

第 VI 章 構造物の弾性變形

§ 39. 假想仕事の原理

一つの質點が多くの力を受けて釣合の状態にあるとき、之等の力の合力を R とすれば、 R の任意の直交座標軸 x, y, z の方向の分力は

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0 \quad (39.1)$$

である。今、此の質點が其の釣合の位置から任意の微小變位 δ をするものとし、その座標軸の方向の分變位 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ を上式の各々に乗じて加へ合せると

$$R_x \delta_x + R_y \delta_y + R_z \delta_z = 0 \quad (39.2)$$

を得る。また本式より逆に(39.1)の釣合條件を導くことも出来る。何となれば $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ は全く任意であるから、例へば $\delta_x \neq 0, \delta_y = \delta_z = 0$ とすれば $R_x = 0$ を得るからである。

扱て(39.2)式の左邊は力 R が變位 δ に對して爲す仕事に等しく、從つて之を次の如くに言ひ表はすことが出来る。

釣合の状態にある質點が任意の微小變位をなすとき、此の質點に作用する力の爲す仕事の和は零に等し。

此の場合の微小變位は必ずしも實際の微小變位である必要はなく全く任意に考へ得るものであるから之を假想變位と言ひ、假想變位に依る仕事を假想仕事、上記の原理を假想仕事の原理と言ふ。

物體はすべて質點の集合と考へられ、或る物體が釣合の状態にあるときには、これに屬するすべての質點も亦釣合の状態にあるから、之等の質點の

各々に對して上記の仮想仕事の原理が成立し、従つて或る物体の全體に對しても仮想仕事の原理が成立することになる。此の場合の仮想變位は各質點毎に全く任意に選び得るから、仮想仕事の原理は如何なる種類の物体にも、例へば、剛體、弾性體或は液體等に對しても成立する原理である。ただ各質點の仮想變位に對してそれが屬する物体の特質に依つて物理的及び幾何學的の條件が附せられるだけである。

今、或る物体の任意の點 m に作用する荷重を P_m 、點 m の任意の仮想變位の P_m の方向に於ける射影を δ_m とすると、 P_m の仮想仕事は $P_m \delta_m$ になる。之と同様に反力 R の其の作用方向に於ける仮想變位を \bar{r} とすると R の仮想仕事は $R \bar{r}$ になる。従つて或る物体に作用するすべての外力の仮想仕事の總和を \bar{W}_0 とすると次の如くなる。

$$\bar{W}_0 = \sum P_m \delta_m + \sum R \bar{r}. \quad (39.3)$$

之に對し物体を構成する各質點に作用する内力の仮想仕事の總和を W_i とすると、仮想仕事の原理は一般に次の如くに示される。

$$\bar{W}_0 + W_i = 0. \quad (39.4)$$

構造力学に於ては構造物をすべて弾性體と假定する。今、弾性體内に於て任意の微小直六面體 $dx dy dz$ を考へ、此の弾性體に作用する外力 P 及び R に依つて $dx dy dz$ の各面に生ずる垂直應力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 、剪斷應力を $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ とする。之等の應力を $dx dy dz$ に作用する外力と考へ、仮想變形に依る $dx dy dz$ の仮想垂直歪を $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \bar{\epsilon}_z$ 、仮想剪斷歪を $\bar{\gamma}_{yz}, \bar{\gamma}_{zx}, \bar{\gamma}_{xy}$ とすると、 $dx dy dz$ に於ける外力の仮想仕事は

$$dW_0 = (\sigma_x \bar{\epsilon}_x + \sigma_y \bar{\epsilon}_y + \sigma_z \bar{\epsilon}_z + \tau_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \bar{\gamma}_{zx} + \tau_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dx dy dz$$

になる。故に此の場合に於ける $dx dy dz$ の内力の仮想仕事を dW_i とすると、仮想仕事の原理に依つて

$$d\bar{W}_0 + d\bar{W}_i = 0,$$

即ち

$$d\bar{W}_i = -d\bar{W}_0 \\ = -(\sigma_x \bar{\epsilon}_x + \sigma_y \bar{\epsilon}_y + \sigma_z \bar{\epsilon}_z + \tau_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \bar{\gamma}_{zx} + \tau_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dx dy dz$$

になる。

従つて弾性體全體に於ける内力の仮想仕事の總和 \bar{W}_i は上式を弾性體の全體積 V に就て積分したものであるから

$$\bar{W}_i = -\int_V (\sigma_x \bar{\epsilon}_x + \sigma_y \bar{\epsilon}_y + \sigma_z \bar{\epsilon}_z + \tau_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \bar{\gamma}_{zx} + \tau_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dV \quad (39.5)$$

になる。故に(39.3)、(39.4)及び本式に依つて、弾性體に於ける仮想仕事の原理は一般に次式の如くなる。

$$\sum P_m \delta_m + \sum R \bar{r} \\ = \int_V (\sigma_x \bar{\epsilon}_x + \sigma_y \bar{\epsilon}_y + \sigma_z \bar{\epsilon}_z + \tau_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \bar{\gamma}_{zx} + \tau_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dV. \quad (39.6)$$

上式に於ける σ, τ は與へられたる實際の外力 P, R に依る應力であるが、之等と仮想變位との間には何等の關係もないから、實際の P, R, σ, τ の代りに任意の仮想荷重状態に於ける外力 \bar{P}, \bar{R} と應力 $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ を代入しても上式が成立すべき事には變りはない。また仮想變位は全く任意に選び得るものであるから、上式の $\delta, \bar{r}, \bar{\epsilon}, \bar{\gamma}$ に實際の荷重 P, R に依る $\delta, r, \epsilon, \gamma$ を代入してもよいわけである。従つて任意の仮想荷重状態に於ける外力及び内力が實際の荷重に依る實際の變位に對して爲す仮想仕事に對しては次式の如くなる。

$$\sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{R} \bar{r} \\ = \int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\epsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\epsilon}_y + \bar{\sigma}_z \bar{\epsilon}_z + \bar{\tau}_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \bar{\tau}_{zx} \bar{\gamma}_{zx} + \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dV. \quad (39.6a)$$

構造力学に於ては構造物はすべて直線或は其の一部分をとれば直線と考

へ得る程度に僅かに曲れる弾性體の棒より成るものとし且つ其の断面は長さ
さに比べて十分に小であると假定するのが普通である。此の様な構造物の
變形に對しては棒狀物體の横断面に垂直なる應力及び歪が絶對的影響を
與へ、之に比べれば其の他の應力及び歪の影響は極めて小である。此の様
な場合には横断面に垂直なる應力及び歪を單に σ 及び ε とし、其の他の應
力及び歪を零と置けば(39.6), (39.6a)式は夫々次の如くなる。

$$\sum P_m \bar{\delta}_m + \sum R \bar{r} = \int_V \sigma \bar{\varepsilon} dV = \int_s ds \int_A \sigma \bar{\varepsilon} dA, \quad (39.7)$$

$$\sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{R} r = \int_V \bar{\sigma} \varepsilon dV = \int_s ds \int_A \bar{\sigma} \varepsilon dA. \quad (39.7a)$$

但し A は横断面積、 s は棒狀物體の軸に沿つての長さである。

特にトラスの如く之を構成する部材には軸方向力のみが作用し、各部材
の横断面 A 及び横断面に於ける垂直應力と垂直歪が各部材毎に其の全長 s
を通じて常數である場合には

$$\sum P_m \bar{\delta}_m + \sum R \bar{r} = \sum \sigma \bar{\varepsilon} A s, \quad (39.8)$$

$$\sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{R} r = \sum \bar{\sigma} \varepsilon A s \quad (39.8a)$$

になる。而して部材の軸方向力即ち部材應力を S 又は \bar{S} 、ヤング係数を E と
し、且つ温度が t 上昇するものとし、其の膨脹係数を α とすると

$$\sigma = \frac{S}{A}, \quad \varepsilon = \frac{S}{EA} + \alpha t,$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{S}}{A}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{S}}{EA} + \alpha \bar{t}$$

であるから(39.8), (39.8a)式は

$$\sum P_m \bar{\delta}_m + \sum R \bar{r} = \sum S \left(\frac{\bar{S}}{EA} + \alpha \bar{t} \right) s,$$

$$\sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{R} r = \sum \bar{S} \left(\frac{S}{EA} + \alpha t \right) s$$

になり、簡單のために

$$\rho = \frac{S}{EA}$$

とすると

$$\sum P_m \bar{\delta}_m = \sum S \bar{S} \rho + \sum S \alpha \bar{t} s - \sum R \bar{r}, \quad (39.9)$$

$$\sum \bar{P}_m \delta_m = \sum \bar{S} S \rho + \sum \bar{S} \alpha t s - \sum \bar{R} r \quad (39.9a)$$

になる。

梁の如く曲げモーメントを受ける部材に於ては、其の横断面の垂直應力
及び垂直歪は横断面中のみならず横断面の位置に依つても變化する。而し
て一般に $\varepsilon = \sigma/E + \alpha t$ であるから(39.7), (39.7a)式は

$$\sum P_m \bar{\delta}_m + \sum R \bar{r} = \int_s ds \int_A \sigma \left(\frac{\bar{\sigma}}{E} + \alpha \bar{t} \right) dA, \quad (39.10)$$

$$\sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{R} r = \int_s ds \int_A \bar{\sigma} \left(\frac{\sigma}{E} + \alpha t \right) dA \quad (39.10a)$$

になる。今、外力がすべて xy -面内に作用し、横断面が xy -面に對して左右對
稱である場合には(7.8)式に依つて一般に

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \zeta, \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{A} + \frac{\bar{M}}{I} \zeta$$

である。但し N, M は實際の外力 P, R に依る軸方向力及び曲げモーメン
ト、 \bar{N} 及び \bar{M} は假想外力 \bar{P}, \bar{R} に依る軸方向力及び曲げモーメントである。

此の σ 或は $\bar{\sigma}$ を前式に代入すれば

$$\begin{aligned} \sum P_m \bar{\delta}_m + \sum R \bar{r} &= \int_s ds \int_A \left(\frac{\bar{N}}{EA} + \frac{\bar{M}}{EI} \zeta + \alpha \bar{t} \right) \sigma dA \\ &= \int_s ds \left\{ \frac{\bar{N}}{EA} \int_A \sigma dA + \frac{\bar{M}}{EI} \int_A \sigma \zeta dA + \alpha \bar{t} \int_A \sigma dA \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{R} r &= \int_s ds \int_A \left(\frac{N}{EA} + \frac{M}{EI} \zeta + \alpha t \right) \bar{\sigma} dA \\ &= \int_s ds \left\{ \frac{N}{EA} \int_A \bar{\sigma} dA + \frac{M}{EI} \int_A \bar{\sigma} \zeta dA + \alpha t \int_A \bar{\sigma} dA \right\} \end{aligned}$$

になる。然るに(7.1)に依つて

$$\int_A \sigma dA = N, \quad \int_A \sigma \xi dA = M, \quad \int_A \bar{\sigma} dA = \bar{N}, \quad \int_A \bar{\sigma} \xi dA = \bar{M}$$

であるから上式は結局に於て次の如くなる。

$$\Sigma P_m \bar{\delta}_m = \int \frac{NN}{EA} ds + \int \frac{MM}{EI} ds + \int N \alpha \bar{\xi} ds - \Sigma R \bar{r}, \quad (39.11)$$

$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m = \int \frac{\bar{N}\bar{N}}{EA} ds + \int \frac{\bar{M}\bar{M}}{EI} ds + \int \bar{N} \alpha \bar{\xi} ds - \Sigma \bar{R} \bar{r}. \quad (39.11a)$$

トラスの如き滑節骨組と梁の如き剛節骨組とを組合せた構造物の場合には(39.9)と(39.11)或は(39.9a)と(39.11a)とを組合せればよい。

§ 40. 仮想仕事の原理に依る構造物の弾性変形の算定法

構造物の弾性変形に関する問題は結局に於ては次に示す四種の問題のうちの一つの何れかの一問題或は其の組合せになる。

(I) 與へられたる點 m の與へられたる方向の變位、即ち與へられたる直線に於ける點 m の全變位の射影を求めること。

(II) 與へられたる二點 m_1, m_2 間の距離の變化を求めること。

(III) 與へられたる二點 m_1, m_2 を結ぶ直線、或は構造物中の或る點に固定せられた直線の回轉角を求めること。

(IV) 上記と同様の性質を有する二つの直線間の夾角の變化を求めること。

このうち(II)は(I)の組合せであり、同様に(IV)は(III)の組合せに過ぎないのであるが、實際の問題に於ては(II)及び(IV)は(I)或は(III)と同程度に重要な問題であり、また之を別個に考察する方が簡明且つ便利であるので茲に之等を獨立の問題として取上げたのである。(I)、(II)に於て求め

