{l_1^2} - k_2 \frac{P_2 a_2 b_2^2}{l_2^2}, \\ \text{但し} \quad k_1 &= \frac{l_1'}{l_1 + l_2'}, \quad k_2 = \frac{l_2'}{l_1 + l_2'} \end{aligned} \right\} \quad (77.6)$$

を得る. 而して M_0, M_2 は

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= -\frac{M_1}{2} - \frac{P_1 a_1 b_1 (a_1 + 2 b_1)}{2 l_1^2}, \\ M_2 &= -\frac{M_1}{2} - \frac{P_2 a_2 b_2 (2 a_2 + b_2)}{2 l_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (77.7)$$

より計算せられる.

特に $l_1 = l_2 = l, I_1 = I_2$ の場合には $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$ になるから

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= -\frac{1}{2l} (7 \mathfrak{A}_1 - 2 \mathfrak{B}_1 - 2 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2), \\ M_1 &= -\frac{1}{l} (-\mathfrak{A}_1 + 2 \mathfrak{B}_1 + 2 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2), \\ M_2 &= -\frac{1}{2l} (\mathfrak{A}_1 - 2 \mathfrak{B}_1 - 2 \mathfrak{A}_2 + 7 \mathfrak{B}_2) \end{aligned} \right\} \quad (77.8)$$

になる. 例へば等分布荷重 p が兩スパンに満載する場合にはすべての \mathfrak{A} 及

び \mathfrak{B} は $\frac{p l^3}{24}$ に等しいから

$$M_0 = M_1 = M_2 = -\frac{p l^2}{12} \quad (77.9)$$

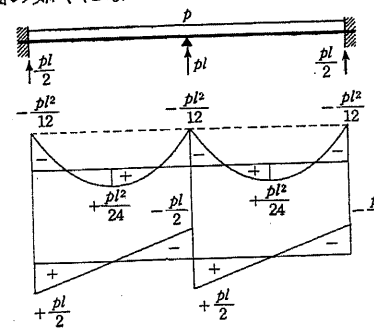
になり, また p が左方のスパンにのみ作用する場合には

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1 = \frac{p l^3}{24}, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2 = 0$$

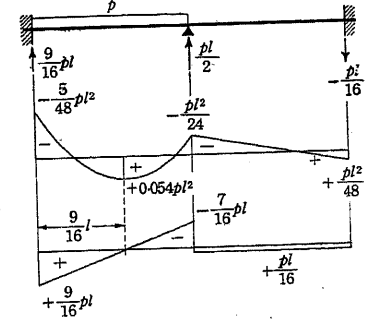
であるから

$$M_0 = -\frac{5}{48} p l^2, \quad M_1 = -\frac{p l^2}{24}, \quad M_2 = +\frac{p l^2}{48} \quad (77.10)$$

になり, 此の兩場合の反力, 曲げモーメント及び剪断力は第305圖及び第306圖の如くなる.



第 305 圖



第 306 圖

鉛直荷重に對する影響線を求めるために(77.6), (77.7)に於て

$$P_1 = 1, \quad a_1 = \xi l_1, \quad b_1 = (1 - \xi) l_1;$$

$$\text{或は} \quad P_2 = 1, \quad a_2 = (1 - \xi') l_2, \quad b_2 = \xi' l_2$$

と置いて演算すれば, $P = 1$ に依つては

$$\left. \begin{aligned} M_{0(\xi)} &= -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) [2 - (1 + k_1) \xi] l_1, \\ M_{1(\xi)} &= -k_1 \xi^2 (1 - \xi) l_1, \\ M_{2(\xi)} &= -\frac{1}{2} M_{1(\xi)} \end{aligned} \right\} \quad (77.11)$$

になり, $P_2 = 1$ に依つては

$$\left. \begin{aligned} M_{0(\xi')} &= -\frac{1}{2} M_{1(\xi')}, \\ M_{1(\xi')} &= -k_2 \xi'^2 (1 - \xi') l_2, \\ M_{2(\xi')} &= -\frac{1}{2} \xi' (1 - \xi') [2 - (1 + k_2) \xi'] l_2 \end{aligned} \right\} \quad (77.12)$$

になる. 茲に於て ξ 又は ξ' を變數とすれば, 上式は即ち M_0, M_1, M_2 に對する影響線縦距を示すことになり, 例へば M_1 及び M_0 の影響線は第307圖

(a)及び(b)の如くなる.

上記の M_0, M_1, M_2 の値を(77.4)に代入すれば反力に対する影響線縦距が得られる。例へば R_0, R_1 に対しては $P_1 = 1$ に依つては

$$\left. \begin{aligned} R_{0(1)} &= 1 - \xi \\ &+ \frac{M_{1(1)} - M_{0(1)}}{l_1}, \\ R_{1(1)} &= \xi - \frac{M_{1(1)} - M_{0(1)}}{l_1} \\ &+ \frac{M_{2(1)} - M_{1(1)}}{l_2}, \end{aligned} \right\} (77.13)$$

$$\left. \begin{aligned} P_2 = 1 \text{ に依つては} \\ R_{0(2)} &= \frac{M_{1(2)} - M_{0(2)}}{l_1}, \\ R_{1(2)} &= \xi' - \frac{M_{1(2)} - M_{0(2)}}{l_1} \\ &+ \frac{M_{2(2)} - M_{1(2)}}{l_2} \end{aligned} \right\} (77.14)$$

になり、之に依り影響線を描けば第307圖(c), (d)の如くなる。

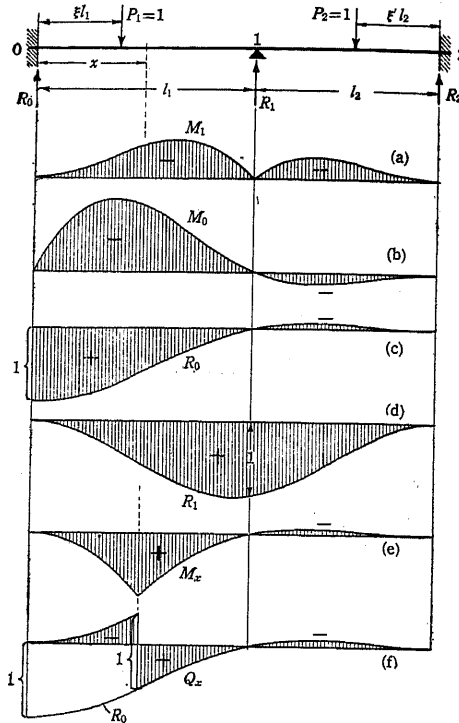
左方のスパンに於て左端より x の距離にある断面の M_x 及び Q_x は、 $P=1$ が該断面より右方に作用する場合には

$$M_x = R_0 x + M_0, \quad Q_x = R_0$$

であり、 $P=1$ が該断面より左方に作用する場合には

$$M_x = R_0 x + M_0 - 1(x - \xi l_1), \quad R_x = R_0 - 1$$

であるから M_0 と R_0 の影響線縦距を利用することによつて第307圖(e), (f)



第307圖

の如き影響線が得られる。

§ 78. 三連モーメントの方程式の一般解法

連続梁に対する三連モーメントの一般方程式(74.5)に於て一般に

$$a_m = l'_m, \quad b_m = 2(l'_m + l'_{m+1}), \quad K = 6 \left(\frac{l'_m}{l_m} \mathfrak{B}_m + \frac{l'_{m+1}}{l_{m+1}} \mathfrak{B}_{m+1} \right) \quad (78.1)$$

と置き、両端0及び $n+1$ が回轉端である $n+1$ スパンの連続梁に対して式を書けば

$$\left. \begin{aligned} b_1 M_1 + a_2 M_2 &= -K_1, \\ a_2 M_1 + b_2 M_2 + a_3 M_3 &= -K_2, \\ a_3 M_2 + b_3 M_3 + a_4 M_4 &= -K_3, \\ &\dots\dots\dots \\ a_m M_{m-1} + b_m M_m + a_{m+1} M_{m+1} &= -K_m, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} + a_n M_n &= -K_{n-1}, \\ a_n M_{n-1} + b_n M_n &= -K_n \end{aligned} \right\} (78.2)$$

の如き型式の n 個の一次方程式が得られる。かかる型式の方程式は單に連続梁の場合に限らず、一層連続ラーメンその他の構造物の場合にも出て来る方程式であつて、以下かかる方程式の一般解法の一方法を示す。

扱て(78.2)は n 個の未知數 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ に関する n 個の一次聯立方程式であつて、其の解は一般に(53.10)と同様に

