

第 VIII 章 一次不静定構造物

§ 56. 總 說

一次不静定構造物に就ては一個の適當なる斷面力或は反力を不静定力と選ぶことに依つて静定基本系が得られる。此の不静定力を  $X_1$  とし、静定基本系に就て

$\delta_{10}, R_0, N_0, M_0, Q_0, S_0$  を與へられたる荷重及び溫度變化  $t$  に依る  $X_1 = 1$  の其の方向の變位, 反力, 軸方向力, 曲げモーメント, 剪斷力及びトラスの部材應力,

$\delta_{11}, R_1, N_1, M_1, Q_1, S_1$  を  $X_1 = 1$  に依る  $X_1 = 1$  の變位, 反力, 軸方向力, 曲げモーメント, 剪斷力及びトラスの部材應力

とすれば,  $X_1$  は一般に

$$X_1 = \frac{\sum R_1 r - \delta_{10}}{\delta_{11}}, \quad (56.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } \delta_{10} &= \sum \left[ \int \frac{N_1 N_0}{EA} ds + \int \frac{M_1 M_0}{EI} ds + \int \kappa \frac{Q_1 Q_0}{GA} ds \right. \\ &\quad \left. + \int \alpha N_1 t ds \right] + \sum S_1 S_0 \rho + \sum \alpha S_1 t s, \\ \delta_{11} &= \sum \left[ \int \frac{N_1^2}{EA} ds + \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \int \kappa \frac{Q_1^2}{GA} ds \right] + \sum S_1^2 \rho \end{aligned} \right\} \quad (56.2)$$

に依つて求められ、反力及び斷面力は一般に

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + R_1 X_1, \quad N = N_0 + N_1 X_1, \quad M = M_0 + M_1 X_1, \\ Q &= Q_0 + Q_1 X_1, \quad S = S_0 + S_1 X_1 \end{aligned} \right\} \quad (56.3)$$

に依つて決定せられる。

普通の構造物に於ては其の彈性變形に對する剪斷力の影響は極めて小であつて之を無視するのが常である。従つて以下一般に剪斷力の影響は之を無視することにする。

特に與へられたる構造物がアーチ或は剛節部材より成るラーメンであつて其の支點が反力の作用線の方向に變位せざる場合には

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{\sum \left[ \int \frac{M_1 M_0}{EI} ds + \int \frac{N_1 N_0}{EA} ds + \int \alpha N_1 t ds \right]}{\sum \left[ \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \int \frac{N_1^2}{EA} ds \right]} \quad (56.4)$$

になり、また支點が其の反力の作用線の方向に變位せざるトラスに於ては

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{\sum S_1 S_0 \rho + \sum \alpha S_1 t s}{\sum S_1^2 \rho} \quad (56.5)$$

になる。

以下數種の例に就て上式の應用を説明することにする。

§ 57. 一端固定、他端移動端の梁

第 211 圖 (a) に示すが如く A が移動端、B が固定端である梁には一般に  $R_A, R_B, H_B, M_B$  の四反力が作用し、従つて此の型式は外部的に一次の不静定であつて、之より静定基本形を得るには四反力のうち何れか一つを取除けばよい。例へば  $R_A$  を取除けば B に於て固定される片持梁になり、また  $M_B$  を取除けば (b) の如き單純梁になる。以下の計算に於ては (b) の單純梁を静定基本系、即ち  $M_B$  を不静定力  $X_1$  に選ぶ。

此の型式の梁は一端が移動端であるから溫度變化の影響はなく、また荷重が梁に垂直に作用するものとすれば軸方向力及び水平反力  $H_B$  は零に等しい。故に梁の曲げ剛さ  $EI$  を常數とすれば (56.4) 式より

$$X_1 = M_B = - \frac{\int_0^l M_1 M_0 dx}{\int_0^l M_1^2 dx} \quad (57.1)$$

になる。上式に於て  $M_0$  は、静定基本系である単純梁に於ける與へられたる荷重に依る曲げモーメント、 $M_1$  は  $X_1 = M_B = 1$  に依る曲げモーメントである。但し梁に正の曲げモーメントを生ずる場合、即ち (a) に示す方向に作用する場合に  $X_1 =$

$M_B$  を正とするから、 $X_1 = 1$  も之と同方向に取る必要があり、従つて  $M_1$  の分布は (c) に示すが如くなる。故に (55.5) 及び (55.8) に於て  $M_i = M_1$ ,  $M_k = M_0$  と考へれば

$$\int_0^l M_1 M_0 dx = \mathfrak{B}, \quad \int_0^l M_1^2 dx = \frac{l}{3},$$

$$X_1 = M_B = - \frac{3}{l} \mathfrak{B} \quad (57.2)$$

になる。 $\mathfrak{B}$  は言ふまでもなく  $M_0$  の曲げモーメント圖を荷重とする単純梁 AB の B に於ける反力であつて其の値は第 5 表より得られる。

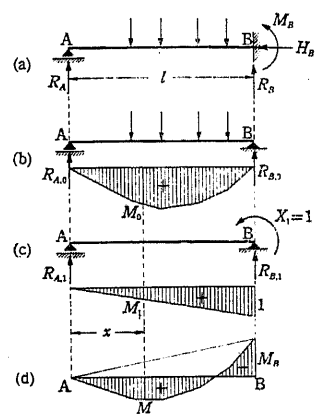
A より  $x$  の距離に於ては  $M_1 = +x/l$  であるから

$$M = M_0 + M_1 X_1 = M_0 + \frac{x}{l} M_B \quad (57.3)$$

になり、其の分布は第 211 圖 (d) の如くなる。

$X_1 = 1$  に依る単純梁 AB の反力は

$$R_{A,1} = + \frac{1}{l}, \quad R_{B,1} = - \frac{1}{l}$$



第 211 圖

であるから

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_{A,0} + R_{A,1} X_1 = R_{A,0} + \frac{M_B}{l}, \\ R_B &= R_{B,0} + R_{B,1} X_1 = R_{B,0} - \frac{M_B}{l} \end{aligned} \right\} \quad (57.4)$$

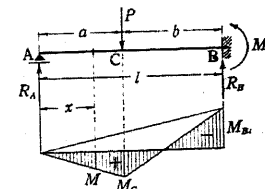
になる。

特に一個の集中荷重  $P$  (第 212 圖) に対しては第 5 表より

$$\mathfrak{B} = \frac{Pl^2}{6} \cdot \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) = \frac{Pa^2 b}{6l} (l+a)$$

であるから  $M_B$  は

$$\begin{aligned} M_B &= - \frac{Pl}{2} \cdot \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \\ &= - \frac{Pa^2 b}{2l^2} (l+a), \end{aligned} \quad (57.5)$$



第 212 圖

従つて反力は

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{Pb}{l} - \frac{Pa^2 b}{2l^3} (l+a) = \frac{Pb^2(2l+a)}{2l^3} = \frac{P}{2} \cdot \frac{b^2}{l^2} \left(3 - \frac{b}{l}\right), \\ R_B &= \frac{Pa}{l} + \frac{Pa^2 b}{2l^3} (l+a) = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{2l^3} = \frac{P}{2} \cdot \frac{a}{l} \left(3 - \frac{a^2}{l^2}\right); \end{aligned} \right\} \quad (57.6)$$

曲げモーメントは

$$A \sim C: M = R_A x, \quad C \sim B: M = R_B(l-x) + M_B \quad (57.7)$$

であつて、特に荷重作用点 C の曲げモーメントを  $M_C$  とすれば

$$M_C = \frac{Pa^2 b^2}{2l^3} (2l+a) = \frac{Pl}{2} \cdot \frac{a}{l} \left(2 - 3 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3}\right) \quad (57.8)$$

になり、 $a$  を變數と考へれば

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{2} l = 0.366 l$$

に於て

$$M_{C,max} = \frac{3(2\sqrt{3}-3)}{8}Pl = 0.174Pl \quad (57.9)$$

になる。

(57.5) 及び (57.6) 式に於て  $P=1$ ,  $a=\xi l$  と置けば

$$M_B = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi^2)l, \quad R_B = \frac{1}{2}\xi(3-\xi^2), \quad R_A = 1 - R_B$$

になり、茲に於て  $\xi$  を変数と考へれば、上式は即ち  $M_B, R_B$  及び  $R_A$  に對する影響線縦距を示すことになる。今簡單のために

$$f_1(\xi) = \xi(1-\xi^2), \quad f_2(\xi) = \frac{\xi}{2}(3-\xi^2) \quad (57.10)$$

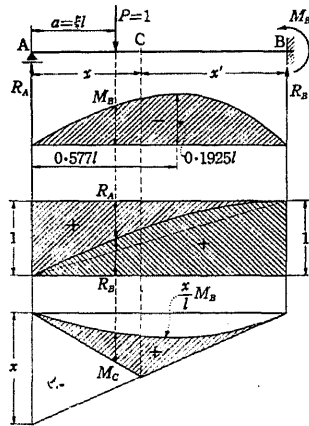
と置けば

$$M_B = -\frac{l}{2}f_1(\xi), \quad R_B = f_2(\xi), \quad R_A = 1 - f_2(\xi) \quad (57.11)$$

になり、種々の  $\xi$  に對する  $f_1$  及び  $f_2$  の値は第 6 表の如く、之に依つて  $M_B, R_B$  及び  $R_A$  に對する影響線を描けば第 213 圖の如くなる。尙、 $f_1(\xi)$  は

第 6 表

$\xi$	$f_1(\xi)$	$f_2(\xi)$
0.0	0	0
0.1	0.099	0.1495
0.2	0.192	0.2960
0.3	0.273	0.4365
0.4	0.336	0.5680
0.5	0.375	0.6875
0.6	0.384	0.7920
0.7	0.357	0.8785
0.8	0.288	0.9440
0.9	0.171	0.9855
1.0	0	1.0000



第 213 圖

$\xi = 1/\sqrt{3} = 0.577$  に於て  $f_1(\xi)_{max} = 2\sqrt{3}/9 = 0.395$  になる。

任意の断面 C に於ける曲げモーメント  $M_C$  は一般に (57.3) 式に依つて求

められるから、 $M_C$  の影響線と  $M_B$  の影響線とを (57.3) 式に從つて重合することに依つて  $M_C$  に對する影響線が得られる。

第 214 圖の如く等分布荷重が満載する場合には第 5 表に依つて

$$\mathfrak{B} = \frac{pl^3}{24}$$

であるから

$$M_B = -\frac{pl^2}{24} \quad (57.12)$$

になり、反力及び曲げモーメントは次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{3}{8}pl, & R_B &= \frac{5}{8}pl, \\ M &= \frac{px}{8}(3l-4x). \end{aligned} \right\} \quad (57.13)$$

$M$  の極大値は  $x = 3/8 \cdot l$  に於て

$$M_{max} = \frac{9}{128}pl^2 = 0.0705pl^2$$

である。

### § 58. 二鉸アーチ

#### i. 一般式

二鉸アーチは外部的に一次不静定構造物である。之から静定基本系を得るには中間の任意の一點にヒンジを挿入して三鉸アーチとしてもよいが、茲に於ては第 215 圖に示すが如く右端 B の水平反力  $H_B$  を不静定力  $X_1$  に選び、從つて第 215 圖 (b) の静定曲り梁を基本系とする。

先づ (b) の静定基本系に  $X_1 = 1$  が作用する場合の反力は

$$V_{A,1} = -V_{B,1} = 1 \frac{h}{l} = 1 \tan \theta, \quad H_{A,1} = 1 \quad (58.1)$$

であつて、A に於ける合反力及び B に於ける  $X_1 = 1$  と  $V_{B,1}$  との合力は共に AB を結ぶ直線上に作用し且つ其の大きさは  $1/\cos \theta$  に等しい。従つてアーチの任意の断面 m に於ける断面力は次の如くなる。

$$\begin{aligned} M_1 &= -1 y, \\ N_1 &= -1 \frac{\cos(\varphi - \theta)}{\cos \theta}, \quad Q_1 = -1 \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (58.2)$$

故に第 215 圖 (a) の二鉸アーチの反力及び断面力は

$$\left. \begin{aligned} V_A &= V_{A,0} + X_1 \tan \theta, & V_B &= V_{B,0} - X_1 \tan \theta, \\ H_A &= H_{A,0} + X_1, & H_B &= X_1, & M &= M_0 - X_1 y, \\ N &= N_0 - X_1 \frac{\cos(\varphi - \theta)}{\cos \theta}, & Q &= Q_0 - X_1 \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (58.3)$$

になる。但し 0 を添へたものはすべて (b) の基本系に於ける実際の荷重に依る反力及び断面力である。

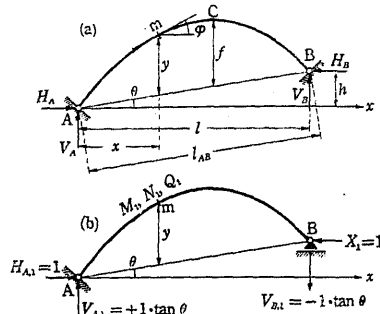
$X_1$  は (56.1) 式より求められる。今 AB 間の距離が  $\Delta l_{AB}$  だけ増大するものとすれば、即ち第 215 圖に於て B が A に対し AB の方向に  $\Delta l_{AB}$  だけ變位するものとすれば

$$\sum R_1 r = X_1 \Delta l_{AB} - V_{B,1} \Delta l_{AB} \sin \theta = -1 \frac{\Delta l_{AB}}{\cos \theta}$$

