

第 V 章 静定トラス

§ 31. 總 説

構造力学に於てはトラスとは多数の直線部材をすべて其の両端に於て全く摩擦のないピンで依つて連結せる滑節骨組構造を意味する¹⁾。トラスに作用する外力及びトラスを形成する部材がすべて同一平面内にあるとき、そのトラスを平面トラスと言ひ、然らざるものを立體トラスと言ふ。トラスを形成する部材の両端は前記の如く之を滑節と假定するが故に、一個の平面トラスに於ける部材、反力及び節點の總數を夫々 m, r, k とすれば、§ 8 に依つて、トラスが全體的に安定且つ静定なるがためには

$$m + r = 2k \quad (31.1)$$

が必要条件であつて、若し $m + r < 2k$ ならば不安定、 $m + r > 2k$ ならば一般に不静定になる。同様に、平面トラスが内部的に安定且つ静定なるがためには

$$m = 2k - 3 \quad (31.2)$$

が必要条件であつて、若し $m < 2k - 3$ ならば内部的に不安定、 $m > 2k - 3$ ならば一般に内部的に不静定になる。

トラスに關する構造力学の課題は、反力、部材應力及び變形の三者である。このうち静定反力は一般に第 III 章に記述せる方法に依り求められ、トラ

1) トラスの節點を完全なる滑節と假定することは、實際のトラスでは鉸結又は熔接構造の場合は勿論のこと、米國流のピン構造に於ても(ピンの接觸面に生ずる摩擦のために)全く實現不可能である。之にも拘らず通常は節點を完全なる滑節として計算を行ひ、特に節點の剛性又は摩擦の影響を考慮する必要ある場合には之を“二次應力”又は“副應力”の問題として別途に考察するのが常である

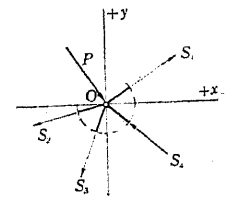
スの變形及び不静定トラスに關しては後章に於て論述することとし、本章に於ては單に静定平面トラスの部材應力の解法を記述する。

トラスの部材應力を求むる際に特に假定せられることは、前述の完全なる滑節の假定の他に、すべての外力が間接荷重として節點に集中して作用すると言ふ假定である¹⁾。従つてトラスの部材には曲げモーメント及び剪斷力は作用せず單に軸方向力のみが作用することになる。而して此の軸方向力の値は一部材に就ては其の全長に亘つて一定であつて、トラスに於て“部材の應力”と呼ぶものは此の軸方向力其のものを意味し、軸方向力を部材の斷面積にて除したる所謂應力度を意味するものではない。

トラスの部材應力の解法には各種の方法があり、其の何れに依るも結局は同一結果に到達し得るのであるが、實際に於ては夫々の場合に便利なる解法を採用すべきである。以下に記述するものは數種の代表的の解法である。

§ 32. 節點法 (Cremona の方法)

今、トラスの任意の節點 O に於て之に連結するすべての部材を切斷せるものと假定し(第 125 圖)、切斷せられたる部材の應力を此の部分に對する外力と考へるとき、之等の諸力と O に作用する荷重とは釣合を保たねばならない。然るに之等諸力の作用線はすべて O を通過するが故に、其の釣合條件は $\sum H = 0$ 及び $\sum V = 0$ である。



第 125 圖

1) 此の假定を實現するために、實際の橋梁トラス等に於ては荷重が縦桁、床桁等を通じて間接に節點に集中して作用する様に設計するのが普通である。部材自身の重量は勿論分布荷重ではあるが、前記の假定に従ひ、之を各節點に配分して集中荷重と假定する。

故に今 O を原点とする直交座標軸 Oxy をとり

$P =$ 節点 O に作用する荷重の合力,

$S_1, S_2, \dots =$ 節点 O に連結する部材の應力,

$\lambda_1, \lambda_2, \dots = P, S_1, S_2, \dots$ の x -軸に対する方向餘弦,

$\mu_1, \mu_2, \dots = P, S_1, S_2, \dots$ の y -軸に対する方向餘弦

とすれば、節点 O の釣合条件は

$$\left. \begin{aligned} \Sigma H &= \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda P = 0, \\ \Sigma V &= \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \dots + \mu P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (32.1)$$

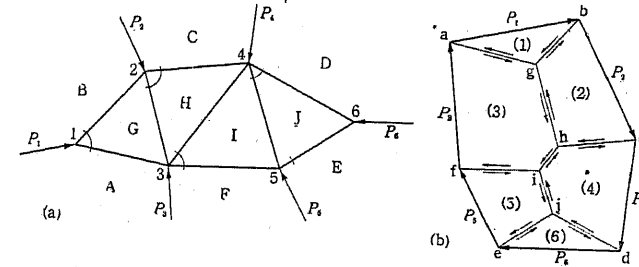
になる。若し節点に反力が作用する場合には其の反力の代りに之に相当する部材を假想すればよい。

(32.1) 式は各節点に於て成立し、従つて節点数を k とすればトラス全體に就き $2k$ 個の式が得られる。然るに静定トラスに於ては部材數 m と反力數 r との和は $2k$ に等しきが故に、此の $2k$ 個の式を聯立一次方程式として解くことによりすべての部材應力及び反力を決定することが出来る。但し内部的に静定なるトラスに於ては $m = 2k - 3$ であるから、若し之に作用するすべての外力が既知なる場合には、上記の $2k$ 個の方程式より任意の三式を除ける $2k - 3$ 式を聯立方程式として解くことにより全部の部材應力を決定することが出来、前に除外せる式は計算結果の檢算に利用することが出来る。

如何なるトラスに於ても、それが静定なる限り其の部材應力或は部材應力と反力は上記の方法に依り之を決定し得るわけであるが、此の方法を應用して最も便利なる場合は、二部材のみの節点が少くとも一つ存在し、此の節点より適當なる順序により順次他の節点に移る毎に常に新しく二部材のみが出現するが如きトラスである(第 126 圖, 第 127 圖)。かかるトラスを

「單純トラス」と言ひ、之に於ては $2k$ 或は $2k - 3$ 個の式を聯立方程式として解く手数を要せず、單に二部材のみの節点より適當なる順序に依り順次他の節点に移り、各節点毎に $\Sigma H = 0, \Sigma V = 0$ の条件に依つて二個づつの未知部材應力を決定すれば、結局すべての部材應力を決定することが出来る。

上記の方法を巧妙に圖解法に移したのが Cremona である。例へば第 126 圖の如きトラスの部材應力を求めるには先づ部材及び外力に依りて限られ



第 126 圖

たる各部分に A, B, C, ... 等の文字を記入し、部材及び外力は其の兩側にある文字を連記して示す¹⁾。例へば部材 1-2 を BG, P_1 を AB とするが如くである。

先づ節点 1 に於ては $P_1 = AB$ と部材 GA, BG の應力は釣合はねばならない、即ち之等の力の多角形は閉合しなければならない。今、適當なる縮尺に依り第 126 圖 (b) の (1) に示すが如く $P_1 = AB$ に等しく ab をとり、a 及び b より夫々 GA, BG に平行線を引いて其の交点を g とすれば、三角形 abg は節点 1 に於て互に釣合ふ三力の力の多角形となるが故に bg, ga の長さは夫々 BG, GA の應力の大きさを示すことになる。而して此の力の三角形は abga の順に閉合するが故に、BG の應力 bg は b より g の方向即ち節点

1) 之を Bow の記號法と言ふ

1 に向つて作用し従つて壓縮力になり、GA の應力 ga は g より a の方向即ち節點 1 に向つて作用するが故に同じく壓縮力なることを知る。

次に節點 2 に移れば、茲に於ては $P_2 = BC$ と三部材 GB, CH, HG の應力とが釣合はねばならない。然るに GB の應力は節點 1 に於て既に求められ且つ $P_2 = BC$ は既知なるが故に未知なるは CH, HG の二應力のみである。力の多角形を描く場合にとるべき力の順序は任意なるが故に、すべての節點に作用する力を時針の回轉方向と同じ順序にとるものとし、先づ GB の應力(壓縮力なるが故に節點 2 に向ふ)に等しく gb , b より $P_2 = BC$ に等しく bc をとり、 c 及び g より夫々の應力の未知なる部材 CH, HG に平行線を引き其の交點を h とすれば、CH の應力の大きさは ch に等しく方向は節點 2 に向ふが故に壓縮力になり、HG の應力の大きさは hg に等しく之また壓縮力なることを知る。

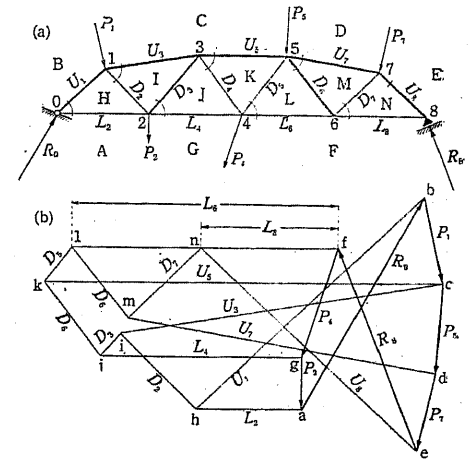
かやうにして順次節點 3, 4, ... に於て力の多角形を描けば

- | | |
|---------------|---------------|
| 節點 3: faghif, | 節點 4: ihedji, |
| 節點 5: efije, | 節點 6: dejd |

の力の多角形が得られ、之に依つて全部材の應力が決定せられる。

第 126 圖(b) は上記の如き各節點の力の多角形を接續せるものであつて、之を Cremona の應力圖或は Maxwell の應力圖と呼ぶ。此の應力圖を簡単に作圖するには、先づ第一にトラスに作用するすべての外力をトラスの外周に沿つて時針の回轉方向と同一の順序にとつて之等外力の力の閉合多角形 abcdefa を描き、次に ab より $ag \parallel AG$, $bg \parallel BG$ を引いて交點 g を定め、更に c, g より $ch \parallel CH$, $gh \parallel GH$ を引いて交點 h を求めるが如き作圖法を順次行へばよい。かくして得られたる應力圖中の各線分の長さは其の兩端を示す小文字記號に對應する大文字記號間にある部材の應力又は外力の大

さを示し、之等の力の方向は力の多角形の回轉方向に依つて定めることが出来る。尚、應力圖中の各線分に依り限られたる部分は夫々トラスの節點に對應し、應力圖中の小文字記號にて示す點は之に對應する大文字記號を附せるトラスの部分に相應する。此の意味に於て此の應力圖を相反多角形とも言ふ。



第 127 圖

第 127 圖の如き單純トラスに於ては、先づ其の反力 R_0, R_8 を第 III 章に於て説明せる方法に依つて求めたる後、上記の方法に依つて應力圖を作圖

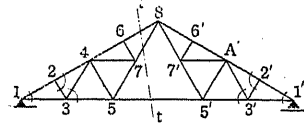
すればよい。(b) は即ち此の場合の應力圖であつて、各節點毎の力の多角形に分解すれば

- | | | | | |
|-----------|-----------|------------|-----------|------------|
| 0: abha, | 1: hbeih, | 2: gahijg, | 3: jickj, | 4: fgjklf, |
| 5: lkedml | 6: flmnf, | 7: nmden, | 8: efne | |

になる。本圖の場合、IJ 及び LM の應力及び上縁の部材の應力は壓縮力になり、他は張力になる。之を識別し易くするためには壓縮力を受ける部材或は壓縮力は之を太線を以て、張力を受ける部材或は張力は之を細線を以て示すのが普通である。

第 128 圖の如きトラスに於ては節點 1, 2, 3 及び 1', 2', 3' に順次前記の方法を適用することに依り部材 1-2, 1-3, 2-3, 3-4 及び 1'-2', 1'-3', 2'-3', 3'-4' の應力を求め得るも、次に節點 4, 5 或は 4', 5' の何れに移るも應力の

未知なる部材が三個出現し、之以上に進めなくなる。かかる場合には例へば断面 $t-t$ にてトラスを切斷し後述の Ritter の解法に依り $5-5'$ の應力を求むれば、



第 128 圖

節點 5 或は $5'$ に於ては應力の未知なる部材は二個のみとなり、順次 5, 6, 7 等の各節點毎に釣合條件に依つて殘餘の部材の應力を決定することが出来る。

上記の節點法或は Cremona の圖解法は固定荷重を受ける單純トラスに對しては最も簡單であつて広く利用せられるが、移動荷重に依る最大應力を求むるには不便である。また各節點毎に計算又は作圖を進めて行くが故に、或る一部材の應力のみを求めんとする場合には餘分の手數を要し、且つ誤差が累積する虞れがあること等が本法の缺點である。

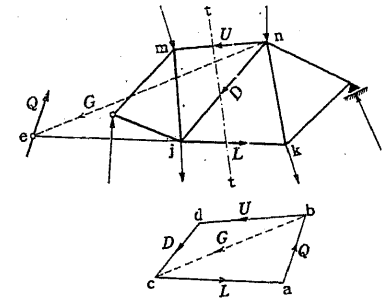
§ 33. 断面法其の一 (Culmann の方法)