るものは言ふまでもなく長さに依つて數值的に表はされる量であり、(III)及び(IV)に於ては角を求めるのであるが、角は一般に單位長の半徑を有する圓弧の長さに依つて示し得るものであるから、前記の四問題に於ける變位及び回轉角は一般に δ_m を以て表はすことが出来る。

扱て此の δ_m を前述の仮想仕事の原理に依つて算定するには、與へられたる問題に應じて適當なる仮想荷重を考へ(39.9a)或は(39.11a)の左邊の $\Sigma \bar{P}_m \delta_m$ が丁度 $1 \cdot \delta_m$ に等しくなる様にすればよい。此のためには前記の四問題に應じて夫々次の如き仮想荷重を採用すればよい。

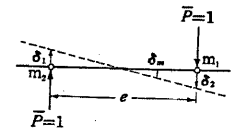
(I) 點 m に於て δ_m の正の方向に $\bar{P}_m = 1$ を作用せしめる。此の場合の $\Sigma \bar{P}_m \delta_m$ が $1 \cdot \delta_m$ に等しきことは言ふまでもない。

(II) 二點 m_1, m_2 に、夫々 $m_2 m_1$ 及び $m_1 m_2$ の方向に $\bar{P}_{m_1} = 1$ 及び $\bar{P}_{m_2} = 1$ を作用せしめる。 m_1, m_2 の $m_2 m_1$ 或は $m_1 m_2$ の方向の變位を夫々 δ_1 及び δ_2 とし、此の二點の間の距離の増加を δ_m とすれば $\delta_m = \delta_1 + \delta_2$ であるから、此の仮想荷重の仕事は

$$1 \cdot \delta_1 + 1 \cdot \delta_2 = 1(\delta_1 + \delta_2) = 1 \cdot \delta_m$$

になる。

(III) 與へられたる直線に、其の方向が直線の回轉の正の方向に一致する仮想モーメント $\bar{M} = 1$ 、或はモーメントの大きさが1に等しい任意の偶力を作用せしめる。それには、例へば第177圖の如く、與へられたる直線上の與へられたる(或は任意の)二點 m_1 及び



第 177 圖

m_2 (其の距離を e とす)に於て、與へられたる直線に垂直に且つ其の回轉の正の方向に $1/e$ の大きさの仮想偶力を作用せしめればよい。此の仮想偶力の方向に於ける m_1, m_2 の變位を δ_1, δ_2 とし、直線の回轉角を δ_m とすると、之

等は一般に微小であるから

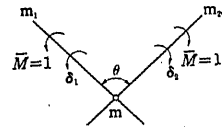
$$\delta_1 + \delta_2 = e \tan \delta_m = e \delta_m,$$

従つて上記の仮想偶力の仕事は

$$\frac{1}{e} \delta_1 + \frac{1}{e} \delta_2 = \frac{1}{e} (\delta_1 + \delta_2) = 1 \cdot \delta_m$$

になる。

(V) 第178圖の如く與へられたる二直線 mm_1 及び mm_2 に、夫々上記 (III) の如く仮想モーメント $\bar{M}_1 = 1, \bar{M}_2 = 1$ 或は之に同等の仮想偶力



第 178 圖

を作用せしめる。直線 mm_1, mm_2 の回轉角を夫々 δ_1, δ_2 とし、其の夾角 θ の増加を δ_m とすると $\delta_m = \delta_1 + \delta_2$ であり、上記の仮想モーメント或は仮想偶力の仕事は、直線 mm_1 に於ては $1 \cdot \delta_1$ 、直線 mm_2 に於ては $1 \cdot \delta_2$ であるから、之を加へれば

$$1 \cdot \delta_1 + 1 \cdot \delta_2 = 1(\delta_1 + \delta_2) = 1 \cdot \delta_m$$

になる。

上記の如く與へられたる問題に應じて $\sum \bar{P}_m \delta_m = 1 \cdot \delta_m$ になるが如き仮想荷重を選び、之に依る反力 \bar{R} 、部材應力 \bar{S} 、軸方向力 \bar{N} 、曲げモーメント \bar{M} を計算すれば、實際の荷重に依る變位或は回轉角 δ_m は次式に依つて之を求めることが出来る。

$$1 \cdot \delta_m = \sum \bar{S} S \rho + \sum \bar{S} \alpha t s - \sum \bar{R} r, \quad (40.1)$$

$$\text{或は} \quad 1 \cdot \delta_m = \int \frac{\bar{N} N}{EA} ds + \int \frac{\bar{M} M}{EI} ds + \int N \alpha t ds - \sum \bar{R} r. \quad (40.2)$$

實際の構造物に於てはヤング係數 E 及び膨脹係數 α は構造物の全體を通じて一定であるのが普通である。此の様な場合の實際の數値計算を簡單にするには、適當なる基準部材の斷面積 A_c 或は斷面二次モーメント I_c を

選定して δ_m の $E A_c$ 倍或は $E I_c$ 倍を算出すればよい。即ち (40.1) 及び (40.2) は夫々次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E A_c \delta_m &= \sum \bar{S} S s' + E A_c (\alpha \sum \bar{S} t s - \sum \bar{R} r), \\ \text{但し} \quad s' &= s \frac{A_c}{A}; \end{aligned} \right\} \quad (40.3)$$

$$E I_c \delta_m = \int \bar{M} M \frac{I_c}{I} ds + \int \bar{N} N \frac{I_c}{A} ds + E I_c (\alpha \sum \bar{N} t s - \sum \bar{R} r). \quad (40.4)$$

尚、或る點の全變位を求めるには任意の二方向の變位を求め、之を平行四邊形の法則に依つて合成すればよい。

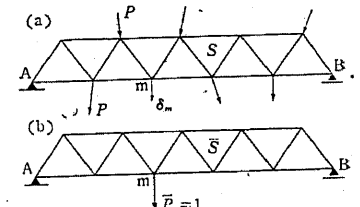
§ 41. 例題

以下、數種の例題を掲げる。但し問題を簡單にするために温度は變化しないものとする。

問題 1. 第 179 圖 (a) の單純トラスの節點 m の撓みを求む。

支點 A は變位せず、また支點 B も其の反力の作用線に平行に變位することは不可能であるから $\sum \bar{R} r = 0$ である。従つて一般に

$$\left. \begin{aligned} \delta_m &= \sum \bar{S} S \rho \\ \text{或は} \quad E A_c \delta_m &= \sum \bar{S} S s' \end{aligned} \right\} \quad (41.1)$$



第 179 圖

が成立する。扱て節點 m の撓み、即ち鉛直變位 δ_m を求めるには前節 (I) に従ひ節點 m に鉛直下向に仮想荷重 $\bar{P}_m = 1$ を作用せしめ、之に依る部材應力 \bar{S} と實際の荷重に依る部材應力 S とを上式に代入すればよい。實際の數値計算には次記の如き型式の表を作製して計算するのが便利である。

部 材	s	s'	S	S	$\bar{S}Ss'$
1					
2					
.					
.					
				$EAc\delta_m =$	$\Sigma \bar{S}Ss'$

節点 m に実際の荷重 $P_m = 1$ のみが作用する場合の δ_m は、此の場合には $S = \bar{S}$ であるから

$$\delta_m = \Sigma \bar{S}^2 \rho \quad \text{或は} \quad EAc\delta_m = \Sigma \bar{S}^2 s' \quad (41.2)$$

になる。

問題 2. 第 180 圖 (a) の三鉸アーチの頂鉸 G の全変位を求めよ。

本問題の如く支点が変位しない場合

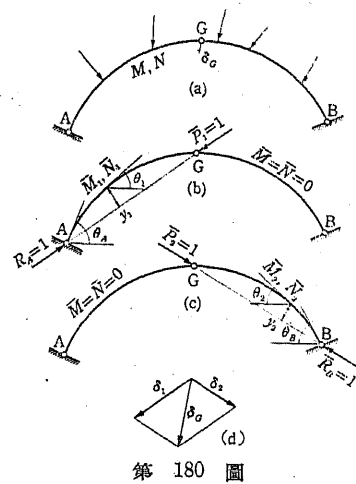
には一般に

$$\delta_m = \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}N}{EA} ds \quad (41.3)$$

である。 G の全変位は任意の二方向の分変位を合成することに依つて決定せられる。そのために G の GA 及び GB の方向の分変位 δ_1 及び δ_2 を求める。

δ_1 を求めるには G に於て GA の方向に假想荷重 $\bar{P}_1 = 1$ を作用せしめる。

此の假想荷重状態に於ては A に於ける反力は AG の方向に作用し其の大きさは 1 に等しく、 B に於ける反力は零である。従つて BG 間に於ては $\bar{M} = 0$ 、 $\bar{N} = 0$ であつて、 AG 間に於ては一般に



第 180 圖

$$\bar{M}_1 = -1 \cdot y_1, \quad \bar{N}_1 = -1 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_A)$$

になり、依つて δ_1 は次の如くなる。

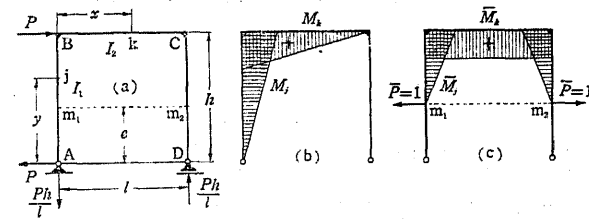
$$\delta_1 = - \int_A^G \frac{M}{EI} y_1 ds - \int_A^G \frac{N}{EA} \cos(\theta_1 - \theta_A) ds.$$

之と同様に第 180 圖 (c) の如く G に於て GB の方向に假想荷重 $\bar{P}_2 = 1$ を作用させれば

$$\delta_2 = - \int_G^B \frac{M}{EI} y_2 ds - \int_G^B \frac{N}{EA} \cos(\theta_2 - \theta_B) ds$$

になり、この δ_1 と δ_2 を第 180 圖 (d) の如く合成すれば G の全変位 δ_G が得られる。

問題 3. 第 181 圖 (a) の如き静定門形ラーメンに於て、水平荷重 P に依る二点 m_1, m_2 の距離の變化を求めよ。



第 181 圖

ラーメン或は梁に於ては軸方向力の影響は曲げモーメントの影響に比べて一般に極めて小である。従つて軸方向力に依る影響を無視すれば

$$\delta_m = \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds \quad (41.4)$$

になる。

實際の水平荷重 P に依る曲げモーメント M は (b) に示すが如く、柱材 CD に於ては零であつて、柱材 AB 、梁 BC に対しては次の如くなる。

$$M_j = +Py, \quad M_k = + \frac{Ph}{l}(l-x).$$

m_1, m_2 間の距離の變化 δ_m に対しては、前節(II)に従ひ第 181 圖(c)の如く m_1, m_2 に夫々 $m_2 m_1, m_1 m_2$ の方向に $\bar{P}=1$ を作用せしめる。此の場合には反力は生ぜず、且つ m_1, m_2 より下方に於ては $\bar{M}=0$ である。 m_1, m_2 より上方に於ける曲げモーメントは(c)に示すが如く

$$\bar{M}_j = +1(y-e), \quad \bar{M}_k = +1(h-e)$$

である。故に、柱材及び梁の断面二次モーメントを夫々 I_1, I_2 とすれば

$$\begin{aligned} \delta_m &= \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds = \frac{1}{EI_1} \int_e^h \bar{M}_j M_j dy + \frac{1}{EI_2} \int_0^l \bar{M}_k M_k dx \\ &= \frac{P}{EI_1} \int_e^h (y-e)y dy + \frac{Ph(h-e)}{EI_2 l} \int_0^l (l-x) dx \end{aligned}$$

になり、此の積分を行へば δ_m は次の如くなる。

$$\delta_m = \frac{P}{6E} (h-e) \left[-\frac{1}{I_1} (h-e)(2h+e) + \frac{3hl}{I_2} \right]. \quad (41.5)$$

尚、支點間の距離の變化、即ち支點 B の水平變位 δ_B を求めるには上式に於て $e=0$ とすればよい。即ち次の如くなる。

$$\delta_B = \frac{Ph^2}{6E} \left(\frac{2h}{I_1} + \frac{3l}{I_2} \right). \quad (41.6)$$

問題 4. 前問題のラーメンに於ける柱材 AB の回轉角を求む。

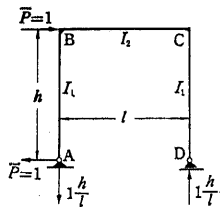
前節(III)に従ひ第 182 圖の如く A, B に假想偶力 $\bar{P}=1/h$ を作用せしめる。之に依る曲げモーメントの分布は第 181 圖(b)と同様であつて

$$\bar{M}_j = \frac{1}{h} y,$$

$$\bar{M}_k = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{l} (l-x) = \frac{1}{l} (l-x)$$