であるから  $X_1$  は一般に

$$X_1 = \frac{-\delta_{10} - \frac{\Delta l_{AB} \sec \theta}{\cos \theta}}{\delta_{11}} \quad (58.4)$$

になる。 $\delta_{10}, \delta_{11}$  は剪断力の影響を無視する場合には一般に



第 215 圖

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= -\int \frac{M_0 y}{EI} ds - \frac{1}{\cos \theta} \int \frac{N_0 \cos(\varphi - \theta)}{EA} ds \\ &\quad - \frac{1}{\cos \theta} \int \alpha t \cos(\varphi - \theta) ds, \\ \delta_{11} &= \int \frac{y^2}{EI} ds + \frac{1}{\cos^2 \theta} \int \frac{\cos^2(\varphi - \theta)}{EA} ds \end{aligned} \right\} \quad (58.5)$$

になり、 $\int \cos(\varphi - \theta) ds$  は A, B 間の距離  $l_{AB}$  に等しいから  $E, \alpha, t$  を常數とすれば

$$X_1 = \frac{\int \frac{M_0 y}{I} ds + \frac{1}{\cos \theta} \int \frac{N_0 \cos(\varphi - \theta)}{A} ds + \frac{E}{\cos \theta} (\alpha t l_{AB} - \Delta l_{AB})}{\int \frac{y^2}{I} ds + \frac{1}{\cos^2 \theta} \int \frac{\cos^2(\varphi - \theta)}{A} ds} \quad (58.6)$$

になり、 $\theta = 0$  の場合に  $l_{AB} = l, \Delta l_{AB} = \Delta l$  とすれば

$$X_1 = \frac{\int \frac{M_0 y}{I} ds + \int \frac{N_0 \cos \varphi}{A} ds + E(\alpha t l - \Delta l)}{\int \frac{y^2}{I} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{A} ds} \quad (58.7)$$

になる。

本式分子にある  $N_0$  の項は  $M_0$  の項に比べて一般に極めて僅少である。依つて之を無視するものとし、且つ実際の計算に於ける便宜上のために或る基準断面、例へば拱頂 C に於ける I 及び A を夫々  $I_C$  及び  $A_C$  とすれば

$$X_1 = \frac{-EI_C \delta_{10} - EI_C \Delta l_{AB}}{EI_C \delta_{11}} = \frac{\int M_0 y \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx + EI_C (\alpha t l - \Delta l)}{\int y^2 \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx + \frac{I_C}{A_C} \int \cos \varphi \frac{A_C}{A} dx} \quad (58.8)$$

になる。本式より  $X_1$  を計算するには  $I_C/I \cos \varphi$  を 1 或は積分するに都合よき  $x$  の函數と假定して之を行ふ。 $I_C/I \cos \varphi$  の變化は  $X_1$  に対しては殆んど影響を及ぼさない。

何れにしても  $X_1$  が求められれば、之を (58.3) に代入することに依つて二

鉸アーチの反力及び断面力の実際の値を求めることが出来る。

特にすべての荷重が鉛直に作用する場合には  $H_{A,0} = 0$  であるから、常に

$$H_A = H_B = H = X_1$$

とすることが出来る。尙此の場合には  $H_{A,0} = 0$  であるから  $M_0$  は  $y$  に無関係になり、スパン  $l$  の単純梁の曲げモーメントに等しくなる。

また A 及び B が同高にあるときには  $\theta = 0$  であるから

$$V_A = V_{A,0}, \quad V_B = V_{B,0},$$

即ち鉛直反力は静定基本系に於ける鉛直反力其のままであり、特に荷重が鉛直に作用するときには AB を単純梁とするときの反力に等しくなる。

ii. 断面不変なる圓形アーチ.

第 216 圖の如き圓形アーチに於ては

$$x = \frac{l}{2} - r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi - e, \quad ds = r d\varphi$$

であつて、 $I$  及び  $A$  を常數とすれば

$$\begin{aligned} EI \delta_{11} &= \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (r \cos \varphi - e)^2 r d\varphi + \frac{I}{A} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos^2 \varphi r d\varphi \\ &= r \left[ \varphi_0 (r^2 + 2e^2) - \frac{3}{2} e l + \frac{I}{A} \left( \varphi_0 + \frac{e l}{2r^2} \right) \right] \quad (58.9) \end{aligned}$$

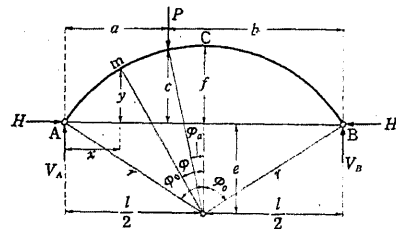
になる。

鉛直荷重  $P$  が第 216 圖の如く作用する場合には

$$0 \leq x \leq a \quad (-\varphi_0 \leq \varphi \leq -\varphi_a):$$

$$M_0 = \frac{Pb}{l} \left( \frac{l}{2} - r \sin \varphi \right),$$

$$a \leq x \leq l \quad (-\varphi_a \leq \varphi \leq \varphi_0): \quad M_0 = \frac{Pa}{l} \left( \frac{l}{2} + r \sin \varphi \right)$$



第 216 圖

であるから、軸方向力の影響を無視すれば

$$\begin{aligned} -EI \delta_{10} &= \frac{Pb}{l} \int_{-\varphi_0}^{-\varphi_a} \left( \frac{l}{2} - r \sin \varphi \right) (r \cos \varphi - e) r d\varphi \\ &\quad + \frac{Pa}{l} \int_{-\varphi_a}^{\varphi_0} \left( \frac{l}{2} + r \sin \varphi \right) (r \cos \varphi - e) r d\varphi \\ &= \frac{r}{2} [ab - e\{l\varphi_0 - (b-a)\varphi_a + 2e\}] P \end{aligned}$$

になり、従つて

$$H = X_1 = P \frac{ab - e\{l\varphi_0 - (b-a)\varphi_a + 2e\}}{2\varphi_0(r^2 + 2e^2) - 3el + \frac{I}{A} \left( 2\varphi_0 + \frac{el}{r^2} \right)} \quad (58.10)$$

になる。

また満載等分布荷重  $p$  に對しては

$$M_0 = \frac{p}{2} x(l-x) = \frac{p}{2} \left( \frac{l^2}{4} - r^2 \sin^2 \varphi \right),$$

$$\begin{aligned} -EI \delta_{10} &= \frac{p}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left( \frac{l^2}{4} - r^2 \sin^2 \varphi \right) (r \cos \varphi - e) r d\varphi \\ &= \frac{p r}{4} \left[ l \left( \frac{l^2}{3} - e^2 \right) + 2r^2 e \varphi_0 \left( 1 - \frac{l^2}{2r^2} \right) \right] \end{aligned}$$

であるから

$$H = X_1 = \frac{pl}{2} \frac{\frac{l^2}{3} - e^2 + 2\varphi_0 \frac{e}{l} \left( r^2 - \frac{l^2}{2} \right)}{2\varphi_0(r^2 + 2e^2) - 3el + \frac{I}{A} \left( 2\varphi_0 + \frac{el}{r^2} \right)} \quad (58.11)$$

になる。

之等圓形アーチに對する  $H$  は、 $f/l$  が小なる場合、即ちアーチが扁平なる場合には次に述べる拋物線アーチで  $I_c/I \cos \varphi = 1$  の場合のものと同程度に差異がない。

iii. 拋物線アーチ.

(58.7) 或は (58.8) 式の分母の第二項、即ち  $X_1$  に依る軸方向力  $N_1$  の影響は

其の第一項、即ち  $M_1$  の影響に比べて  $f/l$  が大なるアーチに於ては無視し得る程度に小であるが、 $f/l$  が小なる場合即ちアーチが扁平なる場合には之を省略すると相當の誤差が生ずる。然し何れにしても  $N_1$  の項は  $M_1$  の項に比べて小であり且つ  $A$  の變化は  $X_1$  に對しては餘り大なる影響を及ぼさないから、(58.8) 式の分母の第二項に於て近似的に  $\cos \varphi \cdot A_c/A \doteq 1$  とすることが出来る。即ち

$$\frac{I_G}{A_c} \int_0^l \cos \varphi \frac{A_c}{A} dx = \frac{I_G l}{A_c}$$

になり、従つて一般に

$$X_1 = \frac{\int M_0 y \frac{I_G}{I \cos \varphi} dx + EI_G(\alpha t l - \Delta l)}{\int y^2 \frac{I_G}{I \cos \varphi} dx + \frac{I_G l}{A_c}} \quad (58.12)$$

になる。

今アーチの軸線が第 217 圖に示すが如き

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x$$

の拋物線であり、起拱點 A, B に於ける断面二次モーメントを  $I_0$  とすれば、中間の断面の  $I$  が

$$\frac{I}{I \cos \varphi} = 1 - (1-n) \frac{(l-2x)^2}{l^2}, \quad n = \frac{I_0}{I_0 \cos \varphi_0}$$

の如くに變化する拋物線アーチに於ては、(58.12) 式 of 分母は

$$\begin{aligned} EI_G \delta_{11} &= \frac{16f^2}{l^4} \int_0^l x^2(l-x)^2 \left\{ 1 - (1-n) \frac{(l-2x)^2}{l^2} \right\} dx + \frac{I_G l}{A_c} \\ &= \frac{8}{105}(n+6)f^3 l + \frac{I_G l}{A_c} \end{aligned} \quad (58.13)$$

になる。

若し集中荷重  $P$  が第 217 圖の如き位置に作用する場合、 $a = \xi l$ ,  $b = \xi' l$

と置けば (58.12) 式 of 分子は

$$-EI_G \delta_{10} = \frac{f l^2}{3} \xi \xi' \left[ \frac{n+4}{5} \{1 + \xi \xi' (1 - 8 \xi \xi')\} + 8 \xi^2 \xi'^2 \right] P$$

になり、従つて

$$\frac{I_G l}{A_c} = \nu \frac{8}{105} (n+6) f^2 l \quad \text{即ち} \quad \nu = \frac{105}{8(n+6)} \frac{I_G}{A_c f^2} \quad (58.14)$$

とすれば  $X_1$  は次の如くなる。

$$H = X_1 = \frac{35}{8(n+6)} \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{P}{1+\nu} \xi \xi' \left[ \frac{n+4}{5} \{1 + \xi \xi' (1 - 8 \xi \xi')\} + 8 \xi^2 \xi'^2 \right]. \quad (58.15)$$

特に  $n=1$  の場合には

$$H = X_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{P}{1+\nu} \xi(1-\xi)(1+\xi-\xi^2) \quad (58.16)$$

になる。

同様にして等分布荷重  $p$  が満載する場合には  $n$  に無關係に次の結果を得る。

$$H = X_1 = \frac{p l^2}{16f(1+\nu)}. \quad (58.17)$$

(58.15) 或は (58.16) 式に於て  $\xi$  を變數と考へ  $P=1$  とすれば  $X_1$  に對する影響線縱距を得る。之を  $\eta_x$  とし、簡單のために

$$\eta_x = \frac{l}{f(1+\nu)} \eta'_x$$

と置けば  $\eta'_x$  は  $n$  及び  $\xi$  のみの函數になり、 $n$  及び  $\xi$  の種々なる値に對する  $\eta'_x$  の値は第 7 表の如くである。但し影響線は左右對稱であるから  $\xi=0.5$  までの値を示した。

$\eta'_x$  はアーチの中央、即ち  $\xi=0.5$  に於ては

$$\eta'_x = \frac{35}{128} \cdot \frac{n+4}{n+6}$$

第7表  $\eta_x$  の値

$n$	$\xi = 0.1$	$\xi = 0.2$	$\xi = 0.25$	$\xi = 0.3$	$\xi = 1/3$	$\xi = 0.4$	$\xi = 0.5$
0.1	0.0585	0.1134	0.1377	0.1590	0.1710	0.1895	0.1994
0.2	0.0588	0.1138	0.1379	0.1590	0.1708	0.1890	0.1990
0.3	0.0591	0.1141	0.1382	0.1590	0.1707	0.1886	0.1986
0.4	0.0595	0.1144	0.1385	0.1590	0.1706	0.1882	0.1982
0.5	0.0598	0.1147	0.1387	0.1590	0.1705	0.1878	0.1978
0.6	0.0602	0.1150	0.1388	0.1590	0.1703	0.1874	0.1973
0.7	0.0605	0.1153	0.1389	0.1590	0.1701	0.1870	0.1968
0.8	0.0608	0.1156	0.1390	0.1590	0.1699	0.1867	0.1963
0.9	0.0610	0.1158	0.1390	0.1590	0.1697	0.1863	0.1959
1.0	0.0613	0.1160	0.1391	0.1590	0.1696	0.1860	0.1954

