

## 第 IX 章 二次及び三次不静定構造物

### § 66. 總 説

二次又は三次の不静定構造物に於ては適當なる二個又は三個の斷面力又は反力を不静定力に選び、其の静定基本系に就て

荷 重 状 態	X <sub>1</sub> の作用點の X <sub>1</sub> の方向の變位	X <sub>2</sub> の作用點の X <sub>2</sub> の方向の變位	X <sub>3</sub> の作用點の X <sub>3</sub> の方向の變位
與へられたる荷重 及溫度變化に依る	$\delta_{10}$	$\delta_{20}$	$\delta_{30}$
X <sub>1</sub> = 1 に依る	$\delta_{11}$	$\delta_{21}$	$\delta_{31}$
X <sub>2</sub> = 1 に依る	$\delta_{12}$	$\delta_{22}$	$\delta_{32}$
X <sub>3</sub> = 1 に依る	$\delta_{13}$	$\delta_{23}$	$\delta_{33}$

とすれば、支點が其の反力の作用方向に變位せざる場合に於ては、式 (53.5)

或は (53.8) に依り、二次不静定構造物に對しては

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= -\delta_{10}, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= -\delta_{20}; \end{aligned} \right\} \quad (66.1)$$

三次不静定構造物に對しては

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 &= -\delta_{10}, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &= -\delta_{20}, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 &= -\delta_{30} \end{aligned} \right\} \quad (66.2)$$

が成立する。之等の式に於ける  $\delta$  は (53.6) 及び (53.7) 式に依つて與へられ、

そのうち一般に  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  である。

上式を  $X$  に關する聯立方程式として解けば、

二次不静定構造物に對しては：

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{\delta_{10}\delta_{22} - \delta_{20}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12}}, \\ X_2 &= -\frac{\delta_{11}\delta_{20} - \delta_{21}\delta_{10}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12}}, \end{aligned} \right\} \quad (66.3)$$

三次不静定構造物に對しては:

$$X_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \delta_{10} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{20} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{30} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}}, \quad X_2 = -\frac{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{10} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{20} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{30} & \delta_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}},$$

$$X_3 = -\frac{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{10} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{20} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{30} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}}. \quad (66.4)$$

を得、之に依つて  $X$  が求められれば與へられたる不静定構造物の反力及び断面力は一般に (52.1) 式に依つて決定せられる。若し與へられたる不静定構造物の支點が其の反力の作用方向に變位する場合には、前記諸式に於ける  $-\delta_{10}$  の代りに (53.4) に於て示せる荷重項  $K_i$  を採用すればよい。

(66.3) 或は (66.4) 式に依つて一般に  $X$  を決定し得るわけであるが、二次不静定構造の場合とはもかくとして、三次不静定構造の場合に式 (66.4) を演算することは可成りの手数を必要とする。かかる場合には  $X$  を適當に選定して (66.1) 或は (66.2) 式の左邊に於ける  $\delta$  のうち  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  及び  $\delta_{33}$  以外の  $\delta$  をすべて零になるが如くにすれば、(66.1) 或は (66.2) の諸式はすべ

て獨立の一元一次方程式になり、 $X$  は一般に

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} \quad (66.5)$$

に依つて決定されることになる。

かくの如き  $X$  を選定するには<sup>1)</sup>、たとへば三次の不静定の場合には、先づ各々獨立なる任意の反力或は断面力を不静定力  $Y_a, Y_b, Y_c$  として選定し、 $X_1, X_2, X_3$  を次式に依つて示される各々獨立なる不静定力群とする。即ち

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_{1a}Y_a + X_{1b}Y_b + X_{1c}Y_c, \\ X_2 &= X_{2a}Y_a + X_{2b}Y_b + X_{2c}Y_c, \\ X_3 &= X_{3a}Y_a + X_{3b}Y_b + X_{3c}Y_c, \end{aligned} \right\} \quad (66.6)$$

但し本式に於て例へば  $X_{1a}$  は  $Y_a = 1, Y_b = Y_c = 0$  なるときの  $X_1$  の値である。本式はまた一般に

$$\left. \begin{aligned} Y_a &= Y_{a1}X_1 + Y_{a2}X_2 + Y_{a3}X_3, \\ Y_b &= Y_{b1}X_1 + Y_{b2}X_2 + Y_{b3}X_3, \\ Y_c &= Y_{c1}X_1 + Y_{c2}X_2 + Y_{c3}X_3 \end{aligned} \right\} \quad (66.7)$$

と書換へることが出来る。但し例へば  $Y_{a1}$  は  $X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0$  なるときの  $Y_a$  の値である。

今、一般に  $X_1 = 1$  の荷重状態に於ける  $Y_a, Y_b, Y_c$  の作用點の其の作用方向の變位を夫々  $\delta_{a1}, \delta_{b1}, \delta_{c1}$  とすれば、 $X_1 = 1$  が  $X_1 = 1$  の荷重状態に於ける變位に對してなす假想仕事は

1) Müller-Breslau, H.: *Beiträge zur Theorie der ebenen elastischen Träger*, Zentralbl. Bauverw. (1889), 475, 499; Müller, S.: *Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke*, Zentralbl. Bauverw. (1907), 23; Müller-Breslau, H.: *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*, Bd. II, Abt. 1. 4. Aufl., 162, Leipzig (1907); Pirlet, J.: *Kompendium der Statik der Baukonstruktionen*, Bd. II, Teil 1, 169, Berlin (1921); Kaufmann, W.: *Statik*, 208, Berlin (1923); Grüning, M.: *Die Statik des ebenen Tragwerkes*, 323, Berlin (1925).

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_{11} &= Y_{a1}\delta_{a1} + Y_{b1}\delta_{b1} + Y_{c1}\delta_{c1} \\ \text{であつて, 同様に} & \\ 1 \cdot \delta_{22} &= Y_{a2}\delta_{a2} + Y_{b2}\delta_{b2} + Y_{c2}\delta_{c2}, \\ 1 \cdot \delta_{33} &= Y_{a3}\delta_{a3} + Y_{b3}\delta_{b3} + Y_{c3}\delta_{c3} \end{aligned} \right\} \quad (66.8)$$

になる。

次に  $X_1 = 1$  が  $X_2 = 1$  の荷重状態に於ける變位に對して爲す假想仕事は

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_{12} &= Y_{a1}\delta_{a2} + Y_{b1}\delta_{b2} + Y_{c1}\delta_{c2} \\ \text{であつて, 同様に} & \\ 1 \cdot \delta_{21} &= Y_{a2}\delta_{a1} + Y_{b2}\delta_{b1} + Y_{c2}\delta_{c1}, \\ 1 \cdot \delta_{13} &= Y_{a1}\delta_{a3} + Y_{b1}\delta_{b3} + Y_{c1}\delta_{c3}, \\ 1 \cdot \delta_{31} &= Y_{a3}\delta_{a1} + Y_{b3}\delta_{b1} + Y_{c3}\delta_{c1}, \\ 1 \cdot \delta_{23} &= Y_{a2}\delta_{a3} + Y_{b2}\delta_{b3} + Y_{c2}\delta_{c3}, \\ 1 \cdot \delta_{32} &= Y_{a3}\delta_{a2} + Y_{b3}\delta_{b2} + Y_{c3}\delta_{c2} \end{aligned} \right\} \quad (66.9)$$

を得る。

故に今 (66.9) 式の右邊がすべて零になる様に九個の係數  $Y_{a1}, Y_{b1}, \dots$  を選べば  $\delta_{11}, \delta_{22}$  及び  $\delta_{33}$  を除く他の  $\delta_{12}, \delta_{21}, \dots$  等はすべて零になり, 従つて  $X_1, X_2, X_3$  を (66.5) 式に依つて求め得ることになる。而して一般に

$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad \delta_{13} = \delta_{31}, \quad \delta_{23} = \delta_{32}$$

であるから, (66.9) の六式のうち三式のみが獨立なる式であつて, 従つて九個の  $Y_{a1}, Y_{b1}, \dots$  のうち六個は之を任意に選ぶことが出来る。但しそのうち少くとも三個は, 三個の彈性條件式を満足し得るために零以外の値でなければならない。

例へば  $Y_{a1} = Y_{b2} = Y_{c3} = 1, Y_{b1} = Y_{c1} = Y_{c2} = 0$  と置けば

$$\left. \begin{aligned} Y_a &= X_1 + Y_{a2}X_2 + Y_{a3}X_3, \\ Y_b &= X_2 + Y_{b3}X_3, \\ Y_c &= X_3 \end{aligned} \right\} \quad (66.10)$$

になる。此の場合に於て (66.9) の左邊の  $\delta$  をすべて零に等しと置けば, 先づ其の第一式より

$$\delta_{12} = 0 = 1 \cdot \delta_{a2}, \quad \text{即ち} \quad \delta_{a2} = 0$$

を得, 此の關係を考慮すれば (66.9) の第二, 第四及び第六式より

$$\delta_{21} = 0 = Y_{a2}\delta_{a1} + 1 \cdot \delta_{b1} + 0 \cdot \delta_{c1},$$

$$\delta_{31} = 0 = Y_{a3}\delta_{a1} + Y_{b3}\delta_{b1} + 1 \cdot \delta_{c1},$$

$$\delta_{32} = 0 = Y_{a3} \cdot 0 + Y_{b3}\delta_{b2} + 1 \cdot \delta_{c2}$$

を得, 之を解けば

$$\left. \begin{aligned} Y_{a2} &= -\frac{\delta_{b1}}{\delta_{a1}}, \quad Y_{b3} = -\frac{\delta_{c2}}{\delta_{b2}}, \\ Y_{a3} &= -\frac{Y_{b3}\delta_{b1} + \delta_{c1}}{\delta_{a1}} \end{aligned} \right\} \quad (66.11)$$

になる。本式に於ける  $\delta_{a1}, \delta_{b1}$  等は  $X_1, X_2$  がわからなければ之を求めることは出来ないわけであるが, 然し (66.10) 式より明かなるが如く  $X_1 = 1$  の荷重状態は  $Y_a = 1$  の荷重状態に相等しきが故に

$$\delta_{a1} = \delta_{aa}, \quad \delta_{b1} = \delta_{ba}, \quad \delta_{c1} = \delta_{ca}$$

になり, 之に依つて  $Y_{a2}$  が決定せられる。しかして  $X_2 = 1$  の荷重状態は  $Y_a = Y_{a2}, Y_b = 1$  の荷重状態に相當し, 此の場合の  $Y_b$  及び  $Y_c$  の變位  $\delta_{b2}$  及び  $\delta_{c2}$  を求めれば  $Y_{b3}$  を決定し得べく, 従つてまた  $Y_{a3}$  をも決定することが出来る。

かくして  $Y_{a2}, Y_{b3}$  及び  $Y_{a3}$  を決定すれば (66.10) より

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= Y_a - Y_{a2}Y_b - (Y_{a3} - Y_{a2}Y_{b3})Y_c, \\ X_2 &= Y_b - Y_{b3}Y_c, \\ X_3 &= Y_c \end{aligned} \right\} \quad (66.12)$$

になり、此の  $X$  は式 (66.5) に依つて決定せられる。

§ 67. 固定梁

第 251 圖の如く両端に於て固定せられる梁は §8 に説明せるが如く、一般には三次の不静定であるが、荷重が梁に垂直に作用するものとし、且つ梁の

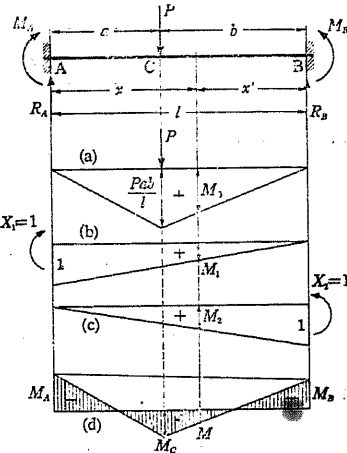
撓みが極めて小なるものとして軸方向の張力を無視すれば<sup>1)</sup>、両端に於ける水平反力は消失し、従つて之を二次の不静定と見做すことが出来る。

扱て両端に於けるモーメント  $M_A$ ,  $M_B$  を不静定力:

$$X_1 = M_A, \quad X_2 = M_B$$

とすれば、此の場合の静定基本系はスパン  $l$  の単純梁になり、此の単純梁に於ける與へられたる荷重、 $X_1 =$

$1$  及び  $X_2 = 1$  に依る曲げモーメントの分布は第 251 圖 (a), (b), (c) に示すが如くなる。故に  $EI$  を常數とし、曲げモーメントの影響のみを考慮す



第 251 圖

1) 軸方向の張力を考慮する場合に關しては: 鷹部屋福平: *Zur Berechnung des beiderseits eingemauerten Trägers unter besonderer Berücksichtigung des Längskraft*, 九工紀 (1922); *Etude de la force longitudinale et du moment de flexion aux extrémités de la pièce complètement encastrée*, 北工紀 (1926), “高級梁論” (昭和 4); Wiederkehr, R.: *Der gespannte Träger*, Schw. Tech. Z., 25 (1926); 櫻井豊三: 固定梁の軸張力實用計算法, 土學, 26 (1940), 573.