断面法とはトラスを適當なる断面にて切斷せるものと考へ、其の一方に於ける諸力の釣合條件より部材應力を算定する方法である。例へば第 129 圖のトラスを任意の断面 $t-t$ にて切斷し、之に依つて其の方向が共に一點に會せざる三部材 mn, jn, jk が切斷せられるものとする。今 mn, jn, jk の應力を夫々 U, D, L とし¹⁾、切斷面の片側、例へば左側に作用するすべての外力の合力を Q とすれば、之等四力は互に釣合はねばならない。故に先づ Q を定めたる後、之を mn, jn, jk の方向に分解すれば U, D, L が定まるので

1) トラスの部材には其の位置に依り特別の名稱をつける。トラスの外郭を構成する部材を一般に弦材、其の中間にあつて弦材を連結する部材を一般に腹材と言ひ、橋梁トラスの如く水平に長きトラスに於ける上縁の弦材を上弦材、下縁の弦材を下弦材、腹材のうち傾斜せるものを斜材、鉛直なるものを鉛直材と言ふ。而して上弦材、下弦材、斜材、鉛直材の應力を夫々一般に U, L, D, V にてあらはす。

あつて、かかる方法を Culmann の方法 と言ふ。

此のためには先づ U, D, L のうち任意の一つ、例へば L の作用線と Q の作用線との交點 e を求め、次に残りの二應力 U, D の作用線の交點 n と e とを結ぶ。而して適



第 129 圖

當なる縮尺にて $ab = Q$ にとり a, b より夫々 L 及び ne に平行線を引いて其の交點 c を求め、次に b, c より夫々 U, D に平行線を引いて其の交點を d とすれば、求むる應力は

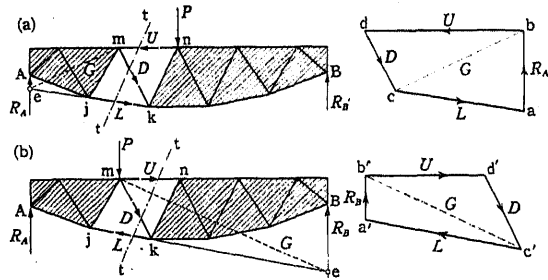
$$U = bd, \quad D = dc, \quad L = ca \quad (33.1)$$

になる。何となれば、かくして求めたる U と D との合力を G とすれば G の大きさは bc に等しく其の作用線は ne であり、更に G と L との合力は ba 、即ち Q に大き相等しく方向反對であつて且つ其の作用線が Q の作用線に一致するが故に U, D, L, Q の四力が互に釣合ふからである。本圖の場合 U と D は切斷面に向ふ力なるが故に壓縮力であり、 L は切斷面より遠ざかる力なるが故に張力である。

橋梁に於けるが如く水平に長きトラスに於て荷重及び反力がすべて鉛直に作用する場合には、前記の Q は其の切斷面に作用する鉛直方向の剪斷力に一致するが故に、本方法を 剪斷力法 とも言ひ、腹材の應力を求むるに適した方法である。

第 130 圖の如きトラスに於て鉛直荷重 P が (a) の如く切斷面 $t-t$ の右方にある上弦材の節點 n 或は之より右に作用する場合には、 $t-t$ の左にある外力は A に於ける鉛直反力 R_A のみであるから $Q = R_A$ になり、之に就

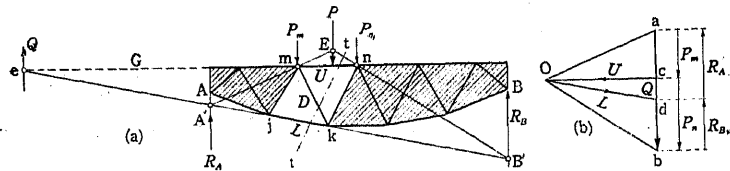
き前述の如くにして斜材の應力 D を求むれば力の多角形 $abcd$ より明かなるが如く D は張力になる。此の場合、斜材 D の方向が $t-t$ に対して右上りになるとき即ち jn 間にある場合には其の應力は壓縮力になる。



第 130 圖

第 130 圖 (b) の如く荷重 P が $t-t$ の左の節点 m 或は之より左に作用する場合に於て $t-t$ の右側の部分を考へれば、此の部分に作用する外力は B に於ける鉛直反力 R_B のみであるから、之に就て前述の方法を適用すれば力の多角形 $a'b'c'd'$ の示すが如く D は壓縮力になる。此の場合、 D の方向が $t-t$ に対して右上りならば D は張力になる。

かくの如く P が n 或は n より右に作用するか、 m 或は m より左に作用するかによつて斜材の應力の符號が反對となるが故に、 P が mn 間の或る特定の位置に作用するとき $D=0$ となる筈である。實際第 131 圖の如く D に対する無載荷弦即ち jk の延長線と左右の鉛直反力の作用線との交点を A', B' とし $A'm, B'n$ の延長線の交点を E とすれば、 P の作用線が E を

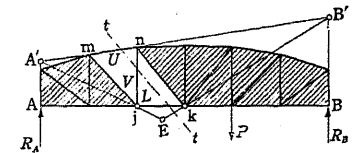


第 131 圖

通過する場合に於て $D=0$ になる。但し P が上弦材 mn に直接に作用せず、間接荷重として節点 m, n に分れて作用することは勿論である。今、第 131 圖 (b) の如く P に等しく ab をとり $aO \parallel EA', bO \parallel B'E$ に依つて極 O を定め、 O より mn に平行線を引き、之と ab との交点を c とすれば ac, cb は夫々節点 m, n に於ける P の分荷重 P_m 及び P_n である。また O より $A'B'$ に平行線を引き之と ab との交点を d とすれば $da = R_A, bd = R_B$ である。故に $t-t$ より左側にある外力の合力は $Q = R_A + P_m = dc$ であつて、其の作用線は R_A, P_m に対する連力圖 $ja'mn$ の始邊 ja' と終邊 mn の延長線の交点 e を通過する。然るに此の me は第 129, 130 圖に於ける G の作用線に相當し、之が U の作用線に一致するが故に $D=0$ となるのである。

上記のことは荷重が下弦に作用する場合に於ても亦鉛直材に対しても同様である。例へば第 132 圖の如く下弦が載荷弦なる時の鉛直材 jn の應力

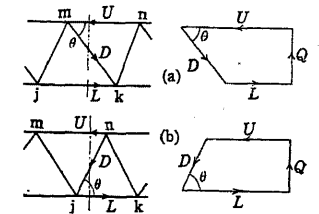
V が零となるべき荷重作用線の位置を決定するには、 V に対する無載荷弦即ち mn の延長線と R_A, R_B の作用線との交点 A', B' と夫々 j, k とを結び、其の



第 132 圖

交点 E を求むればよい。かくの如き点 E は後述の如く腹材の影響線の作圖に於て重要な點である。

尚、第 133 圖の如く上下兩弦が水平であり、外力がすべて鉛直なる場合には、 Q は切斷面に於ける剪斷力になり、 U, D, L, Q の力の多角形は圖示の如くなる。従つて



第 133 圖

$$(a) \text{ の場合: } D = + \frac{Q}{\sin \theta}, \quad (b) \text{ の場合: } D = - \frac{Q}{\sin \theta} \quad (33.2)$$

になる。若し此の場合に於て mk 或は jn が鉛直ならば $\theta = \pi/2$ なるが故に

$$\left. \begin{array}{l} \text{左右の斜材が右上りのとき: } V = +Q, \\ \text{左右の斜材が右下りのとき: } V = -Q \end{array} \right\} \quad (33.3)$$

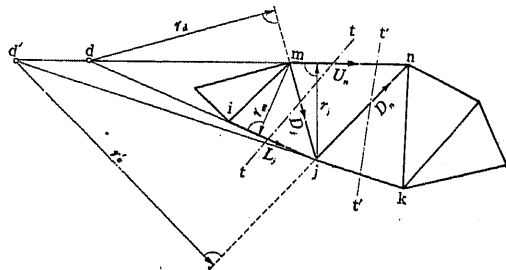
になる。

§ 34. 断面法其の二 (Ritter の方法)

本方法に於ては Culmann の方法に於けると同様にトラスを切断面 t-t にて切斷せるものと考へ、其の片側に作用する外力と切斷せられたる部材の應力との釣合より部材應力を算出するのであるが、其の釣合條件として共に一直線上にあらざる任意の三點に對する力のモーメントの和が夫々零に等しと言ふ定理 4.1 を應用するのであつて、モーメント法とも呼ばれる。

此の場合、部材應力の正負は未知であるから、最初はすべて正、即ち張力と假定して計算を行ふ。

例へば第 134 圖に示すが如く切斷面 t-t にて切斷せられる部材の應力を U_n, D_j, L_j とし節點 m, j より夫々之に對向する弦材に下せる垂線の長さを r_m, r_j 、t-t に依り切斷せられる上下兩弦材の延長線の交點 d より D_j に下せる垂線の長さを r_d とする。而して t-t の左側に作用するすべての外力の m, j, d に對するモーメントの和を夫々 M_m, M_j, M_d とし、前記の定理



第 134 圖

を m, j, d の三點に適用すれば

$$\left. \begin{array}{l} m: -L_j r_m + M_m = 0, \quad L_j = + \frac{M_m}{r_m}, \\ j: +U_n r_j + M_j = 0, \quad U_n = - \frac{M_j}{r_j}, \\ d: +D_j r_d + M_d = 0, \quad D_j = - \frac{M_d}{r_d} \end{array} \right\} \quad (34.1)$$

を得る。

之と同様に切斷面 t'-t' に就て d' に對するモーメントの釣合を考へれば

$$-D_n r'_d + M'_d = 0, \quad D_n = + \frac{M'_d}{r'_d} \quad (34.2)$$

を得る。トラスが其の兩端に於て單純梁と同様に支持さるる場合には M_m, M_j は正であるが故に L_j は張力、 U_n は壓縮力になるが、腹材の應力は荷重の位置に依つて正又は負になる。

(34.1) 式は弦材の應力を算出するには甚だ便利であるが、弦材が平行或は略々平行なる場合には點 d を求めることが不可能或は困難になるが故に腹材應力を求めるには適當しない。かかる場合には先づ (34.1) の最初の二式に依つて弦材の應力を決定したる後 $\Sigma H = 0$ の條件より腹材應力を求めればよい。

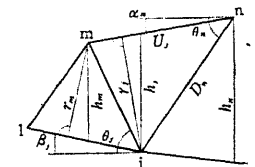
例へば第 135 圖に就て切斷面の左に作用するすべての外力の水平分力の和を H_i (右向を正) とすれば $\Sigma H = 0$ より

$$D_j \cos \theta_j + U_n \cos \alpha_n + L_j \cos \beta_j + H_i = 0,$$

此の U_n, L_j に (34.1) の値を代入すれば

$$D_j \cos \theta_j = \frac{M_j}{r_j} \cos \alpha_n - \frac{M_m}{r_m} \cos \beta_j - H_i$$

になる。今、節點 m, j より夫々之に對する弦材までの鉛直線の長さを h_m, h_j とすれば $r_m = h_m \cos \beta_j, r_j = h_j \cos \alpha_n$ であるから



第 135 圖

$$D_j = \left(\frac{M_j}{h_j} - \frac{M_m}{h_m} - H_t \right) \sec \theta_j \quad (34.3)$$

になり、之より D_j を算出することが出来る。

之と同様に右上りの斜材 jn の應力 D_n に対しては

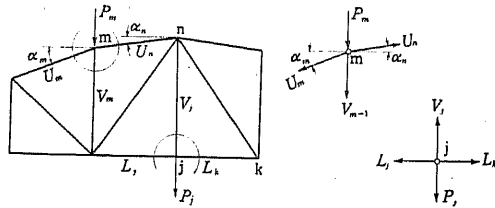
$$D_n = \left(-\frac{M_n}{h_n} + \frac{M_j}{h_j} - H_t \right) \sec \theta_n \quad (34.4)$$

を得る。従つて一般に任意の斜材に就て其の應力を D 、水平に對する角を θ 、斜材を通過する切斷面より左方にある外力の斜材の上端及び下端に對するモーメントを夫々 M_u, M_l とし、又此の外力の水平分力の和を H とすれば

$$D = \left(\frac{M_l}{h_l} - \frac{M_u}{h_u} - H \right) \sec \theta \quad (34.5)$$

とすることが出来る。若し荷重及び反力がすべて鉛直なる場合には上の諸式に於ける H_t, H_l, H は零に等しい。

尙、第136圖に示す鉛直材 V_m, V_j 等の應力には Culmann の方法も Ritter の方法も應用出来ない。何故ならば之等の鉛直材に會すべき切斷面は必ず



第 136 圖

此の他の三部材に會するからである。かかる場合には先づ Ritter の方法により弦材の應力を求めたる後、鉛直材の上端又は下端に於ける釣合條件より鉛直材の應力を決定することが出来る。

