第VII章　不靜定構造物の理論

§ 52. 總　　說

不靜定構造物に於ては既に§8に説明せるが如く構造物が外力に對して釣合を保つために必要にして且つ十分なる以上に餘計の部材又は反力が存在し，從つて釣合條件のみに依つて部材に作用する斷面力及び反力を決定することは出來ない．

例へば平面トラスに於て一般に $m=$ 部材數，$r=$ 反力數，$k=$ 節點數とすれば決定すべき未知量の數は $m+r$，之に對して釣合條件式の數は $2k$ である．n 次の不靜定トラスに於ては $m+r-2k=n$ であるから未知量の數に對して方程式の數が n だけ不足し，從つて $2k$ 個の釣合條件式のみに依つて $m+r=2k+n$ 個の未知量を決定することは出來ない．即ち此の場合には $2k$ 個の釣合條件式を滿足する解は無數にある．詳しく言へば $n\cdot\infty$ 個の解がある．此の無數の解のうちトラスの彈性變形に關する條件（之を彈性條件と言ふ）を滿足するものが眞實の解である．トラスの彈性變形を決定するには第VI章に説明せるが如く各部材の長さの變化及び支點の變位を知ることが必要であり且つ十分である．從つてトラスの彈性條件は各部材の長さの變化と反力の變位に關する合計 $m+r$ 個の方程式にて示されることになる．然るに部材の長さの變化及び支點の變位はすべて各節點の任意の座標軸の方向の分變位 Δx 及び Δy の函數としてあらはされるから，上記の彈性條件式にはすべて此の Δx 及び Δy が含まれることになる．今，此の $m+r$ 個の彈性條件式より $2k$ 個の Δx 及び Δy を消去すれば，

$m + r - 2k = n$ 個の互に獨立なる方程式が得られる．此の方程式を不靜定構造物の彈性方程式と言ふ．かくして $2k$ 個の釣合條件式と n 個の彈性方程式とに依つて $m + r\ (= 2k + n)$ 個の未知量がすべて一意的に決定されるのである．但し此の場合，上記の方程式の未知量の係數に依つて作られる行列式 Δ が零に等しくなくなければならないことは言ふまでもない．

以上のことはトラスの場合のみに限らず剛節構造物の場合に於ても同樣であつて，すべて不靜定構造物に於ては力の釣合條件の他に其の彈性條件を考慮する必要がある．靜定構造物に於ては其の彈性變形に無關係に，即ち部材の斷面及び材料の彈性的性質並びに支點の變位に無關係に其の斷面力及び反力が決定されるが，之に反して不靜定構造物に於ては其の斷面力及び反力は部材の斷面，材料の彈性的性質及び支點の變位の函數になり，之等が與へられなければ斷面力及び反力を決定することは出來ない．之が靜定構造物と不靜定構造物との根本的相違の一つである．

彈性方程式を立てるには，上述の如く $m + r$ 個の彈性條件式より $2k$ 個の Δx 及び Δy を消去して求める代りに，通常次の方法に依る．

即ち與へられたる不靜定構造物より適當なる數の部材或は反力を除去して靜定構造物を作る．之を與へられたる不靜定構造物の靜定基本系，除去せる部材の斷面力或は反力を不靜定力或は不靜定量と言ひ，之を一般に $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ にてあらはす．靜定基本系を作る場合に何れの部材或は反力を除去するかは任意であるから一つの不靜定構造物に對して一般に多數の靜定基本系が作られる．但し此の靜定基本系が不安定でないことが必要である．

今上記の不靜定力 $X_1, X_2, \ldots$ を靜定基本系に對し夫々除去せられたる部材又は反力の位置に作用する荷重と假定すれば，之と實際に與へられたる

荷重及び溫度變化とに依る靜定基本系の斷面力及び反力は其の彈性變形には無關係に釣合條件のみに依つて決定せられる．但し此の場合 $X_1, X_2, \ldots$ の數値は未知であるから，先づ實際に與へられたる荷重及び溫度變化に依るもの及び $X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots$ のみに依るものとを別個に求めたる後，重合の法則に依つて之等を加算すればよい．即ち一般に