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= c_{11} K_1 + c_{12} K_2 + \dots + c_{1m} K_m + \dots + c_{1n} K_n, \\ M_2 &= c_{21} K_1 + c_{22} K_2 + \dots + c_{2m} K_m + \dots + c_{2n} K_n, \\ &\dots\dots\dots \\ M_m &= c_{m1} K_1 + c_{m2} K_2 + \dots + c_{mm} K_m + \dots + c_{mn} K_n, \end{aligned} \right\} (78.3)$$

$$M_n = c_{n1}K_1 + c_{n2}K_2 + \dots + c_{nm}K_m + \dots + c_{nn}K_n$$

とすることが出来る。

上式中の係数 c は a 及び b の関数である。即ち c は荷重項には全く無関係であり、連続梁或は構造物の弾性条件のみに依つて定まる係数である。従つて豫め c を決定して置けば如何なる荷重に対してもそれに依る荷重項 K を計算し之を(78.3)に代入することに依つてすべての未知数を算定することが出来る。

c を決定するには次の如くにする。即ち前述の如く c は荷重項 K には無関係であり、且つ K は任意の値をとり得るものであるから、今荷重項 K のうち任意の一つ、例へば K_m を 1 に等しと置き残餘の K をすべて零に等しと置けば(78.3)より

$$M_1 = c_{1m}, \quad M_2 = c_{2m}, \quad \dots, \quad M_m = c_{mm}, \quad \dots, \quad M_n = c_{nm}$$

になり、之を(78.2)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} b_1 c_{1m} + a_2 c_{2m} &= 0, \\ a_2 c_{1m} + b_2 c_{2m} + a_3 c_{3m} &= 0, \\ a_3 c_{2m} + b_3 c_{3m} + a_4 c_{4m} &= 0, \\ \dots & \\ a_m c_{m-1,m} + b_m c_{mm} + a_{m+1} c_{m+1,m} &= -1, \\ \dots & \\ a_{n-1} c_{n-2,m} + b_{n-1} c_{n-1,m} + a_n c_{nm} &= 0, \\ a_n c_{n-1,m} + b_n c_{nm} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (78.4)$$

を得る。

扱て此の第一式より c_{1m} を c_{2m} の関数としてあらはし、それを第二式の

c_{1m} に代入し、之に依つて c_{2m} を c_{3m} の関数としてあらはすが如き方法を順次第 $m-1$ 式まで繰返せば

$$\left. \begin{aligned} c_{1m} &= -\frac{c_{2m}}{x_2}, \quad \text{但し } x_2 = \frac{b_1}{a_2}; \\ c_{2m} &= -\frac{c_{3m}}{x_3}, \quad \text{但し } x_3 = \frac{b_2 - \frac{a_2}{x_2}}{a_3}; \\ c_{3m} &= -\frac{c_{4m}}{x_4}, \quad \text{但し } x_4 = \frac{b_3 - \frac{a_3}{x_3}}{a_4}; \\ \dots & \\ c_{m-1,m} &= -\frac{c_{mm}}{x_m}, \quad \text{但し } x_m = \frac{b_{m-1} - \frac{a_{m-1}}{x_{m-1}}}{a_m} \end{aligned} \right\} \quad (78.5)$$

になり、之と同様に(78.4)の最後の式より c_{nm} を $c_{n-1,m}$ の関数とし、次に第 $n-1$ 式より $c_{n-1,m}$ を $c_{n-2,m}$ の関数としてあらはすが如き方法を順次第 $m+1$ 式まで繰返せば

$$\left. \begin{aligned} c_{nm} &= -\frac{c_{n-1,m}}{x'_n}, \quad \text{但し } x'_n = \frac{b_n}{a_n}; \\ c_{n-1,m} &= -\frac{c_{n-2,m}}{x'_{n-1}}, \quad \text{但し } x'_{n-1} = \frac{b_{n-1} - \frac{a_n}{x'_n}}{a_{n-1}}; \\ c_{n-2,m} &= -\frac{c_{n-3,m}}{x'_{n-2}}, \quad \text{但し } x'_{n-2} = \frac{b_{n-2} - \frac{a_{n-1}}{x'_{n-1}}}{a_{n-2}}; \\ \dots & \\ c_{m+1,m} &= -\frac{c_{mm}}{x'_{m+1}}, \quad \text{但し } x'_{m+1} = \frac{b_{m+1} - \frac{a_{m+2}}{x'_{m+2}}}{a_{m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (78.6)$$

になる。

上記の $c_{m-1,m}$ 及び $c_{m+1,m}$ の値を(78.4)の第 m 式に代入すれば

$$c_{mm} \left(b_m - \frac{a_m}{x_m} - \frac{a_{m+1}}{x'_{m+1}} \right) = -1,$$

故に
$$c_{mm} = -\frac{1}{b_m - \frac{a_m}{\alpha_m} - \frac{a_{m+1}}{\alpha'_{m+1}}} \quad (78.7)$$

になる。此の結果を多少簡単にするために α'_{m+1} に就つて

$$\alpha'_m = \frac{b_m - \frac{a_{m+1}}{\alpha'_{m+1}}}{a_m} \quad (78.8)$$

とすれば c_{mm} は

$$c_{mm} = -\frac{\alpha_m}{a_m(\alpha_m \alpha'_m - 1)} \quad (78.9)$$

になり、本式に於て $m = 2, 3, \dots, n$ とすれば c_{11} を除く他のすべての c_{mm} は (78.9)式に依つて決定せられる。

c_{11} を決定するには $K_1 = 1, K_2 = K_3 = \dots = K_n = 0$, 即ち(78.4)に於て $m = 1$ とし其の第一式の右邊を -1 , 殘餘の式の右邊を 0 と置けば(78.6)の最後の式より

$$c_{21} = -\frac{c_{11}}{\alpha'_2}, \quad \text{但し } \alpha'_2 = \frac{b_2 - \frac{a_3}{\alpha'_3}}{a_2}$$

になり、之を(78.4)の第一式に代入すれば

$$c_{11}\left(b_1 - \frac{a_2}{\alpha'_2}\right) = -1,$$

即ち
$$c_{11} = -\frac{1}{b_1 - \frac{a_2}{\alpha'_2}} = -\frac{\alpha'_2}{a_2(\alpha_2 \alpha'_2 - 1)} \quad (78.10)$$

を得る。

かくして $c_{11}, c_{22}, c_{33}, \dots, c_{nn}$ が求められれば他の c_{im} はすべて(78.5)及び(78.6)に依つて定めることが出来る。即ち c_{mm} を基準とすれば

$$\left. \begin{aligned} c_{m-1,m} &= -\frac{c_{mm}}{\alpha_m}, & c_{m-2,m} &= +\frac{c_{mm}}{\alpha_m \alpha'_{m-1}}, \\ c_{m-3,m} &= -\frac{c_{mm}}{\alpha_m \alpha'_{m-1} \alpha'_{m-2}}, & \dots; \end{aligned} \right\} \quad (78.11)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{m+1,m} &= -\frac{c_{mm}}{\alpha'_{m+1}}, & c_{m+2,m} &= +\frac{c_{mm}}{\alpha'_{m+1} \alpha'_{m+2}}, \\ c_{m+3,m} &= -\frac{c_{mm}}{\alpha'_{m+1} \alpha'_{m+2} \alpha'_{m+3}}, & \dots \end{aligned} \right\}$$

になる。而して之等の c のうち一般に

$$\left. \begin{aligned} c_{mi} &= c_{im}, \\ c_{m-1,m-1} &= \frac{\alpha'_m}{\alpha_m} c_{mm} \end{aligned} \right\} \quad (78.12)$$

であることは容易に證明し得ることである。

一スパンにのみ荷重が作用する場合には簡単である。例へば第 m スパンにのみ荷重が作用するときには K_{m-1}, K_m 以外の K はすべて 0 であるから、(78.3)より

$$\left. \begin{aligned} \dots\dots\dots \\ M_{m-2} &= c_{m-2,m-1} K_{m-1} + c_{m-2,m} K_m, \\ M_{m-1} &= c_{m-1,m-1} K_{m-1} + c_{m-1,m} K_m, \\ M_m &= c_{m,m-1} K_{m-1} + c_{m,m} K_m, \\ M_{m+1} &= c_{m+1,m-1} K_{m-1} + c_{m+1,m} K_m, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (78.13)$$

になる。然るに(78.11), (78.12)に依つて

$$c_{m,m-1} = c_{m-1,m} = -\frac{c_{mm}}{\alpha_m}, \quad c_{m-1,m-1} = \frac{\alpha'_m}{\alpha_m} c_{mm}$$

であるから M_{m-1}, M_m は

$$\left. \begin{aligned} M_{m-1} &= \frac{c_{mm}}{\alpha_m} (\alpha'_m K_{m-1} - K_m) = -\frac{\alpha'_m K_{m-1} - K_m}{\alpha_m (\alpha_m \alpha'_m - 1)}, \\ M_m &= \frac{c_{mm}}{\alpha_m} (\alpha_m K_m - K_{m-1}) = -\frac{\alpha_m K_m - K_{m-1}}{\alpha_m (\alpha_m \alpha'_m - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (78.14)$$