例へば節點 m に於ては

$$\sum H = U_n \cos \alpha_n - U_m \cos \alpha_m = 0,$$

$$\sum V = U_n \sin \alpha_n - U_m \sin \alpha_m - V_m - P_m = 0$$

であつて、之より

$$\left. \begin{aligned} V_m &= -P_m + U_n \sin \alpha_n - U_m \sin \alpha_m, \\ U_n \cos \alpha_n &= U_m \cos \alpha_m \end{aligned} \right\} \quad (34.6)$$

且つ

になる。若し m の左右の弦材が一直線上にある場合には $\alpha_n = \alpha_m$ であるから $U_n = U_m$ になり、従つて $V_m = -P_m$ になる。

同様にして第136圖の節點 j に於ける釣合條件より

$$\left. \begin{aligned} \sum H &= L_k - L_j = 0: \quad L_k = L_j, \\ \sum V &= V_j - P_j = 0: \quad V_j = P_j \end{aligned} \right\} \quad (34.7)$$

を得る。

§ 35. 各種トラスの影響線

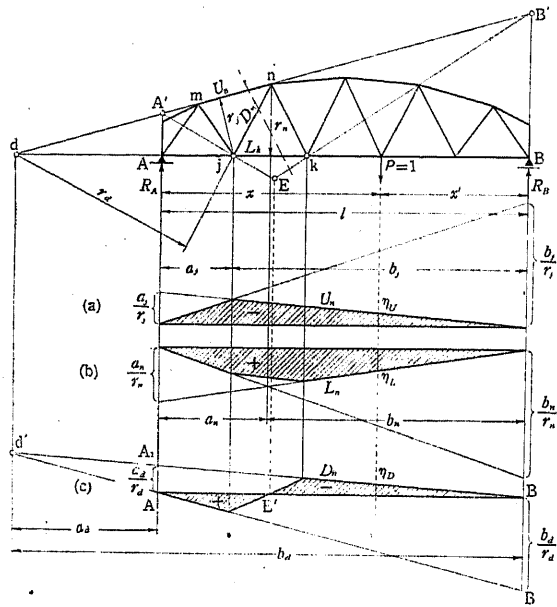
橋梁トラスに於けるが如く鉛直荷重が移動する場合の反力又は部材應力の算定には影響線を利用するのが便利である。トラスが静定に支持せられる場合、其の反力に對する影響線は其のトラスに相應する静定梁の場合と全く同様であるが、部材應力に對する影響線はトラスの種類に依つて各々相違する。以下數種のトラスに就き其の部材應力に對する影響線を説明する。

i. 單純トラス.

第137圖の如く下弦を載荷弦とし、兩端に於て單純梁の如くに支持せられるトラスに於ける弦材の應力は(34.1)式に依り一般に

$$U_n = -\frac{M_j}{r_j}, \quad L_k = +\frac{M_n}{r_n} \quad (35.1)$$

である。然るに M_j, M_n は AB を單純梁と假想せる場合の j 及び n に相應する點の曲げモーメントに等しきが故に、 U_n, L_k に對する影響線は第137圖(a), (b) の如き作圖に依り之を描くことが出来る。



第 137 圖

斜材 D_n の應力は (34.2) より

$$D_n = + \frac{M_a'}{r_d} \quad (35.2)$$

である。然るに荷重 $P=1$ が節点 k 或は之より右に作用するときには

$$M_a = -R_A a_a = -1 \frac{x'}{l} a_a = -\frac{\alpha_a x'}{l},$$

$P=1$ が節点 j 或は之より左に作用するときには

$$\begin{aligned} M_a &= -R_A a_a + P(a_a + x) = R_B a_a + P x \\ &= 1 \frac{x}{l} a_a + 1 \cdot x = \left(\frac{\alpha_a}{l} + 1 \right) x = + \frac{b_a x}{l} \end{aligned}$$

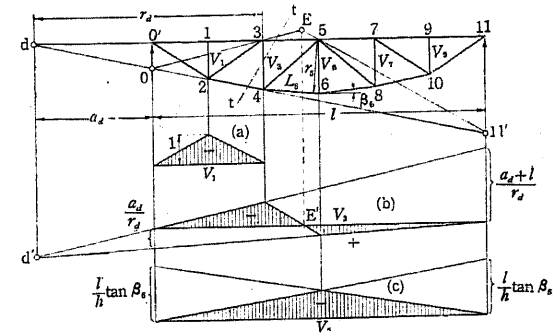
であるから D_n に対する影響線縦距は

$$A \sim j: \eta_D = + \frac{b_a}{r_d} \cdot \frac{x}{l}, \quad k \sim B: \eta_D = - \frac{\alpha_a}{r_d} \cdot \frac{x'}{l} \quad (35.3)$$

になり, jk 間は直線的に變化する。従つて D_n に対する影響線は (c) の如く

になる。此の場合 $AA_1:BB_1 = a_a:b_a$ であるから BA_1, B_1A の延長線の交点 d' は d と同一鉛直線上にあり, 且つ $\eta_D = 0$ となるべき点 E' は § 33 に於て説明せる所に依り点 E と同一鉛直線上になければならない。

上記の方法は上弦に荷重が作用する場合に於ても同様である。例へば第 138 圖のトラスに於ても其の弦材及び斜材の應力に対する影響線は第 137



第 138 圖

圖と同様にして求められる。また V_3, V_7 の鉛直材應力の影響線も第 137 圖の斜材應力の場合と同様にして求められる。但し, 例へば V_3 に対しては切断面 $t-t$ を圖示の如くにとるべく, 且つ上弦が載荷弦なるが故に, 其の影響線は (b) の如くなる。

鉛直材應力 V_1, V_5, V_9 に対しては特別に考へねばならない。例へば V_1 は (34.6) に依り節点 1 に作用する荷重に大きさが等しき壓縮力なるが故に, $0 \sim 3$ 間に荷重が作用する場合の外は $V_1 = 0$ であつて, 其の影響線が (a) の如くなることは別に説明を要しないであらう。

トラスの形状を 5-6 に對して左右對稱とすれば, 節点 6 に於ける釣合條件より

$$V_5 = -2L_6 \sin \beta_6$$

になる。然るに5-6に於けるトラスの高さを h とすれば

$$L_6 = + \frac{M_6}{r_6} = + \frac{M_6}{h \cos \beta_6}$$

であるから

$$V_6 = -2 \frac{M_6}{h} \tan \beta_6 \quad (35.4)$$

になり、従つて V_6 に対する影響線は (c) の如くなる。

第139圖の如く上下兩弦が水平なる場合には、其の交點が存在しないか

ら前記の方法に依つて腹材應

力の影響線を得ることは出来

ないが、此の場合には (33.2)

式に依つて之を求めることが

出来る。即ち圖示の切斷面

$t-t$ に作用する剪斷力は

Q_{j-k} であつて、斜材應力 D は

(33.2) 式より

$$D = + \frac{Q_{j-k}}{\sin \theta}, \quad (35.5)$$

また切斷面 $t'-t'$ に會する鉛直材の應力 V は (33.3) 式より

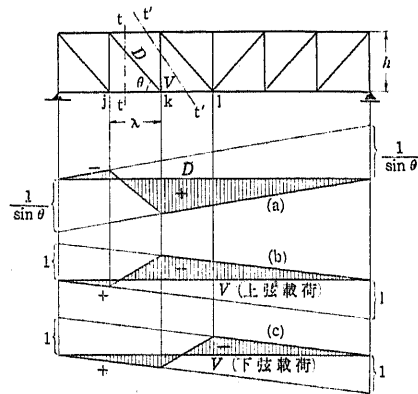
$$\left. \begin{aligned} \text{上弦載荷の場合: } V &= -Q_{j-k}, \\ \text{下弦載荷の場合: } V &= -Q_{k-l} \end{aligned} \right\} \quad (35.6)$$

であるから、 D 及び V に対する影響線は夫々圖示の如くなる。

ii. ゲルバートラス.

第140圖はゲルバー型つながりのトラスの例であつて上弦材はすべて水平とし、之に荷重が作用するものとする。

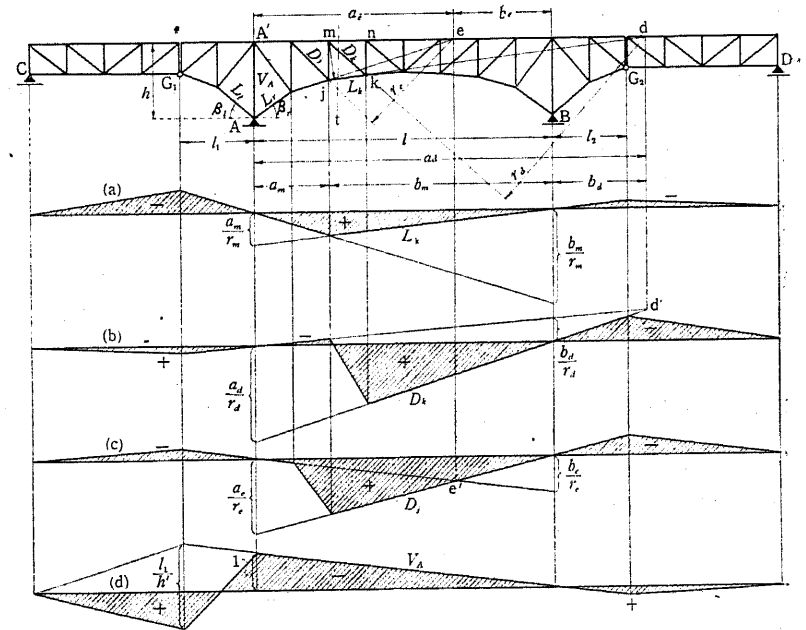
(34.1) に依り、弦材の應力は之に對向する節點に對する曲げモーメントを此の節點より該弦材に下せる垂線の長さで除したるものに等しい。然る



第 139 圖

に此の曲げモーメントは本場合に於ては與へられたるトラスに相應するゲルバー梁の該節點に對應する點の曲げモーメントに等しく、ゲルバー梁の中央部に於ける曲げモーメントに對する影響線は、第93, 96, 97圖の如く、中央部を單純梁と假定して之を描き、其の兩端を其のまま支點を超えてヒンヂ G_1, G_2 の位置まで延長し、之より左右の支點 C, D に於て零となるが如くに直線を引けばよい。従つてゲルバートラスの中央部の弦材應力に對する影響線も、先づ中央部を單純トラスと假定して之を描き、之を上記の如く延長屈折すればよい。例へば下弦材應力 L_k に對する影響線は第140圖 (a) の如くなる。

上記の方法は腹材應力に對しても同様である。何となれば、例へば D_k に就ては $D_k = M_d / r_d$ であつて、荷重が n より右或は m より左に作用するか



第 140 圖

に依つて M_a は $R_a a$ 或は $-R_b b$ に等しく, R_A 又は R_B に對する影響線を上記の如くに延長屈折して得られるからである. 第 140 圖 (b), (c) は D_n , D_j に對する影響線である. D_j に對しては之に對する上下兩弦材の交點 e が AB 間にあることに注意を要する.

之等のことは鉛直材應力に對しても同様であるが, 支點上の鉛直材の應力, 例へば V_A に就ては支點 A に於ける釣合條件より考へねばならない. A の左右にある下弦材の應力を L_l, L_r , 之等と水平線との間の角を β_l, β_r とすれば, A に於ける鉛直方向の釣合條件は

$$V_A + R_A + L_l \sin \beta_l + L_r \sin \beta_r = 0$$

になる. 然るに支點 A に於けるトラスの高さを h とすれば, 節點 A' より L_l, L_r に下せる垂線の長さは夫々 $h \cos \beta_l, h \cos \beta_r$ に等しく, A' より左に作用する外力の A' に對するモーメントを M_A とすれば

$$L_l = \frac{M_A}{h \cos \beta_l}, \quad L_r = \frac{M_A}{h \cos \beta_r}$$

になり, 之を前式に代入すれば

$$V_A = -R_A - \frac{M_A}{h} (\tan \beta_l + \tan \beta_r) \quad (35.7)$$

を得る. 従つて $h' = h / (\tan \beta_l + \tan \beta_r)$ とすれば

$$V_A = -R_A - \frac{M_A}{h'} \quad (35.8)$$

になり, R_A の影響線と M_A/h' の影響線を組合せることにより第 140 圖 (d) の如き影響線が得られる.

第 141 圖に示す張出部に於ても弦材の應力 U_n 及び L_k は

$$U_n = -\frac{M_j}{h_m}, \quad L_k = +\frac{M_n}{r_n} \quad (35.9)$$

であるから, 其の影響線は $M_j (= M_m)$, M_n の影響線より容易に求めること

が出来. 但し之等の曲げモーメントは一般に負であるから U_n は張力, L_k は壓縮力になる.