	與へられたる荷重，溫度變化及び $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ に依るもの	與へられたる荷重，溫度變化に依るもの	$X_i = 1$ のみに依るもの
反　力	R	R_0	R_i
トラス部材應力	S	S_0	S_i
軸方向力	N	N_0	N_i
曲げモーメント	M	M_0	M_i
剪斷力	Q	Q_0	Q_i

とすれば

$$\left.\begin{aligned} R &= R_0 + R_1X_1 + \cdots + R_iX_i + \cdots + R_nX_n, \\ S &= S_0 + S_1X_1 + \cdots + S_iX_i + \cdots + S_nX_n, \\ N &= N_0 + N_1X_1 + \cdots + N_iX_i + \cdots + N_nX_n, \\ M &= M_0 + M_1X_1 + \cdots + M_iX_i + \cdots + M_nX_n, \\ Q &= Q_0 + Q_1X_1 + \cdots + Q_iX_i + \cdots + Q_nX_n \end{aligned}\right\} \tag{52.1}$$

になる．

扨て上記の反力及び斷面力に依つて靜定基本系には支點の變位及び彈性變形が生じ，從つて $X_1, X_2, \ldots$ にも變位が生ずる．$X_1, X_2, \ldots$ の値が未知であるから之等の變形及び變位も勿論未定であつて $X_1, X_2, \ldots$ の値に依つて無數の變形狀態が考へられる．然るに上記の靜定基本系が與へられたる不靜定構造物と同等であるためには $X_1, X_2, \ldots$ の變位が與へられたる不靜定構造物に於ける $X_1, X_2, \ldots$ に相應する部材又は反力の彈性條件を滿足することが必要である．從つて之に依つて $X_1, X_2, \ldots$ の數だけの，即ち n 個

の條件式が得られる．之が卽ち不靜定構造物の彈性方程式であつて，之を $X_1, X_2, \ldots$ に就て解くことに依り $X_1, X_2, \ldots$ の數値が決定せられ，從つて (52.1) に依つてすべての斷面力及び反力を決定することが出來る．

與へられたる不靜定構造物より靜定基本系を作るには上記の如くに餘計の部材を除去する代りに，其の部材を任意の點に於て切斷してもよく，また此の方が實際の計算に於て遙かに便利であるので以下すべて此の方法に依るものとする．此の方法を採用する場合に於ては切斷點に於ける部材の斷面力を不靜定力 X に選び，之を部材の切斷に依つて作られた靜定基本系に對する荷重と考へるのである．此の場合の彈性方程式は部材の切斷端の X の方向の相對變位が零なるべきことより求められる．部材を切斷する場合，其の部材の性質及び切斷點の位置に依つて一個乃至三個の不靜定力が得られる．卽ちトラスの部材の如く軸方向力のみを受ける部材を切斷すれば其の軸方向力が不靜定力となり，剛節部材に於ては切斷面に於ける軸方向力，剪斷力及び曲げモーメントが夫々不靜定力となる．また滑節により連結せられる二部材を其の滑節に於て切斷すれば玆に作用すべき力の大さと其の作用方向の二つが不靜定量となり，從つて此の場合には此の力の任意の二方向に於ける分力を互に獨立なる二不靜定力と選ぶことが出來る．

§ 53. 彈性方程式の一般形

前節最後に記述した方法に依り適當なる部材を適當なる位置にて切斷し，更に場合に依つては適當なる反力を除去して得られる靜定基本系に就て，前記の切斷面に於ける斷面力及び除去せる反力を不靜定力 $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ として選ぶとき，此の靜定基本系に於ける X_i の作用點の X_i の作用方向の變位を δ_i とすれば，一般に

$$\delta_i = \delta_{i0} + \delta_{ir} + X_1\delta_{i1} + X_2\delta_{i2} + \cdots + X_i\delta_{ii} + \cdots + X_n\delta_{in} \tag{53.1}$$

とすることが出來る．但し上式に於て

$$\left.\begin{array}{ll} \delta_{i0}: & \text{與へられたる荷重及び溫度變化に依る} \\ \delta_{ir}: & \text{與へられたる支點の變位 } r \text{ に依る} \\ \delta_{ik}: & X_k = 1 \text{ に依る } (k = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \begin{array}{l} X_i \text{ の作用點の} \\ X_i \text{ の方向の變位} \end{array}$$