になり、之に依つて載荷スパンの左右の支點上の曲げモーメントがわかれ

ば、其の左方又は右方にある支点上の曲げモーメントは次の如くにして求められる。即ち M_{m-2} に就ては

$$c_{m-2,m-1} = -\frac{c_{m-1,m-1}}{z_{m-1}} = -\frac{z'_m}{z_m z_{m-1}} c_{mm},$$

$$c_{m-2,m} = +\frac{c_{mm}}{z_m z_{m-1}}$$

であるから

$$M_{m-2} = -\frac{c_{mm}}{z_m z_{m-1} - 1} (z'_m K_{m-1} - K_m) = -\frac{M_{m-1}}{z_{m-1}}$$

になり、同様にして

$$M_{m-3} = -\frac{M_{m-2}}{z_{m-2}} = +\frac{M_{m-1}}{z_{m-1} z_{m-2}}, \dots;$$

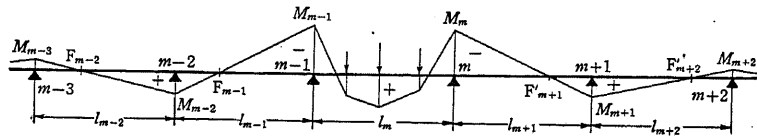
$$M_{m+1} = -\frac{M_m}{z'_{m+1}},$$

$$M_{m+2} = -\frac{M_{m+1}}{z'_{m+2}} = +\frac{M_m}{z'_{m+1} z'_{m+2}}, \dots$$

(78.15)

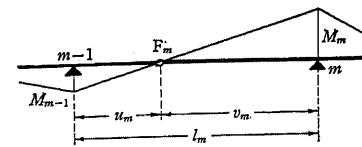
になり、之等の式に依つて無載荷スパンの支点上の曲げモーメントを求めることが出来る。

z 及び z' は 4 に近い正数であるから、上式より明かなるが如く支点上の曲げモーメントは載荷スパンより遠ざかるに従つて其の絶対値は漸次減少し、且つ交互に正又は負の符號をとり、凡そ第 308 圖の如くなる。而して

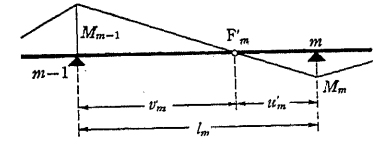


第 308 圖

無載荷スパンに於ける曲げモーメントは直線的に變化し、曲げモーメントが零となるべき點 F 及び F' は下記の如く夫々のスパンに於て一定の點であつて之を定點と言ふ。



第 309 圖



第 310 圖

第 309 圖のスパン l_m を載荷スパンより左方にある任意の無載荷スパンとすれば、前述の如く一般に

$$-\frac{M_m}{M_{m-1}} = z_m \quad (78.16)$$

であるから、支點 $m-1, m$ より定點 F_m までの距離を u_m, v_m とすれば

$$\frac{v_m}{u_m} = -\frac{M_m}{M_{m-1}} = z_m$$

になり、従つて

$$u_m = \frac{1}{z_m + 1} l_m, \quad v_m = \frac{z_m}{z_m + 1} l_m \quad (78.17)$$

になる。

また第 310 圖のスパン l_m を載荷スパンの右方にある任意の無載荷スパンとすれば、前と同様に

$$-\frac{M_{m-1}}{M_m} = z'_m \quad (78.18)$$

であつて、支點 $m-1, m$ より定點 F'_m までの距離を v'_m, u'_m とすれば

$$u'_m = \frac{1}{z'_m + 1} l_m, \quad v'_m = \frac{z'_m}{z'_m + 1} l_m \quad (78.19)$$

になる。但し端支點が同轉端である端スパンに於ける定點は其の端支點に一致する。かかる定點は荷重には無關係な點であつて、之を利用することに依つて支点上の曲げモーメントを圖解的に定めることが出来る。

兩端が固定端である連續梁に於ては、左端を 1, 右端を n , スパン數を $n-1$

1とし

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 2l'_2, & K_1 &= 6 \frac{l'_2}{l_2} \mathfrak{Q}_2; \\ b_n &= 2l'_n, & K_n &= 6 \frac{l'_n}{l_n} \mathfrak{B}_n \end{aligned} \right\} \quad (78.20)$$

とすれば、三連モーメントの式は(78.4)と全く同一になり、従つて前述の事柄はすべてそのまま成立する。

スパン長がすべて l に等しく且つ断面二次モーメントが全スパンにわたつて常数の場合には

$$l'_1 = l'_2 = \dots = l'_n = l'_{n+1} = l$$

とすることが出来、従つて a はすべて l に等しく、 b はすべて $4l$ に等しくなるから(78.5), (78.6)より

$$z_2 = z'_n = 4,$$

$$z_3 = z'_{n-1} = 4 - \frac{1}{4} = 3.75,$$

$$z_4 = z'_{n-2} = 4 - \frac{1}{3.75} = 3.733,$$

$$z_5 = z'_{n-3} = 4 - \frac{1}{3.733} = 3.732, \dots$$

の如くになり、中央のスパンに行くに従つて z の値が急速に或る一定値に近づくことがわかる。此の値は(78.5)の z_m の式に於て $a_{m-1} = a_m = l$, $b_{m-1} = 4l$, $z_m = z_{m-1} = z$ と置くことに依つて求められる。即ち

$$z = 4 - \frac{1}{z} \quad \text{即ち} \quad z^2 - 4z + 1 = 0 \quad (78.21)$$

になり、之を解けば

$$z = z' = 2 + \sqrt{3} = 3.7321 \dots \quad (78.22)$$

になる。

従つてスパン数の多い連続梁の中央部分のスパンに於ては(78.16), (78.18)式は十分近似的に

$$\left. \begin{aligned} M_{m-1} &= -\frac{M_m}{3.732} = -0.268 M_m; \\ \text{或は} \quad M_m &= -\frac{M_{m-1}}{3.732} = -0.268 M_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (78.23)$$

になり、定點 F 又は F' の位置は

$$\left. \begin{aligned} u = u' &= \frac{l}{z+1} = \frac{l}{4.732} = 0.2118 l, \\ v = v' &= l - u = 0.7887 l \end{aligned} \right\} \quad (78.24)$$

に依つて求められる。

§ 79. 曲げ剛さが常数なる連続梁の圖解法

各スパンの曲げ剛さ EI がすべて相等しき場合の三連モーメントの式は

$$\left. \begin{aligned} l_m M_{m-1} + 2(l_m + l_{m+1})M_m + l_{m+1} M_{m+1} &= -K_m, \\ K_m &= 6(\mathfrak{B}_m + \mathfrak{Q}_{l_{m+1}}) \end{aligned} \right\} \quad (79.1)$$

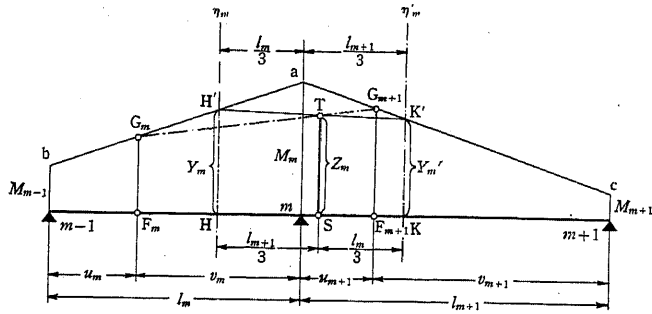
になる。

今第311圖に於て支點 $m-1, m, m+1$ に於て M_{m-1}, M_m, M_{m+1} に等しき縦距を引き、其の端點 b, a, c を結ぶ。支點 m の左右のスパン l_m, l_{m+1} を夫夫三等分する直線を η_m, η'_m とし、 η_m と ba との交點を H' , η'_m と ac との交點を K' とし、 HH', KK' を Y_m 及び Y'_m とすれば

$$Y_m = \frac{1}{3}(M_{m-1} + 2M_m), \quad Y'_m = \frac{1}{3}(2M_m + M_{m+1})$$

である。次に H', K' を結び、 H 及び K より夫々 $l_{m+1}/3$ 及び $l_m/3$ の距離に於ける $H'K'$ の縦距 ST を Z_m とすれば

$$Z_m = \frac{l_m}{l_m + l_{m+1}} Y_m + \frac{l_{m+1}}{l_m + l_{m+1}} Y'_m$$



第 311 圖

であるから、之に前記 Y_m, Y'_m の値を代入すれば

$$Z_m = \frac{l_m M_{m-1} + 2(l_m + l_{m+1})M_m + l_{m+1}M_{m+1}}{3(l_m + l_{m+1})}$$