れば、§ 55 の諸式を利用することに依つて

$$\begin{aligned} EI \delta_{10} &= \int M_1 M_0 dx = \mathfrak{A}, & EI \delta_{20} &= \int M_2 M_0 dx = \mathfrak{B}, \\ EI \delta_{11} &= \int M_1^2 dx = \frac{l}{3}, & EI \delta_{22} &= \int M_2^2 dx = \frac{l}{3}, \\ EI \delta_{12} &= EI \delta_{21} = \int M_1 M_2 dx = \frac{l}{6} \end{aligned}$$

になる。但し  $\mathfrak{A}$  及び  $\mathfrak{B}$  は § 55 に説明せるが如く単純梁 AB に  $M_0$  の曲げモーメント圖を荷重として作用せしめるときの A 及び B に於ける反力であつて、其の値は第 5 表より求められる。

前記  $\delta$  の値を (66.8) に代入すれば、 $X_1$  及び  $X_2$  は一般に

$$\left. \begin{aligned} X_1 = M_A &= -\frac{2}{l}(2\mathfrak{A} - \mathfrak{B}), \\ X_2 = M_B &= -\frac{2}{l}(2\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) \end{aligned} \right\} \quad (67.1)$$

になる。

$X_1 = 1$  或は  $X_2 = 1$  に依る反力、曲げモーメント及び剪断力は

$$\begin{aligned} -R_{A,1} &= +R_{B,1} = +\frac{1}{l}, & M_1 &= 1 \frac{x'}{l}, & Q_1 &= -\frac{1}{l}; \\ +R_{A,2} &= -R_{B,2} = +\frac{1}{l}, & M_2 &= 1 \frac{x}{l}, & Q_2 &= +\frac{1}{l} \end{aligned}$$

であるから、固定梁の反力、曲げモーメント及び剪断力は一般に

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_{A,0} - \frac{M_A - M_B}{l}, & R_B &= R_{B,0} + \frac{M_A - M_B}{l}, \\ M &= M_0 + M_A \frac{x'}{l} + M_B \frac{x}{l}, & Q &= Q_0 - \frac{M_A - M_B}{l} \end{aligned} \right\} \quad (67.2)$$

になる。故に荷重が梁の中點に對して左右對稱なる場合には  $M_A = M_B$  であるから、反力と剪断力は単純梁の場合に等しくなる。

例へば等分布荷重  $p$  が滿載する場合には  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = p l^2 / 24$  であるから

$$M_A = M_B = -\frac{p l^2}{12} \quad (67.3)$$

になり、梁の中點に於て

$$+M_{\max} = \frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{12} = +\frac{pl^2}{24} \quad (67.4)$$

になる。

また第 251 圖の如く集中荷重  $P$  が作用する場合には

$$\mathfrak{A} = \frac{Pab}{6l}(a+2b), \quad \mathfrak{B} = \frac{Pab}{6l}(2a+b)$$

であるから

$$X_1 = M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad X_2 = M_B = -\frac{Pa^2b}{l^2} \quad (67.5)$$

になり、反力及び曲げモーメントは

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{Pb^2}{l^3}(3a+b), & R_B &= \frac{Pa^2}{l^3}(a+3b), \\ A \sim C: & M = R_A x + M_A, \\ C \sim B: & M = R_B x' + M_B, \\ C: & M_C = \frac{Pab}{l^3}(l^2 - a^2 - b^2) \end{aligned} \right\} \quad (67.6)$$

になる。曲げモーメント圖は第 251 圖 (d) の如くなる。

(67.6) 式に於て

$$P = 1, \quad a = \xi l, \quad b = \xi' l$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\xi \cdot \xi'^2 \cdot l, & M_B &= -\xi' \cdot \xi^2 \cdot l, \\ R_A &= (1 + 2\xi)\xi'^2, & R_B &= (1 + 2\xi')\xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (67.7)$$

になり、 $\xi$  及び  $\xi'$  を變數と考へれば上式は即ち  $M_A, M_B, R_A, R_B$  に對する影響線縦距を示すことになる。今

$$f_3(\xi) = \xi \cdot \xi'^2 = \xi(1-\xi)^2,$$

$$f_4(\xi) = (1+2\xi)(1-\xi)^2$$

とすれば

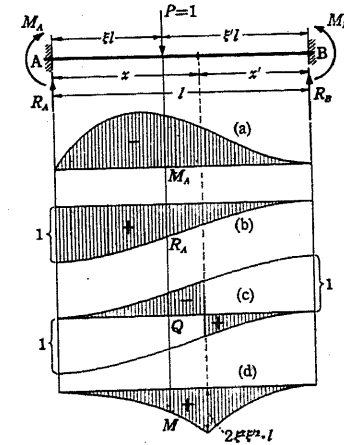
$$M_A = -f_3(\xi) \cdot l, \quad M_B = -f_3(\xi') \cdot l,$$

$$R_A = f_4(\xi), \quad R_B = f_4(\xi')$$

になる。 $f_3(\xi)$  及び  $f_4(\xi)$  の値は第 8 表に示すが如く、 $f_3(\xi)$  は  $\xi = 1/3$  に於て極大値  $4/27 = 0.148$  になる。之を利用して  $M_A$  及び  $R_A$  に對する影響線を描けば第 252 圖 (a) 及び (b) の如くなる。

第 8 表

$\xi$	$f_3(\xi)$	$f_4(\xi)$
0	0	1
0.1	0.081	0.972
0.2	0.128	0.896
0.3	0.147	0.784
0.4	0.144	0.648
0.5	0.125	0.5
0.6	0.096	0.362
0.7	0.063	0.216
0.8	0.032	0.104
0.9	0.009	0.028
1	0	0



第 252 圖

梁の任意の斷面 (A より  $x$ ; B より  $x'$ ) に於ける剪斷力及び曲げモーメントは  $P = 1$  が斷面の右にあるときには

$$Q = R_A = f_4(\xi),$$

$$M = R_A x + M_A = \left[ \frac{x}{l} f_4(\xi) - f_3(\xi) \right] l,$$

$P = 1$  が斷面の左にあるときには

$$Q = -R_B = -f_4(\xi'),$$

$$M = R_B x' + M_B = \left[ \frac{x'}{l} f_4(\xi') - f_3(\xi') \right] l$$

であつて、之に依つて  $Q, M$  に對する影響線を描けば第 252 圖 (c) 及び (d) の如くなる。

§ 68. 固定アーチ

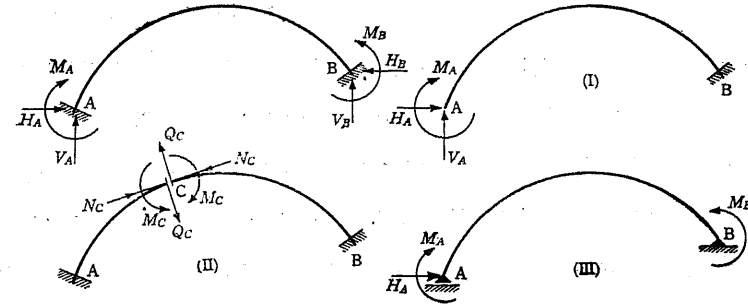
i. 一般解法.

両端固定のアーチは外部的に三次の不静定構造であつて、§ 66 に説明せるが如く、各々一元一次方程式に依つて決定し得るが如き不静定力の選び方に就ては古来より各種の提案が發表せられたが<sup>1)</sup>、以下に記述するものは Müller-Breslau 等に依つて提案せられた所謂“重心法”である。即ち、此の方法に於ては、アーチの各部分が  $1/EI$  に等しき、或は之に比例する重量(之を“弾性重量”と言ふ)を有するものと假定するときのアーチの重心(之を“弾性重心”と言ふ)を不静定力の作用点に選ぶのである。

即ち第 253 圖に示す固定アーチに於て、其の一端例へば A に於ける三反力を不静定力として選べば同圖(I)の如く B に於て固定せられる片持梁型の静定曲り梁が静定基本系になり、またアーチを任意の一点 C に於て切断し、其の切断面に於ける断面力を不静定力に選べば、(II)に示すが如く夫々 A 及び B に於て固定せられる一対の片持梁型曲り梁 AC 及び BC' が静定基本系となり、或はまた  $M_A, H_A, M_B$  を不静定力に選べば(III)の如き単純梁

1) 主なるもののみを挙げれば下記の如くである。

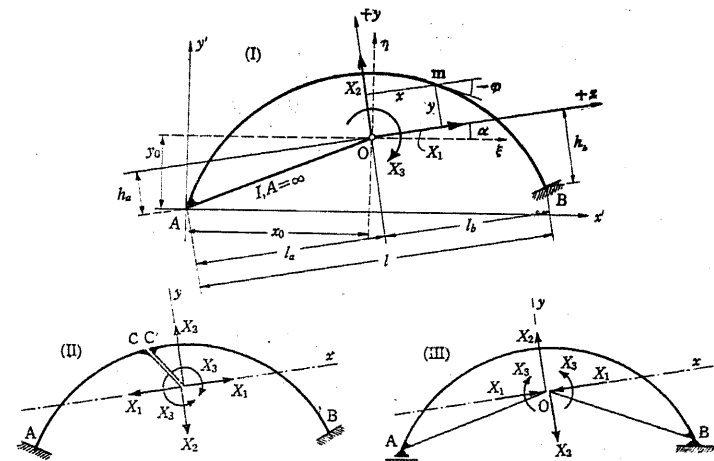
Krohn, R.: *Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger*, Z. Baukunde, 3 (1880), 219; Mohr, O.: *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerks*, Z. Arch. Ing.-Ver. zu Hannover, 27 (1881), 243; Müller-Breslau, H.: *Vereinfachung der Theorie der elastisch unbestimmten Bogenträger*, Z. Arch. Ing.-Ver. zu Hannover, 30 (1884), 575; Hawranek, A.: *Berechnung von Bogenbrücken bei räumlichem Kraftangriff*, B. u. E. (1918); Strassner, A.: *Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogenträger*, Bd. 2, Berlin (1921); Enyedi, B.: *Beitrag zur Berechnung des eingespannten Bogenträgers*, Eisenbau (1921); Kasarnowsky, S.: *Zur Statik eingespannter Gewölbe*, Bauing. (1924); Müller-Breslau, H.: *Die neuere Methoden der Festigkeitslehre*, 4. Aufl., 122 (1924); *Graphische Statik der Baukonstruktionen*, II/2, 2. Aufl., 423, 457 (1925); Beyer, K.: *Die Statik im Eisenbetonbau*, 269 (1927).



