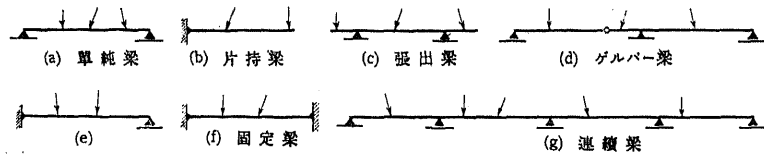


第IV章 静定梁

§ 18. 總 説

直線又は略々直線状の細長き棒状の構造物にして第58圖の如き荷重を受け且つ同圖の如く支持せらるるものを一般に梁と言ひ、其の支持状態に



第58圖 梁の種類

依り圖示の如くに呼ばれる。此のうち(a)乃至(d)は静定であり、(e)以下は不静定である。此の外に第15圖(c)即ち§13,iの型式も考へられるが之は實際には殆んど使用せられない。

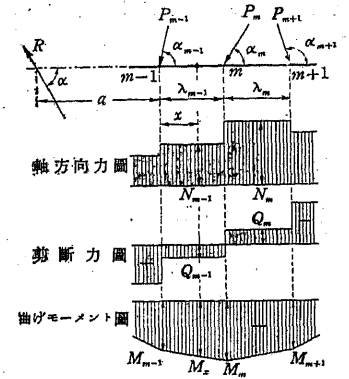
梁の反力及び断面力の算定に際しては通常次の諸項を假定する。

1. 梁の横断面の寸法はスパンに比して十分に小なること。但しスパンとは相續く二支點間の間隔(片持梁では梁の長さ)を意味する。
2. 梁の弾性變形はスパンに比して十分に小であつて荷重及び反力の作用點又は作用線の變位を無視し得ること。
3. 梁の各横断面の圖心を連結せる所謂梁の軸は一平面内にあり、且つ荷重及び反力が此の平面内に作用すること。

尙、梁に作用する断面力のうち最も重要なるものは曲げモーメントであつて、軸方向力は多くの場合梁の強弱に關して決定的の影響を及ぼさない。断面力の正負は勿論§6の規約に従ふ。また以下の記述に於ては便宜上集

中荷重を受くる場合と分布荷重を受くる場合とを別個に取扱ふが、實際に於ては之等が同時に作用するのが普通であつて、かかる場合には所謂重合の法則に依り夫々の結果を重合すればよい。

今任意の型式の梁に於て第59圖に示すが如く P_{m-1}, P_m, P_{m+1} を相續く任意の三個の集中荷重、 R を P_{m-1} より左方に作用するすべての荷重及び反力の合力とすれば P_{m-1} の作用點 $m-1$ より右に x の距離に於ける軸方向力、剪斷力及び曲げモーメントは



第59圖

$$\left. \begin{aligned} N_x &= R \cos \alpha + P_{m-1} \cos \alpha_{m-1}, \\ Q_x &= R \sin \alpha - P_{m-1} \sin \alpha_{m-1}, \\ M_x &= R \sin \alpha \cdot (a + x) - P_{m-1} \sin \alpha_{m-1} \cdot x \end{aligned} \right\} (18.1)$$

になる。

然るに N_x 及び Q_x は x に無關係なるが故に $m-1, m$ 間に於ては断面の位置に關せず一樣になり之を N_{m-1}, Q_{m-1} と書くことが出来る。同様にして $m, m+1$ 間の軸方向力及び剪斷力は

$$\begin{aligned} N_m &= R \cos \alpha + P_{m-1} \cos \alpha_{m-1} + P_m \cos \alpha_m, \\ Q_m &= R \sin \alpha - P_{m-1} \sin \alpha_{m-1} - P_m \sin \alpha_m \end{aligned}$$

なるが故に

$$\Delta N_m = N_m - N_{m-1} = + P_m \cos \alpha_m, \quad (18.2)$$

$$\Delta Q_m = Q_m - Q_{m-1} = - P_m \sin \alpha_m \quad (18.3)$$

を得る。故に梁の各断面に於ける N 又は Q を縦距にとり N 又は Q の分布

を示せば第59圖の如き階段形が得られる。之を夫々軸方向力圖及び剪斷力圖と言ふ。

(18.1)の M_m は x の一次函数なるが故に、 $m-1, m$ 間に於ては直線的に變化し、従つて各断面に於ける M を圖示する曲げモーメント圖は第59圖の如き多角形になる。

今(18.1)の M_m を x にて微分すれば

$$\frac{dM_m}{dx} = Q_m \quad (18.4)$$

になり、従つて次の定理を得る。

定理 18.1. 剪斷力が零なる断面に於ける曲げモーメントは極大、極小又は常數なり。

次に $m-1, m, m+1$ に於ける曲げモーメントを M_{m-1}, M_m, M_{m+1} とすれば

$$M_{m-1} = R \sin \alpha \cdot a,$$

$$M_m = R \sin \alpha \cdot (a + \lambda_{m-1}) - P_{m-1} \sin \alpha_{m-1} \cdot \lambda_{m-1}$$