第 141 圖の斜材應力 D_n , 鉛

直材應力 V_k は

$$\left. \begin{aligned} D_n &= +\frac{M_a}{r_d}, \\ V_k &= -\frac{M_a}{g_a + g_n} \end{aligned} \right\} (35.10)$$

より求められる. 然るに $P=1$ が D_n に對しては m より, V_k に對しては n より左に G_1 までの間に作用する場合には一般に $M_a = 1 \cdot x$ であるから,

此の區間に於ける D_n, V_k に對する影響線縦距は

$$\eta_D = +\frac{x}{r_d}, \quad \eta_V = -\frac{x}{g_a + g_n}, \quad (35.11)$$

特に G_1 に於ては

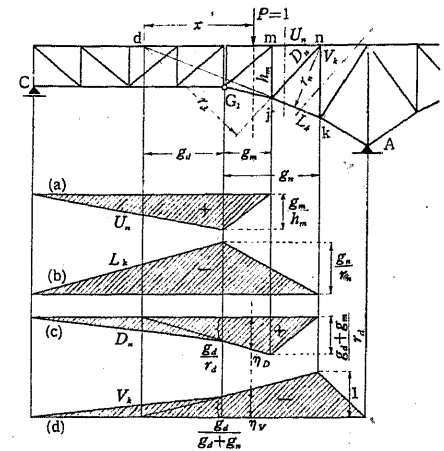
$$\eta_D = +\frac{g_a}{r_d}, \quad \eta_V = -\frac{g_a}{g_a + g_n} \quad (35.12)$$

になり, 従つて第 141 圖 (c), (d) の如き影響線が得られる.

iii. 三鉸トラスアーチ.

トラス構造の三鉸アーチの例として第 142 圖の如く左右對稱にして上弦に荷重を受けるアーチを考へる. 先づ反力はトラスであつても梁構造であつても同様であつて, 鉛直反力は AB を單純梁とせる場合に等しく, H に對する影響線は第 111 圖の場合と同様に第 142 圖 (a) の如くなる. 特に G の位置に於ては

$$\eta_H = +\frac{l}{4f}. \quad (35.13)$$

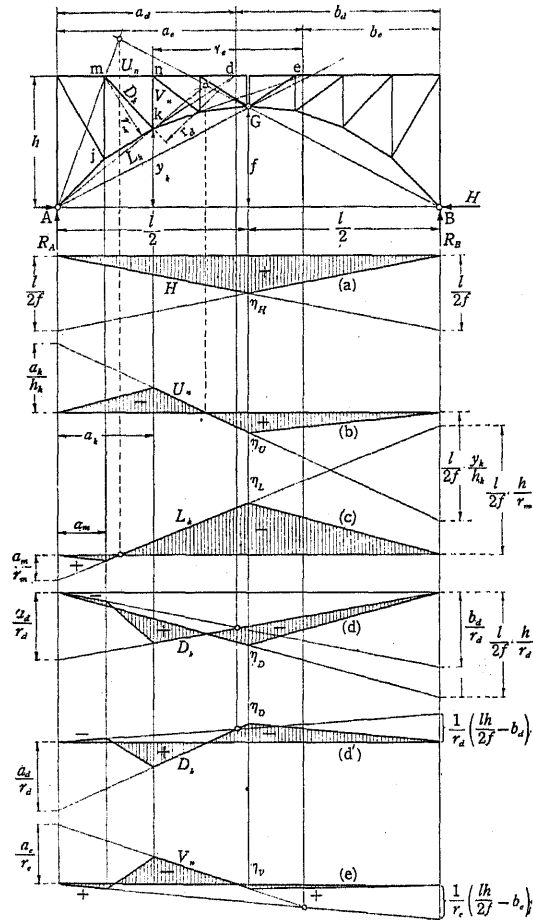


第 141 圖

弦材の應力は (34.1) より求められる。例へば U_n, L_k は

$$U_n = -\frac{M_k}{h_k}, \quad L_k = +\frac{M_m}{r_m}$$

但し、 h_k は k に於ける鉛直材の高さである。上式に於ける M_k, M_m は梁構造の三鉸アーチと考へたときの k, m に於ける曲げモーメントに等しきが



第 142 圖

故に § 28 に記述せる如くにして求められ、従つて U_n, L_k に対する影響線は 第 111 圖 (c) に準じて作圖することが出来る。即ち第 142 圖 (b), (c) の如くになり、特に G の位置に於ては

$$\left. \begin{aligned} \eta_U &= -\frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} a_k - \frac{l}{4f} y_k \right) = +\frac{1}{2h_k} \left(\frac{l}{2f} y_k - a_k \right); \\ \eta_L &= +\frac{1}{r_m} \left(\frac{1}{2} a_m - \frac{l}{4f} h \right) = -\frac{1}{2r_m} \left(\frac{l}{2f} h - a_m \right). \end{aligned} \right\} \quad (35.14)$$

腹材應力も (34.1) より求められる。例へば斜材應力 D_k は

$$D_k = +\frac{M_a}{r_a}$$

であつて、 $P=1$ が節點 n 或は n より右に作用する場合には

$$M_a = R_A a_n - H h; \quad D_k = R_A \frac{a_n}{r_a} - H \frac{h}{r_a}, \quad (35.15)$$

$P=1$ が節點 m 或は m より左に作用する場合には

$$M_a = R_B b_m - H h; \quad D_k = R_B \frac{b_m}{r_a} - H \frac{h}{r_a} \quad (35.16)$$

になる。従つて D_k に対する影響線は鉛直反力及び水平反力に対する影響線を上式に従つて組合せることに依つて得られる。即ち第 142 圖 (d) であつて、特に G の位置に於ては

$$\eta_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_a}{r_a} - \frac{l}{4f} \cdot \frac{h}{r_a} = -\frac{1}{2r_a} \left(\frac{l}{2f} h - a_a \right) \quad (35.17)$$

になる。第 142 圖 (d') は水平線を基線にとつて (d) を描き換へたものである。

之と同様にして V_n の影響線を描けば第 142 圖 (e) の如くなる。本圖に於ける η_V は

$$\eta_V = +\frac{1}{2r_e} \left(\frac{l}{2f} h - a_e \right) \quad (35.18)$$

である。

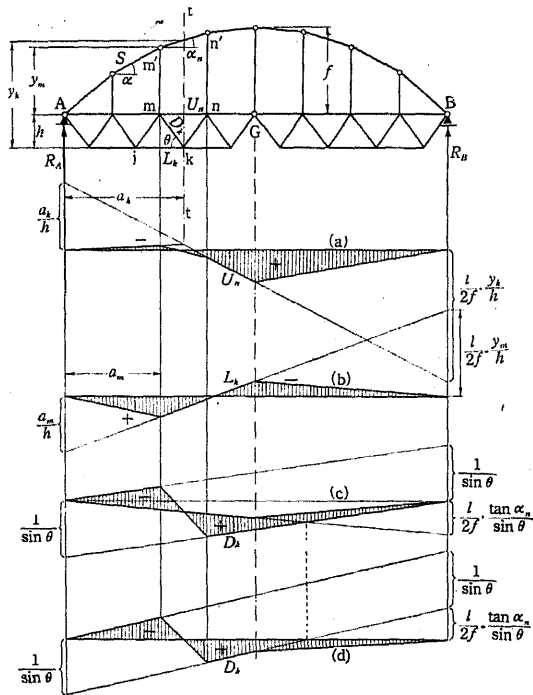
尚、(35.17) 及び (35.18) より明かなるが如く a_a 或は a_e が $\frac{l}{2f} h$ に等しき

時、即ち点 d 或は e が AG の延長線上にあるときには η_D 或は η_r は零に等しくなり、従つてかかる場合にはアーチの右半に作用する荷重は D_k 或は V_n に無影響になる。

以上第 142 圖に就て説明したことは、之以外のアーチ、例へば左右對稱でない場合、上弦が水平ならざる場合或は腹材の配置が異なる場合等に於ても一般に同様である。

iv. 補剛トラスを有する滑節アーチ或はリンク。

第 143 圖及び第 144 圖の如く補剛トラスを有する滑節アーチは共に靜定であつて、補剛トラスの代りに補剛梁を使用せる場合は既に § 30 に於て説



第 143 圖

明したところである。それに依れば滑節アーチ或はリンクを形成する各部分材の應力 S の水平分力はすべて相等しく、之を H とすれば一般に

$$S \cos \alpha = \mp H; \quad H = \frac{M_{G,0}}{f} \quad (35.19)$$

とすることが出来る。但し $M_{G,0}$ は AB を單純梁とせる場合の G に於ける曲げモーメントであり、 \mp 記號のうち第 143 圖及び第 144 圖 (b) の場合には - を、第 144 圖 (a) の場合には + をとるべきことは言ふまでもない。而して上記の H は第 144 圖に於ける水平反力である。

滑節アーチ又はリンクと補剛トラスとを連結する鉛直材の應力 V は、其の左及び右にある部材の水平線に對する角を夫々 α_l 及び α_r とすれば、(30.3) と同様に、一般に

$$V = \pm H(\tan \alpha_l - \tan \alpha_r) \quad (35.20)$$

になる。但し V は第 143 圖及び第 144 圖 (a) に於ては張力であり、第 144 圖 (b) に於ては壓縮力である。

上記の如く S 及び V はすべて H に比例する。然るに H の式 (35.19) は三鉸アーチの水平反力の計算式 (28.7) と全く同一であるから、従つて H 及び S, V に對する影響線は第 111 圖に示せる三鉸アーチの水平反力に對する影響線と全く同様になる。

補剛トラスの弦材の應力は (34.1) 式より求められる。例へば圖に示せる上弦材應力 U_n 、下弦材應力 L_k は一般に

$$U_n = -\frac{M_k}{h}, \quad L_k = +\frac{M_m}{h} \quad (35.21)$$

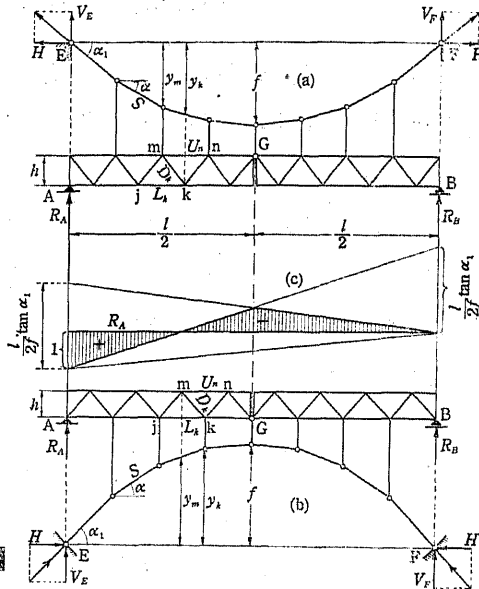
になる。但し M_k, M_m は補剛トラスを梁と考へたる場合の k 及び m に於ける曲げモーメントであつて、(30.4) 及び (30.9) に依り

$$M_k = M_{k,0} - M_{G,0} \frac{y_k}{f}, \quad M_m = M_{m,0} - M_{G,0} \frac{y_m}{f} \quad (35.22)$$

になる。然るに之等の式は三鉸アーチの曲げモーメントに対する (30.2) 式と全く同形であるから、その $1/h$ に等しい U_n 及び L_k に対する影響線

距は三鉸アーチの曲げモーメントに対する影響線縦距の $1/h$ に等しくなる。例へば第 143 圖に於ける U_m, L_k に対する影響線は同圖 (a), (b) の如くなる。

補剛トラスの斜材の應力は (33.2) 式より求められる。例へば圖示の如く右下りの斜材の應力 D_k は、補剛トラスを梁と考慮へたる場合の mn 或は jk



第 144 圖

間に於ける剪断力を Q_{mn}, Q_{jk} とすれば

$$\left. \begin{aligned} \text{上弦が荷弦なるとき: } D_k &= + \frac{Q_{mn}}{\sin \theta} \\ \text{下弦が荷弦なるとき: } D_k &= - \frac{Q_{jk}}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (35.23)$$

になる。然るに (30.4) 及び (30.9) 式に依れば

$$\left. \begin{aligned} Q_{mn} &= Q_{mn,0} - \frac{M_{G,0}}{f} \tan \alpha, \\ Q_{jk} &= Q_{jk,0} - \frac{M_{G,0}}{f} \tan \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (35.24)$$

但し $Q_{mn,0}$ 及び $Q_{jk,0}$ は AB を単純梁とせる場合の mn 或は jk 間に於ける剪断力であり、 α は D_k の斜材の上部 (或は下部) にあるアーチ部材或はリ

ンク部材の水平線に対する角である。上式に依り

$$\left. \begin{aligned} D_k &= \frac{D_{mn,0}}{\sin \theta} - \frac{M_{G,0}}{f} \cdot \frac{\tan \alpha}{\sin \theta}, \\ \text{或は} \quad D_k &= \frac{Q_{jk,0}}{\sin \theta} - \frac{M_{G,0}}{f} \cdot \frac{\tan \alpha}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (35.25)$$

になり、従つて AB を単純梁とせる場合の剪断力の影響線縦距の $1/\sin \theta$ 倍より G に於ける曲げモーメントの影響線縦距の $\tan \alpha / \sin \theta$ 倍を減ずることにより D_k に対する影響線が得られる。第 143 圖 (c), (d) は同圖に於て上弦を荷弦とせる場合の D_k に対する影響線である。

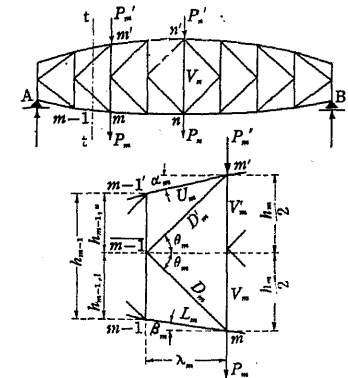
上記の事項は第 143 圖の場合に對しても第 144 圖の場合に對してもすべて同様である。ただ第 144 圖の場合に於て相違するものは A, B に於ける反力 R_A, R_B である。即ち此の R_A, R_B は (30.8) 式に依つて與へられ、本式に従つて R_A に対する影響線を描けば第 144 圖 (c) の如くなる。

§ 36. 二三の特殊のトラス

i. K-トラス.