第 253 圖

型の曲り梁が静定基本系になる。然し何れにするも、之等の場合に於ては  $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{31}$  は一般に零とならず、従つて  $X_1, X_2, X_3$  を(66.5)式に依つて求めることは出来ない。

然るに第 254 圖に示すが如く適當なる点 O に於て適當なる方向の直交座標軸  $Oxy$  を選び、(I)の場合には AO を、(II)の場合には CO 及び C'O を、(III)の場合には AO 及び BO を、 $EI$  及び  $EA$  が無限大なる部材にて結び付



第 254 圖

けたものと假定し、0に於て  $x$  及び  $y$  の方向に作用する力  $X_1$  及び  $X_2$  と力のモーメント  $X_3$  とを不静定力に選べば、原点 0 の位置及び座標軸の方向を適當に選ぶことに依つて  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{23}$ ,  $\delta_{31}$  を零にすることが出来る。

今、上記の直交座標軸  $Oxy$  に就てアーチの任意の断面  $m$  の座標を  $(x, y)$ ,  $m$  に於けるアーチの軸線の切線が  $x$ -軸に對してなす角を  $\varphi$  とし、 $X_1$ ,  $X_2$  及び  $X_3$  の正の方向を圖示の如くにとれば、 $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  或は  $X_3 = 1$  に依る断面  $m$  に於ける断面力は (I), (II) 及び (III) に對して同様に

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -1 \cdot y, & N_1 &= -1 \cdot \cos \varphi, & Q_1 &= -1 \cdot \sin \varphi; \\ M_2 &= +1 \cdot x, & N_2 &= -1 \cdot \sin \varphi, & Q_2 &= +1 \cdot \cos \varphi; \\ M_3 &= +1, & N_3 &= 0, & Q_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (68.1)$$

であつて、剪断力に依る影響を省略すれば

$$\left. \begin{aligned} \delta_{23} &= \delta_{32} = \int \frac{M_2 M_3}{EI} ds + \int \frac{N_2 N_3}{EA} ds = + \int \frac{x}{EI} ds, \\ \delta_{31} &= \delta_{13} = \int \frac{M_3 M_1}{EI} ds + \int \frac{N_3 N_1}{EA} ds = - \int \frac{y}{EI} ds, \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} ds + \int \frac{N_1 N_2}{EA} ds \\ &= - \int \frac{xy}{EI} ds + \int \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{EA} ds \end{aligned} \right\} \quad (68.2)$$

になる。故に

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0, \quad \delta_{31} = \delta_{13} = 0, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

になるためには

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{x}{EI} ds &= 0, & \int \frac{y}{EI} ds &= 0, \\ \int \frac{xy}{EI} ds &- \int \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{EA} ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (68.3)$$

でなければならない。

上記のうち最初の二式は  $ds/EI$  の  $y$ -軸及び  $x$ -軸に對する一次モーメント

の總和が同時に零であるべきこと、即ちアーチの各部分が  $1/EI$  或は之に比例する重量を有するものと假定するときアーチの重心が原点 0 となるべきことを意味する。従つて任意の座標軸  $Ax'y'$  に就て、原点 0 の座標を  $(x_0, y_0)$  とすれば

$$x_0 = \frac{\int \frac{x'}{EI} ds}{\int \frac{1}{EI} ds}, \quad y_0 = \frac{\int \frac{y'}{EI} ds}{\int \frac{1}{EI} ds} \quad (68.4)$$

になる。

次に、(68.3)の最後の式の第二項<sup>1)</sup>は一般に極めて小なる値であつて、之を無視すれば、(68.3)の最後の式は

$$\int \frac{xy}{EI} ds = 0$$

になる。本式は弾性重量  $1/EI$  を有するアーチの  $x, y$ -軸に對する相乗モーメントが零に等しきこと、即ち  $x, y$ -軸が弾性重量  $1/EI$  を有するアーチの重心 0 を通過する主軸であるべきことを意味する。故に 0 を原点とする任意の直交座標軸、例へば第 254 圖の直交座標軸  $O\xi\eta$  に就て、アーチの二次モーメント  $T_\xi, T_\eta$  及び相乗モーメント  $Z_{\xi\eta}$  を

$$T_\xi = \int \frac{\eta^2}{EI} ds, \quad T_\eta = \int \frac{\xi^2}{EI} ds, \quad Z_{\xi\eta} = \int \frac{\xi\eta}{EI} ds \quad (68.5)$$

に依つて計算すれば、 $x, y$ -軸が  $\xi, \eta$ -軸に對してなすべき角  $\alpha$  は

$$\tan 2\alpha = \frac{2Z_{\xi\eta}}{T_\eta - T_\xi} \quad (68.6)$$

に依つて決定せられる。若しアーチが左右對稱なるときには、原点 0 は其の對稱軸上にあるべく、且つ  $\eta$ -軸を其の對稱軸にとれば  $Z_{\xi\eta} = 0$  となるから、 $\alpha = 0$  即ち  $y$ -軸は對稱軸に一致する。

かくの如くにして其の作用點及び作用方向が決定せられたる不静定力

1) アーチが  $y$ -軸に就て左右對稱なる場合には此の項は嚴密に零に等しい。

$X_1, X_2$  及び  $X_3$  は(66.5)式, 即ち

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} \quad (68.7)$$

に依つて求められる。此の  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$  は, 剪断力の影響を省略すれば(68.1)

式の關係に依つて

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \int \frac{N_1^2}{EA} ds = \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds, \\ \delta_{22} &= \int \frac{M_2^2}{EI} ds + \int \frac{N_2^2}{EA} ds = \int \frac{x^2}{EI} ds + \int \frac{\sin^2 \varphi}{EA} ds, \\ \delta_{33} &= \int \frac{M_3^2}{EI} ds + \int \frac{N_3^2}{EA} ds = \int \frac{1}{EA} ds \end{aligned} \right\} (68.8)$$

であり, 静定基本系に於て與へられたる荷重に依る断面力を  $M_0, N_0, Q_0$ , 温度變化を  $t$  とし, 剪断力の影響を省略すれば

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \int \frac{M_1 M_0}{EI} ds + \int \frac{N_1 N_0}{EA} ds + \int \alpha t N_1 ds \\ &= -\int \frac{M_0 y}{EI} ds - \int \frac{N_0 \cos \varphi}{EA} ds - \int \alpha t \cos \varphi ds, \\ \delta_{20} &= \int \frac{M_2 M_0}{EI} ds + \int \frac{N_2 N_0}{EA} ds + \int \alpha t N_2 ds \\ &= +\int \frac{M_0 x}{EI} ds - \int \frac{N_0 \sin \varphi}{EA} ds - \int \alpha t \sin \varphi ds, \\ \delta_{30} &= \int \frac{M_3 M_0}{EI} ds = +\int \frac{M_0}{EI} ds \end{aligned} \right\} (68.9)$$

になる。以上の諸式は第 254 圖に示す三種の静定基本系に對して同様に成立する。従つて(68.8)の  $\delta_{11}, \delta_{22}$  及び  $\delta_{33}$  の値は(I), (II) 及び(III)の場合に對し夫々全く同一になる。然し  $M_0, N_0$  は静定基本系の選び方に依つて相違するが故に(68.9)の  $\delta_{10}, \delta_{20}$  及び  $\delta_{30}$  は(I), (II) 及び(III)に對して夫々異なる値になる。

(68.8)及び(68.9)式に於て  $N_2$  に依る項は一般に極めて小であるので, 之

を省略することとし, 且つ  $\alpha t$  を常數, AB間の距離の  $x$ -軸に於ける射影を  $l$  とすれば

$$\int \alpha t \cos \varphi ds = \alpha t \int dx = \alpha t l$$

であるから,  $X_1, X_2$  及び  $X_3$  は

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{\int \frac{M_0 y}{EI} ds + \int \frac{N_0 \cos \varphi}{EA} ds + \alpha t l}{\int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds}, \\ X_2 &= - \frac{\int \frac{M_0 x}{EI} ds}{\int \frac{x^2}{EI} ds}, \quad X_3 = - \frac{\int \frac{M_0}{EI} ds}{\int \frac{1}{EI} ds} \end{aligned} \right\} (68.10)$$

になる。

茲に於て  $E$  を常數, 基準断面例へば拱頂に於ける  $I$  及び  $A$  を  $I_C$  及び  $A_C$  とし,  $X_1$  の分子の第二項は極めて小なるが故に之を省略し, また分母の第二項に於て近似的に  $A = A_C \cos \varphi$  とすれば,  $dx = ds \cos \varphi$  なるが故に

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{\int M_0 y \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx + EI_C \alpha t l}{\int y^2 \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx + \frac{I_C}{A_C} l}, \\ X_2 &= - \frac{\int M_0 x \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx}{\int x^2 \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx}, \\ X_3 &= - \frac{\int M_0 \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx}{\int \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx} \end{aligned} \right\} (68.11)$$

になる。

かくして  $X_1, X_2, X_3$  が求められれば固定アーチの任意の断面に於ける断面力は一般に



$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 - X_1 y + X_2 x + X_3, \\ N &= N_0 - X_1 \cos \varphi - X_2 \sin \varphi, \\ Q &= Q_0 - X_1 \sin \varphi + X_2 \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (68.12)$$

に依つて求められる。本式は第254圖に示す三種の静定基本系のうち何れを採用する場合に於ても同様に成立する。然し反力の方は三種の静定基本系に對し夫々別個の式に依つて求めねばならない。それで以下の記述に於てはすべて第254圖(I)を静定基本系にとることとし、其の固定端Bに於ける與へられたる荷重に依る反力を  $V_{B,0}, H_{B,0}$  及び  $M_{B,0}$  とし、A, Bより  $x$ -軸或は  $y$ -軸に至る距離を夫々  $h_a, h_b$  及び  $l_a, l_b$  とすれば、固定アーチの両端に於ける反力は

$$\left. \begin{aligned} V_A &= X_1 \sin \alpha + X_2 \cos \alpha, \\ H_A &= X_1 \cos \alpha - X_2 \sin \alpha, \\ M_A &= X_1 h_a - X_2 l_a + X_3, \\ V_B &= V_{B,0} - X_1 \sin \alpha - X_2 \cos \alpha, \\ H_B &= H_{B,0} + X_1 \cos \alpha - X_2 \sin \alpha, \\ M_B &= M_{B,0} + X_1 h_b + X_2 l_b + X_3 \end{aligned} \right\} \quad (68.13)$$

になる。

以下  $EI$  が常數なる圓形アーチ及び  $I_0/I \cos \varphi$  が簡單なる  $x$  の函數として示される拋物線アーチに就て記述する。

ii. 断面不變なる圓形アーチ.

第255圖を  $EI$  が常數なる左右對稱のアーチとする。本場合の如く左右對稱なる場合には弾性重量の中心  $O$  は對稱軸  $O'y'$  上にあり且つ  $x$ -及び  $y$ -軸が夫々水平及び鉛直であることは言ふまでもない。今、圓の中心  $O'$  より原点  $O$  に至る距離を  $e$  とすれば、 $e$  は(68.4)式に依つて

$$e = \frac{\int \frac{y'}{EI} ds}{\int \frac{1}{EI} ds} = \frac{\int y' ds}{\int ds}$$

になる。然るに

$$y' = r \cos \theta,$$

$$ds = dx / \cos \theta$$

であつて、圓形アーチの全長を  $s$  とすれば

$$s = 2r\varphi_0$$

であるから

$$e = \frac{r \int_{-l/2}^{l/2} dx}{s} = \frac{rl}{s} = \frac{l}{2\varphi_0} \quad (68.14)$$

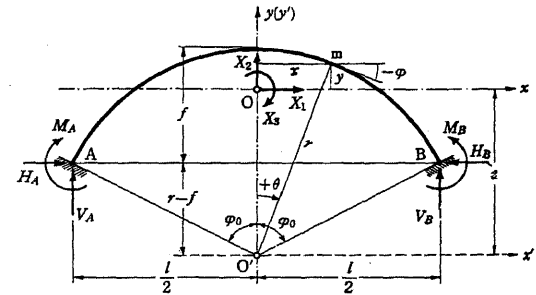
になり、之に依つて原点  $O$  が決定せられる。

$EI$  及び  $EA$  が常數なる場合には、(68.10) 式は

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{\int M_0 y ds + \frac{I}{A} \int N_0 \cos \varphi ds + \alpha l}{\int y^2 ds + \frac{I}{A} \int \cos^2 \varphi ds}, \\ X_2 &= - \frac{\int M_0 x ds}{\int x^2 ds}, \quad X_3 = - \frac{\int M_0 ds}{s} \end{aligned} \right\} \quad (68.15)$$

になる。次に之等諸式の分子、分母の値を計算するために圖示の如き極座標  $(r, \theta)$  を採用すれば

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta, & y &= r \cos \theta - e, \\ \varphi &= -\theta, & ds &= r d\theta \end{aligned}$$



第 255 圖

であつて、先づ  $X_1, X_2$  の分母の諸項は

$$\begin{aligned} \int y^2 ds &= r \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (r \cos \theta - e)^2 d\theta \\ &= r[r^2(\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \varphi_0) - 4er \sin \varphi_0 + 2e^2 \varphi_0], \\ \int x^2 ds &= r^3 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sin^2 \theta \cdot d\theta = r^3 (\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0), \\ \int \cos^2 \varphi ds &= r \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos^2 \theta \cdot d\theta = r(\varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) \end{aligned}$$

になり、茲に於て

$$r \cos \varphi_0 = r - f, \quad r \sin \varphi_0 = \frac{l}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{s}{2r} = \frac{l}{2e}$$

なることを考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} \int y^2 ds &= \frac{r}{2} [rs + l(r-f) - 2le], \\ \int x^2 ds &= \frac{r}{2} [rs - l(r-f)], \\ \int \cos^2 \varphi ds &= \frac{1}{2r} [rs + l(r-f)] \end{aligned} \right\} \quad (68.16)$$