とする．

然るに X_i が部材の斷面力に相當する不靜定力であるときには，前節に於て述べた如く $\delta_i = 0$ でなければならない．卽ち

$$X_1\delta_{i1} + X_2\delta_{i2} + \cdots + X_i\delta_{ii} + \cdots + X_n\delta_{in} = -\delta_{i0} - \delta_{ir} \tag{53.2}$$

になり，X_i が不靜定反力なる場合には $\delta_i = r_i$ であるから，上式の右邊は $r_i - \delta_{i0} - \delta_{ir}$ になる．

今 δ_{ir} を與へられたる支點の變位 r に依つてあらはすために $X_i = 1$ のみが荷重として作用する場合の靜定基本系の反力を一般に R_i とすれば，假想仕事の原理に依り

$$1\cdot\delta_{ir} + \Sigma R_i r = 0, \quad \text{卽ち} \quad \delta_{ir} = -\Sigma R_i r \tag{53.3}$$

になる．玆に於て內力仕事を考慮しない理由は，靜定構造物は其の支點の變位に依つては何等の歪も應力も受けず單に剛體としての變位をなすだけであるからである．

(53.3)に依つて(53.2)式の右邊は

$$\Sigma R_i r - \delta_{i0}$$

になり，X_i が不靜定反力なるときには

$$\Sigma R_i r + r_i - \delta_{i0}$$

になる．然るに $r_i = 1\cdot r_i$ は $X_i = 1$ が與へられたる變位 r_i に對して爲す

仕事であるから $\Sigma R_i r$ の意義を擴張して $X_i=1$ に依る靜定基本系の反力 R_i が其の與へられたる變位 r に對してなす仕事だけではなく $X_i=1$ 自身が與へられたる變位 r_i に對してなす仕事をも包含するものとすれば,そして此の意味に於ける $\Sigma R_i r$ を L_i とし

$$K_i = L_i - \delta_{i0}, \qquad L_i = \Sigma R_i r \tag{53.4}$$

と置けば,X_i が不靜定斷面力である場合に於ても亦不靜定反力である場合に於ても同樣に

$$\underline{\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots + \delta_{ii}X_i + \cdots + \delta_{in}X_n = K_i} \tag{53.5}$$

になる.本式は不靜定構造物の彈性方程式の基本形である.上式に於ける $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in}$ 及び δ_{i0} は (40.1) 及び (40.2) 式に依つて一般に次の如くなる.即ち例へば δ_{ik} は $X_k=1$ に依る X_i の作用點の X_i の方向の變位であるから,$X_k=1$ に依る斷面力を N_k, M_k, Q_k, S_k とすれば一般に

$$\delta_{ik} = \sum\left[\int\frac{N_iN_k}{EA}ds + \int\frac{M_iM_k}{EI}ds + \int\kappa\frac{Q_iQ_k}{GA}ds\right] + \Sigma\, S_iS_k\,\rho \tag{53.6}$$

になり,δ_{i0} は與へられたる荷重及び溫度變化 t に依る X_i の作用點の X_i の方向の變位であるから

$$\delta_{i0} = \sum\left[\int\frac{N_iN_0}{EA}ds + \int\frac{M_iM_0}{EI}ds + \int\kappa\frac{Q_iQ_0}{GA}ds + \int\alpha\, N_i\, t\, ds\right] + \Sigma\, S_iS_0\,\rho + \Sigma\,\alpha\, S_i\, t\, s \tag{53.7}$$

になる.

以上の關係は Castigliano の定理よりも導き得るものであつて,何れにしても (53.5) に於て $i=1,2,\ldots,n$ とすることにより n 個の彈性方程式が得られ,之を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に就ての聯立一次方程式として解くことに依つて $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が決定せられる.かくして決定せられたる X は與へられたる不靜定構造物の彈性條件をすべて滿足するから,之を荷重とする靜定基本系は與へられたる不靜定構造物と全く同等になり,從つてかくして決定せられたる X の値を (52.1) に代入することに依つて與へられたる不靜定構造物の斷面力及び反力が決定せられる.