であり、 $\xi = 0.3$  に於ては第7表より明かなるが如く  $n$  に無関係に 0.159 に等しい。尚  $X_1$  の影響線は第217圖

(a) の如くになり、影響線の面積は (58.17) 式より明かなるが如く  $n$  の如何に拘らず常に

$$\frac{l^2}{16f(1+\nu)}$$

に等しい。

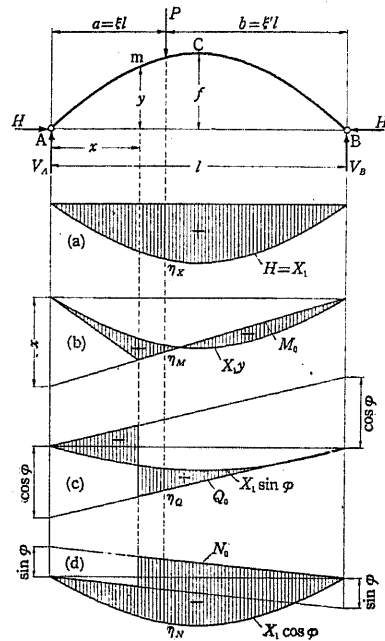
任意の断面  $m$  に於ける断面力は (58.3) に依つて

$$M = M_0 - X_1 y,$$

$$Q = Q_0 - X_1 \sin \varphi,$$

$$N = N_0 - X_1 \cos \varphi$$

である。然るに AB を単純梁とするとき、此の単純梁に於て  $m$  に對應する断面の曲げモーメント及び剪断力



第217圖

を  $M_0$  及び  $Q_0$  とすれば

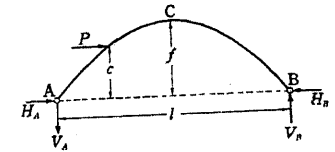
$$M_0 = M_0', \quad Q_0 = Q_0' \cos \varphi, \quad N_0 = -Q_0' \sin \varphi$$

であるから

$$M = M_0' - X_1 y, \quad Q = Q_0' \cos \varphi - X_1 \sin \varphi, \quad N = -Q_0' \sin \varphi - X_1 \cos \varphi \quad (58.18)$$

となる。故に単純梁の曲げモーメント或は剪断力に對する影響線と  $X_1$  の影響線とを (58.18) 式に従つて重合することに依つて第217圖 (b), (c), (d) に示すが如き  $M, N, Q$  に對する影響線が得られる。

第218圖の如く水平荷重  $P$  が作用する場合には、 $H_B$  を取除ける静定基本系に於て



第218圖

$$H_{A,0} = -P,$$

$$V_{A,0} = V_A = -\frac{Pc}{l}, \quad V_{B,0} = V_B = +\frac{Pc}{l}$$

であつて、曲げモーメント  $M_0$  は荷重作用點の左方或は右方に於て夫々

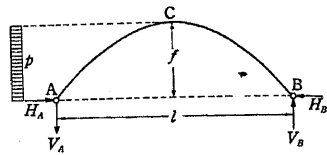
$$M_0 = P\left(y - \frac{c}{l}x\right), \quad M_0 = P\left(c - \frac{c}{l}x\right)$$

である。今  $I_c/I \cos \varphi = 1$  と假定し、上記の  $M_0$  を (58.12) に代入して計算すれば

$$\left. \begin{aligned} H_B = X_1 &= +\frac{P}{2} \left[ 1 - \frac{4f+c}{4f(1+\nu)} \left( \frac{f-c}{f} \right)^{\frac{3}{2}} \right], \\ H_A = -P + X_1 &= -\frac{P}{2} \left[ 1 + \frac{4f+c}{4f(1+\nu)} \left( \frac{f-c}{f} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned} \right\} (58.19)$$

になる。 $H_A$  は負であるから實際に於ては圖示の方向と反對の方向に作用する。

同様に第 219 圖の如く AC 間に水平の等分布荷重  $p$  が作用する場合には、 $I_C/I \cos \varphi = 1$  とすると水平反力は次の如くなる。



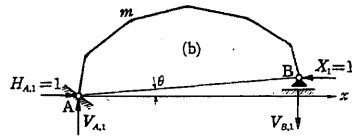
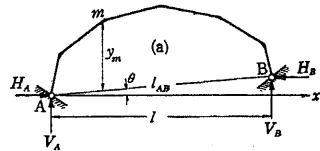
第 219 圖

$$\left. \begin{aligned} H_A &= -\frac{pf}{2} \left(1 + \frac{3}{7(1+\nu)}\right), \\ H_B &= +\frac{pf}{2} \left(1 - \frac{3}{7(1+\nu)}\right). \end{aligned} \right\} \quad (58.20)$$

§ 59. 二 鉸 ラーメン

i. 一般式.

第 220 圖の如き二鉸ラーメンは部材の軸線が一つの連続せる曲線ではなくて多角形であること以外は前述の二鉸アーチと全く同様である。従つて第 220 圖に於て與へられたる二鉸ラーメンに對し、右の支點 B に於ける水平反力  $H_B$  を不静定反力  $X_1$  とすれば、之に對しては前節 i に掲げたる諸式がそのまま適用され、また反力及び部材の断面力も (58.3) の諸式に依つて之を求めることが出来る。



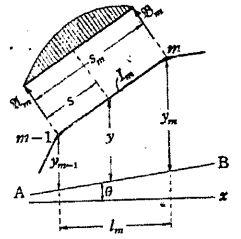
第 220 圖

然し多くの場合、二鉸ラーメンに於ては各部材の軸線は夫々直線であり、断面は各部材毎に常數であるものとし、且つ  $N$  及び  $Q$  に依る影響はすべて之を省略するのが常であつて、<sup>1)</sup> かかる場合には前節の一般式に依るより

1)  $N$  及び  $Q$  の影響を省略することに依つて  $X_1$  に生ずる誤差は多くの場合は 0.1% 程度であつて 0.5% を超すことは稀である。

も以下に説明する式に依つて計算する方が便利である。

今 (58.6) 式に於て  $N_0$  及び  $N_1$  に依る項を省略し、任意の部材  $(m-1)-m$  の長さを  $s_m$ 、断面二次モーメントを  $I_m$ 、或る基準部材の断面二次モーメントを  $I_C$  とすれば (第 221 圖)



第 221 圖

$$X_1 = \frac{\sum \frac{I_C}{I_m} \int_0^{s_m} M_0 y ds + \frac{EI_C}{\cos \theta} (\alpha t l_{AB} - \Delta l_{AB})}{\sum \frac{I_C}{I_m} \int_0^{s_m} y^2 ds} \quad (59.1)$$

になる。

一般に節點  $m$  に於ける  $y$  を  $y_m$  とし、(55.5) 及び (55.8) に於て  $y$  を  $M_1$ 、 $M_0$  を  $M_k$  と考へれば、部材  $(m-1)-m$  に就ては

$$\int_0^{s_m} y^2 ds = \frac{s_m}{3} (y_{m-1}^2 + y_{m-1}y_m + y_m^2), \quad (59.2)$$

$$\int_0^{s_m} M_0 y ds = \frac{s_m}{6} [y_{m-1}(2M_{m-1,0} + M_{m,0}) + y_m(M_{m-1,0} + 2M_{m,0})] + y_{m-1}\mathfrak{A}_m + y_m\mathfrak{B}_m \quad (59.3)$$

になる。但し (59.3) に於ける  $M_{m-1,0}$  及び  $M_{m,0}$  は第 220 圖 (b) の静定基本系に於て與へられたる荷重に依る節點  $m-1$  及び  $m$  に於ける曲げモーメントであり、 $\mathfrak{A}_m$  及び  $\mathfrak{B}_m$  は、部材  $(m-1)-m$  を單純梁と假想するとき之に直接に作用する荷重による曲げモーメント圖を荷重と考へたる場合の  $m-1$  及び  $m$  に於ける反力である。 $\mathfrak{A}_m$  及び  $\mathfrak{B}_m$  の値は第 5 表より求められる。部材の中間に直接荷重が無いときには勿論  $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{B}_m = 0$  である。

かくして



$$X_1 = \frac{\sum \frac{I_C}{I_m} \left\{ \frac{8y_m}{6} \{ M_{m-1,0}(2y_{m-1} + y_m) + M_{m,0}(y_{m-1} + 2y_m) \} + y_{m-1} \mathfrak{A}_m + y_m \mathfrak{B}_m \right\} + \frac{EI_C}{\cos \theta} (\alpha t l_{AB} - \Delta l_{AB})}{\sum \frac{I_C}{I_m} (y_{m-1}^2 + y_{m-1}y_m + y_m^2)} \quad (59.4)$$

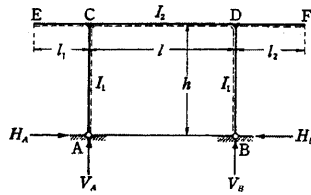
を得る。與へられたるラーメンが曲線部材を含む場合には後述の例の如く上式の分子及び分母に夫々曲線部材に関する

$$\int M_0 y \frac{I_C}{I} ds \quad \text{或は} \quad \int y^2 \frac{I_C}{I} ds$$

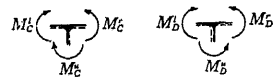
を加算すればよい。以下實際に屢々使用せられる二種類の型式のラーメンに就て其の解法を示す。

ii. 門形ラーメン。

第 222 圖の如き門形ラーメンを考へる。B を移動端とする静定基本系に於て  $X_1 = H_B = 1$  に依る曲げモーメント  $M_1$  は張出部材 CE 及び DF に於ては零である。従つて (59.1) 或は (59.4) 式に於ける總和は部材 AC, CD, DB に就てのみ計算すればよい。



第 222 圖



第 223 圖

節點 C 及び D に於ける曲げモーメント

の間には第 223 圖に示すが如く一般に

$$M_C^r = M_C^u + M_C^l, \quad M_D^l = M_D^b + M_D^r \quad (59.5)$$

の関係がある。このうち  $M_C^l$  及び  $M_D^r$  は張出部材 CE 或は DF に直接に作用する荷重に依るものであつて、 $X_1$  には全く無関係であり、張出部材を片持梁と考へることに依つて容易に之を算出することが出来る。若し張出部材に荷重が作用しないときには  $M_C^l = M_D^r = 0$  であるから

$$M_C^r = M_C^u, \quad M_D^l = M_D^b \quad (59.6)$$

になり、此の場合には之等を單に  $M_C$  或は  $M_D$  としてあらはす。尚、以下の諸式に於て添字 0 を付けたものは静定基本系に於て與へられたる荷重のみに依るものである。

扱て第 222 圖に示せる幾何學的關係を考慮しつ (59.2) 及び (59.3) 式を AC, CD, DB の三部材に適用すれば

$$AC: \int M_0 y ds = \frac{h^2}{3} M_{C,0}^u + h \mathfrak{B}_{AC},$$

$$\int y^2 ds = \frac{h^3}{3};$$

$$CD: \int M_0 y ds = \frac{l h}{2} (M_{C,0}^r + M_{D,0}^l) + h (\mathfrak{A}_{CD} + \mathfrak{B}_{CD}),$$

$$\int y^2 ds = l h^2;$$

$$DB: \int M_0 y ds = \frac{h^2}{3} M_{D,0}^b + h \mathfrak{A}_{DB},$$

$$\int y^2 ds = \frac{h^3}{3}$$

になる。今  $I_2$  を  $I_C$  と考へ、

$$\frac{I_C h}{I_2 l} = k \quad (59.7)$$

と置いて上記の積分の値を (59.1) に代入すれば、 $X_1$  は一般に

$$X_1 = \frac{\left[ \frac{k}{3} (M_{C,0}^u + M_{D,0}^b) + \frac{1}{2} (M_{C,0}^r + M_{D,0}^l) \right] + \frac{EI_2}{h l} (\alpha t l - \Delta l) + \frac{k}{h} (\mathfrak{B}_{AC} + \mathfrak{A}_{DB}) + \frac{1}{l} (\mathfrak{A}_{CD} + \mathfrak{B}_{CD})}{\frac{h}{3} (2k + 3)} \quad (59.8)$$

になる。

柱材 AC, DB に荷重がなく, 横梁 ECDF の荷重がすべて鉛直に作用するときには

$$\mathfrak{S}_{AC} = 0, \mathfrak{S}_{DB} = 0, M_{C,0}^h = 0, M_{D,0}^h = 0$$

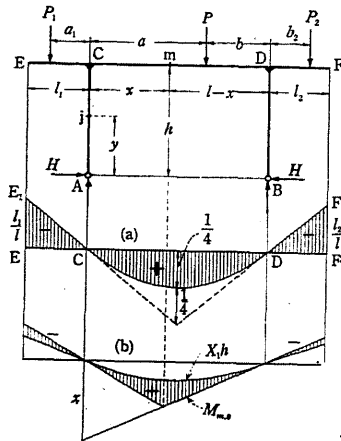
であつて

$$M_{C,0}^v = M_{C,0}^h, \quad M_{D,0}^v = M_{D,0}^h$$

になり, 之を單に  $M_{C,0}$  及び  $M_{D,0}$  とする. 而して水平反力  $H_A$  及び  $H_B$  は相等しく, 之を單に  $H$  とすれば

$$X_1 = H = \frac{2(\mathfrak{U}_{CD} + \mathfrak{S}_{CD}) + l(M_{C,0} + M_{D,0})}{\frac{2}{3}(3 + 2k)lh} \quad (59.9)$$

になる.