である。故に AB の回轉角 δ_m は次の如くなる。

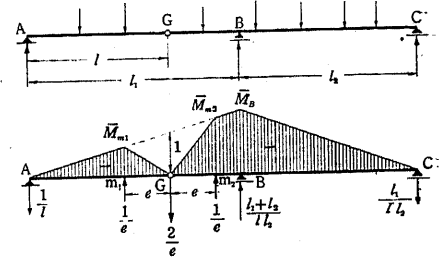
$$\begin{aligned} \delta_m &= \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds = \frac{P}{EI_1 h} \int_0^h y^2 dy + \frac{Ph}{EI_2 l^2} \int_0^l (l-x)^2 dx, \\ \delta_m &= \frac{Ph}{3E} \left(\frac{h}{I_1} + \frac{l}{I_2} \right). \quad (41.7) \end{aligned}$$



第 182 圖

問題 5. 第 183 圖に示すゲルバー梁のヒンジ G に於ける其の左右にある梁端の相對回轉角を求む。

荷重をすべて鉛直とすれば梁の横断面には軸方向力は作用しないから、 δ_m は(41.4)より計算せられる。



第 183 圖

本問題に於てはヒンジ G の左右に於ける梁端の相對回轉角を δ_m とし、G が下方に變位

する場合の δ_m を正とする。之を求めるには前節(IV)に従ひ G より任意の距離 e にある二點 m_1, m_2 をとり、左側の梁に對しては m_1, G に於て、右側の梁に對しては G, m_2 に於て夫々モーメントの値が 1 に等しき偶力 $1/e$ を圖示の如き方向に作用せしめる。此の假想偶力に依る反力は

$$\bar{R}_A = -\frac{1}{l}, \quad \bar{R}_B = +\frac{l_1+l_2}{l_2 l}, \quad \bar{R}_C = -\frac{l_1}{l_2 l}$$

であつて、曲げモーメントは圖示の如くに分布し、特に m_1, m_2, B に於ては

$$\bar{M}_{m_1} = -1 \frac{l-e}{l}, \quad \bar{M}_{m_2} = -1 \frac{l+e}{l}, \quad \bar{M}_B = -1 \frac{l_1}{l}$$

になる。之等の \bar{M} 及び實際の荷重に依る M を(41.4)に代入して積分を行へば、それに依つて δ_m を求めることが出来る。

問題 6. 第 184 圖の如く三角形を形成する部材に夫々 $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ の垂直應力が作用するとき、之に依る三角形の内角 A, B, C の變化 $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ を求む。

例へば ΔA を求めるには、前節(IV)に従ひ、部材 AC に對しては A, C に於て反時計の方向の偶力 $1/b$ を、部材 AB に對しては A, B に於て時計の方

向の偶力 $1/c$ を作用せしめる。之等の偶力のモーメントの値は共に 1 に等しい。之等の仮想偶力に依る部材應力は次の如くなる。

$$\bar{S}_a = +\frac{1}{h_a}, \quad \bar{S}_b = -\frac{1}{h_a} \cos C,$$

$$\bar{S}_c = -\frac{1}{h_a} \cos B$$

部材の断面積を夫々 A_a, A_b, A_c とすれば $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ に對する部材應力は

$$S_a = \sigma_a A_a, \quad S_b = \sigma_b A_b, \quad S_c = \sigma_c A_c$$

になり、之等の \bar{S}, S を (41.1) に代入すれば

$$\delta_m = \Delta A = \frac{\sigma_a A_a}{h_a} \rho_a - \frac{\sigma_b A_b}{h_a} \rho_b \cos C - \frac{\sigma_c A_c}{h_a} \cos B$$

になる。然るに

$$\rho_a = \frac{a}{EA_a}, \quad \rho_b = \frac{b}{EA_b}, \quad \rho_c = \frac{c}{EA_c}$$

であるから

$$\Delta A = \frac{1}{E h_a} (\sigma_a a - \sigma_b b \cos C - \sigma_c c \cos B)$$

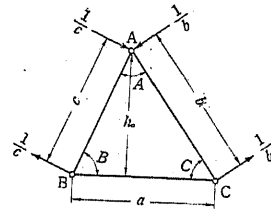
になり、茲に於て

$$a = h_a (\cot B + \cot C), \quad b \cos C = h_a \cot C, \quad c \cos B = h_a \cot B$$

なることを考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \Delta A &= (\sigma_a - \sigma_b) \cot C + (\sigma_a - \sigma_c) \cot B, \\ \text{同様に} \quad E \cdot \Delta B &= (\sigma_b - \sigma_c) \cot A + (\sigma_b - \sigma_a) \cot C, \\ E \cdot \Delta C &= (\sigma_c - \sigma_a) \cot B + (\sigma_c - \sigma_b) \cot A \end{aligned} \right\} \quad (41.8)$$

を得る



第 184 圖

§ 42. 相反作用の定理

温度が變化せず且つ反力が仕事をなさざる弾性構造物に於ては前々節に説明せる如く一般に次式が成立する。

$$\Sigma P_m \delta_m = \int \frac{MM}{EI} ds + \int \frac{NN}{EA} ds + \Sigma S \bar{S} \rho,$$

$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m = \int \frac{\bar{M}\bar{M}}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}\bar{N}}{EA} ds + \Sigma \bar{S} S \rho.$$

然るに此の兩式の右邊は相等しいから

$$\Sigma P_m \delta_m = \Sigma \bar{P}_m \delta_m. \quad (42.1)$$

上式に於ける δ_m は實際の荷重 ΣP_m には全く無關係なる任意の荷重 $\Sigma \bar{P}_m$ に依る P_m の作用點の P_m の方向に於ける變位であり、 δ_m は ΣP_m に依る \bar{P}_m の作用點の \bar{P}_m の方向の變位である。而して ΣP_m と $\Sigma \bar{P}_m$ とは全く無關係であるから、一般に互に無關係なる二つの荷重状態 (a) と (b) とを考へ、(a) に於ける荷重を P_a , (b) に於ける荷重を P_b , ΣP_b に依る P_a の作用點の P_a の方向の變位を δ_{ab} , ΣP_a に依る P_b の作用點の P_b の方向の變位を δ_{ba} とする。と之等の間には次の關係が成立することになる。

$$\Sigma P_a \delta_{ab} = \Sigma P_b \delta_{ba}. \quad (42.2)$$

之を言ひ現せば次の如くなる。

或る釣合状態 (a) に於ける荷重が之に無關係なる釣合状態 (b) に於ける變位に對して爲す仕事は (b) に於ける荷重が (a) に於ける變位に對して爲す仕事に相等し。

此の定理は Betti に依つて始めて證明せられたものであつて、之を Betti の定理 と言ふ。

Betti の定理の特別なる場合のうちで最も重要なものは、(a), (b) の荷

重として夫々單位荷重を採用する場合である。即ち構造物の或る一點 a に $P_a = 1$ が作用する場合を (a), 他の一點 b に $P_b = 1$ が作用する場合を (b) とすれば

$$\sum P_a \delta_{ab} = 1 \cdot \delta_{ab}, \quad \sum P_b \delta_{ba} = 1 \cdot \delta_{ba},$$

即ち
$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \quad (42.3)$$

になる。之を言ひ現せば次の如くなる。

弾性構造物の或る一點 b に作用する單位荷重 $P_b = 1$ に依る他の一點 a の P_a の方向の變位は、a に作用する單位荷重 $P_a = 1$ に依る b の P_b の方向の變位に相等し。

此の定理を Maxwell の定理と言ひ、之と前記の Betti の定理とを一般に弾性變形に関する相反作用の定理と言ふ。

§ 43. 弾性變形の仕事

或る物體が外力の作用を受けて變形すれば外力の作用點は一般に變位するから外力は一般に或る量の仕事をする。今、此の物體を弾性體とし、其の變形の速度が十分に小なるものとし、且つ變形せざる限り如何なる運動をもなし得ざる様に支持されて居るものとすれば、上記の外力の仕事は此の弾性體内にポテンシャルエネルギーとして蓄積せられ、外力が消失する場合には再び外部に對する仕事又はエネルギーとして放出せられるものである。かくの如く弾性體に作用する外力が其の弾性體の弾性變形に際して爲す仕事を弾性變形の仕事¹⁾と言ひ、之に依つて弾性體内に與へられるエネルギー

1) 之は獨逸語に於ける Formänderungsarbeit の定義に従つたものである。例へば Föppl, A.: "Technische Mechanik", V, 4 Aufl., 262 (1922) 參照。尙之を“外力仕事”とも言ふ。

を歪エネルギー¹⁾、而して弾性體内に蓄積せられたるエネルギーを弾性エネルギーと言ふ。之等の仕事及びエネルギーの大きさが相等しきことは言ふまでもない。

構造力學に於ては外力はすべて衝撃を伴ふことなく零から徐々に増大して其の最終値に達するものと假定するのが普通である。此の場合には弾性變形も亦之と同一の過程をとることは明かであつて、今或る弾性體に一つの外力が作用し、其の最終値を P 、弾性體の弾性變形に依る P の變位の最終値を δ とすれば、此の場合の弾性變形の仕事 W は、周知の如く

$$W = \frac{1}{2} P \delta \quad (43.1)$$

になる。本式は P が力ではなく力のモーメントである場合でも δ を回轉變位とすれば同様に成立する。

また弾性體に二つの外力 P_1, P_2 が作用する場合に、例へば P_1 が最初に作用したものとし、 P_1 の變位を δ_{11} とすれば、弾性變形の仕事は $\frac{1}{2} P_1 \delta_{11}$ になる。次に P_2 が作用するものとし、之に依る P_1 の變位を δ_{12} 、 P_2 の變位を δ_{22} とすれば、此の場合には P_2 は零より徐々に増大するが P_1 は不變であるから、此の場合の弾性變形の仕事は $P_1 \delta_{12} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{22}$ になる。従つて最初に P_1 が作用し次に P_2 が作用した場合の弾性變形の仕事は

$$W' = P_1 \left(\frac{\delta_{11}}{2} + \delta_{12} \right) + \frac{1}{2} P_2 \delta_{22},$$

同様にして P_2 が最初に作用し次に P_1 が作用した場合の弾性變形の仕事は

$$W'' = \frac{1}{2} P_1 \delta_{11} + P_2 \left(\delta_{21} + \frac{\delta_{22}}{2} \right)$$

になる。然るに Betti の定理 (42.2) に依つて $P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21}$ であるから、上

1) “歪エネルギー”と“内力仕事”とは一般に同義語として使用されて居る様であるが、筆者は、弾性變形に於ける内力仕事は歪エネルギー、従つて弾性變形の仕事と大きさは相等しいが、符號は反對であると考へる。このことは假想仕事の原理からも明瞭であるし、また内力は弾性變形に反抗し乍ら仕事をなし、従つて負の仕事をなし、弾性變形が消失する際に正の仕事をし得る状態に置かれることからわかる。

式は何れも

$$W' = W'' = \frac{1}{2} P_1 (\delta_{11} + \delta_{12}) + \frac{1}{2} P_2 (\delta_{21} + \delta_{22})$$

になる。而して $\delta_{11} + \delta_{12}$ 及び $\delta_{21} + \delta_{22}$ は夫々 P_1 及び P_2 の此の兩荷重が作用した後に於ける變位の最終値であつて、之を δ_1 及び δ_2 とすれば

$$W' = W'' = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2$$

になる。このことは多數の外力が作用する場合に於ても同様であつて、従つて次の如く云ふことが出来る。

弾性體に多くの外力 P_1, P_2, \dots が作用する場合、 P_1, P_2, \dots の其の方向の弾性變位の最終値を $\delta_1, \delta_2, \dots$ とすれば弾性變形の仕事は外力の作用する順序に無關係に

$$W = \frac{1}{2} \sum P_i \delta_i \tag{43.2}$$

に等し。

此のことは P_i がモーメントである場合に於ても δ_i を其の回轉變位とすれば同様に成立する事柄である。

弾性變形の仕事はまた弾性體内部の應力成分及び歪成分に依つて表はすことも出来る。今、弾性體内に於て微小直六面體 $dx dy dz$ を考へ其の各面に生ずる應力成分の最終値を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 、歪成分の最終値を $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ とすれば、弾性體に作用する外力が零より徐々に其の最終値に達する場合には之等の應力成分及び歪成分も亦之と同様の過程をとることは明かである。従つて上記の應力を微小直六面體 $dx dy dz$ に對する外力と考へれば其の弾性變形の仕事は

$$\frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz$$

になる。之は應力を媒介として微小直六面體 $dx dy dz$ に與へられる歪エネルギーである。従つて $dx dy dz$ を簡単に dV とすれば弾性體の全體積 V