なるが故に

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_m &= M_m - M_{m-1} = Q_{m-1} \lambda_{m-1}, \\ \Delta M_{m+1} &= M_{m+1} - M_m = Q_m \lambda_m \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

を得、之より更に次式を得る。

$$\frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_m} - \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_{m-1}} = Q_m - Q_{m-1} = -P_m \sin \alpha_m. \quad (18.6)$$

前述の如く集中荷重に依る曲げモーメント圖は第59圖の如き多角形となるが故に、曲げモーメントの極大又は極小は少くとも或る一つの集中荷重の作用點に於て生ずる。今假りに M_m が極大或は極小なりとすれば

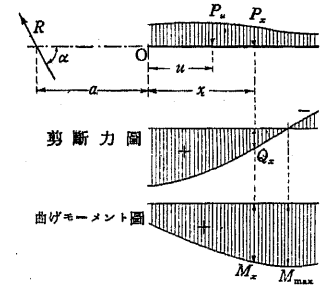
$$M_m - M_{m-1} \geq 0, \quad M_{m+1} - M_m \leq 0, \quad \text{即ち} \quad Q_{m-1} \geq 0, \quad Q_m \leq 0$$

でなければならない。故に

定理 18.2. 集中荷重に依る曲げモーメントの極大又は極小は其の左右に於ける剪斷力の符號が反對なる荷重の作用點に於て生ず。

但し特別なる場合として $Q_m = 0$ であり且つ Q_{m-1}, Q_{m+1} の符號が反對なる場合には $m, m+1$ 間の曲げモーメントは一樣なる極大又は極小値を示す。

第60圖の如く分布荷重 p が作用する場合、或る原點 O より左方にあるすべての荷重及び反力の合力を R とすれば、 O より右方に x の距離に於ける剪斷力及び曲げモーメントは



第60圖

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= R \sin \alpha - \int_0^x p_u du, \\ M_x &= R \sin \alpha \cdot (a + x) - \int_0^x p_u (x - u) du. \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

上式を x にて微分すれば

$$\frac{dQ_x}{dx} = -p_m, \quad \frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (18.8)$$

になり、之より次の定理を得る。

定理 18.3. 分布荷重に依る曲げモーメントの極大又は極小は剪斷力が零なる断面に於て生ず。

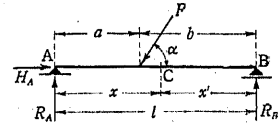
§ 19. 單純梁

i. 集中荷重に依る反力及び斷面力。

第61圖に於て AB を任意の集中荷重を受ける單純梁とし、 A を回轉端、

Bを移動端とする。

a) 反力. A, Bに於ける反力は(13.5)にて與へられる。即ち



第 61 圖

$$R_A = \frac{1}{l} \sum_A^B P b \sin \alpha, \quad R_B = \frac{1}{l} \sum_A^B P a \sin \alpha, \quad H_A = \sum_A^B P \cos \alpha. \quad (19.1)$$

b) 剪断力. Aより任意の距離 xにある断面 Cに作用する剪断力 Q_C は, Cの左にあるすべての外力の鉛直分力(上向を正)の和, 或は Cの右にあるすべての外力の鉛直分力の和に負號を附したるものなるが故に

$$Q_C = R_A - \sum_A^C P \sin \alpha = - (R_B - \sum_C^B P \sin \alpha) \quad (19.2)$$

になり, 本式の R_A, R_B に (19.1) の値を代入すれば

$$Q_C = \frac{1}{l} \left[- \sum_A^C P a \sin \alpha + \sum_C^B P b \sin \alpha \right] \quad (19.3)$$

になり, 特に A 及び B に於ては

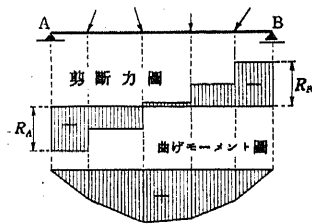
$$Q_A = + R_A, \quad Q_B = - R_B \quad (19.4)$$

である。剪断力圖は第 62 圖の如し。

c) 軸方向力. C に於ける軸方向力 N_C は C の左にある外力の水平分力 (左向を正) の和, 或は C の右にある外力の水平分力の和に負號を附したるものなるが故に

$$N_C = \sum_A^C P \cos \alpha - H_A = - \sum_C^B P \cos \alpha \quad (19.5)$$

になり, 特に A 及び B に於ては



第 62 圖

$$N_A = -H_A, \quad N_B = 0. \quad (19.6)$$

d) 曲げモーメント. C に於ける曲げモーメント M_C は C の左にある外力の C に對するモーメントの和, 或は C の右にある外力の C に對するモーメントの和に負號を附したるものなるが故に

$$\left. \begin{aligned} M_C &= R_A x - \sum_A^C P (x - a) \sin \alpha, \\ &= R_B x' - \sum_C^B P (x' - b) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