即ち
$$Z_m = -\frac{K_m}{3(l_m + l_{m+1})} \quad (79.2)$$

になる。此の K_m は荷重項であるから荷重さへ與へられれば (79.2) に依つて Z_m の値が計算せられ、従つて點 T の位置が定まる。 K_m は一般に正であるから Z_m は一般に負になり、従つて ST は之を曲げモーメントの負の側にとる。若し m の左右のスパンが無載荷の場合には $K_m = 0$ 、従つて $Z_m = 0$ になり、點 T は點 S に一致する。第 311 圖に於ては $l_{m+1} > l_m$ として作圖したが若し $l_m > l_{m+1}$ ならば ST は支點 m の左方に来り、また $l_m = l_{m+1}$ の場合には ST は am の上に来る。

次にスパン l_m, l_{m+1} の左の定點 F_m, F_{m+1} の位置を (78.17) に依つて決定し、 F_m 及び F_{m+1} より直線 ba 及び ac に至る縦距を $F_m G_m$ 及び $F_{m+1} G_{m+1}$ とすれば

$$F_m G_m = \frac{1}{l_m} (v_m M_{m-1} + u_m M_m),$$

$$F_{m+1} G_{m+1} = \frac{1}{l_{m+1}} (v_{m+1} M_m + u_{m+1} M_{m+1})$$

になり、 G_m と G_{m+1} とを結ぶ直線を引き點 S より此の直線に至る縦距を假りに Z'_m とすれば

$$Z'_m = \frac{u_{m+1} - \frac{l_{m+1} - l_m}{3}}{v_m + u_{m+1}} \cdot \frac{v_m M_{m-1} + u_m M_m}{l_m} + \frac{v_m + \frac{l_{m+1} - l_m}{3}}{v_m + u_{m+1}} \cdot \frac{v_{m+1} M_m + u_{m+1} M_{m+1}}{l_{m+1}}$$

になり、茲に於て u 及び v に (78.17) の値を代入し、其の際 (78.5) に依つて

$$z_{m+1} = \frac{2(l_m + l_{m+1}) - \frac{l_m}{z_m}}{l_{m+1}}$$

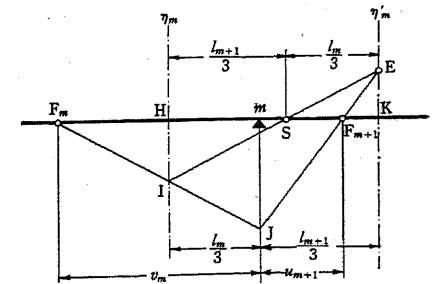
なることを考慮して演算すれば結局に於て

$$Z'_m = \frac{l_m M_{m-1} + 2(l_m + l_{m+1})M_m + l_{m+1}M_{m+1}}{3(l_m + l_{m+1})}$$

になる。然るに此の値は前述の Z_m の値に等しい。故に G_m, G_{m+1} を結ぶ直線は點 T を通過する。

以上の関係を利用して連続梁の支點上の曲げモーメントを圖解的に求めるのであるが、それには先づ與へられたる荷重に對して $ST = Z_m$ を計算し且つ定點 F の位置を決定して置く必要がある。

定點の位置を式 (78.17) に依つて計算して求める代りに之を圖解的に決定するには第 312 圖の如くにする。即ち同圖に於てスパン l_m の定點 F_m が何等かの方法に依つて既知なるものとし、 F_m を通る任意の直線 $F_m IJ$ と η_m



第 312 圖

及び支點 m を通る鉛直線との交点を I, J とする。次に I, S を結び其の延長線と η'_m との交点を E とし、 E と J を結ぶ直線と梁との交点を求めれば、之即ちスパン l_{m+1} に於ける定點 F_{m+1} になる。

何となれば

$$\triangle F_m m J \propto \triangle F_m H I: \quad mJ : HI = v_m : \left(v_m - \frac{l_m}{3} \right),$$

$$\triangle S H I \propto \triangle S K E: \quad H I : K E = l_{m+1} : l_m$$

であるから

$$mJ : K E = v_m l_{m+1} : \left(v_m - \frac{l_m}{3} \right) l_m$$

になり、次に m と F_{m+1} との間の距離を仮りに v'_{m+1} とすれば $\triangle F_{m+1} m J \propto \triangle F_{m+1} K E$ より

$$v'_{m+1} : \left(\frac{l_{m+1}}{3} - v'_{m+1} \right) = mJ : K E = v_m l_{m+1} : \left(v_m - \frac{l_m}{3} \right) l_m,$$

即ち

$$v'_{m+1} = \frac{v_m l_{m+1}^2}{3 v_m (l_m + l_{m+1}) - l_m^2},$$

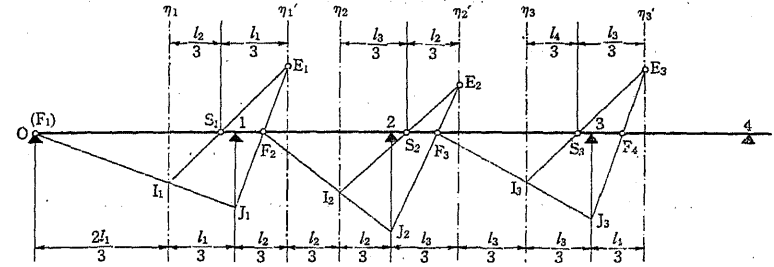
茲に於て v_m に (78.17) の値を代入して演算すれば

$$v'_{m+1} = \frac{l_{m+1}}{\frac{2(l_m + l_{m+1}) - l_m/x_m}{l_{m+1}} + 1} = \frac{l_{m+1}}{x_{m+1} + 1}$$

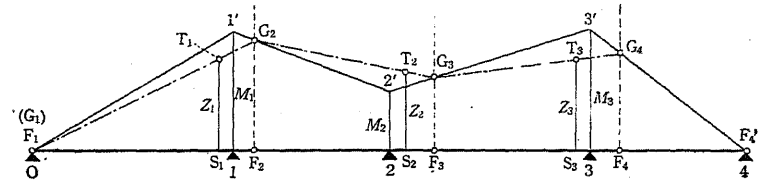
になり、此の値は (78.17) の u_m に於て $m = m + 1$ とせる値に一致するからである。

左端の支點が同轉端であるとすれば左端のスパン l_1 の定點 F_1 は左端の支點になる。即ち F_1 は既知になり之を基準として第 313 圖の如き作圖を行へば第二スパン l_2 の定點 F_2 が定められ、次に同様の作圖を繰返すことに依つて F_3, F_4, \dots を順次決定して行くことが出来る。

以下第 314 圖の如く兩端が同轉端である四スパンの連続梁に就て $M_1, M_2,$



第 313 圖



第 314 圖

M_3 の圖解法を示す。先づ支點 1, 2, 3 に於て

$$Z_1 = \frac{K_1}{3(l_1 + l_2)}, \quad Z_2 = -\frac{K_2}{3(l_2 + l_3)}, \quad Z_3 = -\frac{K_3}{3(l_3 + l_4)}$$

を計算し、之に依つて T_1, T_2, T_3 を定め、定點 F の位置は (78.17) より u, v を計算することに依り或は第 313 圖の如き圖解法に依つて決定する。前述の如く一般に G_m, G_{m+1} を結ぶ直線は T_m を通過しなければならない。然るに左端のスパンに於ては F_1 は支點 0 に一致し、且つ $M_0 = 0$ であるから G_1 もまた支點 0 に一致する。故に 0 と T_1 とを結び其の延長線が F_2 に於ける鉛直線に交はる點を求めれば之が G_2 になり、同様に G_2, T_2 を結ぶ直線と F_3 を通る鉛直線との交點が G_3, G_3, T_3 の延長線と F_4 を通る鉛直線との交點が G_4 になる。

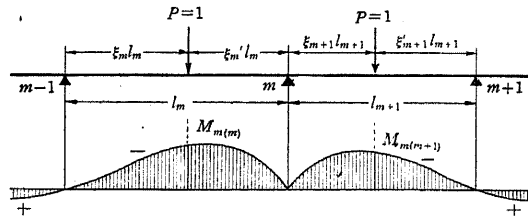
次に支點 1, 2, 3 に於て夫々 M_1, M_2, M_3 に等しき縦距 $11', 22', 33'$ を引いた

ものとすれば0, 1', 2', 3', 4の各点を結ぶ直線は夫々 G₂, G₃, G₄を通らねばならない。故に今度は右の支點4より出發して G₄, G₃, G₂を通過するが如くに4, 3', 2', 1', 0を引けば之に依つて點1', 2', 3'が決定せられ従つて M₁, M₂, M₃が決定せられる。かくして M₁, M₂, M₃が求められればスパンの中間に於ける曲げモーメントは各スパンを夫々單純梁とする場合の曲げモーメントを重合することに依つて求められる。