に與へられる歪エネルギーの總和、即ち弾性變形の仕事は上式を積分することに依つて得られる。即ち

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV. \tag{43.3}$$

扱て梁又はトラス或はラーメンの如く棒狀弾性體より成る平面構造物に於ては、既に§89に於て説明せるが如く、横斷面に垂直なる應力及び歪以外
の應力及び歪の影響は極めて微小である。従つて横斷面に垂直なる應力及び歪を σ 及び ϵ とし、 A を横斷面積、 s を部材の長さとするれば

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_s \int_A \sigma \epsilon dA ds \tag{43.4}$$

とすることが出来る。茲に於て $\sigma = \epsilon/E$ とすれば

$$W = \frac{1}{2} \int_s ds \int_A \frac{\sigma^2}{E} dA = \frac{1}{2} \int_s ds \int_A E \epsilon^2 dA \tag{43.5}$$

になる。

特にトラスの場合に、 S = 部材應力、 A = 斷面積、 s = 部材の長さとし、 S 及び A を各部材毎に常數とすると $\sigma = S/A$ も部材毎に常數になり、従つて

$$W = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 s}{EA} = \frac{1}{2} \sum S^2 \rho \tag{43.6}$$

になる。但し $\rho = s/EA$ である。

また梁又はラーメン等の如く曲げモーメント M 及び軸方向力 N を受ける場合に、その部材の横斷面が外力の作用面に對して左右對稱であるとすれば

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \zeta$$

であるから

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_s ds \int_A \frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{I} \zeta \right)^2 dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_s ds \left\{ \frac{N^2}{A^2} \int_A \frac{1}{E} dA + 2 \frac{MN}{IA} \int_A \zeta dA + \frac{M^2}{I^2} \int_A \zeta^2 dA \right\}
 \end{aligned}$$

になり、茲に於て

$$\int_A dA = A, \quad \int_A \zeta dA = 0, \quad \int_A \zeta^2 dA = I$$

なることを考慮すれば

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} ds \quad (43.7)$$

になる。

§ 44. Castigliano の定理及び最小仕事の原理

今、或る弾性體に多くの外力 $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$ が作用して此の弾性體が弾性變形をしたものとすれば、此の場合の弾性變形の仕事 W は少くとも之等の外力の函数と考へることが出来、従つて一般に

$$W = f(P_1, P_2, \dots, P_m, \dots) \quad (44.1)$$

とすることが出来る。

此の場合に於て弾性體の或る一點 a に作用する外力を P_a, P_a の方向に於ける a の變位を δ_a , m に作用する外力 $P_m = 1$ のみに依る δ_a を一般に δ_{am} とすれば、 δ_a は

$$\delta_a = \delta_{a1}P_1 + \delta_{a2}P_2 + \dots + \delta_{am}P_m + \dots \quad (44.2)$$

になる。

今、或る一つの外力例へば P_m のみが極めて微小なる變化 dP_m をしたものとすれば、之に依る δ_a の變化は

$$\frac{\partial \delta_a}{\partial P_m} dP_m = \delta_{am} dP_m$$

である。従つて dP_m に依る弾性變形の仕事の變化は

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} dP_m = (P_1 \delta_{1m} + P_2 \delta_{2m} + \dots + P_m \delta_{mm} + \dots) dP_m,$$

$$\text{故に} \quad \frac{\partial W}{\partial P_m} = P_1 \delta_{1m} + P_2 \delta_{2m} + \dots + P_m \delta_{mm} + \dots$$

になる。然るに Maxwell の定理に依つて一般に $\delta_{am} = \delta_{ma}$ なることを考へれば、上式の右邊は與へられたる外力に依る P_m の作用點の P_m の方向に於ける變位 δ_m に等しい。故に

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \delta_m \quad (44.3)$$

になる。即ち

弾性體の一點 m の茲に作用する外力 P_m の方向に於ける變位 δ_m は弾性變形の仕事の P_m に就ての偏微分係數に相等し。

此の定理は Castigliano に依つて始めて證明せられたものであつて、之を Castigliano¹⁾ の定理 と言ふ。本定理は前述の假想仕事の原理と共に構造力学に於て最も應用の廣い定理の一つである。

本定理、即ち式(44.3)は荷重 P_m の作用點 m の P_m の方向の變位 δ_m を與へるものであるが、荷重が作用しない點の變位も本定理を應用して求めることが出来る。即ち荷重が作用しない點 m の與へられたる方向の變位 δ_m を求めるには、先づ此の點に δ_m の方向に假想荷重 \bar{P}_m が作用するものと考へて W を計算し、此の W の \bar{P}_m に就ての偏微分係數を求めたる後 $\bar{P}_m = 0$ と置けばよい。之と同様に夫々適當な假想荷重を考へれば任意の點の任意の方向の變位のみならず、一對の點の距離の變化、一直線の回轉角或は一對の直線間の夾角の變化を Castigliano の定理に依つて求めることが出来る。

1) Castigliano, A.: "Théorème de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications", Turin (1879)—英譯: Andrews, E. S.: "Elastic stresses in structures", London (1919)

弾性變形の仕事 W は前節に於て説明せる所に依り一般に

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \sum S^2 \rho \quad (44.4)$$

とすることが出来る。今之を P_m に就て偏微分すれば

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \int \frac{\partial N}{\partial P_m} \frac{N}{EA} ds + \int \frac{\partial M}{\partial P_m} \frac{M}{EI} ds + \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} S \rho$$

になる。然るに N, M, S はすべて荷重の一次函数であつて、 $N_m, \bar{M}_m, \bar{S}_m$ を $P_m = 1$ に依る N, M, S とすれば、一般に

$$N = \bar{N}_1 P_1 + \bar{N}_2 P_2 + \dots + \bar{N}_m P_m + \dots,$$

$$M = \bar{M}_1 P_1 + \bar{M}_2 P_2 + \dots + \bar{M}_m P_m + \dots,$$

$$S = \bar{S}_1 P_1 + \bar{S}_2 P_2 + \dots + \bar{S}_m P_m + \dots$$

とすることが出来る。依つて

$$\frac{\partial N}{\partial P_m} = \bar{N}_m, \quad \frac{\partial M}{\partial P_m} = \bar{M}_m, \quad \frac{\partial S}{\partial P_m} = \bar{S}_m,$$

$$\delta_m = \frac{\partial W}{\partial P_m} = \int \frac{\bar{N}_m N}{EA} ds + \int \frac{\bar{M}_m M}{EI} ds + \sum \bar{S}_m S \rho \quad (44.5)$$

になる。之即ち前に説明せる假想仕事の原理の式である。

(44.5) の $\partial W / \partial P_m$ を更に P_m にて偏微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial P_m^2} &= \int \frac{\bar{N}_m}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} ds + \int \frac{\bar{M}_m}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_m} ds + \sum \bar{S}_m \frac{\partial S}{\partial P_m} \rho \\ &= \int \frac{\bar{N}_m^2}{EA} ds + \int \frac{\bar{M}_m^2}{EI} ds + \sum \bar{S}_m^2 \rho \end{aligned}$$

になり、本式の右邊は常に正である。

故に若し P_m を變位せざる外力に選べば

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = 0 \quad (44.6)$$

になり、 $\partial^2 W / \partial P_m^2$ が前述の如く正なるが故に、本式は弾性變形の仕事が P_m

に關して極小なることを意味し、従つて (44.6) 式を最小仕事の原理と言ふ。

之は又 Castigliano の第二定理 とも呼ばれ不靜定構造物の解析に於て廣き應用を有するものである。

以下二つの例題を掲げる。

問題 1. EI の常數なる第 185 圖の片持梁の先端 A の撓み δ_A 及び同轉角 i_A を求む。

曲げモーメントは $M = -Px$,

$$\text{従つて} \quad W = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6EI}.$$

$$\text{故に} \quad \delta_A = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (44.7)$$

になる。

i_A を求めるには第 185 圖(b)の如く A にモーメント \bar{M} を作用せしめる。此の場合の曲げモーメントは

$$M = -Px - \bar{M},$$

従つて

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^l (Px + \bar{M})^2 dx = \frac{1}{2EI} \left(\frac{P^2 l^3}{3} + \bar{M} Pl^2 + \bar{M}^2 l \right),$$

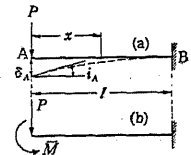
$$\frac{\partial W}{\partial \bar{M}} = \frac{1}{2EI} (Pl^2 + 2\bar{M}l).$$

然るに實際に於ては $\bar{M} = 0$ なるが故に

$$i_A = \frac{Pl^2}{2EI} \quad (44.8)$$

になる。

問題 2. 第 186 圖に示す不靜定梁の反力 R_A 及び荷重作用點の撓み δ_m を求む。

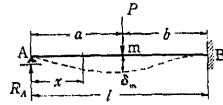


第 185 圖

曲げモーメントは

$$0 \leq x \leq a: \quad M = R_A x,$$

$$a \leq x \leq l: \quad M = R_A x - P(x - a)$$



第 186 圖

であるから、EI を常數とすれば

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^a (R_A x)^2 dx + \int_a^l (R_A x - P(x - a))^2 dx \right]$$

$$= \frac{1}{6EI} [R_A^2 l^3 - R_A P b^2 (2l + a) + P^2 b^3]$$

になり、之を R_A にて偏微分すれば

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = \frac{1}{6EI} [2R_A l^3 - P b^2 (2l + a)].$$

然るに R_A は變位せざるが故に $\partial W / \partial R_A = 0$, 即ち

$$R_A = \frac{P b^2 (2l + a)}{2 l^3}. \tag{44.9}$$

次に δ_m を求めるには上記の W を P にて偏微分する。即ち

$$\delta_m = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{6EI} [-R_A b^2 (2l + a) + 2 P b^3],$$

此の R_A に前式の値を代入して整理すれば次の結果になる。

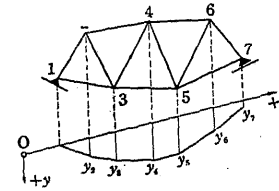
$$\delta_m = \frac{P a^2 b^3 (4a + 3b)}{12EI l^3}. \tag{44.10}$$

§ 45. 梁の撓み曲線

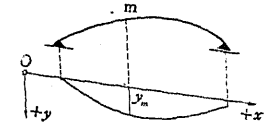
前述の假想仕事の原理、或は Castigliano の定理に依つて構造物の個々の點の與へられたる方向の變位を算出することが出来る。然し場合に依つては構造物のすべての點の或る一定の方向に於ける變位を知ることが必要になる場合が生ずる。此の様な場合、トラスに於ては其の各部材には曲げモーメントが作用せず、従つて各部材は彎曲しないから各節點の變位を求め

ればよいことになるが、然し何れにしてもトラスのすべての節點或は梁又は剛節構造物の十分に多數の點の各々に於て上記の原理又は定理を反覆適用することは多大の手數を要することである。かかる場合には以下に説明する撓み曲線¹⁾の解法を應用するのが最も適切である。

トラスの撓み曲線とは第 187 圖に示すが如く、各節點の全變位を與へられたる方向 Oy に射影し、各節點を通つて Oy に平行なる直線上に於て或る



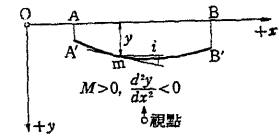
第 187 圖



第 188 圖

與へられたる基線 Ox より上記の射影に等しく引ける縦距 y の端點を連結する多角形を意味し、梁又は剛節部材の撓み曲線は、第 188 圖の如くそのすべての點の全變位の Oy の方向の射影 y を縦距とする一つの曲線になる。此の Ox 及び Oy は全く任意に選び得るものである。トラス及び剛節部材の撓み曲線は後節に於て説明することにし、本節に於ては先づ梁の撓み曲線に就て記述する。

第 189 圖に於て Ox, Oy を直交座標軸とし、 $A'B'$ をもと Ox 上にあつた直線の梁 AB の Oy の方向の撓み曲線とする。梁に於ては其の各點はすべて平行に變位するものと考へられるから、若し此の變位が Ox に對して垂直に起る様な梁に對しては $A'B'$ は梁



第 189 圖

1) Deflection curve. 之と彈性曲線 (elastic line) とは區別せられねばならぬ。彈性曲線とは梁又は部材の全變位及び變形後の形狀を示す曲線である。

AB の全變位及び彎曲後の形狀を示す曲線、即ち彈性曲線になる。

扱て Bernoulli-Euler の假定に依れば變形前平面であつた横斷面は變形後も平面である。故に今、梁の任意の位置 m に於て變形前互に dx の距離にあつた二横斷面は變形後は第 190 圖の如く互に