(53.5) 式を $i=1,2,\ldots,n$ として書けば

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1i}X_i + \cdots + \delta_{1n}X_n = K_1,\\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2i}X_i + \cdots + \delta_{2n}X_n = K_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots + \delta_{ii}X_i + \cdots + \delta_{in}X_n = K_i,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{ni}X_i + \cdots + \delta_{nn}X_n = K_n
\end{array}\right\} \tag{53.8}$$

になる.本式に於て未知數 X の係數はすべて與へられたる不靜定構造物の幾何學的及び彈性的性質にのみ依る常數であつて,荷重,溫度變化及び支點の變位には無關係であり,且つ Maxwell の定理に依つて一般に $\delta_{ik}=\delta_{ki}$ である.之に反し K は (53.4) 及び (53.7) より明かなるが如く荷重,溫度變化及び支點の變位の函數であつて之を<u>荷重項</u>と言ふ.

扨て (53.8) の一般解は

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{53.9}$$

にて與へられる.但し

$$\Delta = \begin{vmatrix}
\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1i} & \cdots & \delta_{1n}\\
\delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2i} & \cdots & \delta_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ii} & \cdots & \delta_{in}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{ni} & \cdots & \delta_{nn}
\end{vmatrix} \tag{53.10}$$

であつて, Δ_i は此の i 番目の列を荷重項 $K_1, K_2, \dots, K_i, \dots, K_n$ で置換へたものである. 尙 $\delta_{ik}=\delta_{ki}$ であるから, 上記の Δ は $\delta_{11}\sim\delta_{nn}$ の對角線に就て對稱である.

X はまた次の如く荷重項の一次函數としてあらはすことが出來る.

$$\left.\begin{aligned}X_1&=a_{11}K_1+a_{12}K_2+\cdots+a_{1i}K_i+\cdots+a_{1n}K_n,\\X_2&=a_{21}K_1+a_{22}K_2+\cdots+a_{2i}K_i+\cdots+a_{2n}K_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\X_i&=a_{i1}K_1+a_{i2}K_2+\cdots+a_{ii}K_i+\cdots+a_{in}K_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\X_n&=a_{n1}K_1+a_{n2}K_2+\cdots+a_{ni}K_i+\cdots+a_{nn}K_n.\end{aligned}\right\}\tag{53.11}$$

本式に於ける K の係數 a は, (53.10) の Δ より其の第 i 番目の列及び第 k 番目の行を除去して得られる行列式を Δ_{ik} とすれば, 一般に

$$a_{ik}=(-1)^{i+k}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}\tag{53.12}$$

であるから, (53.11) はまた次の如くに書くことが出來る.

$$\begin{aligned}X_i=\frac{(-1)^i}{\Delta}\Big[-\Delta_{i1}K_1+\Delta_{i2}K_2\mp\cdots\\+(-1)^k\Delta_{ik}K_k\pm\cdots+(-1)^n\Delta_{in}K_n\Big],\\(i=1,2,\dots,n).\end{aligned}\tag{53.13}$$

尙, 行列式の行と列とを置換へるも其の値は變らないから一般に Δ_{ik} と Δ_{ki} とは等しく, 從つて $a_{ik}=a_{ki}$ になる.

§ 54. 影 響 線

構造力學に於ては重合の法則に依り斷面力, 反力, 彈性變位其の他に對する荷重, 溫度變化或は支點の變位等の外的作用の影響を分離し夫々別個に

算定することが許される. 更にまた荷重のうちでも固定荷重と移動荷重とを別個に考察することが出來, 且つ此の方法が混亂を起すことが少い. 而して列車荷重の如く平行荷重が移動する場合には影響線を利用するのが最も簡明である.

次に任意の不靜定力 X_i に對する影響線を求める. 此の場合には支點の變位は勿論問題外であるから荷重項は一般に $K_i=-\delta_{i0}$ になり, 從つて X_i は (53.11) に依つて

$$X_i=-\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{k0}\tag{54.1}$$

になる. 然るに δ_{k0} は靜定基本系に於て與へられたる荷重 P に依る X_k の作用點の X_k の方向の變位である. 故に δ_{k0} に對する影響線は § 51 に說明せるが如く $X_k=1$ に依る P の方向の撓み曲線に等しく, 從つて $-a_{ik}\delta_{k0}$ に對する影響線は $X_k=-a_{ik}$ に依る P の方向の撓み曲線に等しくなる. かくして得られたる $-a_{ik}\delta_{k0}$ に對する影響線縱距を η_{ik} とすれば, X_i に對する影響線縱距は一般に

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n}\eta_{ik}\tag{54.2}$$

になる. 此の η_i を決定するには次の二方法が考へられる, 第一の方法は $X_k=-a_{ik}(k=1,2,\dots,n)$ に依る撓み曲線を各々別個に求めて之を重合する方法であり, 第二の方法は $X_k=-a_{ik}(k=1,2,\dots,n)$ が同時に作用する場合の撓み曲線に依つて一擧に η_i を決定する方法である. すべての $X_i(i=1,2,\dots,n)$ の影響線を求める場合には一般に上記第一の方法の方が便利である.