第 145 圖の如きトラスを K-トラスと言ひ、勿論内部的に静定である。本

トラスを圖の如く t-t にて切斷すれば之に依つて四個の部材が切斷せられるから § 33 或は § 34 の断面法は應用出来ない。本トラスの部材應力を求めるには § 32 の節點法を應用すればよいのであるが、之よりも更に簡単に、且つ各部材の應力を直接に求めるには次に示すが如く節點法と断面法とを組合せればよい。但し



第 145 圖

下記の計算に於ては荷重はすべて鉛直とし、且つ一格間にある上下の斜材は水平線に對して相等しき傾きにあるものとする。

圖示の如く任意の格間 $(m-1)-m$ を考へ、先づ節點 $m-1$ に於ける水平方向の釣合條件より

$$(D_m + D'_m) \cos \theta_m = 0, \quad \text{即ち} \quad D_m = -D'_m \quad (36.1)$$

になる。次に格間 $(m-1)-m$ 中に於て任意の切斷面 t-t にてトラスを切斷し、其の左側の部分に對し $\Sigma H = 0, \Sigma V = 0, \Sigma M_{m-1} = 0$ を適用すれば

$$\Sigma H = U_m \cos \alpha_m + L_m \cos \beta_m + (D_m + D'_m) \cos \theta_m = 0, \quad (a)$$

$$\Sigma V = U_m \sin \alpha_m - L_m \sin \beta_m + (D'_m - D_m) \sin \theta_m + Q_m = 0, \quad (b)$$

$$\Sigma M_{m-1} = U_m h_{m-1, u} \cos \alpha_m - L_m h_{m-1, l} \cos \beta_m + M_{m-1} = 0 \quad (c)$$

を得る。但し Q_m 及び M_{m-1} は格間 $(m-1)-m$ 間に於ける剪斷力及び節點 $m-1$ に於ける曲げモーメントである。

(36.1) に依つて (a) は

$$U_m \cos \alpha_m + L_m \cos \beta_m = 0$$

になり、従つて (c) より

$$-U_m \cos \alpha_m = L_m \cos \beta_m = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \quad (36.2)$$

を得る。之を更に (b) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} D_m = -D'_m &= \frac{1}{2 \sin \theta_m} \left[Q_m - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} (\tan \alpha_m + \tan \beta_m) \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \theta_m} \left[Q_m - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \cdot \frac{h_m - h_{m-1}}{\lambda_m} \right] \end{aligned} \right\} (36.3)$$

になる。また $Q_m = (M_m - M_{m-1})/\lambda_m, 2 \tan \theta_m = h_m/\lambda_m$ なることを考へれば

$$D_m = -D'_m = \frac{1}{\cos \theta_m} \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right] \quad (36.4)$$

とすることも出来る。

節點 m に於ける鉛直方向の釣合條件より

$$V_m + L_m \sin \beta_m - L_{m+1} \sin \beta_{m+1} + D_m \sin \theta_m - P_m = 0,$$

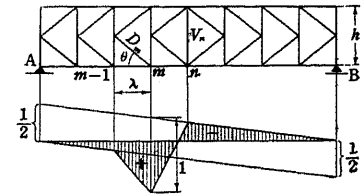
$$V_m = P_m + \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} (\tan \theta_m - \tan \beta_m) - \frac{M_m}{h_m} (\tan \theta_m - \tan \beta_{m+1}) \quad (36.5)$$

を得、之と同様に節點 m' に於ける鉛直方向の釣合條件より

$$V'_m = -P'_m - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} (\tan \theta_m - \tan \alpha_m) + \frac{M_m}{h_m} (\tan \theta_m - \tan \alpha_{m+1}) \quad (36.6)$$

を得る。中央の鉛直材の應力 V_n は

上記と同様に節點 n 又は n' に於ける鉛直方向の釣合條件より之を求めることが出来る。



第 146 圖

第 146 圖の如く上下兩弦が平行であり、格間長 λ が一樣なる場合には

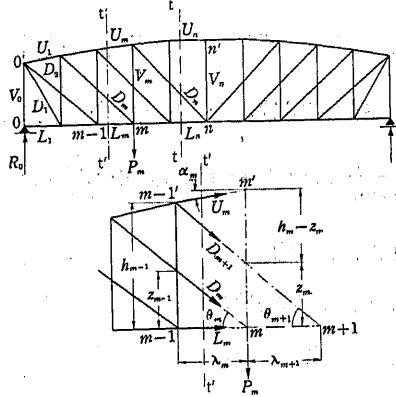
$$\left. \begin{aligned} -U_m = L_m = \frac{M_{m-1}}{h}, \quad D_m = -D'_m = \frac{Q_m}{2 \sin \theta}, \\ V_m = P_m - \frac{Q_m}{2}, \quad V'_m = -P'_m + \frac{Q_m}{2}, \\ V_n = +\frac{P_n}{2}, \quad V'_n = -\frac{P'_n}{2} \end{aligned} \right\} (36.7)$$

になる。第 146 圖に示す影響線は下弦に荷重が作用する場合の V_m に對する影響線である。

ii. Whipple トラス.

第 147 圖、第 148 圖の如きものを Whipple トラスと言ふ。斜材と鉛直材とは交叉するが互に連結されては居ない。以下の記述に於ては荷重はすべて鉛直であつて且つ水平である下弦に作用するものとし、上弦材及び斜材の水平に對する角を α 及び θ 、鉛直材の高さを h 、下弦節點より斜材と鉛直材との交點までの高さを h' 、格間長を λ とする。

第 147 圖の格間 $n - (n - 1)$ 間を圖示の如く $t-t$ にて切斷すれば、其の左側の部分に對する釣合條件は



第 147 圖

$$\begin{aligned} \Sigma M_n &= U_n h_n \cos \alpha_n + M_n = 0, \\ \Sigma V &= U_n \sin \alpha_n - D_n \sin \theta_n + Q_n = 0, \\ \Sigma H &= U_n \cos \alpha_n + D_n \cos \theta_n + L_n = 0 \end{aligned}$$

であつて、之を聯立方程式として解けば

$$\left. \begin{aligned} U_n &= -\frac{M_n}{h_n \cos \alpha_n}, \quad D_n = \frac{1}{\sin \theta_n} \left[Q_n - \frac{M_n}{h_n} \tan \alpha_n \right], \\ L_n &= \frac{M_n}{h_n} - \frac{1}{\tan \theta_n} \left[Q_n - \frac{M_n}{h_n} \tan \alpha_n \right] \end{aligned} \right\} \quad (36.8)$$

を得る。茲に於て一般に

$$Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m}, \quad \tan \alpha_m = \frac{h_m - h_{m-1}}{\lambda_m}, \quad \tan \theta_m = \frac{z_{m-1}}{\lambda_m}$$

なることを考慮すれば D_n 及び L_n は次の如くに書換へられる。

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \frac{h_{n-1}}{z_{n-1}} \cos \theta_n, \\ L_n &= \frac{M_n}{h_n} - \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \frac{h_{n-1}}{z_{n-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (36.9)$$

次に任意の格間 $(m - 1) - m$ に於ける切斷面 $t-t'$ の左側の部分に就き前記と同様の釣合條件を適用すれば

$$\Sigma M_m = U_m h_m \cos \alpha_m + D_{m+1} z_m \cos \theta_{m+1} + M_m = 0,$$

$$\Sigma V = U_m \sin \alpha_m - D_{m+1} \sin \theta_{m+1} - D_m \sin \theta_m + Q_m = 0,$$

$$\Sigma H = U_m \cos \alpha_m + D_{m+1} \cos \theta_{m+1} + D_m \cos \theta_m + L_m = 0$$

を得、前記の Q_m , $\tan \alpha_m$, $\tan \theta_m$ の關係を考へ乍ら此の三式を聯立方程式として U_m, D_m, L_m に就て解けば

$$\left. \begin{aligned} U_m &= -\frac{1}{h_m \cos \alpha_m} \left[M_m + D_{m+1} z_m \cos \theta_{m+1} \right], \\ D_m &= \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - D_{m+1} \frac{h_m - z_m}{h_m} \cos \theta_{m+1} \right) \frac{h_{m-1}}{z_{m-1}} \sec \theta_m, \\ L_m &= \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - D_m \frac{h_{m-1} - z_{m-1}}{h_{m-1}} \cos \theta_m \end{aligned} \right\} \quad (36.10)$$

を得る。(36.9) 及び (36.10) に依つてすべての弦材及び斜材の應力が求められる。

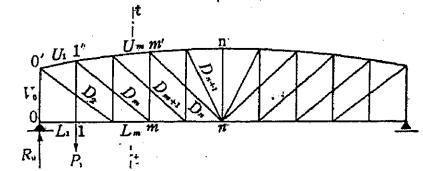
中央の鉛直材の應力は其の上弦に於ける節點の鉛直方向の釣合條件より容易に求められ、中間の鉛直材に於ては一般に

$$V_m = P_m - D_m \sin \theta_m \quad (36.11)$$

であり、且つ $L_0 = 0$, $V_0 = -R_0$, $D_1 = L_2 \sec \theta_1$ なることは特に説明する必要もないであらう。

第 148 圖の場合には $V_0 = R_0$, $L_1 = L_2 = 0$, $V_1 = P_1$ であつて U_1 と D_2

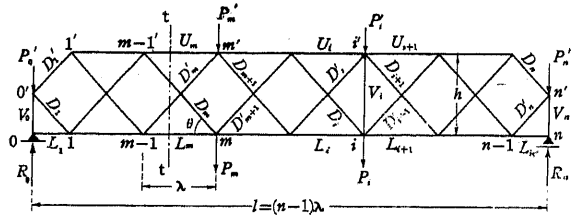
とは節點 $0'$ に於ける釣合條件より容易に之を求めることが出来る。従つて (36.10) の第二式を逆に應用することに依りすべての斜材應力が決定せられ、之を (36.10) の第一式、第三式及び (36.11) に代入することに依つて殘餘の部材の應力を決定することが出来る。



第 148 圖

iii. 菱形トラス.

第 149 圖の如き菱形トラスは 静定構造物であつて、其の斜材が單に交叉するだけであるか或は滑節に依つて連結されて居るかは各部材の應力には無關係である。以下の計算では簡單のために斜材の傾斜はすべて相等しく、荷重は鉛直に作用するものとする。



第 149 圖

両端にある部材の應力は両端の節点 0, 0', n, n' に對する釣合條件により容易に求められる。即ち

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= -R_0, & L_1 &= 0, & D_1 &= -D'_1 = \frac{R_0 - P'_0}{2 \sin \theta} = \frac{M_1}{h \operatorname{cosec} \theta}, \\ V_n &= -R_n, & L_n &= 0, & D'_n &= -D_n = \frac{R_n - P_n}{2 \sin \theta} = \frac{n-1 M}{h \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (36.12)$$

i 或は i' を除く任意の節点 m 及び m' に於ける鉛直方向の釣合條件:

$$(D_m + D'_{m+1}) \sin \theta - P_m = 0, \quad -(D'_m + D_{m+1}) \sin \theta - P'_m = 0$$

より

$$D'_{m+1} = -D_m + \frac{P_m}{\sin \theta}, \quad D_{m+1} = -D'_m - \frac{P'_m}{\sin \theta} \quad (36.13)$$

を得、本式を左右両端より i に向つて順次適用することに依りすべての斜材の應力を決定することが出来る。

次に圖示の如くトラスを t-t にて切斷し、其の左側の部分につき $\sum M=0$ の條件を節点 m-1, m, m-1' 及び m' に於て適用すれば

$$\begin{aligned} m-1: & \quad U_m h + D_m h \cos \theta + M_{m-1} = 0, \\ m: & \quad U_m h + D'_m h \cos \theta + M_m = 0, \\ m-1': & \quad -L_m h - D'_m h \cos \theta + M_{m-1} = 0, \\ m': & \quad -L_m h - D_m h \cos \theta + M_m = 0 \end{aligned}$$

を得、之より U_m, L_m を求むれば

$$\left. \begin{aligned} U_m &= -\frac{M_{m-1}}{h} - D_m \cos \theta = -\frac{M_m}{h} - D'_m \cos \theta, \\ L_m &= +\frac{M_{m-1}}{h} - D'_m \cos \theta = +\frac{M_m}{h} - D_m \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (36.14)$$