傾斜する二平面になる。梁の軸及び y の距離にある纖維の伸を夫々 Δdx 及び $\Delta dx \zeta$ とし、 m に於ける撓み曲線の曲率半徑を ρ とすれば、幾何學的に

$$\frac{\rho + \zeta}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx \zeta}{dx + \Delta dx} = 1 + \frac{\Delta dx \zeta - \Delta dx}{dx + \Delta dx}$$

になり、茲に於て右邊の分母中の Δdx を dx に對して省略すれば

$$\frac{\zeta}{\rho} = \frac{\Delta dx \zeta}{dx} - \frac{\Delta dx}{dx}$$

になる。然るに $\Delta dx \zeta / dx$ 及び $\Delta dx / dx$ は梁の軸より ζ の距離にある纖維及び梁の軸に於ける歪であつて、之に相應する垂面應力を $\sigma \zeta$ 及び σ とすると

$$\frac{\Delta dx \zeta}{dx} = \frac{\sigma \zeta}{E}, \quad \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

である。今梁の横斷面が外力の作用面に對して左右對稱とすれば

$$\sigma \zeta = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \zeta, \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

であるから

$$\frac{\zeta}{\rho} = \frac{N}{EA} + \frac{M}{EI} \zeta - \frac{N}{EA} = \frac{M}{EI} \zeta,$$

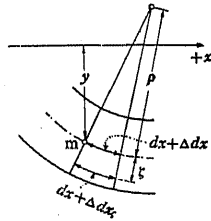
即ち

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (45.1)$$

然るに本場合の如く dy/dx が極めて小なる場合には十分近似的に

$$\rho = \pm 1 / \frac{d^2 y}{dx^2}$$

とすることが出來、従つて



第 190 圖

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EI} \quad (45.2)$$

になる。上式の二重符號は次の如くにして決定せられる。今、視點を梁の $+y$ の側にとるものとすれば §6 に説明せる規約に依り、梁が第 189 圖の如く $+y$ の側に凸に曲がる場合は曲げモーメントは正であり、一方に於て此の場合には dy/dx は x の増加に従つて常に減少するから $d^2 y/dx^2$ は常に負である。之と同様に梁が $-y$ の方向に凸に曲がる場合には $M < 0$, $d^2 y/dx^2 > 0$ である。故に M と $d^2 y/dx^2$ の符號は常に反對であつて、従つて (45.2) 式の二重符號のうち負號を採用すべきことになる。即ち

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EI}. \quad (45.3)$$

本式は直線の梁の撓み曲線或は彈性曲線の微分方程式である。本式の導來に當つては上記の如く、剪斷力及び溫度變化に依る影響を無視したが、之等は一般に極めて僅少である。

上式を積分すれば dy/dx が得られる。此の dy/dx は撓み曲線の傾斜角 i の正切に等しいが、本場合の如く i が極めて微小なる場合には i そのものに等しい。此の i を撓み角と言ひ、 i を更に積分すれば撓み y が得られる。即ち

$$\frac{dy}{dx} = i = - \int \frac{M}{EI} dx, \quad (45.4)$$

$$y = \int i dx = - \int \int \frac{M}{EI} dx dx. \quad (45.5)$$

$x = x$ の位置に於ける荷重強度を p 、剪斷力を Q とすれば (18.8) に依つて

$$\frac{dQ}{dx} = -p, \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

であるから、若し EI を常數とすれば次の如くなる。

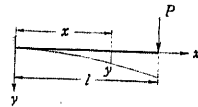
$$\frac{d^3 y}{dx^3} = - \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} = - \frac{Q}{EI}, \quad (45.6)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1}{EI} \frac{d^2 M}{dx^2} = +\frac{P}{EI} \quad (45.7)$$

EI を梁の曲げ剛さ或は曲げ剛性係数と言ふ。

(45.5) 及び (45.6) 式に於ては夫々一個或は二個の積分常数が現れる。之等は勿論、梁の支持条件其の他に依つて決定せらるべきものであつて、次に二つの例題に就て説明する。

問題 1. 先端に集中荷重を受ける曲げ剛さが一定である片持梁 (第 191 圖)。



第 191 圖

座標軸を圖示の如くとれば

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = +P(l-x),$$

$$EI \frac{dy}{dx} = P \left(lx - \frac{x^2}{2} + C_1 \right),$$

$$EI y = P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right).$$

然るに固定端 ($x=0$) に於て dy/dx 及び y は零でなければならぬ。従つて $C_1 = C_2 = 0$ を得。故に

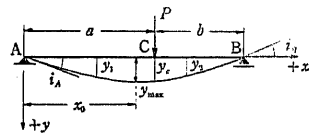
$$y = \frac{P}{6EI} (3l-x)x^2 = \frac{Pl^3}{6EI} \left(3 - \frac{x}{l} \right) \frac{x^2}{l^2} \quad (45.8)$$

特に先端 $x=l$ に於ては $y = Pl^3/3EI$ になり (44.7) の結果に一致する。

問題 2. 集中荷重を受ける曲げ剛さが一定なる單純梁 (第 192 圖)。

座標軸を圖示の如くにとる。本問題に於

ては荷重作用點 C の左右に於て曲げモーメントの式が相違し、従つて y の式は C の左右に於て異なつた式になる。以下、C の左に於ける y を y_1 、右に於ける y を y_2 とする。



第 192 圖

A ~ C ($0 \leq x \leq a$): C ~ B ($a \leq x \leq l$):

$$EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -M_1 = -\frac{Pb}{l} x; \quad EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -M_2 = -\frac{Pa}{l} (l-x);$$

$$EI \frac{dy_1}{dx} = -\frac{Pb}{l} \left[\frac{x^2}{2} + C_1 \right]; \quad EI \frac{dy_2}{dx} = +\frac{Pa}{l} \left[\frac{(l-x)^2}{2} + C_3 \right];$$

$$EI y_1 = -\frac{Pb}{l} \left[\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right]; \quad EI y_2 = -\frac{Pa}{l} \left[\frac{(l-x)^3}{6} + C_3 (l-x) + C_4 \right].$$

上式中の四個の常数は A 及び B に於て y が零なること、及び C に於て y_1

と y_2 とが滑かに連続すべきことより決定せられる。即ち

1. $x=0$ に於て $y_1=0$: $C_2=0$;

2. $x=l$ に於て $y_2=0$: $C_4=0$;

3. $x=a$ に於て $y_1=y_2$: $b \left(\frac{a^3}{6} + C_1 a \right) = a \left(\frac{b^3}{6} + C_3 b \right)$;

4. $x=a$ に於て $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$: $b \left(\frac{a^2}{2} + C_1 \right) = -a \left(\frac{b^2}{2} + C_3 \right)$.

此の最後の二式より

$$C_1 = -\frac{a}{6} (a+2b), \quad C_3 = -\frac{b}{6} (2a+b)$$

を得、之を前式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} A \sim C: \quad y_1 &= \frac{Pa^2 b^2}{6EI l} \left[2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2 b} \right], \\ C \sim B: \quad y_2 &= \frac{Pa^2 b^2}{6EI l} \left[\frac{l-x}{a} + 2\frac{l-x}{b} - \frac{(l-x)^3}{a b^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (45.9)$$

$$\left. \begin{aligned} A \sim C: \quad i_1 &= \frac{Pa^2 b}{6EI l} \left[1 + 2\frac{b}{a} - 3\frac{x^2}{a^2} \right], \\ C \sim B: \quad i_2 &= -\frac{Pa b^2}{6EI l} \left[1 + 2\frac{a}{b} - 3\frac{(l-x)^2}{b^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (45.10)$$

特に兩端 A, B 及び荷重作用點 C に於ける撓み角は次の如くなる。

$$i_A = \frac{Pab(a+2b)}{6EI}, \quad i_B = -\frac{Pab(2a+b)}{6EI}, \quad i_C = \frac{Pab(b-a)}{3EI} \quad (45.11)$$

若し $a > b$ であるとする $i_C < 0$ であるから $i=0$, 即ち y の値が極大となる點は AC 間に存在することになる. 此の點の横座標 x_0 を求めるために (45.10) の i_1 を零に等しと置けば

$$1 + 2\frac{b}{a} - 3\frac{x_0^2}{a^2} = 0, \quad \text{即ち} \quad x_0 = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} \quad (45.12)$$

を得, 之を (45.9) の y_1 の x に代入すれば

$$y_{\max} = \frac{Pb}{3EI} x_0^3 \quad (45.13)$$

になる.

§ 46. 梁の w -荷重

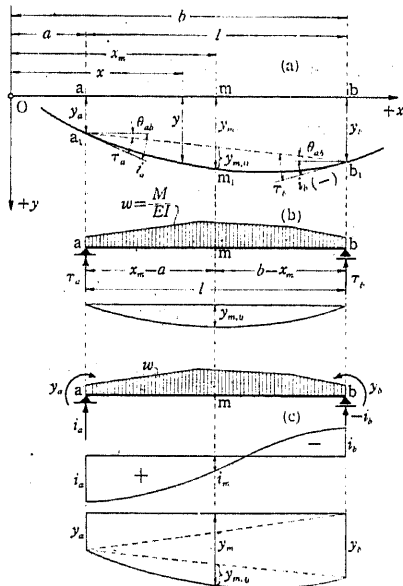
第 193 圖に於て a, b 及び m を梁に於ける與へられたる二點及び任意の一點とし, 之等が夫々 a_1, b_1 及び m_1 に變位するものとする. 梁の彈性曲線の微分方程式は (44.3) であつて

$$w = \frac{M}{EI} \quad (46.1)$$

と置けば

$$w = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (46.2)$$

今 (46.2) の兩邊に $(b-x)$ 或は $(x-a)$ を乗じて $x=a \sim b$ の間に積分すれば



第 193 圖

$$\int_a^b w(b-x)dx = -\int_a^b \frac{d^2y}{dx^2}(b-x)dx = -\left[\frac{dy}{dx}(b-x) + y\right]_a^b = +i_a l - (y_b - y_a),$$

$$\int_a^b w(x-a)dx = -\int_a^b \frac{d^2y}{dx^2}(x-a)dx = -\left[\frac{dy}{dx}(x-a) - y\right]_a^b = -i_b l + (y_b - y_a)$$

になる. 茲に於て a_1, b_1 を結ぶ直線と x -軸との間の角を θ_{ab} とし, a_1 及び b_1 に於ける彈性曲線の切線と $a_1 b_1$ との間の角を τ_a, τ_b とすれば

$$\tau_a = i_a - \theta_{ab}, \quad \tau_b = \theta_{ab} - i_b, \quad \theta_{ab} = (y_b - y_a)/l \quad (46.3)$$

であるから, 前式より

$$\tau_a = \frac{1}{l} \int_a^b w(b-x)dx, \quad \tau_b = \int_a^b w(x-a)dx; \quad (46.4)$$

$$i_a = \tau_a + \frac{y_b - y_a}{l}, \quad -i_b = \tau_b - \frac{y_b - y_a}{l} \quad (46.5)$$

を得る. 然るに上式の τ_a 及び τ_b は第 193 圖(b)の如く ab の部分を單純梁と考へ, 之に $w = M/EI$ に等しき荷重を作用せしめたる場合の a 及び b に於ける反力に等しく, また i_a 及び $-i_b$ は第 193 圖(c)の如く上記の單純梁に更に a 及び b に於て y_a 及び y_b に等しきモーメントを作用せしめたる場合の a 及び b に於ける反力に等しい.