次に不靜定構造物に於ける斷面力及び反力を一般に Z とすれば (52.1) に依つて

$$Z = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i X_i \qquad (54.3)$$

である．但し Z_0 及び Z_i は夫々靜定基本系に於ける實際の荷重及び溫度變化に依る Z, 及び不靜定力 X_i に依る Z である．故に Z 及び Z_0 に對する影響線縱距を夫々 η 及び η_0 とすれば

$$\eta = \eta_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i \eta_i \qquad (54.4)$$

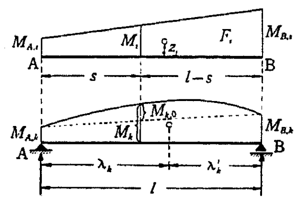
になる．

§ 55. $\int M_i M_k ds$ の 値

剛節部材より成る不靜定構造物の計算に於ては δ_{ik} 或は δ_{i0} を決定するために(53.6)或は(53.7)式より明かな如く一般に

$$\int \frac{M_i M_k}{EI} ds$$

の値を計算する必要がある．然し多くの場合には EI は部材毎に常數であつて，かかる場合には $\int M_i M_k ds$ の値が必要になる．以下之に關する二三の重要なる事項を記述する．



第　210　圖

今第210圖に於て AB を一つの部材とし，之に對し M_i は直線的に變化し，M_k は任意に分布するものとすれば，一般に

$$\left.\begin{aligned} M_i &= M_{A,i}\frac{l-s}{l} + M_{B,i}\frac{s}{l}, \\ M_k &= M_{A,k}\frac{l-s}{l} + M_{B,k}\frac{s}{l} + M_{k,0} \end{aligned}\right\} \qquad (55.1)$$

とすることが出來，從つて

$$\int_0^l M_i M_k ds = \frac{M_{A,i}}{l}\int_0^l M_k (l-s) ds + \frac{M_{B,i}}{l}\int_0^l M_k \, s \, ds \qquad (55.2)$$

となる．本式の右邊にある積分は夫々 M_k の曲げモーメント圖の B 及び A に對する一次モーメントであつて，從つて M_k の曲げモーメント圖の面積を F_k, その圖心より A 及び B に至る距離を λ_k 及び λ'_k とすれば

$$\int_0^l M_i M_k \, ds = \frac{M_{A,i}}{l} F_k \lambda'_k + \frac{M_{B,i}}{l} F_k \lambda_k \qquad (55.3)$$

とすることが出來る．

(55.2) の M_k に (55.1) の第二式を代入すれば

$$\int_0 M_i M_k \, ds = M_{A,i}\left[M_{A,k}\frac{l}{3} + M_{B,k}\frac{l}{6} + \frac{1}{l}\int_0^l M_{k,0}(l-s)\, ds\right]$$
$$+ M_{B,i}\left[M_{A,k}\frac{l}{6} + M_{B,k}\frac{l}{3} + \frac{1}{l}\int_0^l M_{k,0} \, s \, ds\right]$$

になり，茲に於て

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{l}\int_0^l M_{k,0}(l-s) ds, \qquad \mathfrak{B} = \frac{1}{l}\int_0^l M_{k,0} \, s \, ds \qquad (55.4)$$

と置けば

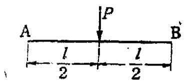
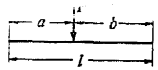
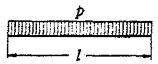
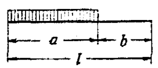
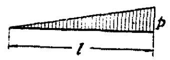
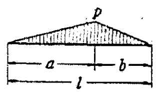
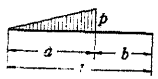
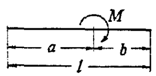
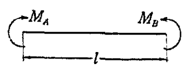
$$\int_0^l M_i M_k \, ds = \frac{l}{6}[M_{A,i}(2M_{A,k} + M_{B,k}) + M_{B,i}(M_{A,k} + 2M_{B,k})]$$
$$+ M_{A,i}\mathfrak{A} + M_{B,i}\mathfrak{B} \qquad (55.5)$$