になる。

今、第 256 圖の如く鉛直荷重  $P$  が作用する場合には

$P$  より左:

$$M_0 = 0,$$

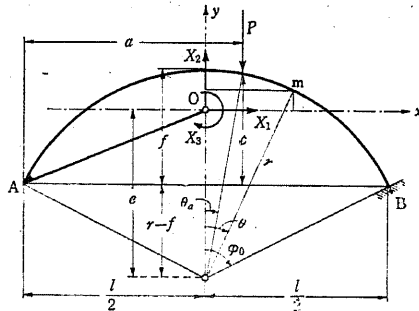
$$N_0 = 0;$$

$P$  より右:

$$M_0 = -P \left( x + \frac{l}{2} - a \right) = -P \left( r \sin \theta + \frac{l}{2} - a \right);$$

$$N_0 = -P \sin \theta$$

であつて、此の場合に於ける (68.15) の分子の諸項を計算すれば



第 256 圖

$$\begin{aligned} \int M_0 y ds &= -Pr \int_{\theta_a}^{\varphi_0} \left( r \sin \theta + \frac{l}{2} - a \right) (r \cos \theta - e) d\theta \\ &= -Pr \left[ \frac{r^2}{2} (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \theta_a) - r \left( a - \frac{l}{2} \right) (\sin \varphi_0 - \sin \theta_a) \right. \\ &\quad \left. - r e (\cos \theta_a - \cos \varphi_0) + e \left( a - \frac{l}{2} \right) (\varphi_0 - \theta_a) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int M_0 x ds &= -Pr^2 \int_{\theta_a}^{\varphi_0} \left( r \sin \theta + \frac{l}{2} - a \right) \sin \theta d\theta \\ &= -Pr^2 \left[ \frac{r}{2} (\varphi_0 - \theta_a - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \sin \theta_a \cos \theta_a) \right. \\ &\quad \left. - \left( a - \frac{l}{2} \right) (\cos \theta_a - \cos \varphi_0) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int M_0 ds &= -Pr \int_{\theta_a}^{\varphi_0} \left( r \sin \theta + \frac{l}{2} - a \right) d\theta \\ &= -Pr \left[ r (\cos \theta_a - \cos \varphi_0) - \left( a - \frac{l}{2} \right) (\varphi_0 - \theta_a) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int N_0 \cos \varphi ds &= -Pr \int_{\theta_a}^{\varphi_0} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= -\frac{Pr}{2} (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \theta_a) \end{aligned}$$

になる。茲に於て

$$r \sin \varphi_0 = \frac{l}{2}, \quad r \cos \varphi_0 = r - f,$$

$$r \sin \theta_a = a - \frac{l}{2}, \quad r \cos \theta_a = e + r - f$$

なることを考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} \int M_0 y ds &= +Pr \left[ e c - \frac{1}{2} (l-a)^2 - e \left( a - \frac{l}{2} \right) (\varphi_0 - \theta_a) \right], \\ \int M_0 x ds &= -\frac{Pr}{2} \left[ r^2 (\varphi_0 - \theta_a) - (l-a)(r-f) - e \left( a - \frac{l}{2} \right) \right], \\ \int M_0 ds &= -Pr \left[ c - \left( a - \frac{l}{2} \right) (\varphi_0 - \theta_a) \right], \\ \int N_0 \cos \varphi ds &= -\frac{Pr}{2r} a (l-a) \end{aligned} \right\} \quad (68.17)$$

になり、従つて  $X_1, X_2$  及び  $X_3$  は

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{P \left[ \frac{2ec - (l-a)^2 - c(2a-l)(\varphi_0 - \theta_a)}{2Ar^2} a(l-a) \right] + \frac{2\alpha tl}{r}}{rs + l(r-f) - 2le + \frac{I}{Ar^2} [rs + l(r-f)]}, \\ X_2 &= + P \frac{r^2(\varphi_0 - \theta_a) - (l-a)(r-f) - c\left(a - \frac{l}{2}\right)}{rs - l(r-f)}, \\ X_3 &= \frac{Pr}{s} \left[ c - \left(a - \frac{l}{2}\right)(\varphi_0 - \theta_a) \right] \end{aligned} \right\} \quad (68.18)$$

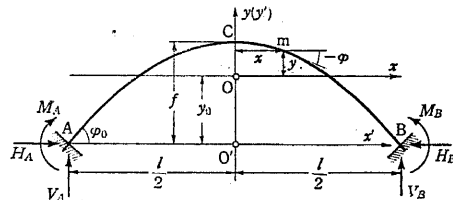
になる。\$X\_1, X\_2\$ 及び \$X\_3\$ がわかればアーチの両端 A, B に於ける反力は次の如くにして求められる。

$$\left. \begin{aligned} H_A &= H_B = + X_1, \\ V_A &= + X_2, \quad V_B = P - X_2, \\ M_A &= + X_1(e + f - r) - X_2 \frac{l}{2} + X_3, \\ M_B &= -P(l-a) + X_1(e + f - r) + X_2 \frac{l}{2} + X_3. \end{aligned} \right\} \quad (68.19)$$

iii. 拋物線アーチ.

アーチが扁平なときには其の軸線の形状は不静定力には大なる影響を

及ぼさないから、扁平アーチに於ては、其の軸線が圓或は他の曲線であつても以下記述する拋物線アーチに對する結果を近似的に應用することが出来る。



第 257 圖

今、第 257 圖に於てアーチの軸線は座標軸 \$O'x'y'\$ に就て

$$y' = f - \frac{4f}{l^2} x'^2 = f \left( 1 - 4 \frac{x'^2}{l^2} \right) \quad (68.20)$$

にて示される拋物線とし、拱頂及び起拱點に於ける \$I\$ を夫々 \$I\_C\$ 及び \$I\_0\$ とすれば、任意の斷面の \$I\$ が、§ 58, iii に於けると同様に

$$\frac{I_C}{I \cos \varphi} = 1 - 4(1-n) \frac{x'^2}{l^2}, \quad n = \frac{I_C}{I_0 \cos \varphi_0} \quad (68.21)$$

の如くに變化するものとする。

然るときは弾性重心 \$O\$ の位置は、\$x'\$-軸或は拱頂より

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{\int \frac{y'}{EI} ds}{\int \frac{1}{EI} ds} = \frac{2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{I_C}{I \cos \varphi} y' dx'}{2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx'} = \frac{2(n+4)}{5(n+2)} f, \\ \text{或は } f - y_0 &= \frac{3n+2}{5(n+2)} f \end{aligned} \right\} \quad (68.22)$$

の距離にあり、従つてアーチの軸線の方程式は座標軸 \$Oxy\$ に就て

$$y = y' - y_0 = f \left[ \frac{3n+2}{5(n+2)} - 4 \frac{x^2}{l^2} \right] \quad (68.23)$$

になる。

かくして (68.11) の諸式に於ける分母を計算すれば:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \text{ の式の分母} &= 2 \int_0^{\frac{l}{2}} y^2 \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx + \frac{I_C}{Ac} l \\ &= \frac{4(1+\nu) \cdot 3n(n+8) + 8}{525} \frac{I_C}{n+2} f^2 l, \\ \text{但し } \nu &= \frac{525}{4} \cdot \frac{n+2}{3n(n+8) + 8} \cdot \frac{I_C}{Ac f^2}, \\ X_2 \text{ の式の分母} &= 2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx = \frac{3n+2}{60} l^3, \\ X_3 \text{ の式の分母} &= 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx = \frac{n+2}{3} l \end{aligned} \right\} \quad (68.24)$$

になる。

今、第 258 圖の如く鉛直集中荷重 \$P\$ が作用するときには、\$P\$ の左に於ては

$M_0 = 0$ ,  $P$ の右に於ては

$$\begin{aligned} M_0 &= -P\left(x + \frac{l}{2} - a\right) \\ &= -P\left(x + b - \frac{l}{2}\right) \end{aligned}$$

であつて、之によつて (68.11) 式の分子を計算し、簡単のために  $a =$

$\xi l$ ,  $b = \xi' l$  と置けば、結局に於て

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{35 \cdot 3n(n+4) + 8(1-n)(n+2)\xi\xi'}{(1+\nu)[3n(n+8) + 8]} \cdot \xi^2 \xi'^2 \cdot \frac{l}{f} \cdot P, \\ X_2 &= + \xi' \left[ 1 + \frac{\xi(\xi' - \xi)}{2 + 3n} \{6 - n - 6(1-n)\xi\xi'\} \right] \cdot P, \\ X_3 &= + \frac{\xi'}{2} \left[ 1 - \xi \left( \xi^2 + \xi'^2 + \frac{6}{n+2} \xi\xi' \right) \right] \cdot Pl \end{aligned} \right\} (68.25)$$

になり、特に  $n=1$  の場合には  $y_0 = \frac{2}{3}f$  であつて

$$X_1 = \frac{15l}{4(1+\nu)f} \xi^2 \xi'^2 P, \quad X_2 = \xi'^2 (3 - 2\xi') P, \quad X_3 = \frac{\xi'^2}{2} Pl \quad (68.26)$$

になる。

また等分布荷重  $p$  がアーチの全長に作用するときには

$$M_0 = -\frac{p}{2} \left( \frac{l}{2} + x \right)^2$$

であつて、之に依つて計算すれば

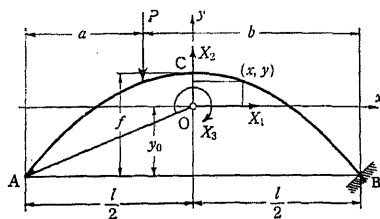
$$X_1 = \frac{pl^2}{8(1+\nu)f}, \quad X_2 = \frac{pl}{2}, \quad X_3 = \frac{2n+3}{10(n+2)} pl^2 \quad (68.27)$$

になり、特に  $n=1$  の場合には

$$X_3 = \frac{pl^2}{6} \quad (68.28)$$

になる。

$X_1, X_2, X_3$  がわかれば反力及び断面力は (68.12) 及び (68.13) 式に依つて計算せられる。但し本場合には  $\alpha = 0, l_a = l_b = l/2, h_a = h_b = y_0$  であるか



第 258 圖

ら、鉛直荷重に對しては

$$\left. \begin{aligned} H_A &= H_B = X_1, \quad V_A = X_2, \quad V_B = V_{B,0} - X_2, \\ M_A &= X_1 y_0 - X_2 \frac{l}{2} + X_3, \\ M_B &= M_{B,0} + X_1 y_0 + X_2 \frac{l}{2} + X_3, \\ M &= M_0 - X_1 y + X_2 x + X_3, \\ M_C &= M_{C,0} - X_1 (f - y_0) + X_3 \end{aligned} \right\} (68.29)$$

になる。

特に第 258 圖の如く集中荷重  $P$  が作用するときには、 $n=1$  の場合に對し

$$\left. \begin{aligned} H_A &= H_B = \frac{15l}{4(1+\nu)f} \xi^2 \xi'^2 P, \\ V_A &= \xi'^2 (3 - 2\xi') P, \quad V_B = \xi^2 (3 - 2\xi) P, \\ M_A &= - \left( 1 - \frac{5\xi}{2(1+\nu)} \right) \xi \xi'^2 Pl, \\ M_B &= - \left( 1 - \frac{5\xi'}{2(1+\nu)} \right) \xi^2 \xi' Pl, \\ M_C &= + \left( 1 - \frac{5\xi^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\xi^2}{2} Pl, \quad \xi \leq 0.5, \\ &= + \left( 1 - \frac{5\xi'^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\xi'^2}{2} Pl, \quad \xi \geq 0.5 \end{aligned} \right\} (68.30)$$