次に (46.2) の $x = a \sim x_m$ 間の定積分を求めれば

$$\int_a^{x_m} w dx = -\int_a^{x_m} \frac{d^2y}{dx^2} dx = -\left[\frac{dy}{dx}\right]_a^{x_m} = i_a - i_m,$$

此の i_a に (46.5) の値を代入すれば

$$i_m = \tau_a - \int_a^{x_m} w dx + \frac{y_b - y_a}{l} \quad (46.6)$$

になる. 然るに前述の如く τ_a は(b)の單純梁の a に於ける反力であるから

$\tau_a - \int_a^{x_m} w dx$ は (b) の単純梁の m に於ける剪断力になり、従つて i_m は荷重 w の他に両端に於て y_a 及び y_b のモーメントを受ける単純梁 (c) の m に於ける剪断力に等しくなる。

最後に、(46.2) の兩邊に $(x_m - x)$ を乗じて $x = a \sim x_m$ の間に積分すれば

$$\int_a^{x_m} w(x_m - x) dx = - \int_a^{x_m} \frac{d^2 y}{dx^2} (x_m - x) dx = i_a(x_m - a) - y_m + y_a,$$

$$y_m = y_a + i_a(x_m - a) - \int_a^{x_m} w(x_m - x) dx \quad (46.7)$$

になり、此の i_a に (46.5) の値を代入すれば

$$y_m = y_{m,0} + y_a \frac{b - x_m}{l} + y_b \frac{x_m - a}{l}, \quad (46.8)$$

但し

$$y_{m,0} = \tau_a(x_m - a) - \int_a^{x_m} w(x_m - x) dx$$

になる。然るに $y_{m,0}$ は w を荷重とする単純梁 (b) の m に於ける曲げモーメントに等しく、従つて点 m の撓み y_m は荷重 w の他に両端に於て y_a 及び y_b のモーメントを受ける単純梁 (c) の m に於ける曲げモーメントに等しくなる。

かくの如く梁の撓み角及び撓みはすべて $w = M/EI$ を荷重と考へたる場合の反力、剪断力或は曲げモーメントとして計算し得るものであつて、此の w を一般に梁に對する w -荷重と言ふ。而して梁の各點の撓みは w -荷重に依る曲げモーメントに等しいから、 w -荷重に依る曲げモーメント圖が即ち梁の撓み曲線になる。

特に第 193 圖の ab が實際の単純梁 AB である場合には $y_a = y_b = 0$ であるから、 w -荷重に依る兩端 A, B に於ける反力を $R_{A,w}, R_{B,w}$ とし、その任意の一點 m に於ける w -荷重に依る剪断力及び曲げモーメントを $Q_{m,w}$ 及

び $M_{m,w}$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} i_A = \tau_A = R_{A,w}, & \quad -i_B = \tau_B = R_{B,w}, \\ i_m = Q_{m,w}, & \quad y_m = M_{m,w} \end{aligned} \right\} \quad (46.9)$$

になる。

また第 193 圖の ab が例へば第 194 圖の如き片持梁 AB である場合には $y_A = 0, i_A = 0$ であるから (46.7) 式より

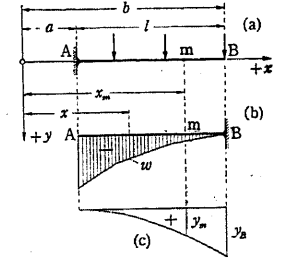
$$y_m = - \int_a^{x_m} w(x_m - x) dx \quad (46.10)$$

になる。即ち y_m は第 194 圖 (b) の如く B が固定端である片持梁に w -荷重が作用する場合の m に於ける曲げモーメントに等しい。

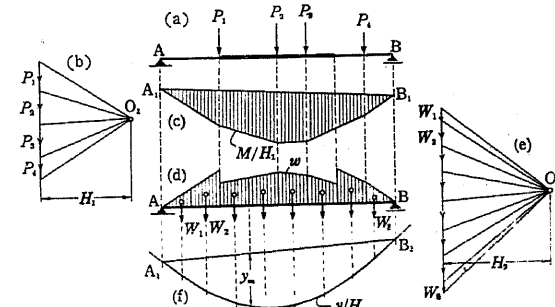
此の場合、實際の荷重に依る曲げモーメント M は一般に負であるから、従つて w も負になり、

(b) に對する曲げモーメント圖は (c) の如くなる。之即ち (a) の片持梁の弾性曲線である。

上述の事項を利用して梁の撓み曲線又は弾性曲線を圖解法に依つて求めることが出来る。例へば、第 195 圖 (a) の如く断面二次モーメントが一様な



第 194 圖

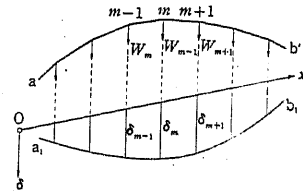


第 195 圖

らざる單純梁 AB の撓み曲線を求めるには、先づ第 II 章に説明せる作圖法に従つて與へられたる荷重 P_1, P_2, \dots に對する曲げモーメント圖 (c) を描いて曲げモーメント M を求め、次に此の M の $1/EI$ を荷重とする單純梁 (d) に對する曲げモーメント圖 (f) を描けば、之即ち撓み y の $1/H_2$ を示す撓み曲線になる。

§ 47. 剛節部材のつながり或は曲り材の W -荷重

第 196 圖に於て ab を各々剛節節點に依つて連結せられたる直線部材のつながりとし、 a_1b_1 を Ox を基線とせる $+y$ の方向の撓み曲線とする。此の撓み曲線を求めるには先づ各節點に於ける $+\delta$ の方向の撓みを求めればよい。何となれば部材が各々直線であるから、各節點の撓みがわかれば部材中間の點の撓みは前節の方法に依つて之を決定し得るからである。



第 196 圖

各節點の撓みは、前節に於て直線の梁に就て説明せる w -荷重と同様に、各節點に或る適當なる荷重 W が撓みの方向に作用するものと假定し、此の W -荷重に依る曲げモーメントとして計算に依り、或は連力圖を利用する圖解法に依つて之を決定することが出来る。

今、第 197 圖に示すが如く基線 Ox を求めんとする撓みの方向に垂直にとり、一般に部材の横斷面の面積、斷面二次モーメント及び長さを A, I 及び s 、節點間の Ox の方向の距離を $\lambda = s \cos \theta$ 、各節點の撓みを δ とする。圖示の如く各節點に δ の方向に W なる荷重が作用するものと假定する場合、 δ が荷重 W に依る曲げモーメントに等しと假定すれば、(18.6) 式に依つて一般

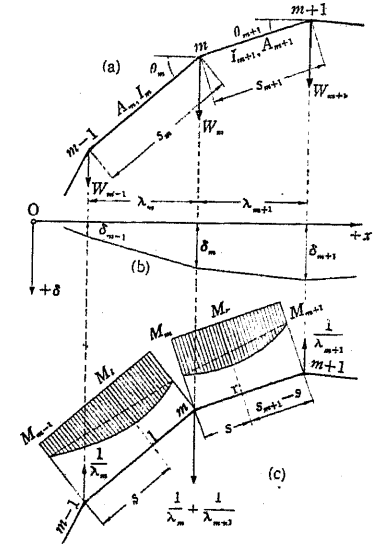
に

$$W_m = \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} \quad (47.1)$$

即ち

$$W_m = -\frac{1}{\lambda_m} \delta_{m-1} + \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}} \right) \delta_m - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \delta_{m+1} \quad (47.2)$$

でなければならない。然るに本式の右邊は節點 $m-1, m, m+1$ に夫々 $1/\lambda_m, (1/\lambda_m + 1/\lambda_{m+1}), 1/\lambda_{m+1}$ の假想荷重を第 197 圖 (c) に示す方向に作用せしめた場合の假想仕事 $\sum \bar{P}_m \delta_m$ に等しい。従つて上記の假想荷重に依る曲げモーメント及び軸方向力を \bar{M} 及び \bar{N} とし、反力の假想仕事を $\sum \bar{R} r$ とすれば、(39.11a) に依つて



第 197 圖

$$W_m = \sum \bar{P}_m \delta_m = \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}N}{EA} ds + \int \bar{N} \alpha t ds - \sum \bar{R} r \quad (47.3)$$

になる。但し t は溫度變化である。

然るに第 197 圖 (c) の假想荷重は明かに $m-1, m, m+1$ 間にのみ \bar{M} 及び \bar{N} を作用せしめ、 $m-1$ より左方及び $m+1$ より右方に對しては何等の影響をも及ぼさない。従つて (47.3) 式中の積分は單に $m-1, m, m+1$ 間に就てのみの積分になり、また反力の假想仕事は零になる。

扱つて $m-1, m$ 間の任意の斷面 l 、及び $m, m+1$ 間の任意の斷面 r に於ける \bar{M} 及び \bar{N} は

$$\begin{aligned}\bar{M}_l &= +\frac{1}{\lambda_m} s \cos \theta_m = +\frac{s}{s_m}, \\ \bar{M}_r &= +\frac{1}{\lambda_{m+1}} (s_{m+1} - s) \cos \theta_{m+1} = +\frac{s_{m+1} - s}{s_{m+1}}, \\ \bar{N}_l &= -\frac{1}{\lambda_m} \sin \theta_m = -\frac{\tan \theta_m}{s_m}, \\ \bar{N}_r &= +\frac{1}{\lambda_{m+1}} \sin \theta_{m+1} = +\frac{\tan \theta_{m+1}}{s_{m+1}}\end{aligned}$$

であつて、之等を (47.3) に代入すれば一般に

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{1}{s_m} \int_0^{s_m} \frac{M_l}{EI} s ds - \frac{\tan \theta_m}{s_m} \int_0^{s_m} \left(\frac{N_l}{EA} + \alpha t \right) ds \\ &+ \frac{1}{s_{m+1}} \int_0^{s_{m+1}} \frac{M_r}{EI} (s_{m+1} - s) ds + \frac{\tan \theta_{m+1}}{s_{m+1}} \int_0^{s_{m+1}} \left(\frac{N_r}{EA} + \alpha t \right) ds\end{aligned}\quad (47.4)$$

になり、 E, α, t が構造物全體に就て常數、 A 及び I が部材毎に常數である場合には

$$\begin{aligned}EW_m &= \frac{1}{I_m s_m} \int_0^{s_m} M_l s ds + \frac{1}{I_{m+1} s_{m+1}} \int_0^{s_{m+1}} M_r (s_{m+1} - s) ds \\ &- \frac{\tan \theta_m}{A_m s_m} \int_0^{s_m} N_l ds + \frac{\tan \theta_{m+1}}{A_{m+1} s_{m+1}} \int_0^{s_{m+1}} N_r ds + E \alpha t (\tan \theta_{m+1} - \tan \theta_m)\end{aligned}\quad (47.5)$$

になる。ラーメン等の場合には軸方向力 N に依る變形は一般に極めて僅小であるから、かかる場合には上式の N を省略することが出来る。

部材 $m-1, m$ 及び $m, m+1$ を夫々單純梁と考へるとき、之等に夫々直接に作用する荷重に依る l 或は r に於ける曲げモーメントを $M_{l,0}$ 及び $M_{r,0}$ とすれば (24.6) 式に依つて、一般に

$$\begin{aligned}M_l &= M_{l,0} + M_{m-1} \frac{s_m - s}{s_m} + M_m \frac{s}{s_m}, \\ M_r &= M_{r,0} + M_m \frac{s_{m+1} - s}{s_{m+1}} + M_{m+1} \frac{s}{s_{m+1}}\end{aligned}$$

であつて、之を (47.5) に代入し N 及び t に依る項を無視すれば

$$\begin{aligned}EW_m &= \frac{1}{I_m s_m} \left[\int_0^{s_m} M_{l,0} s ds + (M_{m-1} + 2M_m) \frac{s_m^2}{6} \right] \\ &+ \frac{1}{I_{m+1} s_{m+1}} \left[\int_0^{s_{m+1}} M_{r,0} (s_{m+1} - s) ds + (2M_m + M_{m+1}) \frac{s_{m+1}^2}{6} \right]\end{aligned}$$

になり、茲に於て

$$\mathfrak{B}_m = \frac{1}{s_m} \int_0^{s_m} M_{l,0} s ds, \quad \mathfrak{A}_{m+1} = \frac{1}{s_{m+1}} \int_0^{s_{m+1}} M_{r,0} (s_{m+1} - s) ds\quad (47.6)$$

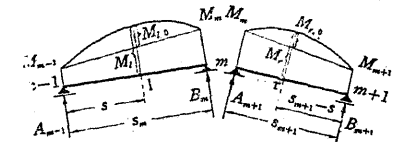
と置けば

$$\begin{aligned}EW_m &= \frac{1}{I_m} \left[(M_{m-1} + 2M_m) \frac{s_m}{6} + \mathfrak{B}_m \right] \\ &+ \frac{1}{I_{m+1}} \left[(2M_m + M_{m+1}) \frac{s_{m+1}}{6} + \mathfrak{A}_{m+1} \right],\end{aligned}\quad (47.7)$$

$$\begin{aligned}EW_m &= \frac{1}{6} \left[\frac{s_m}{I_m} M_{m-1} + 2 \left(\frac{s_m}{I_m} + \frac{s_{m+1}}{I_{m+1}} \right) M_m + \frac{s_{m+1}}{I_{m+1}} M_{m+1} \right] \\ &+ \frac{1}{I_m} \mathfrak{B}_m + \frac{1}{I_{m+1}} \mathfrak{A}_{m+1}.\end{aligned}\quad (47.8)$$

(47.6) の \mathfrak{B}_m 及び \mathfrak{A}_{m+1} は、節點 $m-1, m$ 間及び $m, m+1$ 間の部材を

第 198 圖の如き單純梁とし、之に $M_{l,0}$ 或は $M_{r,0}$ が荷重として作用する場合の支點 m に於ける反力に等しい。従つて部材に直接に作用する荷重がない場合には \mathfrak{B}_m 及び \mathfrak{A}_{m+1} は零になる。