になる．

$M_{k,0}$ は M_k のうち部材 AB に直接に作用する荷重に依る曲げモーメントであつて，AB を單純梁とせる場合の曲げモーメントに等しい．而して $\mathfrak{A}$ 及び $\mathfrak{B}$ は (55.4) より明かなるが如く $M_{k,0}$ の曲げモーメント圖の B 或は A に對する一次モーメントの $1/l$ である．即ち $\mathfrak{A}$ 及び $\mathfrak{B}$ は AB を單純梁と考へるとき之に直接に作用する荷重に依る曲げモーメント圖を單純梁 AB の荷重と假想して計算せる A 及び B に於ける反力に等しくなる．諸種の荷重に對する $\mathfrak{A}$ 及び $\mathfrak{B}$ の値は第5表に示すが如くである．

若し $M_{k,0}$ が零の場合，即ち M_k の曲げモーメント圖が M_i のそれと同樣に

第 5 表

番號	荷重圖	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$
1		$\frac{Pl^2}{16}$	$\frac{Pl^2}{16}$
2		$\frac{Pl^2}{6}\left(\frac{b}{l}-\frac{b^3}{l^3}\right)$	$\frac{Pl^2}{6}\left(\frac{a}{l}-\frac{a^3}{l^3}\right)$
3		$\frac{pl^3}{24}$	$\frac{pl^3}{24}$
4		$\frac{pl^3}{24}\cdot\frac{a^2}{l^2}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$	$\frac{pl^3}{24}\cdot\frac{a^2}{l^2}\left(2-\frac{a^2}{l^2}\right)$
5		$\frac{7}{360}pl^3$	$\frac{8}{360}pl^3$
6		$(8p_a+7p_b)\frac{l^3}{360}$	$(7p_a+8p_b)\frac{l^3}{360}$
7		$\frac{pl^3}{360}\left(1+\frac{b}{l}\right)\left(7-3\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{pl^3}{360}\left(1+\frac{a}{l}\right)\left(7-3\frac{a^2}{l^2}\right)$
8		$\frac{pl^3}{360}\cdot\frac{a^2}{l^2}\left(40-45\frac{a}{l}+12\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{pl^3}{360}\cdot 4\frac{a^2}{l^2}\left(5-3\frac{a^2}{l^2}\right)$
9		$\frac{pl^3}{360}\cdot\frac{a^2}{l^2}\left(20-15\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{pl^3}{360}\cdot\frac{a^2}{l^2}\left(10-3\frac{a^2}{l^2}\right)$
10		$-\frac{Ml}{6}\left(1-3\frac{b^2}{l^2}\right)$	$+\frac{Ml}{6}\left(1-3\frac{a^2}{l^2}\right)$
11		$\frac{l}{6}(2M_A+M_B)$	$\frac{l}{6}(M_A+2M_B)$

梯形であるときには $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ は零であるから

$$\int_0^l M_i M_k\,ds=\frac{l}{6}[M_{A,i}(2M_{A,k}+M_{B,k})+M_{B,i}(M_{A,k}+2M_{B,k})] \qquad (55.6)$$

になる．

δ_{ii} を求めるには $\int M_i^2\,ds$ を知ることが必要である．然るに

$$\int_0^l M_i^2\,ds=2\int_0^l \frac{M_i}{2}M_i\,ds$$

であつて，本式右邊の積分は M_i の曲げモーメント圖の部材 AB に對する一次モーメントに等しい．故に M_i の曲げモーメント圖の面積を F_i, AB より F_i の圖心までの距離を z_i とすれば

$$\int_0^l M_i^2\,ds=2F_iz_i \qquad (55.7)$$

になる．特に M_i が梯形に分布する場合には

$$\int_0^l M_i^2\,ds=\frac{l}{3}[M_{A,i}^2+M_{A,i}M_{B,i}+M_{B,i}^2] \qquad (55.8)$$

になる．