第 224 圖

であるから

$$X_1 = H = \frac{Pab - (P_1a_1 + P_2b_2)l}{\frac{2}{3}(3 + 2k)lh} \quad (59.10)$$

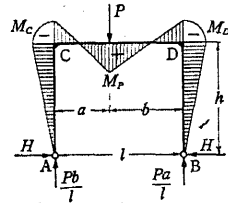
になり, 特に第 225 圖の如く CD 間のみ荷重  $P$  が作用するときには

例へば第 224 圖の如く集中荷重が作用する場合には

$$\mathfrak{U}_{CD} + \mathfrak{S}_{CD} = \frac{1}{2}Pab,$$

$$M_{C,0} = -P_1a_1,$$

$$M_{D,0} = -P_2b_2$$



第 225 圖

$$\left. \begin{aligned} X_1 = H &= \frac{3Pab}{2(3+2k)lh}, \\ M_C = M_D &= -X_1h = -\frac{3Pab}{2(3+2k)l}, \\ M_P &= \frac{Pab}{l} - X_1h = +\frac{3+4k}{2(3+2k)} \frac{Pab}{l} \end{aligned} \right\} (59.11)$$

になる.

また CD 間に等分布荷重  $p$  が作用するときには, 上式に於て

$$P = p dx$$

と置いて  $x=0$  より  $x=l$  まで積分することに依り次の如くなる.

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{pl^2}{4(3+2k)h}, \quad M_C = M_D = -\frac{pl^2}{4(3+2k)}, \\ + M_{\max} &= \frac{pl^2}{8} - Hh = +\frac{1+2k}{8(3+2k)}pl^2. \end{aligned} \right\} (59.12)$$

(59.10) より容易に  $X_1$  に対する影響線が得られる. 即ち  $a = \xi l, b = (1 - \xi)l$  とすれば  $X_1$  の影響線縦距  $\eta_x$  は CD 間に於ては

$$\eta_x = \frac{3}{2(3+2k)} \frac{l}{h} \cdot \eta'_x, \quad \eta'_x = \xi(1 - \xi) \quad (59.13)$$

になる. 之を圖示すれば第 224 圖(a)の如き拋物線が得られる.

CE, DF 間に於ける  $\eta_x$  は  $a_1$  或は  $b_2$  に正比例し, 従つて影響線は直線になる. 特に E 及び F に於ける  $\eta'_x$  の値は

$$\eta'_{x,E} = -l_1/l, \quad \eta'_{x,F} = -l_2/l$$

である. 即ち  $CE_1, DF_1$  は CD 間の拋物線の切線である.

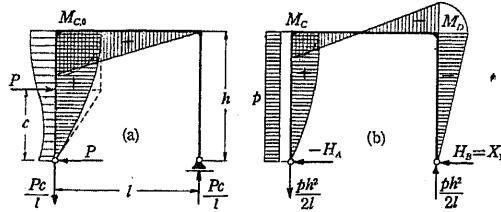
$X_1$  の影響線が求められれば曲げモーメントの影響線を得ることは容易である. 例へば第 224 圖の  $j$  及び  $m$  に於ける曲げモーメントは

$$M_j = -X_1y, \quad M_m = M_{m,0} - X_1h$$

であるから,  $M_j$  に対しては  $\eta'_x$ -線がそのまま流用せられ, また  $M_m$  に対し

ては第224図(b)の如き影響線が得られる。

第226図(a)に示すが如く、柱材ACにのみ任意の水平荷重が作用するときには、其の荷重の合力を  $P$  とすると



第226図

$$\mathfrak{A}_{CD} = \mathfrak{B}_{CD} = 0, \quad \mathfrak{A}_{DB} = 0, \quad M_{D,0} = 0, \quad M_{C,0} = Pc$$

であるから、(59.8)の一般式より

$$X_1 = H_B = \frac{(3 + 2k)Pc + \frac{6k}{h}\mathfrak{B}_{AC}}{2(3 + 2k)h} \quad (59.14)$$

になる。例へば興へられたる荷重が等分布荷重  $p$  であれば

$$P = ph, \quad c = \frac{h}{2}, \quad \mathfrak{B}_{AC} = \frac{ph^3}{24}$$

であるから

$$X_1 = H_B = \frac{6 + 5k}{8(3 + 2k)}ph, \quad (59.15)$$

従つて

$$\left. \begin{aligned} H_A &= -P + X_1 = -\frac{18 + 11k}{8(3 + 2k)}ph, \\ M_C &= M_{C,0} - X_1h = +\frac{3(2 + k)}{8(3 + 2k)}ph^2, \\ M_D &= -X_1h = -\frac{6 + 5k}{8(3 + 2k)}ph^2 \end{aligned} \right\} \quad (59.16)$$

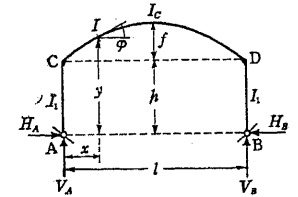
になる。第226図(b)参照。

iii. 曲り梁の門形ラーメン。

第227図に於て曲り梁CDの軸線は

$$y = h + \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

にて示される抛物線であり、其の断面二次モーメントは  $I \cos \varphi = I_C$  なるが如くに變化するものとする。



第227図

柱材AC及びBDに就てはiiの場合と同様に

$$\int_0^h y^2 ds = \frac{h^3}{3}$$

である。曲り梁CDに就ては

$$\begin{aligned} \int_0^D y^2 \frac{I_C}{I} ds &= \int_0^l y^2 \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx = \int_0^l y^2 dx \\ &= \frac{l}{15}(15h^2 + 20fh + 8f^2) \end{aligned}$$

になる。故に

$$EI_C \delta_{11} = 2 \frac{I_C}{I_1} \frac{h^3}{3} + \frac{l}{15}(15h^2 + 20fh + 8f^2)$$

になり、茲に於て

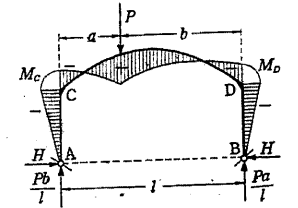
$$k = \frac{I_C h}{I_1 l}$$

と置けば

$$EI_C \delta_{11} = \frac{l h^2}{15} \left[ 5(3 + 2k) + 4 \frac{f}{h} \left( 5 + 2 \frac{f}{h} \right) \right]$$

になる。

第228図の如く、鉛直集中荷重  $P$  が作用するときには、柱材に於ては  $M_0 = 0$  であるから



第228図

$$\begin{aligned} -EI_C \delta_{10} &= \int_C^D M_0 y \frac{I_C}{I} ds = \int_0^l M_0 y \frac{I_C}{I \cos \varphi} dx = \int_0^l M_0 y dx \\ &= \int_0^a \frac{Pb}{l} x y dx + \int_a^l \frac{Pa}{l} (l-x) y dx \\ &= \frac{Pab}{6} \left[ 3 + 2 \frac{f}{h} \left( 1 + \frac{ab}{l^2} \right) \right] h \end{aligned}$$

になり、従つて

$$X_1 = H = \frac{Pab \left[ 3 + 2\frac{f}{h} \left( 1 + \frac{ab}{l^2} \right) \right]}{2hl \left[ 3 + 2k + 4\frac{f}{h} \left( 1 + 0.4\frac{f}{h} \right) \right]} \quad (59.17)$$

になる。曲げモーメントは

柱材:  $M = -X_1y$ ; 曲り梁:  $M = M_0 - X_1y$

に依つて求められ、曲げモーメント圖は第 228 圖の如くなる。

鉛直等分布荷重  $p$  が曲り梁に滿載するときには

$$-EI_C \delta_{10} = \int_0^l \frac{p}{2} x(l-x)y \, dx = \frac{pl^2}{6} \left( 5 + 4\frac{f}{h} \right) hl$$

であるから

$$X_1 = H = \frac{pl^2 \left( 1 + 0.8\frac{f}{h} \right)}{4h \left[ 3 + 2k + 4\frac{f}{h} \left( 1 + 0.4\frac{f}{h} \right) \right]} \quad (59.18)$$

になる。之等 (59.17), (59.18) の兩式に於て  $f=0$  と置けば CD が直線材である場合の (59.11) 或は (59.12) に於ける  $H$  の式が得られる。

§ 60. トラスの二鉸アーチ及びラーメン

第 229 圖の如く共に同轉端である二支點 A 及び B に於て支持せられる

トラスは外部的に一次不靜定であつ

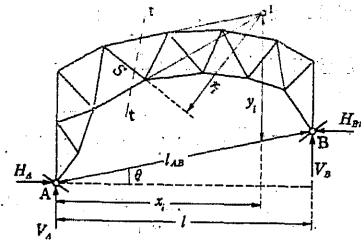
て、前節或は前々節に於けると同様

に B に於ける水平反力  $H_B$  を不靜定

反力  $X_1$  に選べば、 $X_1$  は § 58 に於け

ると同様に一般に

$$X_1 = - \frac{\delta_{10} + \Delta l_{AB} \sec \theta}{\delta_{11}} \quad (60.1)$$



第 229 圖

に依り決定せられる。茲に  $\Delta l_{AB}$  は AB 間の距離  $l_{AB}$  の増加、 $\delta_{10}$  は支點 B が水平方向に移動可能なる靜定基本系に於て與へられたる荷重及び溫度變化に依る  $X_1$  の作用點即ち支點 B の  $X_1$  の方向の變位、 $\delta_{11}$  は同じく靜定基本系に於ける  $X_1 = 1$  に依る  $X_1$  の作用點即ち支點 B の  $X_1$  の方向の變位である。

今、上記の靜定基本系に於て與へられたる荷重に依る部材應力を  $S_0$ 、 $X_1 = 1$  に依る部材應力を  $S_1$ 、與へられたる溫度變化を  $t$ 、部材の長さ及び斷面積を  $s$  及び  $A$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \sum S_1 S_0 \rho + \sum \alpha t S_1 s, \\ \delta_{11} &= \sum S_1^2 \rho, \quad \rho = s/EA \end{aligned} \right\} \quad (60.2)$$

であるから

$$X_1 = \frac{\sum S_1 S_0 \rho + \sum \alpha t S_1 s + \Delta l_{AB} \sec \theta}{\sum S_1^2 \rho} \quad (60.3)$$

になる。實際の計算に於ては、或る基準部材の斷面積を  $A_c$  とし、 $\alpha t$  をトラス全體に互つて常數とし

$$X_1 = - \frac{\sum \frac{A_c}{A} S_1 S_0 s + EA_c (\alpha t \sum S_1 s + \Delta l_{AB} \sec \theta)}{\sum \frac{A_c}{A} S_1^2 s} \quad (60.4)$$

に依つて計算するのが便利である。而して溫度變化及び  $\Delta l_{AB}$  を考慮しない場合には

$$X_1 = - \frac{\sum S_1 S_0 \rho}{\sum S_1^2 \rho} = - \frac{\sum \frac{A_c}{A} S_1 S_0 s}{\sum \frac{A_c}{A} S_1^2 s} \quad (60.5)$$

になる。

$S_0$  及び  $S_1$  は第 V 章に説明せる方法に依つて求められる。若し Ritter のモーメント法を應用するときには、例へば圖示の部材應力  $S$  は、斷面 t-t より左方にある外力の點  $i$  に對するモーメントの和を  $M_i$  とすれば、一般に

$$S = \pm \frac{M_i}{r_i} \quad (60.6)$$

より求められる。但し複号士は点  $i$  に對する部材の位置及び方向に依つて決定せられるものであつて、第 229 圖に示せる  $S$  に對しては正號である(第 V 章参照)。

従つて靜定基本系に於て與へられたる荷重に依る  $M_i$  を  $M_{i,0}$ ,  $X_1 = 1$  に依る  $M_i$  を  $M_{i,1}$  とすれば

$$S_0 = \pm \frac{M_{i,0}}{r_i}, \quad S_1 = \pm \frac{M_{i,1}}{r_i} \quad (60.7)$$

になる。此のうち特に  $M_{i,1}$  は第 230

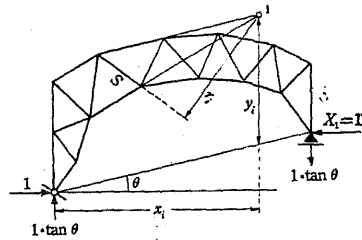
圖に示すが如く

$$M_{i,1} = 1 \cdot \tan \theta \cdot x_i$$

$$-1(y_i + x_i \tan \theta) = -1 \cdot y_i$$

であるから

$$M_{i,1} = -y_i, \quad S_1 = \mp \frac{y_i}{r_i} \quad (60.8)$$



第 230 圖

になる。

かくの如くにして  $X_1$  を決定すれば部材應力及び反力は一般に

$$\left. \begin{aligned} S &= S_0 + X_1 S_1, & V_A &= V_{A,0} + X_1 \tan \theta, & H_A &= H_{A,0} + X_1, \\ V_B &= V_{B,0} - X_1 \tan \theta, & H_B &= X_1 \end{aligned} \right\} \quad (60.9)$$