第 198 圖

之と同様に第 198 圖に示す如く節點 $m-1, m$ 及び $m, m+1$ 間の部材を夫々單純梁とし、之に M_l 或は M_r が荷重として作用する場合の m に於ける反力を B_m, A_{m+1} とすれば

$$B_m = \mathfrak{B}_m + (M_{m-1} + 2M_m) \frac{s_m}{6}, \quad A_{m+1} = \mathfrak{A}_{m+1} + (2M_m + M_{m+1}) \frac{s_{m+1}}{6}\quad (47.9)$$

であるから、(47.7) 式より W_m は次の如くなる。

$$E W_m = \frac{B_m}{I_m} + \frac{A_{m+1}}{I_{m+1}}. \quad (47.10)$$

以上説明せる W_m は單位を有せざる數値であつて、各節點に於ける W を計算したる後、之を各節點に於て求めんとする撓みの方向に作用する平行荷重と考へれば、此の W -荷重に依る曲げモーメントを計算することに依り、或は連力圖を描くことに依つて各節點の撓みを決定することが出来る。但し構造物の支持條件に依つて邊緣條件或は連力圖の基線の位置を適當に決定すべきことは言ふまでもない。

尙、例へば節點 $m-1$ 或は $m+1$ が滑節なる場合には M_{m-1} 或は M_{m+1} を零とすればよいが、節點 m が滑節なる場合には (47.4) 乃至 (47.10) の諸式は成立しない。何となれば此の場合には第 197 圖の假想荷重の影響が $m-1$ と $m+1$ の間にのみ局限せず構造物全體に亙るからである。従つて此の場合には構造物全體に就て (47.1) を適用して W_m を決定する必要がある。

前記の剛節部材に對する W_m より、斷面の寸法に比べて十分に大なる曲率半徑を有する曲り材に對する W -荷重を求めることが出来る。即ち一般に曲り材は無數の節點によりて剛結せらるる無限に短き剛節部材のつながりと考へることが出来るからである。今第 197 圖に於て節點 $m-1, m$ 及び $m+1$ の距離が無限に小なる場合を考へれば

$$s_m = s_{m+1} = ds, \quad A_m = A_{m+1} = A, \quad I_m = I_{m+1} = I,$$

$$M_l = M_r = M, \quad N_l = N_r = N, \quad \tan \theta_{m+1} - \tan \theta_m = d(\tan \theta)$$

とすることが出来、此の場合の W_m を dW とすれば (47.5) 式より

$$dW = \frac{M}{EI} ds + \left(\frac{N}{EA} + \alpha t \right) d(\tan \theta)$$

になる。今、第 199 圖の如き直交座標軸をとり曲り材の軸線の曲線が一般に $y = f(x)$ にて表はされるものとすれば

$$d(\tan \theta) = \frac{d^2 y}{dx^2} dx \quad \text{且つ} \quad ds = \frac{dx}{\cos \theta}$$

であるから

$$dW = \frac{M}{EI \cos \theta} dx + \left(\frac{N}{EA} + \alpha t \right) \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

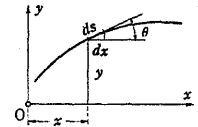
になり、 $x = x$ に於ける W -荷重の強度を w_x とすれば

$$w_x = \frac{dW}{dx} = \frac{M}{EI \cos \theta} + \left(\frac{N}{EA} + \alpha t \right) \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (47.11)$$

になる。茲に於て N 及び t の影響を無視すれば

$$w_x = \frac{M}{EI \cos \theta} \quad (47.12)$$

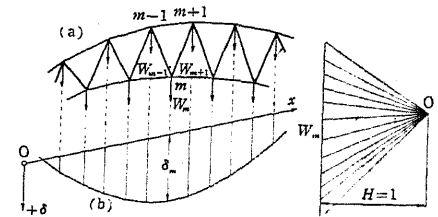
を得る。上記の w_x は直線部材に於ける (46.1) の w に相當し、之に依る曲げモーメントを計算することに依り或は之に對する連力圖を描くことに依つて曲り材の撓み曲線を求めることが出来る。



第 199 圖

§ 48. 滑節部材のつながり或はトラスの W -荷重

一般にトラス各節點の撓み曲線は滑節に依つて相連続する部材の各節點の撓み曲線として之を求めることが出来る。例へば第 200 圖 (b) の多角形は (a) のトラスの各節點



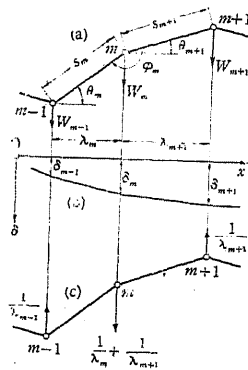
第 200 圖

の撓みを示す撓み曲線であるが、之はまた圖に於て太線を以て示せる滑節

部材の撓み曲線と見做すことが出来、また上弦節點或は下弦節點のみの撓み曲線を求める場合には上弦材或は下弦材のみを夫々滑節部材のつなかりと考へればよい。

滑節部材のつなかりの撓み曲線は剛節部材のつなかりに於けると同様に、各節點に或る適當なる荷重 W が求めんとする撓みの方向に作用するものと假定し、此の W -荷重に依る曲げモーメントとして計算に依り或は連力圖を利用する圖解法に依り之を決定することが出来る。

今第 201 圖に於て基線 Ox を δ の方向に垂直にとり、 $m-1, m$ 及び $m+1$ を滑節部材のつなかりの中の相連続する任意の三節點とする。その撓み δ が各節點に作用すると假定する W -荷重に依る曲げモーメントに等しき場合には、剛節部材のつなかりに於けると同様に、(47.1) 或は (47.2) の關係が成立し、従つて W_m は第 201 圖 (c) の假想荷重に依る假想仕事に等しくなる。故に (39.9a) 式に依り



第 201 圖

$$W_m = \Sigma \bar{P}_m \delta_m = \Sigma \frac{\bar{S} S}{EA} s + \Sigma \bar{S} \alpha t s - \Sigma \bar{R} r \quad (48.1)$$

になり、また Δs を部材の長さ s の伸びとすれば

$$\Delta s = \left(\frac{S}{EA} + \alpha t \right) s$$

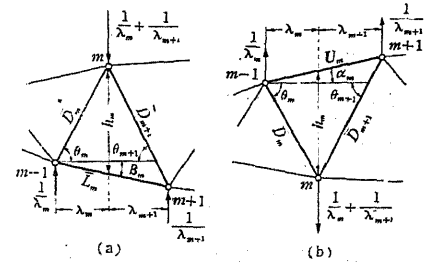
であるから

$$W_m = \Sigma \bar{S} \Delta s - \Sigma \bar{R} r \quad (48.2)$$

になる。但し之等の式に於て S は實際の部材應力、 \bar{S} は第 201 圖 (c) の假想荷重に依る部材應力、 $\Sigma \bar{R} r$ は反力の假想仕事である。

上記兩式右邊の Σ は勿論構造物全體に就ての總和であるが、三角形網より成る普通のトラスに於ては (c) の假想荷重の影響は m を中心とする數個の部材に局限せられるから、 Σ は單に之等の部材に就てのみ求めればよく、其の假想應力 \bar{S} を求めることも容易である。而してまた反力の假想仕事は一般には零である。

例へば三角形網より成るトラスのすべての節點の撓み曲線を求める場合、上弦節點 m の W -荷重に對しては第 202 圖 (a) に於て太線を以て示せる三部材のみを考慮すればよい。此の場合には



第 202 圖

$$\bar{L}_m = + \frac{\sec \beta_m}{h_m}, \quad \bar{D}_m = - \frac{\sec \theta_m}{h_m}, \quad \bar{D}_{m+1} = - \frac{\sec \theta_{m+1}}{h_m}$$

であつて、部材 $(m-1)-m, m-(m+1)$ 及び $(m-1)-(m+1)$ の伸びを夫々 $\Delta s_m, \Delta s_{m+1}$ 及び $\Delta s'_m$ とすれば、(48.2) 式より

$$W_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta s'_m}{\cos \beta_m} - \frac{\Delta s_m}{\cos \theta_m} - \frac{\Delta s_{m+1}}{\cos \theta_{m+1}} \right] \quad (48.3)$$

になる。

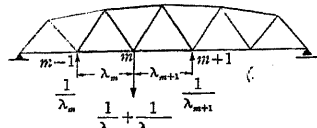
同様にして下弦節點 m の W -荷重に對しては、第 202 圖 (b) に太線を以て示せる三部材のみを考慮すればよく、此の場合には

$$\bar{U}_m = - \frac{\sec \alpha_m}{h_m}, \quad \bar{D}_m = + \frac{\sec \theta_m}{h_m}, \quad \bar{D}_{m+1} = + \frac{\sec \theta_{m+1}}{h_m}$$

であるから、上弦材 $(m-1)-(m+1)$ の伸びを $\Delta s'_m$ とすれば

$$W_m = - \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta s'_m}{\cos \alpha_m} - \frac{\Delta s_m}{\cos \theta_m} - \frac{\Delta s_{m+1}}{\cos \theta_{m+1}} \right] \quad (48.4)$$

になる。



第 203 圖

また下弦材或は上弦材のみの節點に對する撓み曲線を求める場合には、前述の如く下弦材或は上弦材のみを滑節部材のつながりと考へる。此の場合の各節點に於ける W -荷重に對しては、節點の位置に應じて、例へば第 203 圖、第 204 圖に於て太線を以て示せる部材のみを考慮すればよい。

上記の W -荷重はまた以下に示すが如き型式に表現することが出来る。第 205 圖に於て節點 m が節點 $m-1$ に對して相對的に點 m' に變位したものとし、 m' より $(m-1)-m$ に下せる垂線の足を m'' とする。變位が極めて微小なるものとすれば

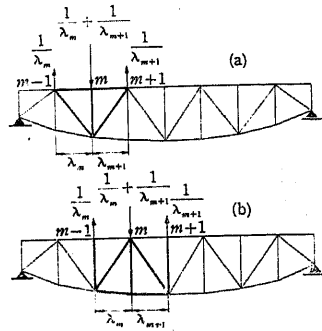
$$mm'' = \Delta s_m, \quad m'm' = (s_m + \Delta s_m) \Delta \theta_m$$

とすることが出来、更に $m'm'$ の右邊に於て Δs_m を s_m に對して無視すれば $m'm' = s_m \Delta \theta_m$ になる。此の mm'' 及び $m'm'$ を δ の方向に射影すれば

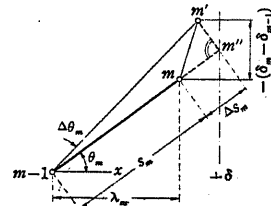
$$\delta_m - \delta_{m-1} = -[\Delta s_m \sin \theta_m + s_m \cos \theta_m \Delta \theta_m]$$

になり、 $s_m \cos \theta_m = \lambda_m$ なることを考慮すれば

$$\frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} = -\left[\frac{\Delta s_m}{s_m} \tan \theta_m + \Delta \theta_m \right],$$



第 204 圖



第 205 圖

同様にして

$$\frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} = -\left[\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \tan \theta_{m+1} + \Delta \theta_{m+1} \right]$$

を得、之を (47.1) に代入すれば

$$W_m = \Delta \theta_{m+1} - \Delta \theta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \tan \theta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \tan \theta_m \quad (48.5)$$

になる。

然るに $\Delta \theta_{m+1} - \Delta \theta_m$ は第 201 圖に示すが如く節點 m に於てつながる二部材間の角 φ_m の變化 $\Delta \varphi_m$ に等しいから、 W_m は次の如くなる。

$$W_m = \Delta \varphi_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \tan \theta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \tan \theta_m, \quad (48.6)$$

或は $\Delta \varphi = (S/EA + \alpha t)s$ を考慮すれば

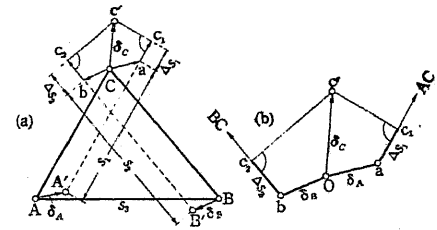
$$W_m = \Delta \varphi_m + \left(\frac{S_{m+1}}{EA_{m+1}} + \alpha t \right) \tan \theta_{m+1} - \left(\frac{S_m}{EA_m} + \alpha t \right) \tan \theta_m. \quad (48.7)$$

上式に於ける $\Delta \varphi_m$ を決定するには (41.8) 式を應用すればよい。

§ 49. Williot の變位圖

トラスに於て各部材の長さの變化 Δs を知れば、各節點の變位を圖解法に依つて求めることが出来る。

今、第 206 圖 (a) に於て A, B, C を長さ s_1, s_2, s_3 なる三部材に依つて連結さるる三節點とする。何等かの理由に依つて A 及び B が夫々 A' 及び B' に變位し且つ s_1 及び s_2 が夫々