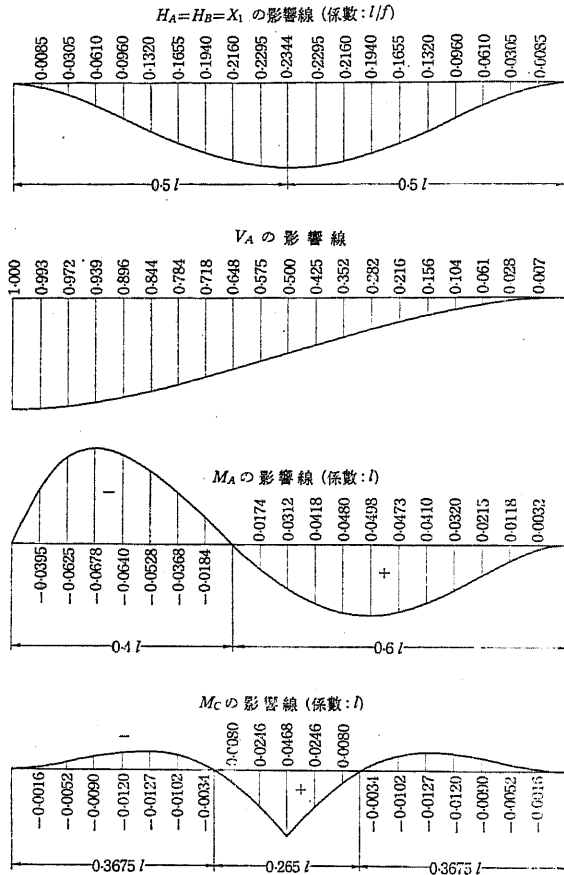
を得、同様に満載等分布荷重  $p$  に對しては

$$\left. \begin{aligned} H_A &= H_B = \frac{pl^2}{8(1+\nu)f}, \quad V_A = V_B = \frac{pl}{2}, \\ M &= -\frac{\nu}{8(1+\nu)} p (l^2 + 4x^2), \\ M_A &= M_B = -\frac{\nu pl^2}{4(1+\nu)}, \quad M_C = -\frac{\nu pl^2}{8(1+\nu)} \end{aligned} \right\} (68.31)$$

になり、若し  $\nu=0$  とすればアーチには全く曲げモーメントが作用しないことになる。

(68.30) 式に於て  $P=1$  とし  $\xi$  及び  $\xi'$  を變數と考へれば反力及び曲げモ

ーメントに対する影響線が得られる。例へば  $\nu=0$  の場合の  $H_A, V_A, M_A$  及び  $M_C$  に対する影響線は第 259 圖<sup>1)</sup> の如くなる。



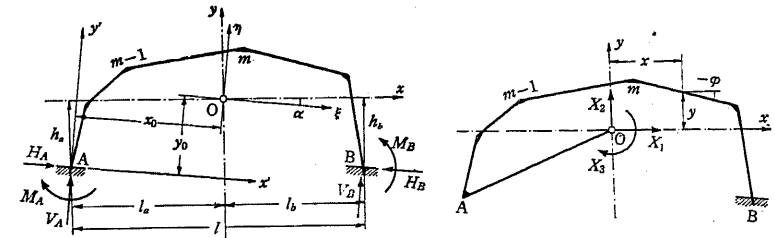
第 259 圖 抛物線アーチの影響線 ( $n=1, \nu=0$ )

1) Beyer, K.: "Die Statik im Eisenbetonbau", 297, Stuttgart (1927).

§ 69. 両端固定ラーメン及び閉合ラーメン

i. 一般解法.

§ 68, i に説明した固定アーチの一般解法は第 260 圖の如き両端固定のラーメンに対してもすべてそのまま適用される。従つて固定ラーメンに對し

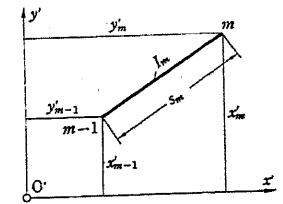


第 260 圖

ては別に記述する必要はない譯であるが、茲に特に記述せんとするものは

ラーメンを構成する各部材が直線であり、 $E$  が全體を通じて常數、 $I$  が各部材毎に常數である場合の解法である。

先づ彈性重心  $O$  の位置を決定するために任意の直交座標軸  $O'x'y'$  をとり、之に就て任意の節點  $m$  の座標を  $(x'_m, y'_m)$  とすれば、部材  $m-(m-1)$  に就ては (第 261 圖)



第 261 圖

$$\int \frac{x'}{EI} ds = \frac{(x'_{m-1} + x'_m) s_m}{2EI_m}, \quad \int \frac{y'}{EI} ds = \frac{(y'_{m-1} + y'_m) s_m}{2EI_m}$$

になり、任意の基準部材の  $I$  を  $I_0$  とし、且つ

$$s'_m = \frac{I_0}{I_m} s_m, \quad G'_x = \frac{s'_m}{2} (y'_{m-1} + y'_m), \quad G'_y = \frac{s'_m}{2} (x'_{m-1} + x'_m). \quad (69.1)$$

とすれば

$$x_0 = \frac{\sum G'_y}{\sum s'}, \quad y_0 = \frac{\sum G'_x}{\sum s'} \quad (69.2)$$

になる。

次に弾性主軸  $Oxy$  の方向を定めるために任意の直交座標軸  $O\xi\eta$  をとり、之に就て節点  $m$  の座標を  $(\xi_m, \eta_m)$  とすれば、部材  $(m-1)-m$  に就て

$$\left. \begin{aligned} T_\xi &= \frac{\delta'_m}{3} (\eta_{m-1}^2 + \eta_{m-1} \eta_m + \eta_m^2), \\ T_\eta &= \frac{\delta'_m}{3} (\xi_{m-1}^2 + \xi_{m-1} \xi_m + \xi_m^2), \\ Z_{\xi\eta} &= \frac{\delta'_m}{6} [\xi_{m-1}(2\eta_{m-1} + \eta_m) + \xi_m(\eta_{m-1} + 2\eta_m)] \end{aligned} \right\} \quad (69.3)$$

になり、従つて

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \sum Z_{\xi\eta}}{\sum (T_\eta - T_\xi)} \quad (69.4)$$

になる。

ラーメンに於ては軸方向力の影響はアーチの場合に於けるよりも更に遙かに僅少であつて、之を無視するも殆んど誤差を生じない。従つて (68.10) 式に於て軸方向力に依る項を省略すれば、不静定力は

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{\sum \int M_0 y ds' + \alpha t l}{\sum \int y^2 ds'}, \\ X_2 &= - \frac{\sum \int M_0 x ds'}{\sum \int x^2 ds'}, \quad X_3 = - \frac{\sum \int M_0 ds'}{\sum s'} \end{aligned} \right\} \quad (69.5)$$

に依つて求められる。

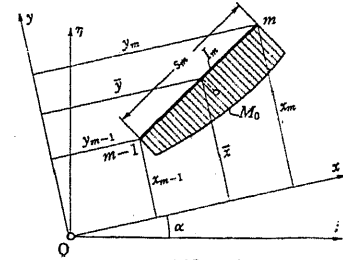
然るに例へば部材  $(m-1)-m$  に就ては (第 262 圖)

$$\left. \begin{aligned} \int y^2 ds' &= \frac{\delta'_m}{3} (y_{m-1}^2 + y_{m-1} y_m + y_m^2) = T_x, \\ \int x^2 ds' &= \frac{\delta'_m}{3} (x_{m-1}^2 + x_{m-1} x_m + x_m^2) = T_y \end{aligned} \right\} \quad (69.6)$$

であり、また此の部材に於ける  $M_0$ -圖の面積の  $I_C/I_m$  倍を  $F_0$  とし、其の圖心より部材に下せる垂線の足の座標を

$(\bar{x}, \bar{y})$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \int M_0 x ds' &= \int \frac{I_C}{I_m} M_0 x ds = F_0 \bar{x}, \\ \int M_0 y ds' &= \int \frac{I_C}{I_m} M_0 y ds = F_0 \bar{y}, \\ \int M_0 ds' &= \int \frac{I_C}{I_m} M_0 ds = F_0 \end{aligned} \right\} \quad (69.7)$$



第 262 圖

であるから、(69.5) 式は

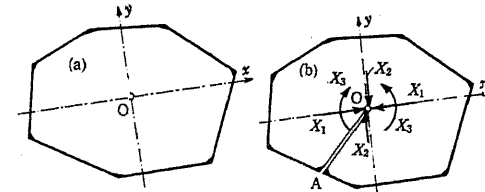
$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{\sum F_0 \bar{y} + \alpha t EI_C l}{\sum T_x}, \\ X_2 &= - \frac{\sum F_0 \bar{x}}{\sum T_y}, \quad X_3 = - \frac{\sum F_0}{\sum s'} \end{aligned} \right\} \quad (69.8)$$

になる。

各部材或は各節点に於ける断面力は (68.12) 式に依つて、また反力は (68.13) 式に依つて之を計算することが出来る。

上述の事柄は第 263 圖

の如く互に釣合へる外力の作用を受ける任意の閉合ラーメンに對してすべて其のまま適用せられる。

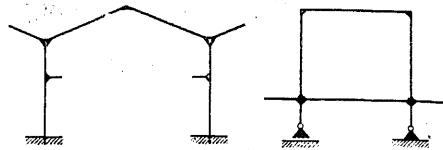


第 263 圖

此の場合には例へば第 263 圖 (a) のラーメンに於て任意の断面 A に於ける断面力を不静定力と選ぶ代りに同圖 (b) の如くラーメンの弾性重心 O に作用する三力  $X_1, X_2, X_3$  を不静定力に選ばばよい。

また上記の解法は第 264 圖の如く片持梁或はブラケットを有するラーメンに對してもそのまま適用せられる。但し此の場合には上記諸式に於ける

積分或は總和を片持梁或は  
ブラケットにまで及ぼして  
はいけない。何となれば不  
静定力  $X_1, X_2, X_3$  は之等の



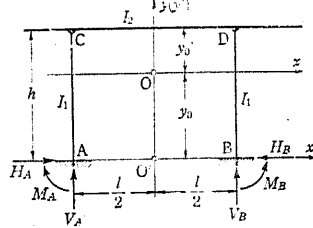
第 264 圖

部分には何等の影響を及ぼさないからである。

以下、上記の解法を門形ラーメン及び矩形函形ラーメンに就て例示する  
が、節點の数が比較的に少い之等のラーメンに對しては本節の方法に依る  
よりも寧ろ後述の三連モーメントの定理を應用する方が遙かに簡單であ  
る。

ii. 門形ラーメン.

第 265 圖の如き門形ラーメンに於て  
ABCD の部分が左右對稱なりとすれば、  
彈性重心  $O$  は片持梁の有無に拘らず少く  
ともスパン  $l$  の二等分線上にある。今梁  
の断面二次モーメント  $I_2$  を  $I_C$  に選び



第 265 圖

$$h' = \frac{I_2}{I_1} h = k \cdot l, \quad k = \frac{I_2 h}{I_1 l}$$

とすれば

$$\Sigma s' = 2h' + l = l(2k + 1)$$

になり、圖の如き座標軸  $O'x'y'$  に就て

$$\Sigma G'_x = 2 \frac{h'h}{2} + lh = hl(k + 1)$$

であるから、 $O$  の位置は

$$y_0 = \frac{k+1}{2k+1} h, \quad y'_0 = h - y_0 = \frac{k}{2k+1} h \quad (69.9)$$

になる。

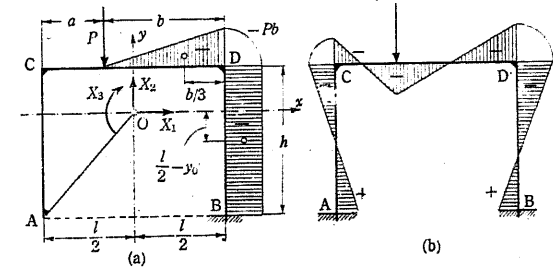
かくして座標軸  $Oxy$  に就て  $T_x$  及び  $T_y$  を計算すれば

$$\Sigma T_x = 2 \frac{h'}{3} (y_0^2 - y_0 y'_0 + y_0'^2) + l y_0'^2 = \frac{h^2 l}{3} \cdot \frac{k(k+2)}{2k+1},$$

$$\Sigma T_y = 2h' \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{l}{3} \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{l^3}{12} (6k + 1).$$

扱て荷重として鉛直集中荷重  $P$  が第 266 圖の如く横梁  $CD$  の任意の一點

に作用する場合を  
考へれば、之に依  
つて静定基本系に  
生ずる曲げモーメ  
ントは圖示の如く  
に分布し、之に就



第 266 圖

て式 (69.8) の分子の値を計算すれば

$$\Sigma F_0 \bar{y} = -\frac{Pb^2}{2} y'_0 - \frac{I_2}{I_1} Pbh \left( y'_0 - \frac{h}{2} \right) = + \frac{k \cdot P a b h}{2(2k+1)},$$

$$\Sigma F_0 \bar{x} = -\frac{Pb^2}{2} \left( \frac{l}{2} - \frac{b}{3} \right) - \frac{I_2}{I_1} Pbh \frac{l}{2} = -\frac{Pb}{12} [l^2(6k+1) - a(a-b)],$$

$$\Sigma F_0 = -\frac{Pb^2}{2} - \frac{I_2}{I_1} Pbh = -\frac{Pb}{2} (b + 2kl)$$

になり、従つて  $P$  に依る不静定力は

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{3Pab}{2hl(k+2)}, \\ X_2 &= \frac{Pb}{l} - \frac{Pab(a-b)}{l^2(6k+1)}, \\ X_3 &= \frac{Pb}{2} - \frac{Pab}{2(2k+1)l} \end{aligned} \right\} \quad (69.10)$$