上記の方法はすべて各スパンの左の定點 F を利用したのであるが、其の代りに第310圖に示せる各スパンの右の定點 F' を利用しても全く同様である。

§ 80. 連續梁の影響線

支點上の曲げモーメント M_m の影響線を得るには (78.14) を利用するのが便利である。P=1 が第315圖に示すが如くスパン



第 315 圖

に於て支點 m-1, m より xi_m l_m, xi'_m l_m の距離に作用するときには

$$\mathfrak{B}_{m-1} = 0, \quad \mathfrak{B}_m = \frac{l_m^2}{6} \xi'_m (1 - \xi_m^2), \quad \mathfrak{B}_m = \frac{l_m^2}{6} \xi_m (1 - \xi_m^2), \quad \mathfrak{B}_{m+1} = 0$$

であるから

$$K_{m-1} = l'_m l_m \xi'_m (1 - \xi_m^2), \quad K_m = l'_m l_m \xi_m (1 - \xi_m^2)$$

になり之を(78.14)に代入し、且つ

$$f_1(\xi_m) = \xi_m (1 - \xi_m^2), \quad f_1(\xi'_m) = \xi'_m (1 - \xi_m^2) \quad (80.1)$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} M_{m-1(m)} &= -\frac{l_m}{x_m x'_m - 1} [x'_m f_1(\xi'_m) - f_1(\xi_m)], \\ M_{m(m)} &= -\frac{l_m}{x_m x'_m - 1} [x_m f_1(\xi_m) - f_1(\xi'_m)] \end{aligned} \right\} \quad (80.2)$$

になる。茲に M の右下に (m) を添へた意味はスパン l_m に作用する P=1 に依る値なることを示すためである。

而して函数 f₁ は既に屢々利用せるが如く (57.10) の f₁ と同じであつて其の値は第6表に示してあるが、茲に便宜上第9表に再掲する。

(80.2)式に於て m を m+1 にて置換へれば

$$\left. \begin{aligned} M_{m(m+1)} &= -\frac{l_{m+1}}{x_{m+1} x'_{m+1} - 1} [x'_{m+1} f_1(\xi'_{m+1}) - f_1(\xi_{m+1})], \\ M_{m+1(m+1)} &= -\frac{l_{m+1}}{x_{m+1} x'_{m+1} - 1} [x_{m+1} f_1(\xi_{m+1}) - f_1(\xi'_{m+1})] \end{aligned} \right\} \quad (80.3)$$

を得、(80.2)の M_{m(m)} 及び(80.3)の M_{m(m+1)} に依つて P=1 がスパン l_m 或は l_{m+1} に作用する場合の M_m に對する影響線が得られ、凡そ第315圖の如くなる。

次に(80.2)式に依つて M_{m-1(m-1)} 及び M_{m+1(m+2)} を計算すれば、(78.18)或

第 9 表

| ξ | f ₁ (ξ) | ξ' | f ₁ (ξ') |
|------|--------------------|------|---------------------|
| 0.00 | 0.0000 | 1.00 | 0.0000 |
| 0.05 | 0.0499 | 0.95 | 0.0926 |
| 0.10 | 0.0990 | 0.90 | 0.1710 |
| 0.15 | 0.1468 | 0.85 | 0.2359 |
| 0.20 | 0.1920 | 0.80 | 0.2880 |
| 0.25 | 0.2344 | 0.75 | 0.3281 |
| 0.30 | 0.2730 | 0.70 | 0.3570 |
| 0.35 | 0.3071 | 0.65 | 0.3754 |
| 0.40 | 0.3360 | 0.60 | 0.3840 |
| 0.45 | 0.3589 | 0.55 | 0.3836 |
| 0.50 | 0.3750 | 0.50 | 0.3750 |
| 0.55 | 0.3836 | 0.45 | 0.3589 |
| 0.60 | 0.3840 | 0.40 | 0.3360 |
| 0.65 | 0.3754 | 0.35 | 0.3071 |
| 0.70 | 0.3570 | 0.30 | 0.2730 |
| 0.75 | 0.3281 | 0.25 | 0.2344 |
| 0.80 | 0.2880 | 0.20 | 0.1920 |
| 0.85 | 0.2359 | 0.15 | 0.1468 |
| 0.90 | 0.1710 | 0.10 | 0.0990 |
| 0.95 | 0.0926 | 0.05 | 0.0499 |
| 1.00 | 0.0000 | 0.00 | 0.0000 |

は(78.16)に依つて

$$M_{m(m-1)} = -\frac{M_{m-1(m-1)}}{z_m}, \quad M_{m(m+2)} = -\frac{M_{m+1(m+2)}}{z_{m+1}} \quad (80.4)$$

であるから、之に依つてスパン l_{m-1} 又は l_{m+2} に $P=1$ が作用する場合の M_m に対する影響線が得られ、之と同様にして順次他のスパンに於ける M_m の影響線が得られる。説明するまでもなく M_m の影響線縦距は其のスパンが支点 m より遠ざかるに従つて急激に減少し且つスパン毎に符號が反對になる。故に近似計算に於ては支点 $m-2$ より $m+2$ に至る4スパンのみを考慮すれば十分である。

スパン l_m の中間の断面に於ける M_x, Q_x は一般に(74.1)式、即ち

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{x,0} + M_{m-1} \frac{x'}{l_m} + M_m \frac{x}{l_m}, \\ Q_x &= Q_{x,0} + \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} \end{aligned} \right\}$$

である。故に $M_{x,0}$ 或は $Q_{x,0}$ に対する影響線縦距と M_{m-1}, M_m に対する影響線縦距とを上式に従つて重合することに依つて M_x, Q_x に対する影響線が得られる。但し $P=1$ がスパン l_m 以外に作用する場合には $M_{x,0} = Q_{x,0} = 0$ であるから、 l_m 以外のスパンに於ける影響線縦距は

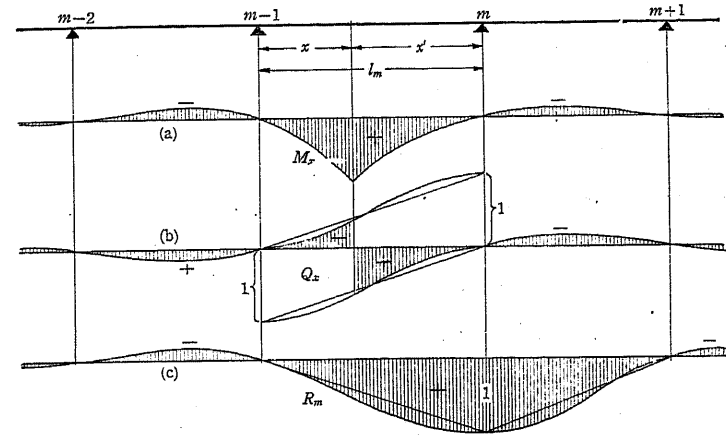
$$M_x = M_{m-1} \frac{x'}{l_m} + M_m \frac{x}{l_m}, \quad Q_x = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m}$$

より求められる。かくして求めたる M_x, Q_x に対する影響線は第316圖(a), (b)の如くなる。

支点 m に於ける反力 R_m は(74.2)に依つて一般に

$$R_m = B_m + A_{m+1} - \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} + \frac{M_{m+1} - M_m}{l_{m+1}}$$

であるから、 R_m に対する影響線は、単純梁としての反力 B_m, A_{m+1} の影響線縦距と M_{m-1}, M_m, M_{m+1} の影響線縦距とを上式に従つて重合することに



第 316 圖

依つて求められ、凡そ第316圖(c)の如くなる。

端スパン又は端支点に於ても原理は前と同様であるが、例へば左端のスパンに就ては $M_0 = 0, B_0 = 0$ であるから、 $P=1$ が端スパンに作用する場合には

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{x,0} + M_1 \frac{x}{l_1} = \frac{x}{l_1} \left(\frac{l_1}{x} M_{x,0} + M_1 \right), \\ Q_x &= Q_{x,0} + \frac{M_1}{l_1} = \frac{1}{l_1} (l_1 Q_{x,0} + M_1), \\ R_0 &= A_1 + \frac{M_1}{l_1} = \frac{1}{l_1} (l_1 A_1 + M_1); \end{aligned} \right\} \quad (80.5)$$

$P=1$ が支点1より右方に作用するときには

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{x}{l_1} M_1, \\ Q_x &= \frac{1}{l_1} M_1, \\ R_0 &= \frac{1}{l_1} M_1, \end{aligned} \right\} \quad (80.6)$$

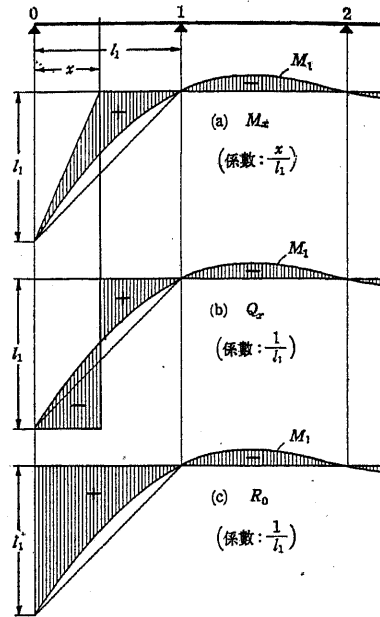
である。故に M_x に対する影響線係数を x/l_1 , Q_x 及び R_0 に対する影響線係