最後に、i 又は i' に於ける鉛直方向の釣合條件より

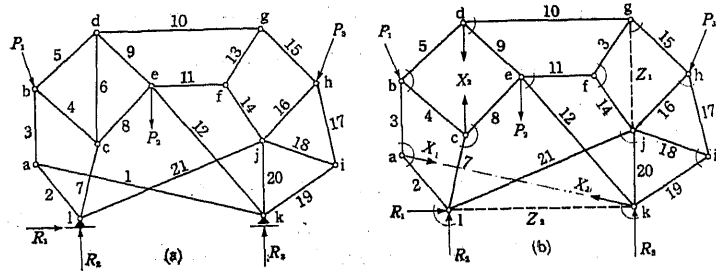
$$V_i = -(D_i + D'_{i+1}) \sin \theta + P_i = -(D'_i + D_{i+1}) \sin \theta - P'_i \quad (36.15)$$

を得る。従つて先づすべての斜材の應力を決定したる後、之を (36.14) 及び (36.15) に代入すれば U_m, L_m 及び V_i を決定することが出来る。

§ 37. 部材置換法

第 150 圖 (a) に示すトラスでは $m=21, r=3, k=12$, 即ち $m+r=2k$ であるからこのトラスは一般に静定である。然し此のトラスの部材應力を求める場合、二部材のみの節点の一つもないから Cremona の解法を應用することは出来ず、又如何なる切斷面を考ふるも一節点に集まる三部材か或は四部材以上が切斷せられるが故に Culmann 或は Ritter の断面法も應用出来ない。従つて此のトラスの部材應力を求めるには各節点に於て (32.1) の如き釣合條件式二個づつを作り、その全部を聯立方程式として解けばよいわけであるが、其の数は例へば本圖の場合には $2k=24$ になり、かかる多數の式を聯立方程式として解くことは實際上甚だ厄介なことである。かか

る場合には Henneberg¹⁾ 或は Müller-Breslau²⁾ 等に依つて提案せられた所謂部材置換法に依れば比較的簡単に部材應力を求めることが出来る。



第 150 圖

今、第 150 圖 (a) のトラスのうち三部材が結合する節点のうち任意の一つ、例へば節点 a に於て任意の一部材、例へば ak 間にある部材 1 を除去し、其の代りに仮想部材 Z_1 を適當なる節点間 (例へば gj 間) に挿入する。除去せられた部材 1 の應力 X_1 は勿論未知であるが、假りに之を節点 a, k に作用する荷重と考へ、節点 a より出發して Cremona の解法を應用すれば節点 a に於て部材 2, 3 の應力を、次に節点 b に於て部材 4, 5 の應力を決定することが出来る。然るに節点 c, d 或は l に於ては未知なる部材或は反力が三個以上出現し之以上に Cremona の解法を進めることが不可能になる。それで茲に於て再び節点 cd 間にある部材 6 を除去し、其の代りに仮想部材 Z_2 を適當なる節点間 (例へば kl 間) に挿入し、部材 6 の應力 X_2 を c 及び d に作用する荷重と考へれば、c 及び d に於て應力の未知なる部材は二個のみとなり、c, d, e, ..., k, l の順に Cremona の解法を應用すれば、各節点に於て夫々圖示の如く部材應力又は反力を二個づつ決定することが出来る。

1) Henneberg: "Statik der starren Systeme", Darmstadt (1886).

2) Müller-Breslau: "Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Baukonstruktionen", 5. Aufl., 3, Leipzig (1924).

かくして求められる部材應力は第 150 圖 (a) のトラスの部材應力ではなく同圖 (b) に於ける部材應力である。然し此の場合 X_1 及び X_2 は未知なるが故に、第 150 圖 (b) のトラスに先づ (a) と同様の實際の荷重 P_1, P_2, \dots のみが作用する場合の部材應力 $S_{i,0}$ を求め、次に $X_1 = 1$ 或は $X_2 = 1$ のみが荷重として作用する場合の應力 $S_{i,1}$ 及び $S_{i,2}$ を求めれば、(b) のトラスの任意の部材の應力は一般に

$$S_i = S_{i,0} + S_{i,1}X_1 + S_{i,2}X_2 \quad (37.1)$$

とすることが出来る。従つて仮想部材の應力 Z_1 及び Z_2 は

$$Z_1 = Z_{1,0} + Z_{1,1}X_1 + Z_{1,2}X_2, \quad Z_2 = Z_{2,0} + Z_{2,1}X_1 + Z_{2,2}X_2$$

になる。但し $Z_{1,0}, Z_{2,0}$ は實際の荷重 P_1, P_2, \dots に依る Z_1 及び Z_2 の應力、 $Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{2,1}, Z_{2,2}$ は $X_1 = 1$ 或は $X_2 = 1$ に依る Z_1 及び Z_2 の應力である。

然るに實際のトラス (a) に於ては仮想部材 Z_1 及び Z_2 が存在しないのであるから、(b) のトラスが (a) のトラスと同等になるためには $Z_1 = 0$ 及び $Z_2 = 0$ でなければならない。即ち

$$Z_{1,0} + Z_{1,1}X_1 + Z_{1,2}X_2 = 0, \quad Z_{2,0} + Z_{2,1}X_1 + Z_{2,2}X_2 = 0 \quad (37.2)$$

でなければならない。従つて此の兩式より

$$X_1 = -\frac{\begin{vmatrix} Z_{1,0} & Z_{1,2} \\ Z_{2,0} & Z_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} \end{vmatrix}}, \quad X_2 = -\frac{\begin{vmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,0} \\ Z_{2,1} & Z_{2,0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} \end{vmatrix}} \quad (37.3)$$

を得る。故に上式の分母の行列式が零でない限り X_1, X_2 の値、即ち (a) に於ける部材 1 と 6 との應力が決定せられ、之を (37.1) に代入することに依り、或は (a) に就き直接に Cremona の解法を適用することに依り殘餘の部材の應力を定めることが出来る。

極めて複雑なるトラスに於ても仮想部材を多數に必要とする場合は稀で

あつて、大抵の場合には一個又は二個の仮想部材を考へるだけで問題を解決し得るのが普通であるが、一般に n 部材を除去し其の代りに n 個の仮想部材を考へる必要ある場合には (37.2) と同様に

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= Z_{1,0} + Z_{1,1}X_1 + Z_{1,2}X_2 + \dots + Z_{1,n}X_n = 0, \\ Z_2 &= Z_{2,0} + Z_{2,1}X_1 + Z_{2,2}X_2 + \dots + Z_{2,n}X_n = 0, \\ Z_3 &= Z_{3,0} + Z_{3,1}X_1 + Z_{3,2}X_2 + \dots + Z_{3,n}X_n = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ Z_n &= Z_{n,0} + Z_{n,1}X_1 + Z_{n,2}X_2 + \dots + Z_{n,n}X_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (37.4)$$

の n 個の条件式を得、之より X_1, X_2, \dots, X_n を決定することが出来れば、残餘の部材の應力は一般に

$$S_i = S_{i,0} + S_{i,1}X_1 + S_{i,2}X_2 + \dots + S_{i,n}X_n \quad (37.5)$$

に依つて算定することが出来る。

§ 38. トラスの安定不安定の判別に就て¹⁾

i. 總 説.

§ 31 に於て述べた如く平面トラスが全體的 (或は内部的) に安定且つ静定であるためには $m + r = 2k$ (或は $m = 2k - 3$) でなければならない。然し之は單に必要条件であつて十分なる条件ではなく、従つて此の条件を満足するに拘らず不安定であるトラスがあり、また同一型式のトラスに於ても格間數或は部材の方向に依つて不安定になる場合がある。

§ 32 に於て説明せるが如く静定トラスの部材應力及び反力は (32.1) の如き合計 $2k$ 個の釣合条件式を聯立方程式として解くことに依り決定され、其の解は一般に

1) 福田武雄: 土學, 26 (1940), 919.

$$S_i = - \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (38.1)$$

とすることが出来る。但し Δ は釣合条件式の S の係數 λ 及び μ によつて作られる行列式であり、 Δ_i は Δ のうちの S_i の係數の列をすべて荷重項で置換へた行列式である。従つてトラスが安定且つ静定であるためには、單に $m + r = 2k$ (内部的には $m = 2k - 3$) の条件だけでは不十分であつて、(38.1) の分母の行列式 Δ が零に等しくないことが必要になる。若し $\Delta = 0$ のときにはたとへ $m + r = 2k$ (或は $m = 2k - 3$) であつてもトラスは不安定になる。

$\Delta = 0$ の場合にも二つの場合が區別せられる。其の第一は Δ 及び Δ_i が共に零に等しい場合であつて、此の場合には $S_i = 0/0$ になり、従つて残餘の部材應力及び反力もすべて $0/0$ の不定値になる。扱て Δ を構成する各要素 λ, μ は部材或は反力の方向餘弦であり、 Δ 中に於ける之等の要素の配列は部材の連結状態及び反力の位置に依るものである。 Δ_i が零に等しきことは、零に等しき行列式 Δ 中の任意の要素を任意の荷重項にて置換へても矢張り零に等しきことを意味するが故に、 Δ と Δ_i とがともに零に等しきことは、 Δ を構成する各要素の値に依ることではなく其の配列に基因する事柄である。従つて此の場合の不安定は部材又は反力の方向に依るものではなく、部材の連結状態又は反力の位置に基因するものであつて之を絶對的不安定と名付けよう。此の種の不安定トラスは形状の安定を保ち得ず、可能なる範圍に於て自由に變形することが出来る。

第二の場合は $\Delta = 0$ であつて $\Delta_i \neq 0$ である場合であつて、 $S_i = \infty$ になる。之は $2k$ 個の釣合条件式の中に成立不可能なる式が含まれて居り、應力又は反力の有限値では釣合が成立し得ないことを意味する。 $\Delta = 0$ であ

つて $\Delta \neq 0$ であることは Δ 中の要素の任意の一つを他の値の荷重項にて置換へると零でなくなることであるから、此の場合の $\Delta = 0$ は其の要素の配列に依ることではなく単に要素の値そのものに基因する。即ち部材の連結状態又は反力の位置に依ることではなく、単に部材又は反力の方向に基因する事柄である。従つて一般には安定且つ静定なるトラスに於ても、其の部材又は反力が或る特定の方向であるときに此の種の不安定状態が起り、また逆に $\Delta = 0$ になる条件を求めることに依つて不安定になる条件を求めることも出来る。

此の種の不安定の場合には、トラスは勿論變形可能であるが無限に自由に變形することは出来ない。何となれば、最初の位置より有限量變形すれば直ちに部材の方向が變化し、従つて Δ の要素である方向餘弦の値が變化して $\Delta = 0$ ではなくなり、安定なる状態となるからである。

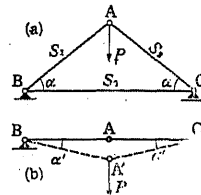
たとへば第 151 圖 (a) に示すトラスに於ては

$$S_1 = S_2 = -\frac{1}{2} P / \sin \alpha, \quad S_3 = +\frac{1}{2} P \cot \alpha$$

であつて安定且つ静定であるが、若し節點 A, B, C が (b) の如く一直線上にある場合には $\alpha = 0$ 、即ち部材應力は無限大、トラスは不安定になる。此の場合には節點 A は移動し得るわけであるから、若し A が A' の位置に移動したものとすれば、此の状態に於ては

$$S_1 = S_2 = +\frac{1}{2} P / \sin \alpha', \quad S_3 = -\frac{1}{2} P \cot \alpha'$$

であつて明かに安定である。但し α' は單に釣合条件のみに依つて定まらず、部材の應力と歪との關係に依つて決定されるものである。従つて此の種の不安定は考へ方に依つては不静定の一類とも見做すことが出来、不静定的不安定と名付けることが出来る。大部分の不安定トラスは此の種類のものである。



第 151 圖

上記の如くトラスの安定又は不安定は (88.1) の行列式に依つて判別し得るわけであるが、節點数の多い實際のトラスに於て節點数の二倍の行と列とより成る行列式に就て判別することは殆んど不可能に近いことである。然し此の行列式は前述の如くトラスの純幾何學的性質に基くものであるから、行列式を代數的に取扱ふ代りにトラスの幾何學的性質を檢討することに依つて其の目的を達することが出来る。以下、トラスの安定又は不安定を判別する幾何學的方法に就て記述する。

尙、トラスの安定又は不安定を解析的に判別するには § 87 の部材置換法を應用するのが便利である。例へば第 150 圖のトラスが安定且つ静定なるがためには (87.3) の分母の行列式が零に等しくないことが必要である。若し此の行列式が零であれば部材 1, 6 の應力は 0/0 の不定値或は無限大になり、従つて他の部材の應力も 0/0 又は無限大となる。極めて複雑なトラスに於ても假想部材を三個以上必要とする場合は殆んど稀であるから、此の方法に依れば比較的簡單に解析的にトラスの安定不安定を判別することが出来る。

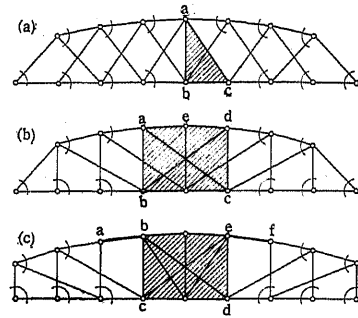
ii. 部材消去法.