より求められる。 $S$  をモーメント法に依つて求める場合には

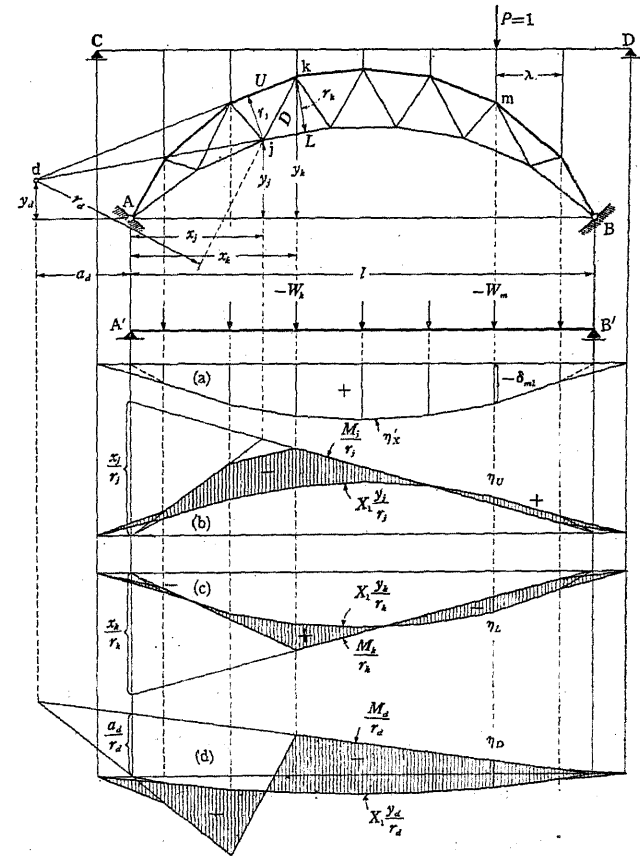
$$M_i = M_{i,0} + X_1 M_{i,1} = M_{i,0} - X_1 y_i \quad (60.10)$$

であるから

$$S = \pm \frac{M_i}{r_i} = \pm \left( \frac{M_{i,0}}{r_i} - X_1 \frac{y_i}{r_i} \right) \quad (60.11)$$

より計算すればよい。

移動荷重に對しては影響線を利用するのが便利である。例へば第 231 圖の場合、其の靜定基本系に於て鉛直移動荷重  $P=1$  が任意の節點  $m$  に作用



第 231 圖

するときの  $\delta_{10}$  は § 51 に説明せるが如く  $X_1 = 1$  に依る節點  $m$  の荷重作用方向の撓みに等しい。従つて之を  $\delta_{m1}$  とすれば節點  $m$  に  $P=1$  が作用するときの  $X_1$  は

$$X_1 = - \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} \quad (60.12)$$

になる。故に靜定基本系に  $X_1 = 1$  が作用するときの各節點の荷重作用方向の撓み曲線を描けば其の  $-1/\delta_{11}$  倍が  $X_1$  の影響線になる。即ち  $X_1$  の影

響線縦距を  $\eta_x$  とすれば

$$\eta_x = \frac{1}{\delta_{11}} \cdot \eta'_x, \quad \eta'_x = -\delta_{m1}$$

とすることが出来る。

$\eta_x$  或は  $\delta_{m1}$  を求める場合、アーチのすべての節点の撓みを求める必要はなく単に其の載荷弦の節点のみに就て計算すればよい。例へば第 231 圖の場合には其の上弦の節点のみの撓みを求めれば十分である。而して  $\delta_{m1}$  を求めるには §48 に於て説明せる  $W$ -荷重の方法を採用するのが最も簡単である。即ち第 231 圖の場合には太線にて示すが如く上弦材を滑節部材のつながりと考へ、節点  $m$  に於ける  $W$ -荷重を(48.1)に従つて

$$W = \sum \frac{\bar{S} S_i s}{EA} \quad (60.13)$$

より計算する。但し  $\bar{S}$  は §48 に説明せる假想的の  $\frac{1}{\lambda}$ -荷重に依る静定基本系の部材應力であり、 $S_i$  は従前通り  $X_1 = 1$  に依る部材應力である。

説明するまでもなく  $X_1 = 1$  に依つてアーチの各節点は一般に上方に向つて變位する。即ち  $W$ 、従つて  $\delta_{m1}$  は負になる。故に今  $W$  の代りに  $-W$  をスパン  $l$  の単純梁に作用せしめ、之に依る曲げモーメント圖を描けば之がそのまま  $\eta_x$ -曲線、即ち  $X_1$  の影響線になる。但し第 231 圖の如く  $C, D$  が夫々  $A, B$  と同一鉛直線上にない場合には、 $P=1$  が  $A$  又は  $B$  上に來ても  $X_1$  は零にならず、 $P=1$  が  $C$  又は  $D$  に來る場合に於て始めて  $X_1 = 0$  となるから、此の場合の影響線は第 231 圖(a)に示すが如くなる。

$X_1$  の影響線がわかれば部材應力の影響線を求めることは容易である。例へば第 231 圖に示す上弦材應力  $U$ 、下弦材應力  $L$ 、斜材應力  $D$  は(60.11)に依つて

$$U = -\left(\frac{M_j}{r_j} - X_1 \frac{y_j}{r_j}\right), \quad L = \frac{M_k}{r_k} - X_1 \frac{y_k}{r_k}, \quad D = \frac{M_a}{r_a} - X_1 \frac{y_a}{r_a}$$

であるから、 $M_j, M_k$  及び  $M_a$  の影響線と  $X_1$  の影響線とを上式に従つて重合

することに依り之等の部材應力に対する影響線が得られる。第 231 圖の (b), (c), (d) は夫々かくして求めたる  $U, L, D$  に対する影響線である。

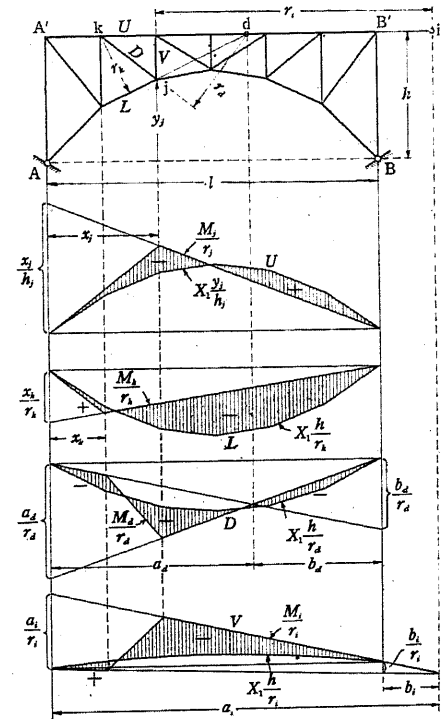
第 232 圖に示す二鉸アーチに於ても原理は上記と同様である。ただ此の場合には上弦材がすべて水平であるから、圖示の部材應力  $U, L, D$  及び  $V$  は夫々

$$U = -\left(\frac{M_j}{h_j} - X_1 \frac{y_j}{h_j}\right),$$

$$L = \frac{M_k}{r_k} - X_1 \frac{h}{r_k},$$

$$D = \frac{M_a}{r_a} - X_1 \frac{h}{r_a},$$

$$V = -\left(\frac{M_i}{r_i} - X_1 \frac{h}{r_i}\right)$$



第 232 圖

になり、従つて之等に対する影響線は夫々圖示の如くなる。但し  $h_j$  は節点  $j$  にある鉛直材の長さである。尚、此の型式のアーチに於ては厳密に言へば  $P=1$  が  $A'$  或は  $B'$  上に來る場合にも  $X_1 = 0$  にはならない。何故ならば  $X_1 = 1$  に依つて鉛直材  $AA'$  又は  $BB'$  には張力が生じ従つて節点  $A'$  又は  $B'$  が上方に變位するからである。然し此の變位は極めて小であるから普通は之を零とする。

上下兩弦材が平行或は略々平行のときには其の交点を求めることは不可能又は困難であるから、此の様な場合の斜材又は鉛直材の應力を上述のモ

ーメント法に依つて決定することは出来ない。かかる場合には (60.9) 式に依らねばならない。例へば第 233 圖に於ける斜材  $jk$  の應力を  $D$  とすれば

$$D = D_0 + D_1 X_1$$

であるが  $D_1$  は此の場合負であるから其の絶対値を  $|D_1|$  とすれば

$$D = D_0 - |D_1| X_1$$

になる。此の  $D$  の影響線を得るには次の如くにすればよい。即ち荷重が  $Aj$  間に無くて  $V_{A,0} = 1$  である

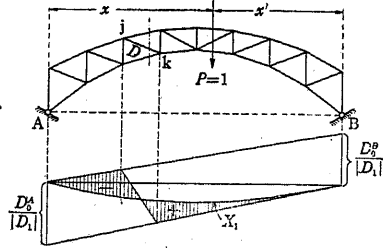
場合の  $D_0$  の値  $D_A^0$  及び荷重が  $kB$  間に無くて  $V_{B,0} = 1$  である場合の  $D_0$  の値  $D_B^0$  を計算すれば、移動荷重  $P = 1$  が  $Aj$  間に作用する場合には

$$D_0 = D_0^A \frac{x}{l}$$

であり、 $P = 1$  が  $kB$  間に作用する場合には

$$D_0 = D_0^B \frac{x'}{l}$$

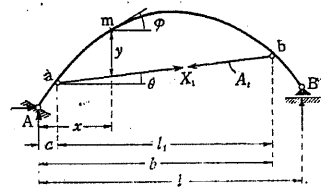
であるから、之等の關係に基き第 233 圖の如き作圖に依つて比較的容易に  $D/|D_1|$  に對する影響線を得ることが出来る。



第 233 圖

§ 61. タイドアーチ(繫拱)

第 234 圖の如く二鉸アーチに於て其の一つの支點を移動端とする代りにアーチの任意の二點  $a, b$  を繫材にて連結せるものを



第 234 圖

イドアーチ(繫拱)と言ひ、之は外部的には靜定であるが、内部的には一次の不靜定構造である。此の種の構造物に於ては繫材  $ab$  の應力を不靜定力  $X_1$

に選ぶのが便利である。外部的には靜定であるから支點の反力は  $X_1$  に無關係であり、従つて  $X_1$  は一般に

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (61.1)$$

より求められる。但し此の場合には  $\delta_{10}$  及び  $\delta_{11}$  の計算に當つて繫材の應力に依る項を加算すべきは言ふまでもない。

$X_1 = 1$  に依るアーチの斷面力  $M_1, N_1$  及び  $Q_1$  は  $Aa$  間及び  $Bb$  間に於てはすべて零に等しく、 $ab$  間に於ては

$$M_1 = -1 \cdot y \cos \theta, \quad N_1 = -1 \cdot \cos(\varphi - \theta), \quad Q_1 = -1 \cdot \sin(\varphi - \theta) \quad (61.2)$$

であり、 $X_1 = 1$  に依る繫材の應力は  $S_1 = +1$  である。故に今  $a, b$  間の距離を  $l_{ab}$  とし、 $\alpha t$  を常數とすれば、 $\delta_{10}$  に於ける溫度變化に關する項は

$$\int_a^b \alpha t N_1 ds + \alpha t S_1 l_{ab} = \alpha t \left[ - \int_a^b \cos(\varphi - \theta) ds + l_{ab} \right] = \alpha t (-l_{ab} + l_{ab}) = 0$$

になり、 $\delta_{11}$  に於ける繫材に關する項は、繫材の斷面積を  $A_t$  とすれば

$$S_1^2 \rho = 1^2 \frac{l_{ab}}{EA_t} = \frac{l_{ab}}{EA_t}$$

になる。従つて  $\delta_{10}$  及び  $\delta_{11}$  は

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= - \cos \theta \int_a^b \frac{M_0 y}{EI} ds - \int_a^b \frac{N_0}{EA} \cos(\varphi - \theta) ds, \\ \delta_{11} &= \cos^2 \theta \int_a^b \frac{y^2}{EI} ds + \int_a^b \frac{\cos^2(\varphi - \theta)}{EA} ds + \frac{l_{ab}}{EA_t} \end{aligned} \right\} \quad (61.3)$$

になり、或る基準斷面の  $I$  及び  $A$  を  $I_C$  及び  $A_C$  とし  $E$  を常數とすれば

$$X_1 = - \frac{EI_C \delta_{10}}{EI_C \delta_{11}} = - \frac{\cos \theta \int_a^b \frac{M_0 y}{I_C \cos \varphi} dx + \frac{I_C}{A_C} \int_a^b \frac{N_0 \cos(\varphi - \theta)}{A \cos \varphi} dx}{\cos^2 \theta \int_a^b \frac{y^2}{I_C \cos \varphi} dx + \frac{I_C}{A_C} \int_a^b \frac{\cos^2(\varphi - \theta)}{A \cos \varphi} dx + \frac{I_C}{A_t} l_{ab}} \quad (61.4)$$

になる。特に繫材が水平なる場合には  $\theta = 0$  であるから

$$X_1 = \frac{\int_a^b M_0 y \frac{I_C}{I_C \cos \varphi} dx + \frac{I_C}{A_C} \int_a^b N_0 \frac{A_C}{A} dx}{\int_a^b y^2 \frac{I_C}{I_C \cos \varphi} dx + \frac{I_C}{A_C} \int_a^b \cos \varphi \frac{A_C}{A} dx + \frac{I_C}{A_t} l_1} \quad (61.5)$$