数を $1/l_1$ とすれば、 M_2, Q_2, R_2 に對する影響線は端スパンに於ては夫夫第 317 圖 (a), (b), (c) の如くなり、支點 1 より右方に於ては M_1 の影響線が其のまま利用出来る。

§ 81. 三連モーメントの定理に依るラーメンの解法

第 286 圖の如き剛節部材のつながりより成るラーメンに於て其の剛節節點及び固定端に於ける曲げモーメントを未知數にとれば、之を § 73 に於て説明せる三連モーメントの定理に依つて求めることが出来る。

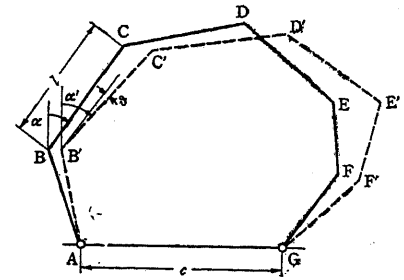
前述の連続梁に於ては支點が變位せざるものと假定したが故に部材同轉角 ϑ がすべて 0 に等しくなつたのであるが、ラーメンに於ては節點は一般に變位するが故に ϑ は 0 にはならない。従つて一スパンのラーメンに於て節點數を k 、固定端の數を r (之は 2 以下、兩端同轉端のときは 0) とすれば、未知量は $k+r$ 個の M と $k+r-1$ 個の ϑ 、合計 $2k+2r-1$ 個であつて、之に對して三連モーメントの定理より得らるる方程式の數は $k+r$ のみである。従つて節點が變位せざるラーメンに於ては三連モーメントの定理の式のみによつてすべての M を決定し得るが、節點が變位する場合には三連モーメントの定理の式だけでは不十分であつて此の他に特定の條件式が必要になる。之には各部材に作用する力の釣合條件と部材同轉角間の幾何學



第 317 圖

的條件とが使はれる。

部材同轉角間の幾何學的條件は次の如くである。即ち第 318 圖に於て A 及び G を不動とし、一般に部材長を l 、其の鉛直線に對する方向角を α 、變形後の方向角を α' とすれば、幾何學的に



第 318 圖

$$\sum l \cos \alpha = 0, \quad \sum l \sin \alpha = c, \quad (a)$$

及び

$$\sum l \cos \alpha' = 0, \quad \sum l \sin \alpha' = c, \quad (b)$$

従つて

$$\sum l (\cos \alpha - \cos \alpha') = 0 \quad \text{及び} \quad \sum l (\sin \alpha - \sin \alpha') = 0 \quad (c)$$

を得る。然るに一般に $\alpha' = \alpha + \vartheta$ であつて ϑ は極めて微小なる角であるから

$$\cos \alpha' = \cos \alpha - \vartheta \sin \alpha, \quad \sin \alpha' = \sin \alpha + \vartheta \cos \alpha$$

とすることが出来、之を式(c)に代入すれば

$$\sum l \vartheta \sin \alpha = 0 \quad \text{及び} \quad \sum l \vartheta \cos \alpha = 0 \quad (81.1)$$

になる。之即ち部材同轉角の間に常に成立すべき幾何學的條件である。

扱て節點 B に於て剛結せられる部材 AB, BC に對する三連モーメントの定理の一般式(73.3)を書き換へれば

$$\left. \begin{aligned} l'_{AB} M_A + 2(l'_{AB} + l'_{BC}) M_B + l'_{BC} M_C - 6 E I_G (\vartheta_{AB} - \vartheta_{BC}) &= -K_B, \\ \text{但し} \quad K_B &= 6 \left(\frac{l'_{AB}}{l_{AB}} \vartheta_{AB} + \frac{l'_{BC}}{l_{BC}} \vartheta_{BC} \right) \end{aligned} \right\} \quad (81.2)$$

になる。之は勿論 B が中間の節點である場合の方程式であつて、若し A 或は C が同轉端の場合には $M_A = 0$ 或は $M_C = 0$ とすればよい。

A が固定端である場合の AB に對する三連モーメントの方程式は (74.6)

と同様に

$$\left. \begin{aligned} 2l'_{AB} M_A + l'_{AB} M_B + 6EI_C \vartheta_{AB} &= -K_A, \\ K_A &= 6 \frac{l'_{AB}}{l_{AB}} \mathfrak{M}_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (81.3)$$

になり、また C が回轉端である場合の BC に対する方程式は (74.7) と同様に

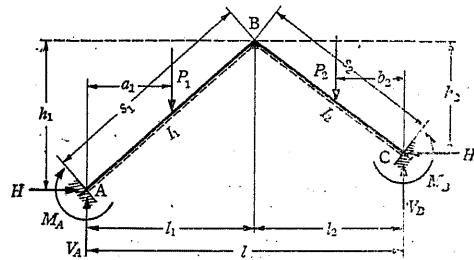
$$\left. \begin{aligned} l'_{BC} M_B + 2l'_{BC} M_C - 6EI_C \vartheta_{BC} &= -K_C, \\ K_C &= \frac{l'_{BC}}{l_{BC}} \mathfrak{S}_{BC} \end{aligned} \right\} \quad (81.4)$$

になる。以下二三の例題を掲げる。

82. 例 題

i. 固定端の山形ラーメン

第 319 圖の如き二部材より成る山形ラーメンに於ては、其の兩端が回轉端であつても固定端であつても節點 B は變位しないから部材回轉角 $\vartheta_{AB}, \vartheta_{BC}$ は共に 0 である。



第 319 圖

今 AB, BC の長さを s_1, s_2 , 其の断面二次モーメントを I_1, I_2 とし, I_1 を I_0 に選び、且つ

$$k = \frac{I_1 s_2}{I_2 s_1}$$

と置けば

$$l_{AB} = l'_{AB} = s_1, \quad l_{BC} = s_2, \quad l'_{BC} = k s_1$$

になる。A, C を固定端とすれば AB, ABC, BC に対して (81.3), (81.2), (81.4) より

$$\left. \begin{aligned} 2M_A + M_B &= -6 \frac{\mathfrak{M}_{AB}}{s_1}, \\ M_A + 2(1+k)M_B + kM_C &= -6 \left(\frac{\mathfrak{S}_{AB}}{s_1} + k \frac{\mathfrak{M}_{BC}}{s_2} \right), \\ M_B + 2M_C &= -6 \frac{\mathfrak{S}_{BC}}{s_2} \end{aligned} \right\} \quad (82.1)$$

になる。此の第一式及び第三式より

$$M_A = -\frac{M_B}{2} - 3 \frac{\mathfrak{M}_{AB}}{s_1}, \quad M_C = -\frac{M_B}{2} - 3 \frac{\mathfrak{S}_{BC}}{s_2} \quad (82.2)$$

を得、之を (82.1) の第二式に代入して、それより M_B を解けば

$$M_B = -\frac{2}{1+k} \left[\frac{2\mathfrak{S}_{AB} - \mathfrak{M}_{AB}}{s_1} + k \frac{2\mathfrak{M}_{BC} - \mathfrak{S}_{BC}}{s_2} \right] \quad (82.3)$$

になり、之を (82.2) に代入すれば M_A 及び M_C が求められる。

かくして M_A, M_B, M_C がわかれば反力は次の如くにして求められる。例へば鉛直荷重が作用する場合には第 319 圖の P_1, P_2 を AB 或は BC 間にあつる荷重の合力とすれば、B の左方或は右方に於けるモーメントの釣合条件と鉛直方向の釣合条件とより

$$\left. \begin{aligned} V_A l_1 - P_1(l_1 - a_1) - H h_1 + M_A &= M_B, \\ V_C l_2 - P_2(l_2 - b_2) - H h_2 + M_C &= M_B, \\ V_A + V_C &= P_1 + P_2 \end{aligned} \right\} \quad (82.4)$$

を得、此の最初の二式を書き換へれば

$$\left. \begin{aligned} V_A &= \frac{1}{l_1} [P_1(l_1 - a_1) + H h_1 + M_B - M_A], \\ V_C &= \frac{1}{l_2} [P_2(l_2 - b_2) + H h_2 + M_B - M_C] \end{aligned} \right\} \quad (82.5)$$

になり、之を (82.4) の第三式に代入してそれより H を求めれば

$$H = \frac{\frac{1}{l_1}(P_1 a_1 + M_A - M_B) + \frac{1}{l_2}(P_2 b_2 + M_C - M_B)}{\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2}} \quad (82.6)$$

を得る。本式に依つて H が求められれば V_A, V_C は (82.5) より算定せられる。

特にラーメンが左右対称なるときには、即ち $s_1 = s_2 = s, l_1 = l_2 = l/2,$
 $I_1 = I_2$ の場合には $k = 1$ となるから (82.2), (82.3) 式より