になる。

不静定力がわかれば反力及び曲げモーメントは

$$H_A = H_B = X_1, \quad V_A = X_2, \quad V_B = P - X_2,$$

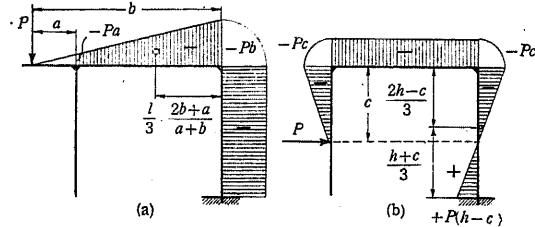
$$M = M_0 - X_1 y + X_2 x + X_3$$

に依つて計算せられる。特に A, B, C, D 及び荷重の作用点に於ける曲げモーメントは次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_A}{M_B} &= + \frac{Pab}{2l} \left[ \frac{1}{k+2} \pm \frac{a-b}{(6k+1)l} \right], \\ \frac{M_C}{M_D} &= - \frac{Pab}{2l} \left[ \frac{2}{k+2} \mp \frac{a-b}{(6k+1)l} \right], \\ M_P &= + \frac{Pab}{l} \left[ \frac{k+1}{k+2} - \frac{(a-b)^2}{2(6k+1)l^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (69.11)$$

集中荷重が横梁を延長せる片持梁或は柱材に作用する場合には、夫々第

267 圖 (a), (b) に示すが如き  $M_0$ -圖に就て上記と同様の計算を行へばよい。但し (b) の右柱に於けるが如く

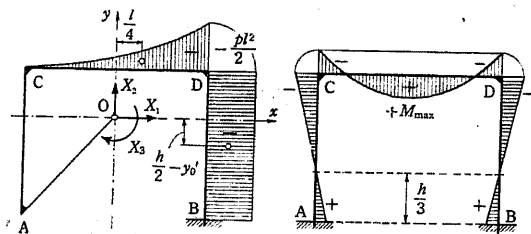


第 267 圖

$M_0$ -圖に正負が生ずる部材に就ては  $M_0$  の正負を考慮して  $M_0$ -圖の面積及び

圖心を定める必要が

ある。  
 $M_0$ -圖の面積及び圖心が簡単に知れない場合には之を積分に依つて求めればよ



第 268 圖

い。例へば等分布荷重  $p$  が梁 CD の全長に作用する場合には  $M_0$  は第 268 圖の如くに分布し、梁の任意の断面に於ては

$$M_0 = - \frac{p}{2} \left( \frac{l}{2} + x \right)^2$$

である。故に梁 CD に於ける  $M_0$ -圖の面積  $F_0$  及び  $\bar{x}$  は

$$\begin{aligned} F_0 &= - \frac{p}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( \frac{l}{2} + x \right)^2 dx = - \frac{pl^3}{6}, \\ \bar{x} &= \frac{- \frac{p}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( \frac{l}{2} + x \right)^2 x dx}{- \frac{pl^3}{6}} = \frac{l}{4} \end{aligned}$$

になり、従つて

$$\begin{aligned} \Sigma F_0 \bar{y} &= - \frac{pl^3}{6} y_0' - \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{pl^2 h}{2} \left( y_0' - \frac{h}{2} \right) = + \frac{k \cdot p h^3}{12(2k+1)}, \\ \Sigma F_0 \bar{x} &= - \frac{pl^3}{6} \cdot \frac{l}{4} - \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{pl^2 h}{2} = - \frac{pl^4}{24} (6k+1), \\ \Sigma F_0 &= - \frac{pl^3}{6} - \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{pl^2 h}{2} = - \frac{pl^3}{6} (3k+1), \end{aligned}$$

故に

$$X_1 = + \frac{pl^2}{4(k+2)h}, \quad X_2 = + \frac{pl}{2}, \quad X_3 = \frac{pl^2(3k+1)}{6(2k+1)} \quad (69.12)$$

になる。尙此の場合には A, B に於ける水平反力及び鉛直反力は夫々  $X_1$  及び  $X_2$  に等しく、A, B, C, D 及び梁の中點に於ける正最大の曲げモーメントは次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} 2M_A = 2M_B = -M_C = -M_D &= + \frac{pl^2}{6(k+2)}, \\ M_{\max} &= + \frac{pl^2(3k+2)}{24(k+2)}. \end{aligned} \right\} \quad (69.13)$$

曲げモーメント圖は第 268 圖の如くなる。

溫度變化に依る不静定力は、溫度上昇  $t$  に對して

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{\alpha t EI_2 l}{h^2 l \cdot \frac{k(k+2)}{3} \cdot 2k+1} = + \frac{3 EI_2 \alpha t (2k+1)}{h^2 \cdot k(k+2)}, \\ X_2 = X_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (69.14)$$



であつて、従つて

$$\left. \begin{aligned} M_A = M_B = + X_1 y_0 &= \frac{3 EI_2 \alpha t (k+1)}{h \cdot k (k+2)}, \\ M_C = M_D = - X_1 y'_0 &= - \frac{3 EI_2 \alpha t}{h \cdot (k+2)} \end{aligned} \right\} \quad (69.15)$$

になる。

iii. 矩形閉合ラーメン。

閉合ラーメンの例として第269圖(a)に示すが如きラーメンの隅角Cに水平荷重Pが作用する場合を取扱ふ。本ラーメンは一般に内部的に三次の不静定である

が、外部的に

は静定に支持

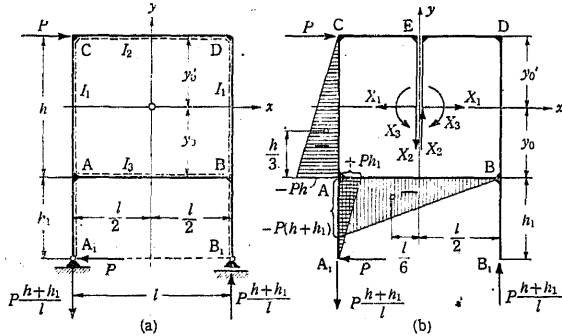
せられ、その

反力は静定反

力として容易

に之を求める

ことが出来る。



第 269 圖

静定基本系として第269圖(b)の構造を選び、その弾性重心Oに作用する  $X_1, X_2, X_3$  を不静定力とする。此の不静定力は  $A_1A$  及び  $B_1B$  の部分には何等の影響をも及ぼさないから、弾性重心の位置及び不静定力の決定に際しては  $ABCD$  の閉合ラーメンのみを考慮すればよい。

左右對稱の構造であるからOはスパンの1/2の所にあり、その高さは(69.2)に依つて計算すれば

$$y_0 = \frac{1+k_2}{2+k_2+k_3} h, \quad y'_0 = \frac{1+k_3}{2+k_2+k_3} h \quad (69.16)$$

になる。但し  $k_2$  及び  $k_3$  は

$$k_2 = \frac{I_1 l}{I_2 h}, \quad k_3 = \frac{I_1 l}{I_3 h} \quad (69.17)$$

今  $I_1$  を  $I_C$  として選び

$$l'_2 = \frac{I_1}{I_2} l = k_2 h, \quad l'_3 = \frac{I_1}{I_3} l = k_3 h$$

として  $\Sigma T_x, \Sigma T_y$  及び  $\Sigma s'$  を計算すれば

$$\begin{aligned} \Sigma T_x &= 2 \frac{h}{3} (y_0^2 - y_0 y'_0 + y_0'^2) + l'_2 y_0'^2 + l'_3 y_0'^2 \\ &= \frac{h^3}{3} \cdot \frac{1 + 2k_2 + 2k_3 + 3k_2 k_3}{2 + k_2 + k_3}, \end{aligned}$$

$$\Sigma T_y = 2h \left( \frac{l}{2} \right)^2 + l'_2 \frac{l^2}{12} + l'_3 \frac{l^2}{12} = \frac{l^2 h}{12} (6 + k_2 + k_3),$$

$$\Sigma s' = 2h + l'_2 + l'_3 = h(2 + k_2 + k_3)$$

を得る。

次に第269圖(a)に於て點線を附せる側に凸に曲がる場合に曲げモーメントを正とし、第269圖(b)の静定基本系に荷重Pが作用する場合の曲げモーメントを求むれば、其の分布及び曲げモーメント圖の圖心の位置は同圖に示すが如くになり、之に就て式(69.7)の諸値を計算すれば

$$\begin{aligned} \Sigma F_0 \bar{y} &= - \frac{P h^2}{2} \left( \frac{h}{3} - y_0 \right) - \frac{I_1}{I_3} \cdot \frac{P(h+h_1)l}{2} (-y_0) \\ &= + \frac{P h^3}{6} \cdot \frac{1 + 2k_2 + 2k_3 + 3k_2 k_3}{2 + k_2 + k_3} + \frac{P h^2 h_1}{2} \cdot \frac{k_3(1+k_2)}{2 + k_2 + k_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_0 \bar{x} &= - \frac{P h^2}{2} \left( - \frac{l}{2} \right) - \frac{I_1}{I_3} \cdot \frac{P(h+h_1)l}{2} \left( - \frac{l}{6} \right) \\ &= + \frac{P h^2 l}{12} \left[ 3 + k_3 \left( 1 + \frac{h_1}{h} \right) \right], \end{aligned}$$

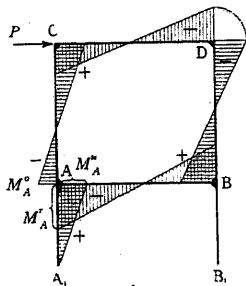
$$\Sigma F_0 = - \frac{P h^2}{2} - \frac{I_1}{I_3} \cdot \frac{P(h+h_1)l}{2} = - \frac{P h^2}{2} \left[ 1 + k_3 \left( 1 + \frac{h_1}{h} \right) \right]$$

になる。従つて不静定力は

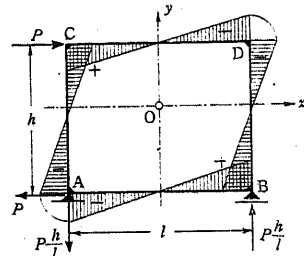
$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + \frac{\sum F_0 \bar{y}}{\sum T_y} = + \frac{P}{2} \left[ 1 + 3 \frac{h_1}{h} \cdot \frac{k_3(1+k_2)}{1+2k_2+2k_3+3k_2k_3} \right], \\ X_2 &= - \frac{\sum F_0 \bar{x}}{\sum T_y} = - \frac{Ph}{l} \cdot \frac{3+k_3(1+\frac{h_1}{h})}{6+k_2+k_3}, \\ X_3 &= + \frac{Ph}{2} \cdot \frac{1+k_3(1+\frac{h_1}{h})}{2+k_2+k_3} \end{aligned} \right\} \quad (69.18)$$

になる。

ラーメンの閉合部 ABCD に於ける曲げモーメント、軸方向力及び剪断力は一般に(69.12)式に依つて求められる。曲げモーメント圖は凡そ第 270 圖の如くなる。



第 270 圖



第 271 圖

特に第 271 圖の如く  $h_1 = 0$  なる場合には

$$X_1 = + \frac{P}{2}, \quad X_2 = - \frac{Ph}{l} \cdot \frac{3+k_3}{6+k_2+k_3}, \quad X_3 = + \frac{Ph}{2} \cdot \frac{1+k_3}{2+k_2+k_3} \quad (69.19)$$

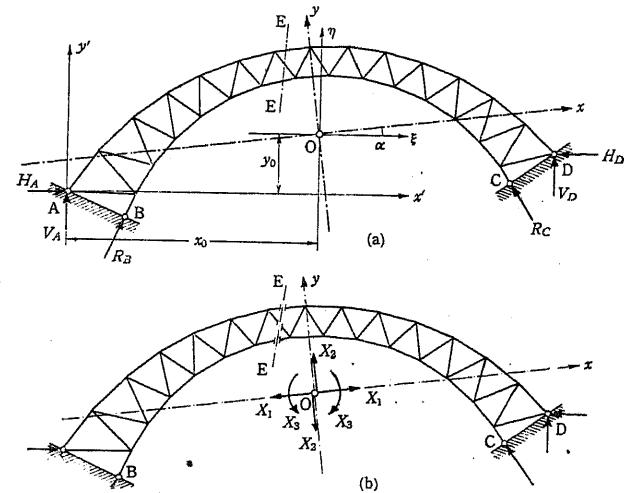
になり、各角點に於ける曲げモーメントは

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -M_B = - \frac{Ph}{2} \cdot \frac{3+k_3}{6+k_2+k_3}, \\ M_C &= -M_D = + \frac{Ph}{2} \cdot \frac{3+k_3}{6+k_2+k_3} \end{aligned} \right\} \quad (69.20)$$