之等兩式の分子にある  $N_0$  の項、或は場合に依つては分母にある第二項は之を省略するも大なる誤差は起らない。分母の第二項を考慮する場合に於ても  $\cos(\varphi - \theta)$ ,  $\cos \varphi$ ,  $A_C/A$  は 1 に近い値であるから之等をすべて 1 に等しと置けば、之等分母の第二項は夫々

$$\frac{I_C}{A_C} l_{ab} \quad \text{或は} \quad \frac{I_C}{A_C} l_1$$

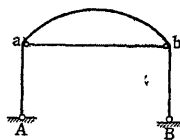
になる。

繫材が AB 間にある場合には (61.4) 或は (61.5) の積分はアーチの全長に亙つての積分になる。此の場合の (61.5) の分子は二鉸アーチの不静定水平反力に對する (58.8) の分子に於て  $t$  及び  $\Delta l$  を零とせるものに一致し、また其の分母は (58.8) の分母に  $I_C l/A_t$  を加へたるものに等しい。故に今、温度不変且つ支點が變位せざる二鉸アーチの不静定水平反力を  $X_1'$ 、之に對する  $\delta_{11}$  を  $\delta'_{11}$  とすれば、AB 間に繫材を有するタイドアーチの  $X_1$  は一般に

$$X_1 = \frac{1}{1 + \mu} X_1', \quad \text{但し} \quad \mu = \frac{I_C l}{A_t} / EI_C \delta'_{11} = \frac{l}{EA_t \delta'_{11}} \quad (61.6)$$

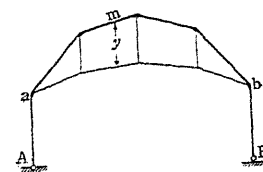
になる。従つてかかる型式の圓形又は拋物線のタイドアーチに對しては § 58 の ii 及び iii に掲げたる諸式を應用することが出来る。

上述のことは第 235 圖の如く繫材 ab を有する一端移動端のラーメンに於てもすべて同様である。ただラーメンに於ては軸方向力の影響はアーチに於けるよりも更に小であるから之を全く省略するのが普通である。



第 235 圖

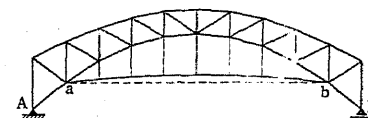
また繫材が一個の直線部材ではなく第 236 圖の如く吊材に依つてアーチ又はラーメンに連結せられる多角形状の滑節部材より成る場合に於ても、繫材の應力の水平分力は不変であるから之を  $X_1$  に選び、アーチ又はラーメンより繫材までの鉛直距離を  $y$  とすれば  $M_1, N_1, Q_1$  に對しては (61.2) 式が



第 236 圖

同様に成立し、従つて  $X_1$  は前掲の諸式に依つて之を求めることが出来る。嚴密に言へば此の場合には (61.3) の  $\delta_{11}$  に於ける  $l_{ab}/EA_t$  の代りに吊材及び繫材に關する  $\sum S_i^2 \rho$  を置換へるべきであるが、然し此の兩者の差は一般に極めて小であるから多くの場合前掲の諸式に依つて實際上十分に精確なる  $X_1$  の値を得ることが出来る。

第 237 圖の如きトラスのタイドアーチに於ても、其の繫材の應力の水平分力を  $X_1$  とすれば、之に對してはトラスの二鉸アーチの不静定水平反力に對する (60.3) 或は (60.4) 式に於て  $\Delta l_{AB}$  及び  $t$  を零とせる式、或は (60.5)



第 237 圖

式が其のまま適用せられる。但しタイドアーチに於ては之等諸式の分母の

$$\sum S_i^2 \rho \quad \text{或は} \quad \sum \frac{A_C}{A} S_i^2$$

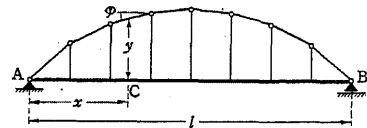
には繫材に關する項を、また繫材が屈曲せる場合には更に吊材に關する項をも加算すべきは言ふまでもない。然し繫材の屈曲が著しくない限り吊材に關する項は之を省略するも殆んど誤差は生じない。

§ 62. ランガートラス

第 238 圖或は第 240 圖の如く補剛梁或は補剛トラスを有する滑節アーチ



は其の提案者 Langer の名をとつてランガートラスと呼ばれる。之はまた見方を變へれば單純梁或は單純トラスを滑節アーチにて補強せるものと考へることも出来る。何れにしても此の構造は内部的に一次の不静定であるから、之より静定基本系を得るには補剛梁にヒンジを挿入するか (§ 30), 或は補剛トラスの任意の一部材を切斷すればよい (§ 35, iv). 然し茲では滑節アーチの任意の一部材を切斷せるものを静定基本系とし、切斷點に於ける部材應力の水平分力を  $X_1$  に選ぶ。荷重がすべて補剛梁或は補剛トラスに作用するものとすれば、アーチ部材の應力の水平分力はすべて  $X_1$  に等しくなるからアーチ部材の切斷點の位置如何は問題にならない。また本構造は外部的に静定であるから、反力は静定反力になり、且つタイドアーチに就て説明せると同様に温度の一樣なる變化は  $X_1$  に無關係になる。而して上述の如くアーチを切斷せるものを静定基本系とし、荷重がすべて補剛梁又は補剛トラスに作用するものとすれば、之等の荷重に依るアーチ部材及び吊材の應力  $S_0$  は零になるから、 $M_0, N_0$  及び  $S_0$  等は單に補剛梁或は補剛トラスに就てのみ之等を夫々單純梁或は單純トラスと假定して算出すればよいことになる。



第 238 圖

之等のことを考慮すれば第 238

圖の如く補剛梁を有するランガートラスに對しては一般に

$$X_1 = - \frac{\int_0^l \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1 N_0}{EA} dx}{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \sum S_1^2 \rho} \quad (62.1)$$

になる。但し積分は勿論補剛梁に關するものであり、 $\sum$  はアーチ部材及び吊材に就ての總和である。

$M_0$  及び  $N_0$  は補剛梁 AB を單純梁とせる場合の與へられたる荷重に依る

$M$  及び  $N$  であつて、此のうち  $N_0$  は荷重が鉛直の場合は零であり、然らざる場合に於ても  $N_0$  に依る項は極めて小であるから之を無視するのが常である。故に (62.1) 式に於て  $N_0$  に依る項を省略し、且つ  $X_1 = 1$  に依る補剛梁の曲げモーメント及び軸方向力:

$$M_1 = 1 \cdot y, \quad N_1 = -1 \quad (62.2)$$

を代入すれば

$$X_1 = - \frac{\int_0^l \frac{M_0}{EI} y dx}{\int_0^l \frac{y^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{dx}{EA} + \sum S_1^2 \rho} \quad (62.3)$$

になる。

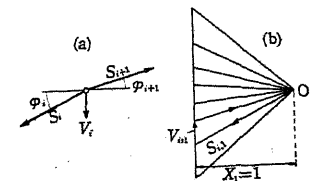
上式分母の第三項の  $S_1$  に代入すべき  $X_1 = 1$  に依るアーチ部材及び吊材の應力は次の如くなる。即ちアーチ部材の應力を特に  $S$ , 吊材の應力を  $V$  とすれば、之等の間には一般に

$$\left. \begin{aligned} S_i &= X_1 \sec \varphi_i, & S_{i+1} &= X_1 \sec \varphi_{i+1}; \\ V_i &= -X_1 (\tan \varphi_i - \tan \varphi_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (62.4)$$

の關係があり (第 239 圖), 従つて  $X_1 = 1$  に依る値は

$$\left. \begin{aligned} S_{i,1} &= 1 \cdot \sec \varphi_i, & S_{i+1,1} &= 1 \cdot \sec \varphi_{i+1}; \\ V_{i,1} &= -1 (\tan \varphi_i - \tan \varphi_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (62.5)$$

になる。之を圖解法に依り決定するには、第 239 圖 (b) に示すが如く、任意の點 O よりアーチ部材に平行なる射線を引き、鉛直線を O より 1 の距離に引けばよい。



第 239 圖

尚、實際のランガートラスに於ては補剛梁に大なる斷面のものを使用するから、

かかる場合には (62.3) 式分母の第二項は他の項に比べて極めて小にな

り、之を全く省略するも或はまた補剛梁の平均断面積を  $A_m$  とし、近似的に

$$\int_0^l \frac{dx}{EA} = \frac{l}{EA_m}$$

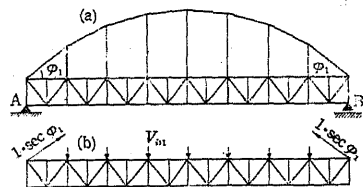
とするも  $X_1$  には殆んど誤差は生じない。

$X_1$  がわかればアーチ部材及び吊材の應力は (62.4) に依り決定せられ、補剛梁の断面力は次式に依つて求められる。

$$M = M_0 + X_1 y, \quad N = N_0 - X_1, \quad Q = Q_0 + X_1 \tan \varphi. \quad (62.6)$$

$M_0$  は一般に正であるから  $X_1$  は一般に負、即ち壓縮力になる。従つてアーチ部材の應力は壓縮力、吊材の應力は張力になり、補剛梁に於ては其の曲げモーメント及び剪断力は共に単純梁とせる場合の値より夫々  $X_1 y$  或は  $X_1 \tan \alpha$  に相當するだけ小になる。

尚、荷重が鉛直なる場合に於ても補剛梁には  $-X_1$  に相當する張力が作用する。



第 240 圖

第 240 圖の如く補剛トラスを有す

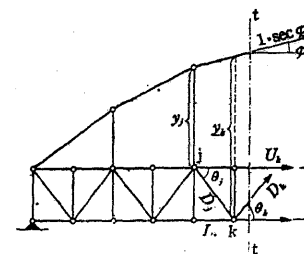
るランガートラスに於ては  $X_1$  は一般に次式より計算せられる。

$$X_1 = - \frac{\sum S_1 S_0 \rho}{\sum S_1^2 \rho} = - \frac{\sum S_1 S_0 s}{\sum S_1^2 s} \cdot \frac{EA}{EA}. \quad (62.7)$$

但し  $S_1$  はアーチ部材を切斷せる静定基本系に於て  $X_1 = 1$  に依る部材應力、 $S_0$  は同じく静定基本系に於て與へられたる荷重に依る部材應力である。然るに  $S_0$  はアーチ部材及び吊材に於ては零であるから、上式分子の  $\sum$  に於ては、單に補剛トラスの各部材に就てのみ之を求むればよい。之に反し、分母の  $\sum$  は補剛トラスのみならず、アーチ部材及び吊材の全部に就ての總和である。

$S_0$  は補剛トラスを A, B にて支持せられる静定トラスと考へて計算すればよい。  $S_1$  のうちアーチ部材及び吊材に關するものは第 239 圖 (b) 或は (62.5) 式に依つて求められる。補剛トラスの各部材の  $S_1$  を求めるには、第 239 圖 (b) 或は (62.5) 式に依つて求めたる吊材及び左右兩端のアーチ部材の應力が補剛トラスに對し第 240 圖 (b) に示すが如く外力として作用するものと考へて計算してもよく、また次の如くに直接に計算してもよい。

例へば第 241 圖に於て節點 k に對する上弦材の應力  $U_k$  及び k より右上に向ふ斜材の應力  $D_k$  の  $X_1 = 1$  に依る値を求めるときは、トラスを t-t にて切斷せるものと考へ、此の t-t にて切斷せられる部材の應力の節點 k に對するモーメントの釣合及び鉛直方向の釣合を考へれば



第 241 圖

$$U_k h + 1 \cdot \sec \varphi \cdot y_k \cos \varphi = 0,$$

$$D_k \sin \theta_k + 1 \cdot \sec \varphi \cdot \sin \varphi = 0$$

を得、之より

$$U_k = -1 \frac{y_k}{h}, \quad D_k = -1 \frac{\tan \varphi}{\sin \theta_k} \quad (62.8)$$

になる。之と同様にして j, k 間を通る断面に就て、節點 j に對するモーメントの釣合及び鉛直方向の釣合の條件より

$$L_j = +1 \frac{y_j}{h}, \quad D_j = +1 \frac{\tan \varphi}{\sin \theta_j} \quad (62.9)$$

を得る。

$X_1$  がわかれば補剛トラスの部材應力は一般に

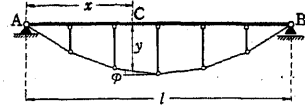
$$S = S_0 + X_1 S_1$$

に依つて求められる。然るに (62.8), (62.9) より明かなるが如く  $S_1$  は一般

に  $S_0$  と同符號であるが故に、(62.7)式に依つて  $X_1$  は負になり、従つて  $S$  の値は一般に  $S_0$  より小になる。

§ 63. 眞東トラス及び對東トラス

第 242 圖の如く單純梁 AB の下に支柱を取付け之に一連のリンクをなす繫材を連結して單純梁を補強する構造は前節のランガートラスを上下顛倒せるものと考へることが出来る。此の場合、繫材の應力は勿論張力であつて、何れの部分に於ても其の水平分力は相等しいから、此の水平分力を  $X_1$  とすれば之に對しては(62.1)式が其のまま適用せられる。ただ此の場合には梁の任意の横断面 C に於ける曲げモーメント及び軸方向力の  $X_1 = 1$  に依る値は