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{1}{2s}(7\mathfrak{U}_{AB} - 2\mathfrak{B}_{AB} - 2\mathfrak{U}_{BC} + \mathfrak{B}_{BC}), \\ M_B &= -\frac{1}{s}(-\mathfrak{U}_{AB} + 2\mathfrak{B}_{AB} + 2\mathfrak{U}_{BC} - \mathfrak{B}_{BC}), \\ M_C &= -\frac{1}{2s}(\mathfrak{U}_{AB} - 2\mathfrak{B}_{AB} - 2\mathfrak{U}_{BC} + 7\mathfrak{B}_{BC}) \end{aligned} \right\} \quad (82.7)$$

になる。

ii. 回轉端梯形ラーメン。

第 320 圖の如き梯形ラーメンに於ては (81.1) 式より

$$\sum l \vartheta \sin \alpha = s_1 \vartheta_{AB} \frac{l_1}{s_1} + l_2 \vartheta_{BC} \cdot 1 + s_3 \vartheta_{CD} \frac{l_3}{s_3} = 0,$$

$$\sum l \vartheta \cos \alpha = s_1 \vartheta_{AB} \frac{h}{s_1} + l_2 \vartheta_{BC} \cdot 0 + s_3 \vartheta_{CD} \frac{h}{s_3} = 0$$

を得、之より

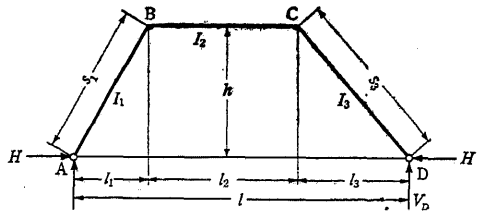
$$\vartheta_{AB} = \vartheta_{CD},$$

$$\vartheta_{BC} = -\frac{l_1 + l_3}{l_2} \vartheta_{AB} \quad (82.8)$$

になる。

今 BC の断面二次モー

メント I_2 を I_0 に選び



第 320 圖

$$k = \frac{I_2 s_1}{I_1 l_2}, \quad k_3 = \frac{I_2 s_3}{I_3 l_2}$$

と置けば

$$l'_{AB} = \frac{I_2}{I_1} s_1 = k_1 l_2, \quad l'_{BC} = l_2, \quad l'_{CD} = \frac{I_2}{I_3} s_3 = k_3 l_2$$

になり、兩端 A, D を回轉端 ($M_A = 0, M_D = 0$) とし、上記の関係を考慮して ABC, BCD に對する三連モーメントの式を書けば

$$\left. \begin{aligned} 2(k_1 + 1)M_B + M_C - 6E \frac{I_2}{l_2} (\vartheta_{AB} - \vartheta_{BC}) &= -6 \left(k_1 \frac{\mathfrak{B}_{AB}}{s_1} + \frac{\mathfrak{U}_{BC}}{l_2} \right), \\ M_B + 2(1 + k_3)M_C - 6E \frac{I_2}{l_2} (\vartheta_{BC} - \vartheta_{AB}) &= -6 \left(\frac{\mathfrak{B}_{BC}}{l_2} + k_3 \frac{\mathfrak{U}_{CD}}{s_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (82.9)$$

を得る。此の兩式より $(\vartheta_{AB} - \vartheta_{BC})$ を消去するために上式の左邊及び右邊を加へ合せれば

$$(3 + 2k_1)M_B + (3 + 2k_3)M_C = -6 \left[k_1 \frac{\mathfrak{B}_{AB}}{s_1} + \frac{\mathfrak{U}_{BC} + \mathfrak{B}_{BC}}{l_2} + k_3 \frac{\mathfrak{U}_{CD}}{s_3} \right] \quad (82.10)$$

になる。本式のみでは M_B, M_C を決定することは出来ないが下記の如く M_B, M_C を H の函數に置換へることに依つて問題を解決することが出来る。

例へば荷重がすべて鉛直に作用するものとし、ラーメンが單純梁と同様に支持せられる場合の節點 B, C に於ける曲げモーメントを $M_{B,0}, M_{C,0}$ とすれば、 M_B, M_C は

$$M_B = M_{B,0} - H \cdot h, \quad M_C = M_{C,0} - H \cdot h \quad (82.11)$$

になり、之を (82.10) に代入すれば

$$2(3 + k_1 + k_3)H \cdot h = (3 + 2k_1)M_{B,0} + (3 + 2k_3)M_{C,0} + 6 \left[k_1 \frac{\mathfrak{B}_{AB}}{s_1} + \frac{\mathfrak{U}_{BC} + \mathfrak{B}_{BC}}{l_2} + k_3 \frac{\mathfrak{U}_{CD}}{s_3} \right] \quad (82.12)$$

が得られる。即ち本式より水平反力が決定せられ其の値を (82.11) に代入

すれば M_B, M_C が決定せられる。尚、本場合に於ける鉛直反力はラーメンが単純梁と同様に支持せられるものと假定するときの値に等しい。

ラーメンが左右対称なるとき、即ち $s_1 = s_3, I_1 = I_3$ の場合には $k_1 = k_3$ になり、之を単に k とすれば

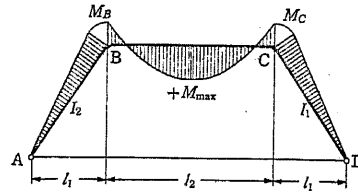
$$H = \frac{M_{B,0} + M_{C,0}}{2h} + 3 \frac{\frac{k}{s_1}(\mathfrak{B}_{AB} + \mathfrak{Q}_{CD}) + \frac{1}{l_2}(\mathfrak{Q}_{BC} + \mathfrak{B}_{BC})}{(3 + 2k)h} \quad (82.13)$$

になる。例へば BC に等分布荷重 p が満載する場合には

$$M_{B,0} = M_{C,0} = \frac{p l_1 l_2}{2}, \quad \mathfrak{B}_{AB} = \mathfrak{Q}_{CD} = 0, \quad \mathfrak{Q}_{BC} = \mathfrak{B}_{BC} = \frac{p l_2^2}{24}$$

であるから(82.13), (82.11)より

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{p l_1 l_2}{2h} + \frac{p l_2^2}{4(3 + 2k)h}, \\ M_B &= M_C = -\frac{p l_2^2}{4(3 + 2k)} \end{aligned} \right\} \quad (82.14)$$



第 321 圖

になり、此の場合の曲げモーメント圖

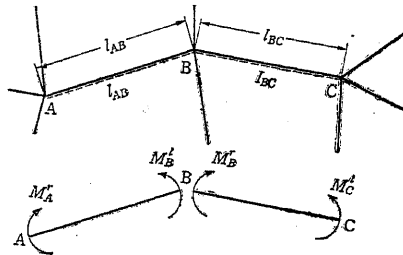
は第321圖の如く、横梁 BC の中點に於ける正の曲げモーメントの最大値は

$$+ M_{\max} = \frac{p l_2^2}{8} - \frac{p l_2^2}{4(3 + 2k)} = \frac{p l_2^2(1 + 2k)}{8(3 + 2k)} \quad (82.15)$$

になる。

§ 83. 四連モーメントの定理

第322圖の如き複雑なる剛節部材のつながりに於て相接する任意の二部材 AB, BC をとり、其の兩端に於ける曲げモーメント



第 322 圖

トを圖示の如くに示せば、部材 AB, BC の節點 B に於ける同轉角 θ_B は(72.6)に依つて

$$\theta_B = -\frac{1}{E I_{AB}} \left[\frac{l_{AB}}{6} (M_A^r + 2M_B^l) + \mathfrak{B}_{AB} \right] + \vartheta_{AB},$$

$$\theta_B = +\frac{1}{E I_{BC}} \left[\frac{l_{BC}}{6} (2M_B^r + M_C^l) + \mathfrak{Q}_{BC} \right] + \vartheta_{BC}$$

になり、此の兩式の右邊を相等しと置けば

$$\begin{aligned} \frac{l_{AB}}{I_{AB}} (M_A^r + 2M_B^l) + \frac{l_{BC}}{I_{BC}} (2M_B^r + M_C^l) \\ = -6 \left(\frac{\mathfrak{B}_{AB}}{I_{AB}} + \frac{\mathfrak{Q}_{BC}}{I_{BC}} \right) + 6E (\vartheta_{AB} - \vartheta_{BC}) \end{aligned} \quad (83.1)$$

になる。茲に於て式を簡單にするために任意の部材の長さ l_C 及び断面二次モーメント I_C を基準とし、一般に

$$k = \frac{I_C l}{I l_C}$$

と置けば、前式は

$$\begin{aligned} k_{AB} (M_A^r + 2M_B^l) + k_{BC} (2M_B^r + M_C^l) \\ = -6 \left(\frac{k_{AB}}{l_{AB}} \mathfrak{B}_{AB} + \frac{k_{BC}}{l_{BC}} \mathfrak{Q}_{BC} \right) + \frac{6E I_C}{l_C} (\vartheta_{AB} - \vartheta_{BC}) \end{aligned} \quad (83.2)$$

になる。上記の(83.1)或は(83.2)は Bleich¹⁾ に依つて四連モーメントの定理と名付けられたものであつて複雑なるラーメンに對して便利に應用せられることが多い。若し部材が上下の方向に連続する場合に於て節點の上或は下に於ける曲げモーメントを區別するには、例へば節點 A の下方に於ける曲げモーメントを M_A^r , 上方に於けるものを M_A^l の如くにすればよい。而

1) Bleich, F.: *Der Viermomentensatz und seine Anwendung auf die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke*, Z. Betonbau (1916); "Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes", 2. Aufl., Berlin (1925).