になる。

§ 70. 両端固定のトラスアーチ及びラーメン

第 272 圖に示す両端固定のトラスアーチに於て支點 A, B, C, D を回轉端とすれば、本構造は外部的に三次の不静定になる。従つて本構造に對する静定基本系を得るには、圖示の如く任意の断面 E-E にて三個の部材を切斷



第 272 圖

すればよい。然し断面 E-E にて切斷せられる三部材の應力を直接の不静定力と選ぶ代りに、適當なる點 O に作用する力を不静定力に選べば、之等の不静定力と夫々獨立に(66.5)に依つて算出することが出来る。即ち前節に於けると同様に、第 272 圖(b)に示すが如く適當なる直交座標軸  $Oxy$  を選定し、茲に作用する  $X_1, X_2, X_3$  を不静定力とする。但し断面 E-E より左方の部分に對しては  $-x$  の方向に  $X_1$ 、 $-y$  の方向に  $X_2$ 、反時針の方向に  $X_3$  が作用するものとし、E-E より右方の部分に對しては  $X_1$  は  $+x$  の方向に、 $X_2$  は  $+y$  の方向に、 $X_3$  は時針の方向に作用するものとする。

扱て  $X_1, X_2$  及び  $X_3$  が (66.5) 式:

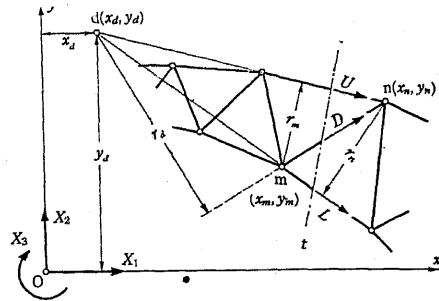
$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}}$$

に依つて決定されるためには

$$\left. \begin{aligned} \delta_{23} = \delta_{32} = \sum \frac{S_2 S_3 s}{EA} = 0, \\ \delta_{31} = \delta_{13} = \sum \frac{S_3 S_1 s}{EA} = 0, \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{S_1 S_2 s}{EA} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (70.1)$$

でなければならない。但し  $S_1, S_2$  及び  $S_3$  は夫々  $X_1 = 1, X_2 = 1$  或は  $X_3 = 1$  に依る静定基本系に於ける部材應力である。

之等の部材應力の値は一般に次の如くなる。即ち断面 E-E より右方の部分に於て第 273 圖に示す上弦材  $U$ , 下弦材  $L$ , 斜材  $D$  の  $X_1 = 1, X_2 = 1$



第 273 圖

或は  $X_3 = 1$  に依る應力は § 34 の Ritter の方法に依つて

$$\left. \begin{aligned} U_1 = +\frac{y_m}{r_m}, \quad L_1 = -\frac{y_n}{r_n}, \quad D_1 = \mp \frac{y_d}{r_d}, \\ U_2 = -\frac{x_m}{r_m}, \quad L_2 = +\frac{x_n}{r_n}, \quad D_2 = \pm \frac{x_d}{r_d}, \\ U_3 = -\frac{1}{r_m}, \quad L_3 = +\frac{1}{r_n}, \quad D_3 = \pm \frac{1}{r_d} \end{aligned} \right\} \quad (70.2)$$

になる。本式はまた断面 E-E より左方の部分に対しても同様に成立し、而して

$$U_2 U_3 = +\frac{x_m}{r_m^2}, \quad L_2 L_3 = +\frac{x_n}{r_n^2}, \quad D_2 D_3 = +\frac{x_d}{r_d^2},$$

$$\begin{aligned} U_3 U_1 = -\frac{y_m}{r_m^2}, \quad L_3 L_1 = -\frac{y_n}{r_n^2}, \quad D_3 D_1 = -\frac{y_d}{r_d^2}, \\ U_1 U_2 = -\frac{x_m y_m}{r_m^2}, \quad L_1 L_2 = -\frac{x_n y_n}{r_n^2}, \quad D_1 D_2 = -\frac{x_d y_d}{r_d^2} \end{aligned}$$

になる。故に一般に任意の部材應力  $S_i$  に對するモーメントの基點  $i$  の座標を  $(x_i, y_i)$ ,  $i$  より  $S_i$  に下せる垂線の長さを  $r_i$  とすれば

$$S_{12} S_{13} = +\frac{x_i}{r_i^2}, \quad S_{13} S_{11} = -\frac{y_i}{r_i^2}, \quad S_{11} S_{12} = -\frac{x_i y_i}{r_i^2}$$

になる。故に今或る基準部材の断面積を  $A_c, E$  を常數とし且つ

$$g_i = \frac{A_c}{A_i} \cdot \frac{s_i}{r_i^2} \quad (70.3)$$

とすれば、式(70.1)は

$$\sum g_i x_i = 0, \quad \sum g_i y_i = 0, \quad \sum g_i x_i y_i = 0 \quad (70.4)$$

になる。

本式は即ちすべての點  $i$  が夫々  $g_i$  に等しき重量を有するものと假定する場合、座標軸の原点  $O$  が之等の點系の重心であり、 $x$ -軸及び  $y$ -軸が其の主軸に一致すべきことを意味する。従つて  $O$  の位置は、前節及び前々節に於けると同様に先づ任意の直交座標軸  $O'x'y'$  をとり、 $x'$ -軸及び  $y'$ -軸に對する之等の點系の一次モーメント  $G'_x$  及び  $G'_y$  を計算すれば

$$x_0 = \frac{G'_y}{\sum g_i} = \frac{\sum g_i x'_i}{\sum g_i}, \quad y_0 = \frac{G'_x}{\sum g_i} = \frac{\sum g_i y'_i}{\sum g_i} \quad (70.5)$$

に依つて決定することが出来、座標軸の方向は任意の直交座標軸  $O\xi\eta$  に就て上記の點系の二次モーメント  $T_\xi, T_\eta$  及び相乗モーメント  $Z_{\xi\eta}$  を計算すれば

$$\tan 2\alpha = \frac{2Z_{\xi\eta}}{T_\eta - T_\xi} = \frac{2\sum g_i \xi_i \eta_i}{\sum g_i (\eta_i^2 - \xi_i^2)} \quad (70.6)$$

に依つて決定することが出来る。勿論、左右對稱或は上下對稱の構造に於ては  $y$ -軸或は  $x$ -軸が其の對稱軸に一致するが故に(70.6)の計算は不必要になる。

かくして座標軸  $Oxy$  が決定せられれば  $X_1, X_2, X_3$  は

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum \frac{S_1 S_0}{EA} s + \sum \alpha t S_1 s}{\sum \frac{S_1^2}{EA} s} \\ X_2 &= -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = -\frac{\sum \frac{S_2 S_0}{EA} s + \sum \alpha t S_2 s}{\sum \frac{S_2^2}{EA} s} \\ X_3 &= -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} = -\frac{\sum \frac{S_3 S_0}{EA} s + \sum \alpha t S_3 s}{\sum \frac{S_3^2}{EA} s} \end{aligned} \right\} \quad (70.7)$$

に依つて決定することが出来る。或は上式右邊の分子及び分母に  $EA_c$  を乗ずれば

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{\sum \frac{A_c}{A} S_1 S_0 s + EA_c \sum \alpha t S_1 s}{\sum \frac{A_c}{A} S_1^2 s} \\ X_2 &= -\frac{\sum \frac{A_c}{A} S_2 S_0 s + EA_c \sum \alpha t S_2 s}{\sum \frac{A_c}{A} S_2^2 s} \\ X_3 &= -\frac{\sum \frac{A_c}{A} S_3 S_0 s + EA_c \sum \alpha t S_3 s}{\sum \frac{A_c}{A} S_3^2 s} \end{aligned} \right\} \quad (70.8)$$

になる。本式右邊の分母は(70.2)及び(70.3)に依つて

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{A_c}{A} S_1^2 s &= \sum g_i y_i^2 = T_x, \\ \sum \frac{A_c}{A} S_2^2 s &= \sum g_i x_i^2 = T_y, \\ \sum \frac{A_c}{A} S_3^2 s &= \sum g_i \end{aligned} \right\} \quad (70.9)$$

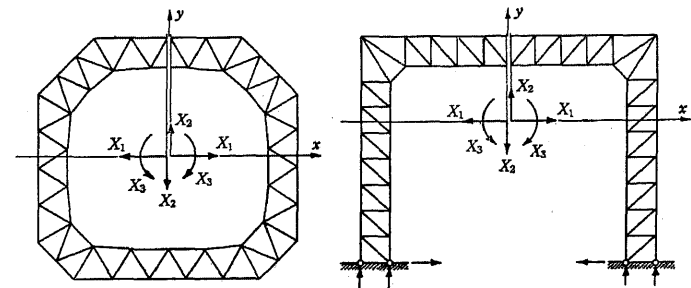
であつて、 $T_x$  及び  $T_y$  は夫々重量  $g_i$  を有する點系の  $x$ -軸及び  $y$ -軸に對する二次モーメントである。

上記諸式に依つて座標軸の位置及び不静定力を計算するに際し、斜材に對する兩弦材が平行なるか略々平行なる場合には、斜材應力  $D$  に對するモーメントの基点  $d$  は無限に、或は極めて遠き距離になり、之を決定することは不可能、或は困難になる。然しかかる場合に於ては、斜材のみならず其他の腹材が座標軸の位置及び不静定力に與へる影響は、固定アーチに於ける軸方向力或は剪斷力の影響と同様に、極めて僅少ななるものであつて、之を全く無視するも殆んど誤差を生じない。従つて前記諸式に於ける  $\Delta$  に於てはすべて腹材に關する項を省略し、上下兩弦材に關する項の總和をとれば、實用上十分に正確なる結果を得ることが出来る。

かくして不静定力が決定せられればトラス部材の實際の應力は

$$S = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3 \quad (70.10)$$

に依つて算出することが出来る。



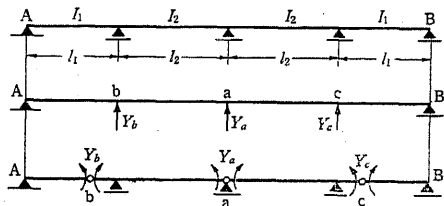
第 274 圖

上述の方法は第 272 圖の兩端固定のトラスアーチに對してのみ適用されるものではなく、第 274 圖に示すが如き兩端固定の、或は閉合せるトラス構造のラーメンに對してもすべてこのまま之を適用することが出来る。

§ 71. 左右対称なる三次不静定構造物

固定アーチ或はラーメン等に於て左右対称なる場合に就ては既に夫々記述した通りであるが、一般に左右対称なる不静定構造物に於ては(66.5)式に依つて求め得べき不静定力  $X_1, X_2, X_3$  を下記の如くにして比較的簡単に決定することが出来る。

即ち一般に先づ  $Y_a$  を構造物に對して全く左右対称なる影響を及ぼすべき断面力又は反力、 $Y_b$  及び  $Y_c$  を構造物の對称の位置に於て互に對称なる断面力又は反力とし、此の  $Y_a, Y_b, Y_c$  を不静定力と選んで静定基本系を形成する。

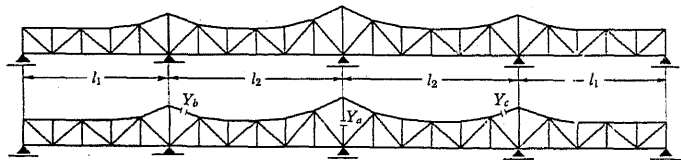


第 275 圖

例へば第 275 圖の如き四スパンの連続梁に於ては中央支

點の反力を  $Y_a$ 、左右の中間支點の反力を  $Y_b, Y_c$  としてもよく、また圖示の如く中央支點及び左右對称なる任意の二點  $b, c$  にヒンジを挿入せるものを静定基本系とし之等の断面に於ける曲げモーメントを  $Y_a, Y_b, Y_c$  としてもよい。

第 276 圖の如き四スパン連続トラスに於ても前述の連続梁と同様に中間支點の三反力を  $Y_a, Y_b, Y_c$  としてもよく、また圖示の如く中央の柱材及び