平面トラスの或る節點の位置を安定且つ静定に定めるには、此の節點を平行ならざる二部材に依つて位置の安定なる二點に連結することが必要であり且つ十分である。一つの節點に對しかかる部材が若し三個或はそれ以上あれば、それは必要且つ十分なる以上に餘計の部材が存在することを意味し従つて不静定になる。このことは節點に於ける釣合条件が $\sum H = 0$ 及び $\sum V = 0$ の二個であることから了解される。

例へば第 152 圖に示す諸種のトラスの内部的安定を檢討せんとする場合に、先づ (a) に於ては、其の中央部分 abc は明かに安定且つ静定なる部分

であつて、之を基準とすれば、他の節點はすべて二個づつの部材に依つて其の位置が安定且つ靜定に定められる。従つて (a) のトラスは全體として内部的に安定且つ靜定なるトラスである。實際 $m = 29, k = 16$ であつて $m = 2k - 3$ である。

上述のことを逆に考へれば、兩端の節點に於て之等を安定且つ靜定に定めるべき二部材を消去し、以下圖示の如く順次各節點に於て二部材づつ消去して行けば中央部分に安定且つ靜定なる $abcd$ が残る。



第 152 圖

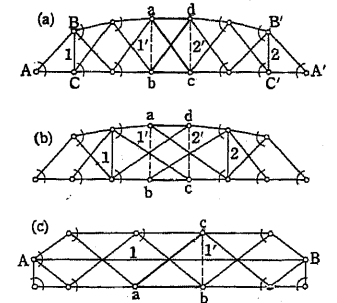
第 152 圖 (b) のトラスに於て、兩端の節點より圖示の如く順次二部材づつ消去して行けば中央に $abcd$ の部分が残る。然るに此の $abcd$ は一般に安定且つ靜定なるが故に此のトラスは一般に安定且つ靜定である。實際 $m = 29, k = 16$ であつて $m = 2k - 3$ である。然し若し節點 a, e, d が bc に平行なる一直線上にある場合には $abcd$ は後述の如く不安定になり、従つてトラス全體が不安定になる。此の場合の不安定は部材の特定方向に基因するものである。

第 152 圖 (c) のトラスに於ては $abcdef$ の部分が残る。このうち $bode$ は内部的に安定であり且つ二次の不靜定であるに反し、其の兩側の ab, ef は明かに不安定である。即ち節點 a 及び f の位置が不安定である。従つて此のトラスは $m = 33, k = 18$ であつて $m = 2k - 3$ なるに拘らず不安定になる。此の場合の不安定は部材の連結方法に基因する絶對的不安定である。

上記の如く各節點に於て二部材づつ消去し得る場合には此の方法に依り

簡単に安定不安定を判別することが出来る。之を部材消去法と言ふのは著者が假りに名付けたものである。

第 153 圖 (a) のトラスに於て上記と同様の方法を行はうとすれば、節點 B, C, B', C' には消去すべき部材が各々三個あつて、之以上に進むことは出来ない。かかる場合には前述の部材置換法と同様に部材 1 及び 2 を除去し、其の代りに假想部材 $1'$ 及び $2'$ を ab 及び cd 間に挿入すれば、節點 B, C, B', C' に於て二部材づつ消去することが出来、結局中央に $abcd$ の部分が残る。此の $abcd$ は明かに一次の不靜定であるから、本トラスが全體として内部的に一次の不靜定なることがわかる。實際 $m = 26, k = 14$ であつて m は $2k - 3$ より 1 だけ多い。



第 153 圖

之と同様の方法を第 153 圖 (b) に適用すれば残存部分 $abcd$ が不安定になり、従つてトラス全體が不安定なることがわかる。此の場合には $m = 24, k = 14$ であつて m は $2k - 3$ より 1 だけ少ない。

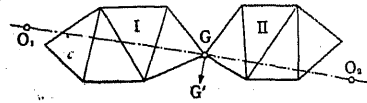
第 153 圖 (c) に於て AB 間の部材 1 を消去し其の代りに假想部材 $1'$ を bc 間に挿入すれば、兩端より順次二部材づつ消去することが出来、たとへば abc の三角形が残る、之が安定且つ靜定なるが故に此のトラスは全體として内部的に安定なりと判断せられるが、之は誤りであつて $m = 21, k = 12, m = 2k - 3$ なるに拘らず後述の如く不安定である。

従つて上述の部材消去法は各節點に於て二部材づつ消去し得る場合には間違ひなく適用することが出来、且つ部材の置換を必要とする場合でも、 $m \neq 2k - 3$ の場合にはトラスの不安定度或は不靜定度を誤りなく判別し

得るが、 $m = 2k - 3$ ならばただ $m = 2k - 3$ なることを判別し得るだけであつて、その安定不安定を判別することは出来ない。

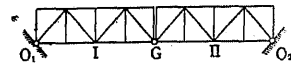
iii. 回轉中心又はヒンジの位置に依る判別方法。

第 154 圖に於て I, II を一つのヒンジ G に依り連結せられたる各々内部的に安定なるトラスとする。安定なるトラスは之を一つの剛體平盤と考へることが出来、今何等かの原因に



第 154 圖

依つてトラス I が或點 O_1 を回轉中心とし微小角回轉し、ヒンジ G が G' の方向に變位するものとすれば、 GG'



第 155 圖

はその動徑即ち O_1G に直角である筈である。ヒンジ G が變位すれば右方のトラス II も一般に變位する筈であつて、其の回轉中心を O_2 とすれば、 GG' はまた O_2G に直角でなければならない。従つて O_1, G, O_2 は一直線上になければならない。

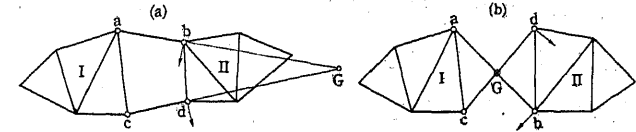
故に二個のトラスが一つのヒンジ G に依つて連結せられ、G の微小變位が可能である場合には各々のトラスの回轉中心 O_1 と O_2 は、G を通過し G の變位可能方向に直角なる一直線上にあり、逆に、 O_1, G, O_2 が一直線上にある場合にはヒンジ G は O_1O_2 を結ぶ直線に直角の方向に變位可能であつて、かかるトラス系は不安定になる。例へば第 155 圖の如き場合である。然し G が O_1O_2 を結ぶ直線の外、たとへば其の上部にあれば三鉸アーチとなつて安定になる。このことは第 151 圖の場合と同様である。

第 156 圖の如く二個のトラス I, II が平行ならざる二部材 ab 及び cd にて互に連結せらるる場合には、Föppl の提案せる如く¹⁾ 假想ヒンジ又は假

1) Föppl, A.: "Technische Mechanik", Bd. II, 7. Aufl., (1926).

想回轉中心を考へればよい。

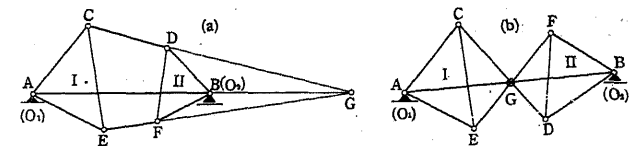
例へば第 156 圖 (a) に於て假りに I を不動とし II が I に對して動くものとすれば、部材 ab 及び cd は夫々 a 及び c を中心として回轉する。然る



第 156 圖

に b は部材 ab とトラス II とを連結するヒンジと考へられるから、II の回轉中心 G は ab を含む直線上になければならない。同様にして G はまた cd を含む直線上になければならないから、結局 ab, cd の延長線の交點 G が、II の I に對する變位の回轉中心になり、同様にして I の II に對する相對變位の回轉中心にもなる。従つて此の様な場合には I と II とは G の位置にある一つのヒンジに依つて連結さるるものと見做すことが出来る。

第 156 圖 (b) の如く ab と cd とが交叉する場合には其の交點が假想ヒンジになる。

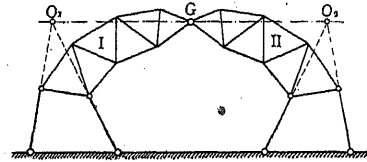


第 157 圖

第 157 圖 (a), (b) に示すトラスは共に $m = 9, r = 3, k = 6$ であつて $m + r = 2k$ である。A は回轉端、B は移動端であるが、部材 AB を剛體の棒と考へるが故に B の位置も不動になる。今此のトラスを、三角形 ACE と BDF とを二部材 CD と EF とに依つて連結して構成したものと考へれば、ACE 及び BDF の回轉中心は夫々 A 及び B であり、其の假想ヒンジは

CD, EF の交点或は其の延長線の交点 G になる。従つて此の形式のトラスは一般には安定且つ静定であるが、特に圖の如く G が A, B と同一直線上にある場合には不安定になる。

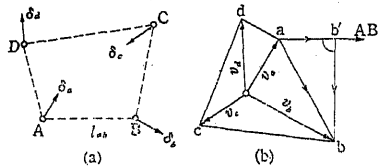
第 158 圖の如くヒンジ G に依つて連結せられたる二個のトラス I, II が四個の部材に依り圖の如く支持せらるる場合、此の構造が安定なるがためには I の回轉中心 O_1 , II の回轉中心 O_2 とヒンジ G とが同一直線上にあらざることが必要である。若し O_1, G, O_2 が圖示の如く同一直線上にある場合には上述の如く不安定になる。



第 158 圖

iv. 變位圖を利用する方法.

第 159 圖に於ける四點 A, B, C, D がお互に無關係に夫々、微小の變位 $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_d$ をしたものと考へる。今、此の變位が極めて短時間 Δt の間に同時に行はれたものとすれば、各點の速度は次の如くなる。



第 159 圖

$$v_a = \frac{\delta_a}{\Delta t}, \quad v_b = \frac{\delta_b}{\Delta t}, \quad v_c = \frac{\delta_c}{\Delta t}, \quad v_d = \frac{\delta_d}{\Delta t}. \quad (38.2)$$

今、或る極 P より之等の速度を示す射線を引き其の端點を連結すれば第 159 圖 (b) の如き速度圖が得られる。然るに之等の速度はすべて變位の $1/\Delta t$ 倍であるから、第 159 圖 (b) は擴大尺で描いた變位圖と考へることが出来る。

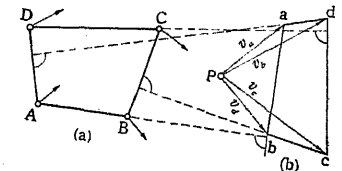
かくの如く第 159 圖 (b) を變位圖として見れば、例へば ab は A に對す

る B の相對變位を示し、従つて $ab', b'b$ は夫々 A に對する B の AB の方向及び之に直角なる方向の分變位を示す。従つて A, B 間の變形前の距離を l_{ab} とし

$$\epsilon_{ab} = \frac{ab'}{l_{ab}}, \quad \omega_{ab} = \frac{b'b}{l_{ab}} \quad (38.3)$$

とすれば ϵ_{ab} は l_{ab} の縦歪、 ω_{ab} は A に對する B の回轉角になる。

故に A と B とが一つの剛體の棒にて連結されて居る場合には $\epsilon_{ab} = 0$ 、即ち $ab' = 0$ でなければならない。即ち ab は AB に垂直でなければならない。従つて第 160 圖の如く點 A, B, C, D が剛體の部材で連結されて居る場合には

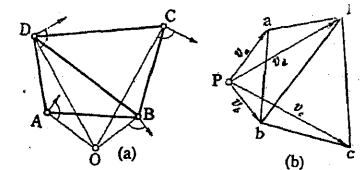


第 160 圖

$$ab \perp AB, \quad bc \perp BC, \\ cd \perp CD, \quad da \perp DA$$

になる。此の場合、各點の變位は互に無關係ではなく、例へば任意の三點の變位が決まれば残りの一點の變位は必然的に決定せられる。

更に點 A, B, C, D がすべて剛體上にあるとき、或は例へば第 161 圖 (a) の如く BD 間にも部材がある場合には、各點間の距離は不變なるのみならず、四邊形 ABCD は剛體として回轉し其の各邊の回轉角は同一になる。即ち ϵ はすべて零に等しく且つ各邊の ω は一定になる。従つて變位圖 $abcd$ の各邊は位置圖 ABCD の各邊に垂直なるのみならず



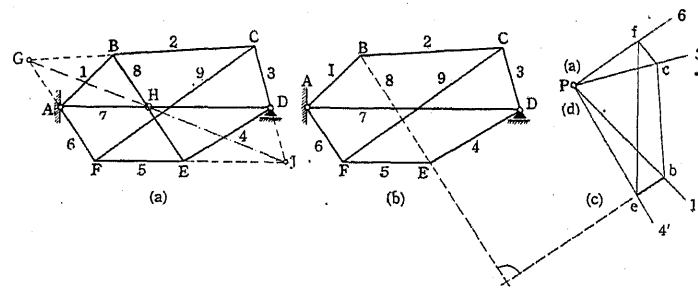
第 161 圖

$$ab : AB = bc : BC = cd : CD = da : DA$$

になる。故に變位圖 $abcd$ は位置圖 ABCD に相似形になる。また ABCD

の回轉中心を O とすれば $OABCD$ と $Pabcd$ とは相似形になる。而して此の場合には二點の變位が與へられれば他のすべての點の變位は必然的に決定せられる。

上記の速度圖又は變位圖は Mohr¹⁾ 及び Föppl²⁾ 等に依つてトラスの部材應力の解法に應用せられたものであつて、之を利用してトラスの安定不安定を判別することが出来る。



第 162 圖

例へば第 162 圖 (a) に示すトラスでは $m + r = 2k$ であつて一般に安定且つ靜定である。従つて任意の一部材例へば部材 8 を除けば $m + r < 2k$ になり、自由に變形し得る不安定なるトラス (b) が得られる。此の場合 A 及び D は不動であるから變位圖 (c) に於ける點 a と d は極 P に一致する。次に部材 AB(1), AF(6) は A を中心とし、DC(3), DE(4) は D を中心として夫々回轉をするから B, F 及び C, E の變位を示す射線 Pb(1'), Pf(6') 及び Pc(3'), Pe(4') は夫々 1, 6 及び 3, 4 に垂直になる。今、部材 AB が變位圖の ab にてあらはされる微小變位をなすものとすれば

$$bc \perp BC, \quad cf \perp CF, \quad fe \perp FE$$

1) Mohr, O.: "Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik", 2. Aufl., Berlin (1914).