して四連モーメントの定理を應用する場合に於ては部材の曲げモーメントの正負をあらかじめ適當に定めて置く必要があるのは言ふまでもない。

(83.1)又は(83.2)式に於て、若し節點A或はCが滑節ならば $M_A^r = 0$ 又は $M_C^l = 0$ とすべく、また節點Bに於てAB, BC以外に剛結部材が無い場合には $M_B^l = M_B^r$ であつて、之を單に M_B とすることが出來、(83.1)式は三連モーメントの定理(78.1)に等しくなる。故に四連モーメントの定理は三連モーメントの定理の擴張であり、逆に後者は前者の特別な場合と考へることが出来る。

尙Bが固定端なる場合、Bの右に部材BCがあるものとすれば前記の一般式に於て $I_{AB} = \infty$ 、即ち $k_{AB} = 0$ とすればよい。従つて此の場合には

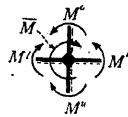
$$k_{BC}(2M_B^r + M_C^l) = -6 \frac{k_{BC}}{I_{BC}} \vartheta_{BC} - \frac{6EI_C}{l_C} \vartheta_{BC} \quad (83.3)$$

になる。之と同様にBが固定端であつてBの左に部材ABがある場合には $I_{BC} = \infty$ 又は $k_{BC} = 0$ とすればよい。即ち

$$k_{AB}(M_A^r + 2M_B^l) = -6 \frac{k_{AB}}{I_{AB}} \vartheta_{AB} + \frac{6EI_C}{l_C} \vartheta_{AB} \quad (83.4)$$

になる。

勿論問題を解くには四連モーメントの定理により得らるる方程式だけでは一般には不十分であつて、此の他に外力の釣合條件及び節點に於ける曲げモーメントの釣合條件を考へる必要がある。例へば第323圖の如く四部材が剛結さ



第 323 圖

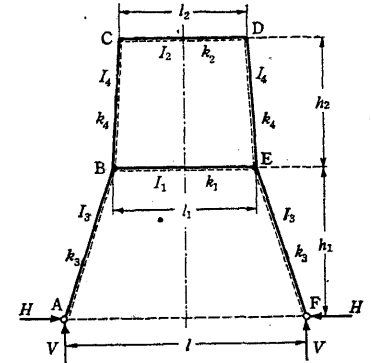
れる節點に於て曲げモーメントの正負を圖示の點線で示せるが如くに定めれば、此の節點に於ける曲げモーメントの釣合條件は

$$M^l - M^r + M^u - M^d + \bar{M} = 0 \quad (83.5)$$

になる。但し \bar{M} は此の節點に直接に作用する外力のモーメントである。

§ 84. 例 題

第 324 圖の如き同轉端の二層ラーメンを考へる。但しラーメンの構造はすべて左右對稱なるものとし、其の各部材の I 及び k を圖示の如く番號を付けて示し、且つ曲げモーメントの正負は點線に示せるが如くに定める。



第 324 圖

今、水平材 CD 及び BE にのみ鉛直荷重が作用し、しかも左右對稱なる荷重とすれば、部材同轉角はすべて零になり、

ラーメンの左半分についてのみ計算すればよいことになる。即ち M_B^r , M_B^l 及び M_C を求むれば十分であつて、之に對して次の如き三式が四連モーメントの定理より得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{ABC: } k_3(0 + 2M_B^r) + k_4(2M_B^l + M_C) &= 0, \\ \text{ABE: } k_3(0 + 2M_B^r) + k_1(2M_B^l + M_B^l) &= -6 \frac{k_1}{l_1} \vartheta_{BE}, \\ \text{BCD: } k_4(M_B^l + 2M_C) + k_2(2M_C + M_D) &= -6 \frac{k_2}{l_2} \vartheta_{CD}. \end{aligned} \right\} \quad (84.1)$$

然るに對稱の關係に依つて

$$M_B^r = M_B^l, \quad M_C = M_D$$

であり、且つ節點Bに於けるモーメントの釣合條件より

$$M_B^l = M_B^r - M_B^l \quad (84.2)$$

であるから(84.1)は

$$\left. \begin{aligned} 2k_3M_B^r + 2k_4M_B^l + k_4M_C &= 0, \\ (3k_1 + 2k_3)M_B^r - 3k_1M_B^l &= -6 \frac{k_1}{l_1} \vartheta_{BE}, \end{aligned} \right\} \quad (84.3)$$

$$k_4 M_B^o + (3k_2 + 2k_4) M_C = -6 \frac{k_2}{l_2} \mathfrak{M}_{CD} \quad \Bigg\}$$

になり、之を解けば M_B^o, M_B^i 及び M_C が求められ、 M_B^i は (84.2) に依つて計算せられる。

尙、本場合の鉛直反力 V は鉛直荷重の和の 1/2 に等しく、

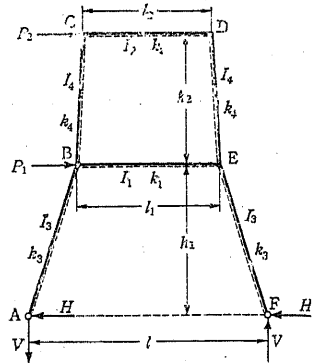
$$M_B^o = V \frac{l - l_1}{2} - H h_1$$

なるが故に、水平反力 H は

$$H = V \frac{l - l_1}{2h_1} - \frac{M_B^o}{h_1} \quad (84.4)$$

に依つて計算することが出来る。

また第 325 圖の如く水平荷重 P_1, P_2 が



第 325 圖

節點 B, C に作用するときには、層高の變化を無視すれば

$$\vartheta_{AB} = \vartheta_{EF}, \quad \vartheta_{BC} = \vartheta_{DE}, \quad \vartheta_{BE} = \vartheta_{CD} = 0$$

になり、左右の柱材が全く相等しき撓みを示す関係から

$$M_B^o = -M_B^i, \quad M_C^o = -M_C^i, \quad M_E^o = -M_E^i, \quad M_D^o = -M_D^i \quad (84.5)$$

になる¹⁾。従つて前記の場合と同様にラーメンの左半分に着て計算すればよいことになる。而して此の場合には荷重項 $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$ はすべて零に等しく、従つて四連モーメントの式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \text{ABC: } & k_3(0 + 2M_B^o) + k_4(2M_B^o + M_C) = \frac{6EI_C}{l_C}(\vartheta_{AB} - \vartheta_{BC}), \\ \text{ABE: } & k_4(0 + 2M_B^o) + k_1(2M_B^o + M_B^i) = \frac{6EI_C}{l_C}\vartheta_{AB}, \\ \text{BCD: } & k_4(M_B^o + 2M_C) + k_2(2M_C + M_D) = \frac{6EI_C}{l_C}\vartheta_{BC}. \end{aligned} \right\} (84.6)$$

1) 此の関係はラーメン全部に對し四連モーメントの式を適用し、それより解析的に求めることも出来る。

此の三式より $\vartheta_{AB}, \vartheta_{BC}$ を消去し、且つ (84.2) 及び (84.5) の關係を考慮すれば

$$-k_1 M_B^o + (k_1 + 3k_4) M_B^o + (k_2 + 3k_4) M_C = 0 \quad (84.7)$$

を得る。

然るに本場合には

$$V = \frac{1}{7}[P_1 h_1 + P_2(h_1 + h_2)], \quad H = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

であり、且つ

$$M_B^o = H h_1 - V \frac{l - l_1}{2} = \frac{1}{2l}[(P_1 + P_2)h_1 l_1 - P_2 h_2(l - l_1)] \quad (84.8)$$

になり、同様にして部材 BC に就て M_C と M_B^o との關係を求むれば

$$M_B^o = M_C \frac{l_1}{l_2} - \frac{P_2 h_2}{2} \quad (84.9)$$

を得る。故に (84.8), (84.9) を (84.7) に代入すれば M_C のみの方程式が得られ、之に依つて M_C を決定すれば、 M_B^o は (84.9) に依つて、 M_B^i は (84.2) に依つて夫々計算することが出来る。