第 242 圖

であるから、ランガートラスの場合と符號が反對であるから、之を(62.1)に代入して  $N_0$  に依る項を省略すれば、 $X_1$  に對しては(62.3)式と全く同形であつて其の負號が正號である式が得られる。従つて  $X_1$  は一般に

$$M_1 = -1 \cdot y, \quad N_1 = -1$$

であるから、ランガートラスの場合と符號が反對であるから、之を(62.1)に代入して  $N_0$  に依る項を省略すれば、 $X_1$  に對しては(62.3)式と全く同形であつて其の負號が正號である式が得られる。従つて  $X_1$  は一般に

$$X_1 = + \frac{\int_0^l \frac{M_0}{EI} y dx}{\int_0^l \frac{y^2}{EI} dx + \frac{l}{EA} + \sum S_i^2 \rho} \quad (63.1)$$

になる。但し本式に於ける  $S_i$  は一般に繫材及び支柱に  $X_1 = 1$  に依つて生ずる應力を意味し、 $EI$  及び  $EA$  は梁に関する値である。而して梁の斷面力は

$$M = M_0 - X_1 y, \quad N = N_0 - X_1, \quad Q = Q_0 - X_1 \tan \phi \quad (63.2)$$

に依つて求められ、繫材及び支柱の應力に對しては(62.4)及び(62.5)が其のまま適用される。

第 242 圖の如き構造のうちで實際に多く使用せられるのは第 243 圖の眞東トラス (King post truss) と第 245 圖の對東トラス (Queen post truss) とである。今、第 243 圖の眞東トラスに於て

部 材	ヤング係數	斷 面	斷 面 力
梁 AB	$E$	$I, A$	$M, N, Q$
繫材 AD, DB	$E_1$	$A_1$	$T$
眞東 CD	$E_v$	$A_v$	$V$

とし、 $T$  の水平分力を  $X_1$  とする。

扱て第 243 圖の場合には  $y$  は左右對稱であつて、其の左半に對し

$$y = \frac{2h}{l} x$$

であるから

$$\int_0^l y^2 dx = 2 \left( \frac{2h}{l} \right)^2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{h^2 l}{3}$$

になり、 $X_1 = 1$  に依る  $T$  及び  $V$  は

$$T = +1 \frac{2s}{l}, \quad V = -1 \frac{4h}{l}$$

であるから

$$\sum S_i^2 \rho = 2 \left( \frac{2s}{l} \right)^2 \frac{s}{E_1 A_1} + \left( \frac{4h}{l} \right)^2 \frac{h}{E_v A_v} = \frac{8s^3}{E_1 A_1 l} + \frac{16h^3}{E_v A_v l}$$

である。故に(63.1)式の分母は

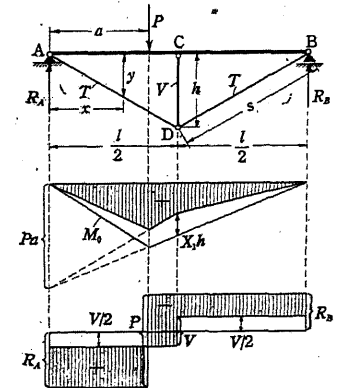
$$l \left[ \frac{h^2}{3EI} + \frac{1}{EA} + \frac{8}{E_1 A_1} \left( \frac{s}{l} \right)^3 + \frac{16}{E_v A_v} \left( \frac{h}{l} \right)^3 \right]$$

になる。

而して鉛直荷重  $P$  が圖示の如く作用する場合には

$$0 \leq x \leq a: M_0 = \frac{P(l-a)}{l} x; \quad a \leq x \leq l: M_0 = \frac{P a}{l} (l-x)$$

であるから



第 243 圖

$$\int_0^l M_0 y dx = \frac{P(l-a)}{l} \cdot \frac{2h}{l} \int_0^a x^2 dx + \frac{Pa}{l} \cdot \frac{2h}{l} \int_a^{\frac{l}{2}} (l-x)x dx$$

$$+ \frac{Pa}{l} \cdot \frac{2h}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x)^2 dx = \frac{Phl^2}{3} \cdot \frac{a}{l} \left( \frac{3}{4} - \frac{a^2}{l^2} \right)$$

になり、従つて

$$X_1 = \frac{\frac{Phl}{3EI} \cdot \frac{a}{l} \left( \frac{3}{4} - \frac{a^2}{l^2} \right)}{\frac{h^2}{3EI} + \frac{1}{EA} + \frac{8}{E_1 A_1} \left( \frac{s}{l} \right)^3 + \frac{16}{E_v A_v} \left( \frac{h}{l} \right)^3} \quad (63.3)$$

になる。

また梁 AB に等分布荷重  $p$  が満載する場合には

$$M_0 = \frac{p}{2} x(l-x)$$

であるから

$$\int_0^l M_0 y dx = 2 \frac{p}{2} \cdot \frac{2h}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2(l-x) dx = \frac{5}{96} p h l^3$$

になり、従つて

$$X_1 = \frac{\frac{5 p h l^2}{96 EI}}{\frac{h^2}{3EI} + \frac{1}{EA} + \frac{8}{E_1 A_1} \left( \frac{s}{l} \right)^3 + \frac{16}{E_v A_v} \left( \frac{h}{l} \right)^3} \quad (63.4)$$

になる。

之等  $X_1$  の式の分母に於ける第二項及び第四項は他の項に比べて一般に極めて小さく、従つて之を無視すれば (63.3) 及び (63.4) 式は夫々

$$X_1 = P \frac{\frac{a}{l} \left( \frac{3}{4} - \frac{a^2}{l^2} \right)}{\frac{h}{l} + \frac{24EI}{E_1 A_1 h l} \left( \frac{s}{l} \right)^3}, \quad (63.3a)$$

$$X_1 = p l \frac{5}{32 \left[ \frac{h}{l} + \frac{24EI}{E_1 A_1 h l} \left( \frac{s}{l} \right)^3 \right]} \quad (63.4a)$$

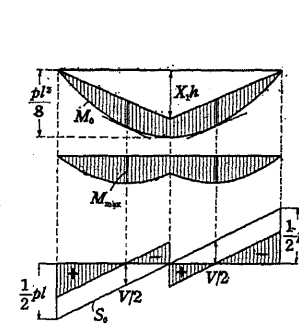
になる。

$X_1$  がわかれば繫材及び支柱の應力は

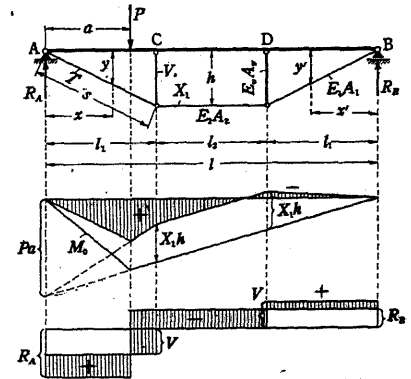
$$T = \frac{2s}{l} X_1, \quad V = -\frac{4h}{l} X_1 \quad (63.5)$$

より計算せられ、梁の断面力は一般に

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 - X_1 y, & N &= -X_1, \\ Q_{AC} &= Q_0 - \frac{2h}{l} X_1, & Q_{CB} &= Q_0 + \frac{2h}{l} X_1 \end{aligned} \right\} \quad (63.6)$$



第 244 圖



第 245 圖

より求められる。曲げモーメント圖及び剪斷力圖は、集中荷重  $P$  に対しては第 243 圖の如くになり、満載等分布荷重に對しては第 244 圖の如くなる。

第 245 圖の對束トラスに於て中央の繫材の應力を  $X_1$ 、其のヤング係數及び斷面積を夫々  $E_2$  及び  $A_2$  とする。本トラスに於ては

$$A \sim C: y = \frac{h}{l_1} x; \quad C \sim D: y = h; \quad D \sim B: y = \frac{h}{l_1} x'$$

であるから

$$\int_0^l y^2 dx = 2 \frac{h^2}{l_1^2} \int_0^{l_1} x^2 dx + h^2 \int_{l_1}^{l_1+l_2} dx = \frac{2}{3} h^2 l_1 + h^2 l_2$$

になり、また  $X_1 = 1$  に依る  $T$  及び  $V$  は

$$T = +1 \frac{s}{l_1}, \quad V = -\frac{h}{l_1}$$

であるから

$$\begin{aligned} \Sigma S_1^2 \rho &= 2\left(\frac{s}{l_1}\right)^2 \frac{s}{E_1 A_1} + 1^2 \frac{l_2}{E_2 A_2} + 2\left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{h}{E_v A_v} \\ &= l_1 \left[ \frac{2}{E_1 A_1} \left(\frac{s}{l_1}\right)^3 + \frac{1}{E_2 A_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} + \frac{2}{E_v A_v} \left(\frac{h}{l_1}\right)^3 \right] \end{aligned}$$

になる。従つて(63.1)式の分母を  $l_1 \Delta$  とすれば

$$\Delta = \frac{h^2}{EI} \left( \frac{2}{3} + \frac{l_2}{l_1} \right) + \frac{1}{EA} \cdot \frac{l}{l_1} + \frac{2}{E_1 A_1} \left( \frac{s}{l_1} \right)^3 + \frac{1}{E_2 A_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} + \frac{2}{E_v A_v} \left( \frac{h}{l_1} \right)^3 \quad (63.7)$$

になる。但し此の第二項及び最後の項は之を省略するも大なる誤差は生じない。

第245圖の如く集中荷重  $P$  が AC 間に作用する場合には

$$\int_0^l M_0 y \, dx = \frac{P h l_1^3}{6} \cdot \frac{a}{l_1} \left[ 3 \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) - \frac{a^2}{l_1^2} \right]$$

であるから、此の場合の  $X_1$  は

$$X_1 = \frac{P h l_1}{6 E I \Delta} \cdot \frac{a}{l_1} \left[ 3 \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) - \frac{a^2}{l_1^2} \right] \quad (63.8)$$

になり、同様にして  $P$  が CD 間に作用する場合には

$$X_1 = \frac{P h l_1}{6 E I \Delta} \left[ 3 \frac{a}{l_1} \left( \frac{l}{l_1} - \frac{a}{l_1} \right) - 1 \right], \quad (63.9)$$

等分布荷重  $p$  が満載する場合には

$$X_1 = \frac{p h l_1^3}{12 E I \Delta} \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) \left( 5 + 5 \frac{l_2}{l_1} + \frac{l_2^2}{l_1^2} \right) \quad (63.10)$$

になる。

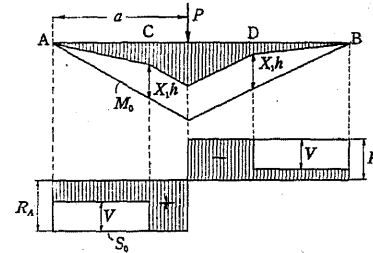
$X_1$  が求められれば  $T$  及び  $V$  は

$$T = \frac{s}{l_1} X_1, \quad V = -\frac{h}{l_1} X_1 \quad (63.11)$$

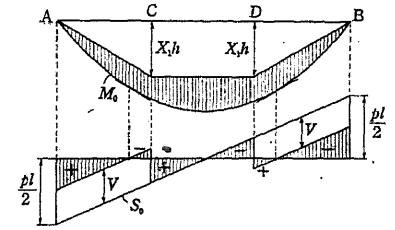
より、梁の断面力は

$$\left. \begin{aligned} A \sim C: \quad M &= M_0 - X_1 y, & Q &= Q_0 - \frac{h}{l_1} X_1, \\ C \sim D: \quad M &= M_0 - X_1 h, & Q &= Q_0, \\ D \sim B: \quad M &= M_0 - X_1 y, & Q &= Q_0 + \frac{h}{l_1} X_1 \end{aligned} \right\} \quad (63.12)$$

より計算せられる。曲げモーメント圖及び剪断力圖は集中荷重に對しては第245圖及び第246圖の如くなり、満載等分布荷重に對しては第247圖の如くなる。



第 246 圖



第 247 圖

前節に於ては構造物全體を通じて  $\alpha t$  を常數としたが爲に溫度變化に依る影響は消失したが、本構造に於ては梁、支柱及び繫材に夫々異なる材料を使用することが多く、かかる場合には之等材料の膨脹係數の相違或は溫度の不等變化の影響を考慮する必要がある。然し支柱に於ける溫度變化の影響は一般に極めて僅少であるから之を無視するものとし、梁及び繫材の膨脹係數を  $\alpha$  及び  $\alpha_1$ 、溫度變化を  $t$  及び  $t_1$  とすれば、此の溫度變化に依る  $\delta_{10,t}$  は、 $X_1 = 1$  に依る梁の軸方向力を  $N_1$ 、繫材の應力を  $T_1$  とすれば、一般に

$$\delta_{10,t} = \alpha t \int_0^l N_1 dx + \alpha_1 t_1 \Sigma T_1 s$$

になる。然るに  $N_1$  及び  $T_1$  は、第242圖に就て一般に

$$N_1 = -1, \quad T_1 = +1 \cdot \sec \varphi$$

であつて、 $\Sigma s \cdot \sec \varphi = l$  であるから

$$\delta_{10,t} = -\alpha t l + \alpha_1 t_1 l = -(\alpha t - \alpha_1 t_1) l$$

になり、従つて溫度變化に依る  $X_1$  は一般に

$$X_{1,t} = \frac{(\alpha t - \alpha_1 t_1) l}{\int_0^l \frac{y^2}{EI} dx + \frac{l}{EA} + \Sigma S_1^2 \rho} \quad (63.13)$$