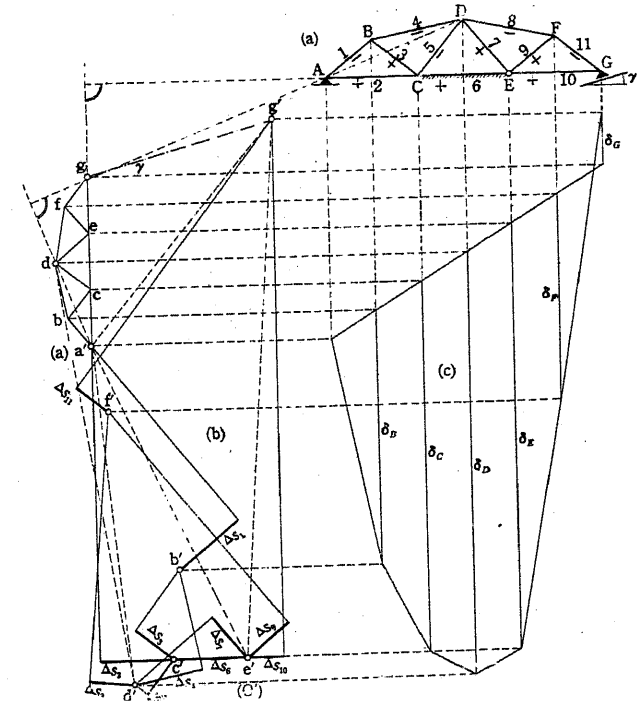


第 206 圖

Δs_1 及び Δs_2 だけ増加したものとすれば、 A' 及び B' を中心とし夫々 $s_1 + \Delta s_1$ 及び $s_2 + \Delta s_2$ の半径の圆弧の交点が C の変位すべき点 C' になる。即ち第 206 圖(a)に於て、 Ca を AA' に平行に且つ等しくとり、 a より AC に平行に且つ Δs_1 に等しく ac_1 をとれば $A'c_1 = s_1 + \Delta s_1$ になり、同様に Cb を BB' に平行に且つ等しくとり、 b より BC に平行に且つ Δs_2 に等しく bc_2 をとれば $B'c_2 = s_2 + \Delta s_2$ になるから、 A' 及び B' を中心とし夫々 $A'c_1$ 及び $B'c_2$ を半径として圆弧を描けば其の交点が C' になる。然るにトラスの弾性變形に於ては節點の變位及び部材の長さの變化は部材の長さに比べて一般に極めて小であるから、上記の圆弧の代りに圖に示すが如く c_1 及び c_2 に於て夫々 $A'c_1$ 及び $B'c_2$ に垂直なる二直線の交点を C' と見做すことが出来る。而してまた節點の變位及び部材長の變化は極めて小さく之をトラスを示す圖上に同一縮尺に依つて描くことは殆んど不可能であるから、實際に於ては (a) に於ける $Ca c_1 C' c_2 b$ をトラスより分離し、(b) に示すが如く適當なる擴大尺を以て別に描く方が便利である。此の (b) の如き圖を Williot 或は Mohr の變位圖と言ふ。(b) の作圖法は之を更めて説明する必要はないと思ふが、ただ特に注意すべきことは Δs のとり方である。即ち第 206 圖は $\Delta s_1, \Delta s_2$ を共に伸張の場合として示したものであるが、若し例へば s_1 が Δs_1 だけ減少する場合には ac_1 を CA の方向にとる必要がある。

上述のことを利用して任意のトラスの各節點の變位を圖解法に依つて求めることが出来る。例へば第 207 圖のトラスに於て A を同轉端、 G を水平に對して γ なる角の方向に移動可能なる移動端とする。便宜上各部材に番號を附し、各部材の長さを s_1, s_2, \dots 、其の變化を $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ とする。而して (+) を附せる部材に於ては Δs は s の増加を示し、(-) を附せる部材に於ては Δs は s の減少を示すものとする。

扱て前述の第 206 圖の方法を應用するには任意の二點の變位が既知なることが必要である。然るに第 207 圖の場合には同轉端 A が不動なること以外、他の節點の變位はすべて未知であるから直ちに第 206 圖の方法を應用



第 207 圖

することは出来ない。それで先づ兩端の支點 A, G を自由端と假定し、任意の一部材、例へば CE 間にある部材 6 の方向が不變であり、且つ其のうちの任意の一點、例へば節點 E が不變なるものとして各節點の變位を求める。

此の場合、 C は EC の方向に Δs_6 だけ變位するから、先づ第 207 圖(b)に於て任意の點 $O'(e')$ より $O'c' = \Delta s_6$ とする。次に c' より CD に平行線を引き其の上 $c'd_1 = \Delta s_5$ とする。但し Δs_5 は s_5 の減少であるから $c'd_1$ は c' より

DC の方向にとり. 之と同様に e' より ED に平行に $e'd_2 = \Delta s_2$ をとり, d_1 及び d_2 より夫々 $e'd_1, e'd_2$ に垂線を立てて其の交点 d' を求めれば, $O'd'(e'd')$ は CE の方向及び E が不變なる場合の D の變位を示すことになる. 次に C の變位 $O'e'$, D の變位 $O'd'$, 部材 3, 4 の長さの變化 $\Delta s_3, \Delta s_4$ に依つて B の變位 $O'b'$ がわかり, かくして順次他の節點に及ぼせば (b) に示すが如く節點 A, B, C, ... に對應する變位圖の點 a', b', c', \dots が得られる.

變位圖の極 O' と之等の點を結ぶ直線は前述の如く CE の方向及び E を不變と假定したる場合の各節點の變位を示すものであつて, 例へば支點 A は $O'a'$ に等しき變位をすることになる. 然るに實際に於ては A は不動であるから, 此の條件を満足させるためには, 上述の如くにして得られた各節點の變位にすべて $a'O'$ に等しき變位を合成すればよい. 例へば G の變位は $a'O'$ と $O'g'$ とを合成せる $a'g'$, また D の變位は $a'O'$ と $O'd'$ とを合成せる $a'd'$ になる. 即ち此の場合の各節點の合變位は a' と b', c', \dots を結ぶ直線にて示されることになる.

然るに此の變位は未だ G に於ける支承條件を満足しない. G に於ける支承條件を満足するためには, すべての節點に對し上述の變位の他に更に A を回轉中心とする回轉變位を合成する以外に方法はない. 例へば此の回轉による G 及び D の變位が ga, da にて示されるものとすれば, 少くとも

$$ga \perp GA, \quad da \perp DA$$

である. 而して支點 G は水平に對して γ なる角度の方向にのみ變位可能であるから, ga と ag' とを合成せる gg' は水平に對して γ なる角度を示さねばならない. 故に g は g' より水平に對して γ なる角度に引ける直線と a より AG に垂直に引ける直線との交點になる. 次に回轉變位の定理に依り

$$da : ga = DA : GA$$

であり, 且つ $\angle dag = \angle DAG$ であるから $\triangle dag$ と $\triangle DAG$ とは相似三角形になり, d は ag に對して D が AG に對すると相似の位置にあることになる. 而して da と ad' とを合成せる dd' が D の實際の變位を示すことになる.

之と同様に其の他の節點に就て上記の回轉に依る變位 ba, ca, \dots を示すべき點 b, c, \dots は ag に對してトラスの節點 B, C, ... が AG に對すると全く相似の位置になり, 従つて之等 a, b, c, \dots を結べば與へられたるトラス A, B, C, ... と全く相似である圖形が得られる. 而して aa', bb', cc', \dots に依つてトラスの各節點の實際の變位を知ることが出来る.

かくして各節點の實際の變位がわかれば, 之より任意の方向に於ける撓みを求めることは容易である. 例へば鉛直方向の撓み曲線は, 第 207 圖 (c) の如くなる.

§ 50. 剪斷力の影響

剪斷力が構造物の弾性變形に及ぼす影響は, それが一般に極めて僅少であるが故に之を全く無視するのが普通であるが, 特に之を考慮すべき場合には次の如くにすればよい.

今, 部材の或る横斷面 A の任意の一點に於ける剪斷應力を τ , 剪斷歪を γ とすると一般に $\tau = G\gamma$ である. 此の τ , 従つて γ は一般には常數ではないが, 少くとも或る一つの横斷面中に於ては之に作用する剪斷力 Q に正比例するから, k を横斷面の形狀及び横斷面中に於ける點の位置の函數とすると, 一般に

$$\tau = k \frac{Q}{A}, \quad \gamma = k \frac{Q}{GA} \quad (50.1)$$

とすることが出来る。

従つて實際の荷重に依る剪断力 τ が任意の假想變位に依る剪断歪 $\bar{\gamma}$ に對して爲す仕事の總和は

$$\int_V \tau \bar{\gamma} dV = \int_V k^2 \frac{Q\bar{Q}}{GA^2} dV = \int_s \frac{Q\bar{Q}}{GA} ds \int_A \frac{k^2}{A} dA,$$

茲に於て

$$k = \int_A \frac{k^2}{A} dA \quad (50.2)$$

と置けば

$$\int_V \tau \bar{\gamma} dV = \int_s k \frac{Q\bar{Q}}{GA} ds \quad (50.3)$$

になる。上記の k は横断面の形狀にのみ依る係數であつて、 \bar{Q} は假想剪断歪 $\bar{\gamma}$ に對應する剪断力である。

同様にして、任意の假想荷重に依る剪断應力 $\bar{\tau}$ が實際の剪断歪 γ に對して爲す仕事の總和は

$$\int_V \bar{\tau} \gamma dV = \int_V k^2 \frac{\bar{Q}Q}{GA^2} dV = \int_s k \frac{\bar{Q}Q}{GA} ds \quad (50.3a)$$

になる。但し本式に於ける \bar{Q} は假想荷重に依る剪断力である。

故に假想仕事の原理に於て剪断應力又は剪断歪の影響を考慮する場合には (39.11) 或は (39.11a) 式の右邊に夫々上記の (50.3) 或は (50.3a) を附加すればよい。また (40.2) 式に依り實際の變位 δ_m を求むる場合に於ても (40.2) 式の右邊に (50.3a) を附加すればよい。但し此の場合の \bar{Q} は $P_m = 1$ に依る剪断力である。

次に部材の單位容積内に於ける剪断應力及び剪断歪に依る彈性變形の仕事は

$$\frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{Q^2}{GA^2}$$

であるから、剪断力に依る彈性變形の仕事の總和を W_Q とすれば

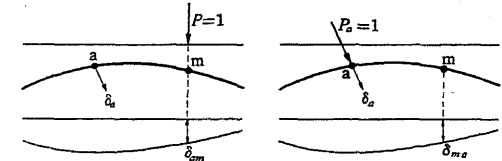
$$W_Q = \frac{1}{2} \int_V \frac{k^2}{A} \cdot \frac{Q^2}{GA} dV = \frac{1}{2} \int_s k \frac{Q^2}{GA} ds \quad (50.4)$$

になる。従つて彈性變形の仕事に於て剪断力の影響を考慮する場合には (43.7) の右邊に本式を附加すればよい。

§ 51. 變位の影響線

構造物の彈性變形はすべて之までに説明せる諸種の方法に依つて之を算定することが出来るが、構造物に平行移動荷重が作用する場合には影響線を利用するのが最も簡明である。

今 a を構造物中の與へられたる定點とし、 m を平行移動荷重 P の作用點とする。點 a の與へられたる方向の變位を δ_a とし、單位荷重 $P=1$ が m に作用する場合の δ_a を δ_{am} とする。 $P=1$ が構造物上を移動する場合には、構造物上のすべての m 點に就て δ_{am} を算定し、第 208 圖の如く m を通過して P の作用方向に平行な



第 208 圖

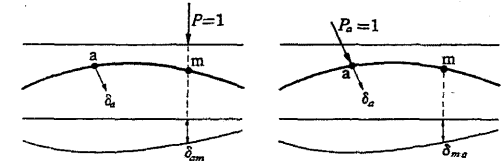
る直線上に δ_{am} に等しき縦距をとつて曲線を描けば、之即ち δ_a の影響線

である。然し構造物上

のすべての m 點に就て、或は十分に多數の m 點に就て一々 δ_{am} を算定することは可成り手数を要することであつて、通常下記の方法に依る方が簡明である。

今、與へられたる點 a に與へられたる δ_a の方向に $P_a = 1$ が作用する場合の點 m の移動荷重 P の方向の撓みを δ_{ma} とすれば、Maxwell の法則に依

第 209 圖



つて $\delta_{ma} = \delta_{am}$ である。従つて、點 m に $P = 1$ が作用する場合の δ_a は δ_{ma} に等しくなる。故に第 209 圖の如く點 a に δ_a の方向に $P_a = 1$ が作用する場合の移動荷重の方向の撓み曲線を描けば、之が其のまま δ_a に對する影響線になる。