第 276 圖

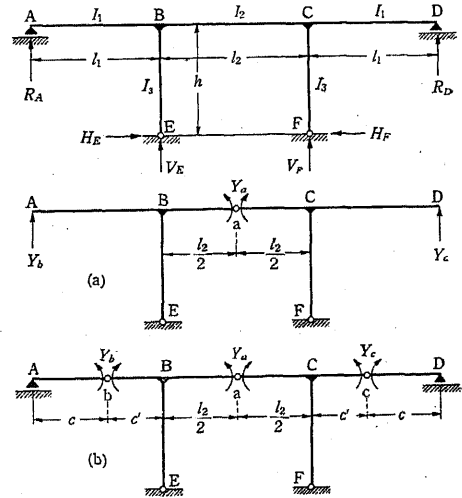
對称の位置にある任意の二部材を切斷せるものを静定基本系とし、之等の

部材に作用すべき應力を

$Y_a, Y_b, Y_c$  としてもよい。

また第 277 圖の如きラーメンに於ては、例へば同圖(a)

又は(b)に示すが如き静定基本系、従つて  $Y_a, Y_b, Y_c$  の選び方が考へられる。



第 277 圖

かくして左右對称なる静定基本系を選定したる後、その不静定力  $Y_a, Y_b, Y_c$  を直接の未知量とする代りに

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= Y_a - \frac{\nu}{2} (Y_b + Y_c), \\ X_2 &= \frac{1}{2} (Y_b + Y_c), \\ X_3 &= \frac{1}{2} (Y_b - Y_c), \end{aligned} \right\} \quad (71.1)$$

即ち

$$\left. \begin{aligned} Y_a &= X_1 + \nu X_2, \\ Y_b &= X_2 + X_3, \\ Y_c &= X_2 - X_3 \end{aligned} \right\} \quad (71.2)$$

とし、 $X_1, X_2, X_3$  を直接の未知量とする。此の(71.2)は(66.7)式：

$$\begin{aligned} Y_a &= Y_{a1}X_1 + Y_{a2}X_2 + Y_{a3}X_3, \\ Y_b &= Y_{b1}X_1 + Y_{b2}X_2 + Y_{b3}X_3, \\ Y_c &= Y_{c1}X_1 + Y_{c2}X_2 + Y_{c3}X_3 \end{aligned}$$

に於て

$$\left. \begin{aligned} Y_{a1} &= 1, & Y_{a2} &= \nu, & Y_{a3} &= 0, \\ Y_{b1} &= 0, & Y_{b2} &= 1, & Y_{b3} &= 1, \\ Y_{c1} &= 0, & Y_{c2} &= 1, & Y_{c3} &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (71.3)$$

とせる場合に相当し、従つて(66.9)式に依つて

$$\begin{aligned} \delta_{21} &= \nu \cdot \delta_{a1} + 1 \cdot \delta_{b1} + 1 \cdot \delta_{c1}, \\ \delta_{31} &= \quad \quad 1 \cdot \delta_{b1} - 1 \cdot \delta_{c1}, \\ \delta_{32} &= \quad \quad 1 \cdot \delta_{b2} - 1 \cdot \delta_{c2} \end{aligned}$$

になる。然るに前記の如き對稱性に依り

$$\delta_{b1} = \delta_{c1}, \quad \delta_{b2} = \delta_{c2}$$

であるから

$$\delta_{31} = 0, \quad \delta_{32} = 0$$

の條件は自然的に満足せられ、 $X_1, X_2, X_3$ が(66.5)式に依つて求められるためには $\delta_{21} = 0$ となる様に $\nu$ を選ばばよいことになる。即ち

$$\nu = -2 \frac{\delta_{b1}}{\delta_{a1}} \quad (71.4)$$

とすればよいことになる。此の $\delta_{a1}$ 及び $\delta_{b1}$ は $X_1 = 1$ の場合、即ち $Y_a = 1$ に依る $Y_a$ 及び $Y_b$ の其の作用方向の變位であつて、従つて一般に

$$\left. \begin{aligned} \delta_{a1} = \delta_{aa} &= \int \frac{M_a^2}{EI} ds + \int \frac{N_a^2}{EA} ds + \sum \frac{S_a^2}{EA} s, \\ \delta_{b1} = \delta_{ba} &= \int \frac{M_a M_b}{EI} ds + \int \frac{N_a N_b}{EA} ds + \sum \frac{S_a S_b}{EA} s \end{aligned} \right\} \quad (71.5)$$

に依つて求めることが出来る。

かくして $\nu$ を決定すれば(71.2)の關係に依つて

$$\begin{aligned} \text{荷重状態 } X_1 = 1 \text{ は } & Y_a = 1, \quad Y_b = 0, \quad Y_c = 0, \\ \text{荷重状態 } X_2 = 1 \text{ は } & Y_a = \nu, \quad Y_b = 1, \quad Y_c = 1, \\ \text{荷重状態 } X_3 = 1 \text{ は } & Y_a = 0, \quad Y_b = 1, \quad Y_c = -1 \end{aligned}$$

の荷重状態に夫々相當し、之に依つて

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ii} &= \int \frac{M_i^2}{EI} ds + \int \frac{N_i^2}{EA} ds + \sum \frac{S_i^2}{EA} s, \\ \delta_{i0} &= \int \frac{M_0 M_i}{EI} ds + \int \frac{N_0 N_i}{EA} ds + \sum \frac{S_0 S_i}{EA} s \\ &\quad + \int \alpha t N_i ds + \sum \alpha t S_i s, \end{aligned} \right\} \quad (71.6)$$

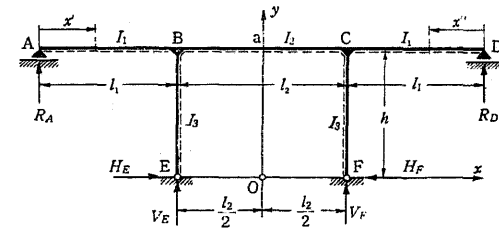
( $i = 1, 2, 3$ )

を計算すれば、 $X_1, X_2, X_3$ は

$$X_i = -\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ii}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (71.7)$$

に依つて決定せられ、従つて $Y_a, Y_b$ 及び $Y_c$ は(71.2)式に依つて算定せられる。

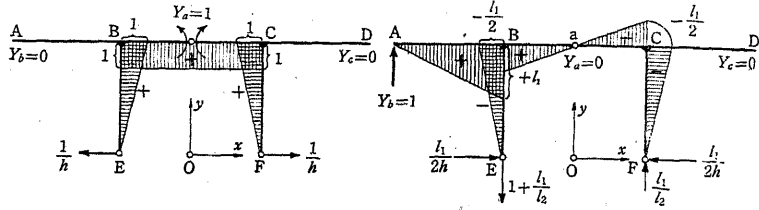
以下、第277圖のラーメンに就て上記の解法の應用を例示する。但し第278圖に示すが如き座標軸 $Oxy$ を定め、



第 278 圖

$O$ を視點として部材の斷面力の正負を定める。靜定基本系としては第277圖(a)の型式を採用し、中點 $a$ に於ける曲げモーメントを $Y_a, R_A$ 及び $R_D$ を $Y_b$ 及び $Y_c$ とする。而して $\delta$ の計算には曲げモーメントの影響のみを考慮する。

靜定基本系は兩側に片持梁 $AB$ 及び $CD$ を有する三鉸ラーメンであつて、之に $Y_a = 1$ 或は $Y_b = 1$ のみが作用する場合の曲げモーメント及び反力は容易に求められ、之を圖示すれば第279圖及び第280圖の如くなる。此のうち荷重状態 $Y_a = 1$ はまた荷重状態 $X_1 = 1$ に等しい。之等に就て§55の諸式に從つて $\delta_{a1}$ 及び $\delta_{b1}$ を計算すれば



第 279 圖  $Y_a = 1 (X_1 = 1)$  の場合

第 280 圖  $Y_b = 1$  の場合

$$\delta_{a1} = \delta_{aa} = \int \frac{M_a^2}{EI} ds = \frac{1^2}{EI_2} l_2 + 2 \frac{1^2}{EI_3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{l_2}{EI_2} + \frac{2h}{3EI_3}$$

$$\delta_{b1} = \delta_{ba} = \int \frac{M_b M_a}{EI} ds = 2 \frac{1}{EI_3} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{l_1}{2}\right) \frac{h}{3} = -\frac{l_1 h}{3EI_3}$$

になり、茲に於て簡単のために

$$k_2 = \frac{I_3 l_2}{I_2 h}, \quad \nu' = \frac{\nu}{l_1}$$

と置けば

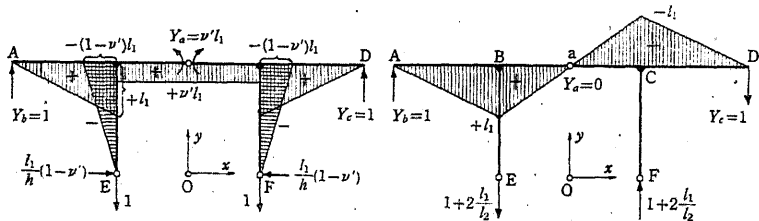
$$\delta_{a1} = \delta_{aa} = \frac{h}{3EI_3} (2 + 3k_2),$$

$$\nu' = \frac{\nu}{l_1} = -\frac{2}{l_1} \frac{\delta_{b1}}{\delta_{a1}} = +\frac{2}{2 + 3k_2} \quad (71.8)$$

を得る。而して此の  $\delta_{aa}$  は  $\delta_{11}$  に等しく、従つて

$$\delta_{11} = \frac{h}{3EI_3} (2 + 3k_2). \quad (71.9)$$

次に  $X_2 = 1$  或は  $X_3 = 1$  の荷重状態及び此の場合の曲げモーメントは第 281 圖及び第 282 圖の如くであつて、之に就て  $\delta_{22}$  及び  $\delta_{33}$  を計算すれば



第 281 圖  $X_2 = 1$  の場合

第 282 圖  $X_3 = 1$  の場合

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int \frac{M_2^2}{EI} ds = 2 \frac{l_1^2}{EI_1} \frac{l_1}{3} + \frac{\nu'^2 l_1^2}{EI_2} l_2 + 2 \frac{(1-\nu')^2 l_1^2}{EI_3} \frac{h}{3} \\ &= \frac{2l_1^3}{3EI_1} + \frac{\nu'^2 l_1^2 l_2}{EI_2} + \frac{2(1-\nu')^2 l_1^2 h}{3EI_3}, \end{aligned}$$

$$\delta_{33} = \int \frac{M_3^2}{EI} ds = 2 \frac{l_1^2}{EI_1} \frac{l_1}{3} + \frac{l_1^2}{EI_2} \frac{l_2}{3} = \frac{2l_1^3}{3EI_1} + \frac{l_1^2 l_2}{3EI_2}$$

を得、茲に於て

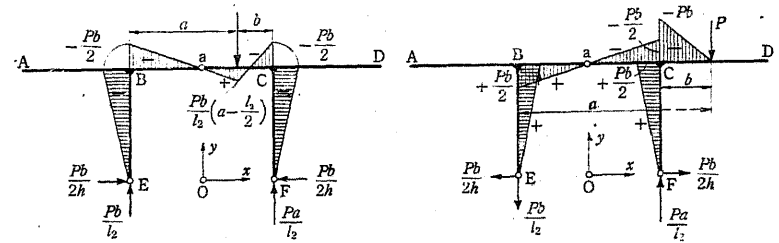
$$k_1 = \frac{I_3 l_1}{I_1 h}$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{l_1^2 h}{3EI_3} [2k_1 + 3\nu'^2 k_2 + 2(1-\nu')^2] \\ &= \frac{l_1^2 h}{3EI_3} \left[ 2(1+k_1) - \frac{4}{2+3k_2} \right], \\ \delta_{33} &= \frac{l_1^2 h}{3EI_3} (k_1 + k_2) \end{aligned} \right\} \quad (71.10)$$

になる。

今、梁に鉛直集中荷重  $P$  が作用する場合を考へれば  $P$  が BC 間、或は CD 間に作用するときの  $M_0$  の分布は夫々第 283 圖及び第 284 圖の如くになり、



第 283 圖

第 284 圖

之に就て

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} ds, \quad \delta_{20} = \int \frac{M_2 M_0}{EI} ds, \quad \delta_{30} = \int \frac{M_3 M_0}{EI} ds$$

を計算すれば  $X_1, X_2, X_3$  は

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}}$$

に依つて求められ、之を(71.2)に代入すれば  $Y_a, Y_b$  及び  $Y_c$  を決定することが出来る。然る後はラーメンの各支點の反力及び各斷面の斷面力を決定することは大して困難ではない。