2) Föppl, A.: "Technische Mechanik". Bd II, 7 Aufl (1926).

と作圖することに依つて (b) に於ける各點の變位が得られる。

變位圖のうち be は B に對する E の相對變位を示し、若し be が丁度 BE に垂直なる場合には前に説明せるが如く BE 間の距離は不變である。即ち此の場合には BE 間に (a) の如く部材 8 を連結するもトラスは自由に變形し得るわけであつて、従つて此の様な場合には第 162 圖 (a) のトラスは不安定になる。實際 CB と FA との交點 G, AD と BE との交點 H, CD と FE との交點 J の三點が一直線上にある場合には上記の如く $be \perp BE$ になつて不安定になる。尙、第 162 圖 (a) の型式のトラスは、其の節點が一つの圓錐曲線上にあるときには何れの二節點で支持しても不安定になる。

かくの如く $m + r = 2k$ のトラスの安定不安定を驗するには、任意の一部材を除去して絶對的に不安定なるトラスを作り、其の變位圖を描いて除去せる部材の兩端の節點間の相對變位を求め、之が除去せる部材に垂直であればもとのトラスは不安定であり、然らざる場合には安定であると判定することが出来る。

v. 平行圖形に依る判別法.

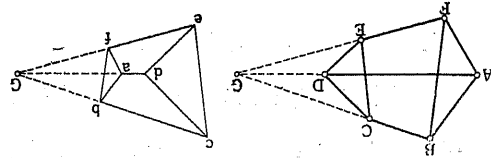
第 160 圖及び第 161 圖の ABCD をトラスと考へれば第 160 圖の場合は不安定、第 161 圖のものは安定なトラスである。そして其の變位圖 abcd の各邊は前述の如くすべて ABCD の相對邊に垂直であるから、此の變位圖を時針の回轉方向に逆に 90° 回轉すれば、變位圖の各邊は原形の相對邊に平行になる。そのうち第 160 圖の變位圖は原形に相似でなく、第 161 圖の場合は全く相似である。かくの如く、一般に、トラスの各部材に夫々平行なる線を以て圖形を描く場合、第 160 圖の如き不安定なるトラスに於ては之に相似でない任意の圖形を描くことが可能であるが、第 161 圖の如く安定

なるトラスに於ては、之に平行にしてしかも相似でない圖形を描くことは不可能である。故に

定理 38.1. トラスの各部材に平行なる直線を以て之に相似ならざる圖形を描き得る場合には其のトラスは不安定であり、之が不可能なる場合には其のトラスは安定なり。

此の定理はまた別の考へ方よりも導き得るものであつて¹⁾、トラスの安定不安定の判別に對して

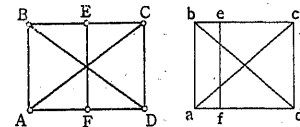
は前述の諸種の方法に比べて遙かに簡單且つ便利である。



第 163 圖

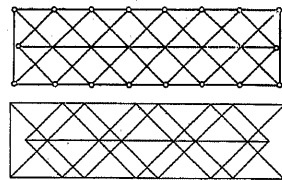
例へば第 163 圖に示

すトラスは前述の第 157 圖 (a) のトラスであつて、一般には内部的に安定なるトラスであるが、圖示の如く AD, BC, FE の延長線が一點 G に會する場合には、各部材に平行にしてしかも之に相似ならざる圖形を描くことが出來、從つて不安定なることがわかる。之と同様に、第 164 圖、



第 164 圖

第 165 圖のトラスは共に $m = 2k - 3$ の條件を満足するが、圖示の如く各部材に



第 165 圖

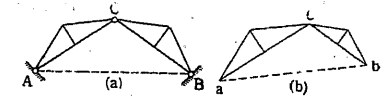
平行なる直線を以て任意の不相似形を描き得るが故に不安定なるトラスである。

内部的には不安定であるが支持條件に依つて全體として安定となるトラス

1) Kaufmann, W.: "Statik", 2. Aufl. (1930).

スでは、其の支持條件を考慮するか或は反力を假想部材にて置換へる必要がある。

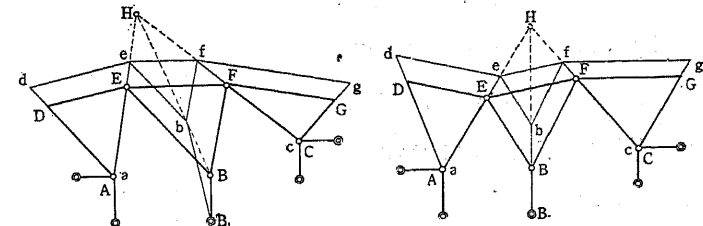
例へば第 166 圖 (a) の三鉸アーチのトラスは、全體として安定であることは言ふまでもない。然るにトラスの各部材に平行なる直線を以て



第 166 圖

(b) の如き不相似形を描くことが出來、前記の定理に依れば不安定

なりと判斷せられる。然し之は支持條件を無視し、ただ部材だけを考へたからであつて、若し支點の水平反力の代りに AB 間に一つの部材を假想すれば、(b) に於て AB に相當する直線 ab は AB に平行ではなく、また ab を AB に平行にせんとすれば (b) の如き不相似形を描くこと不可能であるが故に第 166 圖 (a) は全體的に安定なる構造である。



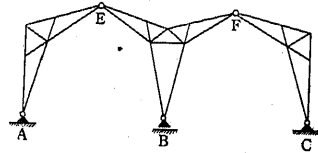
第 167 圖

第 168 圖

第 167 圖は A, C を回轉端、B を移動端とし二個のピンチ E, F に依つて連結せられたる三個の三角形トラスであつて、全體として安定なる構造である。此の構造の安定不安定を驗するために支點の反力の代りに圖示の如き部材を假想する。今假りに B に於ける反力の假想部材 B_1B を取除き B が自由に移動し得るものとすれば、此の構造は不安定になり圖の如き不相似形が描ける。然し實際には B には反力の假想部材 B_1B が存在し、之に

對する線 B_1b は B_1B に平行ではない。従つて此の構造に於ては各部材に平行なる直線を以て不相似形を描くことは出來ず、即ち安定である。

然し AE, CF の延長線の交點を H とすれば、B に於ける反力の假想部材の方向が特に BH に一致する場合、即ち支點 B の移動可能方向が BH に垂直なる場合には第 168 圖の如く不相似形を描く

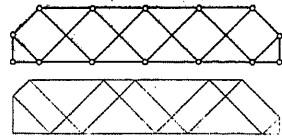


第 169 圖

ことが出來、従つて不安定になる。之と同様に第 169 圖の如き左右對稱の構造は不安定である。之を安定とするには B の移動可能方向を水平以外にするか或は A, B を回轉端、C を移動端とすればよい。

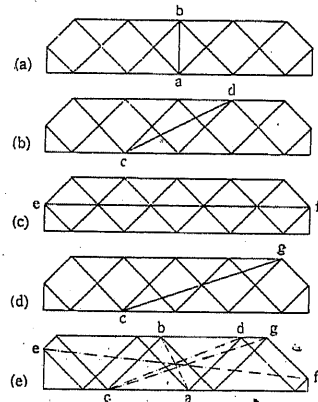
vi. 菱形トラスの安定不安定に就て.

第 170 圖の菱形トラスは、其の菱形格間の數を n とすれば一般に $m=4(n+1)$, $k=2(n+2)$, $m=2k-4$ であつて、内部的に安定且つ靜定なるがために部材が一本不足なる不安定なトラスである。實際此のトラスに對しては各部材に平行なる直線を以て圖示の如き不相似形が描ける。



第 170 圖

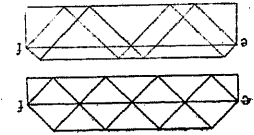
此のトラスを安定にするには第 171 圖 (a), (b), (c) の如く一本の部材を挿入すればよい。それは第 171 圖 (e) に於て夫々之等に相當する線が之等に平行でないことから了解せられる。然るに (d)



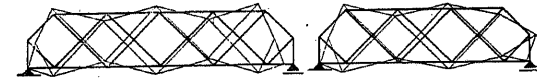
第 171 圖

の如く eg 間に部材を挿入する場合には、(e) に於て之に相當する線は eg に平行になる。即ち (d) の場合には平行不相似形を描くことが可能であつて従つて不安定になる。

第 171 圖は菱形格間數が奇數の場合であるが、此の格間數の如何に拘らず (a), (b) の型式は一般に安定であり (d) は一般に不安定である。然るに (c) の型式は菱形格間數が偶數の場合には第 172 圖の如く平行不相似形を描くことが出來て、不安定になる。之等の



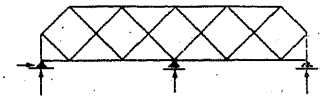
第 172 圖



第 173 圖

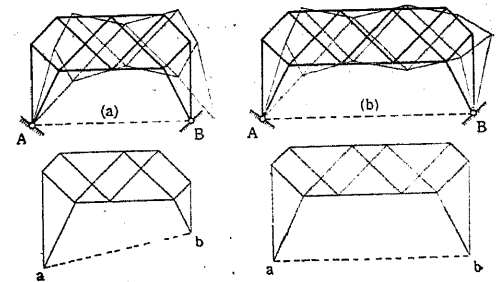
事柄はすべて第 173 圖に示す菱形トラスの變形圖より容易に了解し得ることである。

第 170 圖の菱形トラスを安定するには、上記の如く部材を一本附加する代りに反力を一個附加してもよい。例へば第 174 圖の如くにする



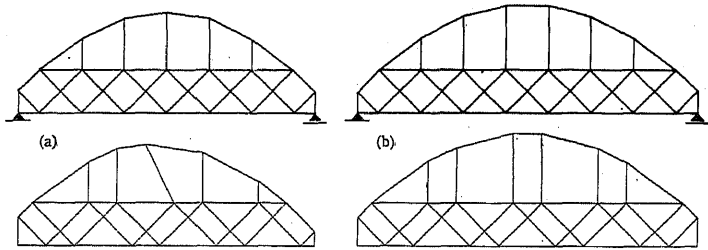
第 174 圖

か或は第 175 圖の如くにすればよい。第 175 圖の場合 A 及び B に於ける水平反力の代りに點線にて示す假想部材を考へて其の安定不安定を驗すれば、(a) の



第 175 圖

如く菱形格間の數が奇數の場合には安定, (b) の如く偶數の場合には不安定であることがわかる。之はまた變形圖を見ても明かである。即ち (a) の場合には此のトラスが圖示の如く變形し得るためには支點 B が移動し得ることが必要であるが, (b) の場合にはたとへ A, B が固定回轉端であつても圖示の如き變形が可能である。



第 176 圖

第 170 圖の菱形トラスを内部的に安定するも一つの方法は第 176 圖 (a) 或は (b) の如く滑節アーチの型式にすることである。此の場合に菱形格間の數を n とすれば、一般に $m = 6n + 1$, $k = 3n + 2$ であつて $m = 2k - 3$ の條件が満足せられる。然し第 176 圖に示すが如く、菱形格間の數が奇數の場合 (a) に於ては平行不相似形を描くこと不可能であり、偶數の場合 (b) に於ては之が可能である。従つて菱形格間の數が奇數の場合には安定、之が偶數の場合には不安定になる。但し後者の場合に於てもトラスの形狀が左右不對稱の場合には安定になる。