になる。

特に真東トラスに於ては

$$X_{1,t} = \frac{\alpha t - \alpha_1 t_1}{\frac{h^2}{3EI} + \frac{1}{EA} + \frac{8}{E_1 A_1} \left(\frac{s}{l}\right)^3 + \frac{16}{E_0 A_0} \left(\frac{h}{l}\right)^3}, \quad (63.14)$$

また對東トラスに於ては

$$X_{1,t} = \frac{l}{l_1} \cdot \frac{\alpha t - \alpha_1 t_1}{\Delta} \quad (63.15)$$

になる。

§ 64. 滑節アーチに依つて支持せられる梁或はトラス

第 248 圖に示すものは一つの單純梁 AB と滑節アーチ CD とを其の間に

ある兩端滑節の鉛直材に依つ

て結合せる構造物であつて、

單純梁 AB を滑節アーチに依

つて補強せるものと考へるこ

とも出来るし、また滑節アー

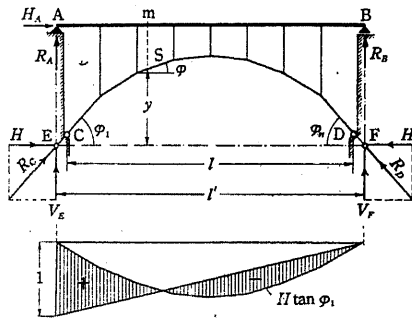
チの補剛梁をランガートラス

の如くに C, D 間に配置せず

にアーチの上方に配置したも

のと考へることも出来る。

今、C 及び D に於けるアーチの反力を  $R_C, R_D$  とすれば、之等の作用方向はアーチの兩端を形成する部材の方向に一致する。A を通る鉛直線と  $R_C$  との交點を E, B を通る鉛直線と  $R_D$  との交點を F とし、E 及び F に於て夫夫  $R_C$  及び  $R_D$  を水平及び鉛直の分力に分解すれば、其の水平分力は、滑節アーチに作用すべき力は梁 AB に作用する荷重の方向の如何に拘らず常



第 248 圖

に鉛直であるから、常に相等しい。故に之を單に  $H$  とすれば、 $R_C, R_D$  及び其の鉛直分力は

$$\left. \begin{aligned} R_C &= H \sec \varphi_1, & R_D &= H \sec \varphi_n, \\ V_E &= H \tan \varphi_1, & V_F &= H \tan \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (64.1)$$

になり、若し  $\varphi_1 = \varphi_n$  のときには

$$R_C = R_D = H \sec \varphi_1, \quad V_E = V_F = H \tan \varphi_1 \quad (64.2)$$

になる。

今、滑節アーチが存在せざる場合、即ち AB を普通の單純梁とせる場合の兩端の反力を  $R_{A,0}$  及び  $R_{B,0}$  とし、其の任意の一點  $m$  に於ける曲げモーメントを  $M_0$  とすれば、第 248 圖の構造に於ける  $R_A, R_B$  及び  $m$  に於ける曲げモーメント  $M$  は、既に § 30 に於て説明せるが如く

$$R_A = R_{A,0} - V_E = R_{A,0} - H \tan \varphi_1, \quad (64.3)$$

$$R_B = R_{B,0} - V_F = R_{B,0} - H \tan \varphi_n;$$

$$M = M_0 - H y \quad (64.4)$$

になる。

また任意のアーチ部材の應力  $S$  は一般に

$$S = -H \sec \varphi \quad (64.5)$$

であつて、鉛直材の應力は其の下端に於ける力の釣合條件より容易に之を求めることが出来る。

上記の如く  $H$  さへわかれば之等の諸式に依つて梁及び滑節アーチのすべての反力及び斷面力を決定することが出来る。今此の  $H$  を不静定反力  $X_1$  とすれば、 $X_1 = 0$  即ち  $H = 0$  のときには  $M = M_0$  であつてアーチ部材及び鉛直材の應力は零であり、 $X_1 = 1$  即ち  $H = 1$  のみに依つては  $M = -1 \cdot y$  であるから  $X_1$  は一般に

$$X_1 = H = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \sum \alpha t S_1 s}{\int \frac{M_1^2}{EI} dx + \sum S_1^2 \rho}$$

$$= \frac{\int \frac{M_0}{EI} y dx - \sum \alpha t S_1 s}{\int \frac{y^2}{EI} dx + \sum S_1^2 \rho} \quad (64.6)$$

より求められる。但し  $EI$  は梁  $AB$  の曲げ剛さであり、 $S_1$  は  $X_1 = 1$  のみに依るアーチ部材及び鉛直材の應力を意味し、 $s$  は其の長さである。但し温度變化に依る項に於ては鉛直材の影響は一般に極めて小であるから之を省略するものとし、 $\alpha t$  を常數とすれば

$$\sum S_1 s = -1 \cdot l'$$

であるから

$$X_1 = H = \frac{\int \frac{M_0}{EI} y dx + \alpha t l'}{\int \frac{y^2}{EI} dx + \sum S_1^2 \rho} \quad (64.7)$$

になる。

鉛直荷重の場合の  $X_1 = H$  に對する影響線は  $\delta_{10}$  の影響線の  $-1/\delta_{11}$  である。 $\delta_{10}$  に對する影響線は  $H = 1$  に依る梁  $AB$  の撓み曲線に等しい。 $H$  に對する影響線が求められれば、梁の反力及び曲げモーメントに對する影響線は、梁  $AB$  が單純梁である場合の影響線と、 $H$  に對する影響線とを式 (64.3) 或は (64.4) に従つて重合することに依つて求められる。例へば  $R_A$  に對する影響線は第 248 圖に示すが如くなる。

若し梁  $AB$  の代りに一つのトラスを使用する場合に於ても (64.1) 乃至 (64.5) の諸式が成立することには變りがない。此の場合の  $X_1$  は一般に

$$X_1 = H = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum S_1 S_0 \rho + \sum \alpha t S_1 s}{\sum S_1^2 \rho} \quad (64.8)$$

より求められる。但し  $S_0$  は  $H = 0$  の場合、即ち補剛トラスを  $A, B$  に於て

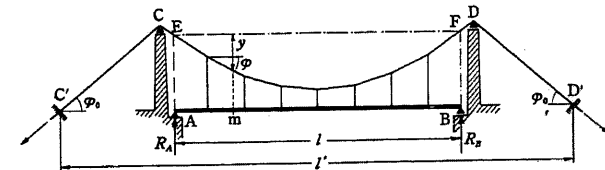
支持せられる靜定トラスとする場合の與へられたる荷重に依る補剛トラスの部材應力、 $S_1$  は  $H = 1$  に依る補剛トラス、鉛直材及びアーチの各部材の應力を意味し、従つて (64.8) 式の分子第一項は補剛トラスのみに就ての總和であり、其の他のものは一般に構造物全體に就ての總和である。但し  $\alpha t$  を常數とすれば、補剛トラスの温度變化は  $H$  には無關係であり、且つ鉛直材の温度變化の影響を無視すれば、前述の如くアーチ各部材に就ての  $S_1 s$  の總和は  $-l'$  に等しいから

$$X_1 = H = -\frac{\sum S_1 S_0 \rho - \alpha t l'}{\sum S_1^2 \rho} \quad (64.9)$$

になる。

$H$  がわかれば各部材に作用する實際の應力は § 35, iv に於けると同様にして之を求めることが出来る。

上述のことはすべて其のまま第 249 圖に示すが如き滑節リンクの構造物に對して適用することが出来る。何となれば第 249 圖の構造は第 248 圖の



第 249 圖

構造を上下顛倒せるものに外ならないからである。但し第 249 圖の場合にはリンクの應力はアーチと反對に張力になり、且つ (64.6) 乃至 (64.9) の諸式中の  $S_1$  を含む總和に  $CC'$  及び  $DD'$  に關する項を加算する必要がある。

§ 65. 二スパンの連續トラス

第 250 圖の如き二スパンの連續トラスは外部的に一次の不靜定構造であ

つて、其の一つの反力例へば中間支點 C に於ける反力  $R_C$  を不静定力  $X_1$  に選べば之に対する静定基本系は A, B の二點に於て支持せられるスパン  $l$  の単純トラスになる。このことは二スパンの連続梁に於ても全く同様であるが、連続梁に関しては第 X 章に於て別途に考察するものとし本節に於てはトラスの場合に就てのみ論述する。

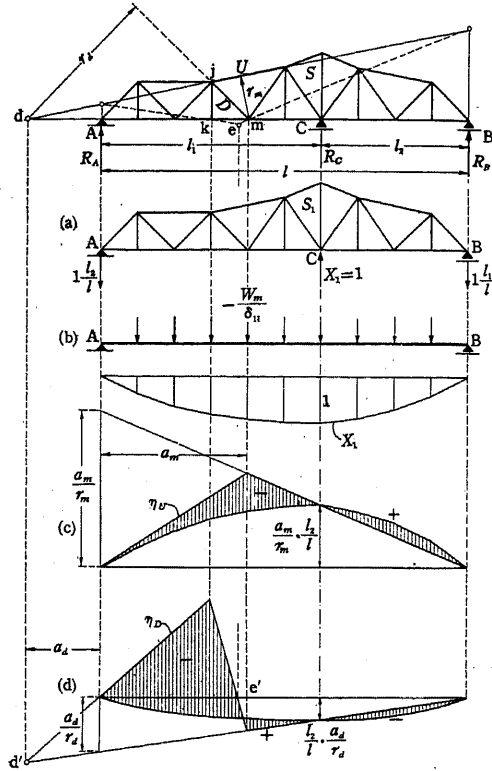
扱て第 250 圖に就き、静定トラス AB に與へられたる荷重が作用する場合の部材應力を  $S_0$ ,  $X_1=1$  のみが荷重として作用する場合の部材應力を  $S_1$  とすれば、 $X_1$  は一般に

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum S_1 S_0 \rho + \sum at S_1 s}{\sum S_1^2 \rho} \quad (65.1)$$

より求められる。勿論、温度が變化せざる場合或は荷重の影響のみを考慮する場合には上式分子の第二項を省略すればよい。

$X_1$  が決定せられれば實際の部材應力  $S$  及び反力は次式より求められる。

$$S = S_0 + S_1 X_1; \quad (65.2)$$



第 250 圖

$$R_A = R_{A,0} - \frac{l_2}{l} X_1, \quad R_B = R_{B,0} - \frac{l_1}{l} X_1, \quad R_C = X_1. \quad (65.3)$$

但し  $R_{A,0}$  及び  $R_{B,0}$  は與へられたる荷重に依る静定トラス AB の反力である。

部材應力を Ritter のモーメント法より求める場合には、例へば第 250 圖に示す上弦材應力  $U$  及び斜材應力  $D$  に対しては、之等の兩部材を通過する断面の左方にある外力の點  $m$  及び  $d$  に対するモーメントの和を夫々  $M_m$  及び  $M_d$  とすれば、一般に

$$U = -\frac{M_m}{r_m}, \quad D = -\frac{M_d}{r_d}$$

になり、従つて與へられたる荷重に依るものに 0 の添字を、 $X_1=1$  に依るものに 1 の添字を附するものとするれば

$$U_0 = -\frac{M_{m,0}}{r_m}, \quad U_1 = -\frac{M_{m,1}}{r_m}, \\ D_0 = -\frac{M_{d,0}}{r_d}, \quad D_1 = -\frac{M_{d,1}}{r_d}$$

になる。然るに

$$M_{m,1} = -\frac{l_2}{l} a_m, \quad M_{d,1} = +\frac{l_2}{l} a_d$$

であるから、 $U$  及び  $D$  は

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + U_1 X_1 = -\frac{1}{r_m} \left( M_{m,0} - \frac{a_m l_2}{l} X_1 \right), \\ D &= D_0 + D_1 X_1 = -\frac{1}{r_d} \left( M_{d,0} + \frac{a_d l_2}{l} X_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (65.4)$$

になる。

前述の如く  $X_1 = -\delta_{10}/\delta_{11}$  であつて、 $\delta_{10}$  に對する影響線は第 250 圖 (a) の如く静定トラス AB に  $X_1=1$  が作用する場合の下弦節點の撓み曲線に等しく、此の撓み曲線はまた  $X_1=1$  の場合の  $W$  荷重に依る曲げモーメント圖に等しい。故に  $X_1=1$  の場合の  $W$  荷重を計算し、その  $-1/\delta_{11}$  倍が第 250 圖 (b) の如く単純梁 AB に荷重として作用する場合の曲げモーメント



ト圖を描けば、之が即ち  $X_1$  に對する影響線になる。其の  $C$  に於ける縦距は勿論 1 に等しくなる筈である。

$X_1$  の影響線がわかれば、反力或は部材應力に對する影響線は、靜定トラスとしての影響線と  $X_1$  の影響線とを (65.2), (65.3) 或は (65.4) 式に従つて重合することによつて得られる。例へば第 250 圖に示す  $U$  及び  $D$  に對する影響線は夫々 (c) 及び (d) の如くなる。