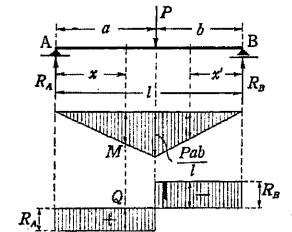
になり, 此の R_A, R_B に (19.1) の値を代入すれば

$$M_C = \frac{1}{l} \left[x' \sum_A^C P a \sin \alpha + x \sum_C^B P b \sin \alpha \right] \quad (19.8)$$

になる。曲げモーメント圖は例へば第 62 圖の如く, 特に A 及び B に於ては曲げモーメントは零である。

e) 鉛直荷重の場合. 荷重がすべて鉛直なる場合には水平反力及び軸方向力は消失し, 鉛直反力, 剪断力及び曲げモーメントに對しては前掲の諸式に於て $\sin \alpha = 1$ とすればよい。特に第 63 圖の如く一個の集中荷重が作用する場合には

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{1}{l} P b, \quad R_B = \frac{1}{l} P a, \\ A \sim C: \quad Q &= R_A, \quad M = R_A x, \\ C \sim B: \quad Q &= -R_B, \quad M = R_B x', \\ C: \quad M_{\max} &= \frac{P a b}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$



第 63 圖

ii. 分布荷重に依る反力及び断面力.

a) 一般の場合. 第 64 圖に於て單純梁 AB 上に $x = a \sim b$ の範圍に任意の分布荷重が作用するものとする。荷重は鉛直に作用し A より u の距

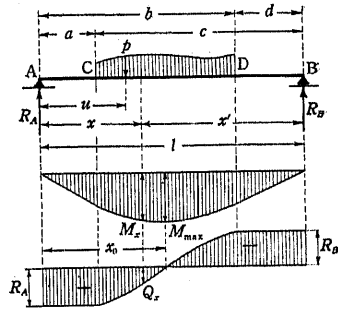
離に於ける荷重強度を p とすれば、外部的釣合条件:

$$\sum H = \int_a^b p \, du - R_A - R_B = 0,$$

$$\sum M_A = \int_a^b p u \, du - R_B l = 0$$

より

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{1}{l} \int_a^b p(l-u) \, du, \\ R_B &= \frac{1}{l} \int_a^b p u \, du \end{aligned} \right\} (19.10)$$



第 64 圖

を得る.

A より x の距離に於ける剪断力 Q_x 及び曲げモーメント M_x は

$$\left. \begin{aligned} A \sim C: Q_x &= +R_A, & M_x &= R_A x, \\ C \sim D: Q_x &= +R_A - \int_a^x p \, du, & M_x &= R_A x - \int_a^x p(x-u) \, du, \\ D \sim B: Q_x &= -R_B, & M_x &= R_B(l-x) \end{aligned} \right\} (19.11)$$

になる。即ち荷重が作用せざる区間に於ては Q_x は一様にして M_x は直線的に變化し、曲げモーメント圖及び剪断力圖は第 64 圖の如くなる。

今 (19.11) の Q_x を x に就て積分すれば、 $x=0$ に於ては $M_x=0$ なるに依り

$$\int_0^x Q_x dx = M_x \quad (19.12)$$

を得、更に $x=l$ に於ける M_x は零なるに依り

$$\int_0^l Q_x dx = 0 \quad (19.13)$$

を得る。本式は剪断力圖の面積の代数和が零なることを意味し、此のことは集中荷重の場合に於ても同様に成立し、従つて次の定理を得る。

定理 19.1. 單純梁に於ける剪断力圖の正又は負の部分の面積は相等し、

b) 等分布荷重の場合. 荷重強度 p が常數なる場合には、反力は

$$R_A = \frac{p\lambda}{2l}(c+d), \quad R_B = \frac{p\lambda}{2l}(a+b) \quad (19.14)$$

になる。但し λ は荷重分布長、即ち $\lambda = b - a = c - d$ である。

荷重作用区間に於ける剪断力及び曲げモーメントは

$$Q_x = R_A - p(x-a), \quad M_x = R_A x - \frac{p}{2}(x-a)^2, \quad (19.15)$$

即ち Q_x は直線的に、 M_x は拋物線的に變化する。

今 $Q_x=0$ なるべき x を x_0 とすれば

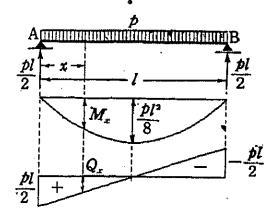
$$x_0 = a + \frac{R_A}{p} = a + \frac{c+d}{2l}\lambda = b - \frac{a+b}{2l}\lambda \quad (19.16)$$

であつて之を上記の M_x に代入すれば M_{\max} は次の如くなる。

$$M_{\max} = \frac{p\lambda}{8l^2}(a+b)[(2l-b)^2 - a^2]. \quad (19.17)$$

第 65 圖の如き満載等分布荷重の場合には $a=0, b=l, c=l, d=0$ 、 $\lambda=l$ なるが故に

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_B = \frac{pl}{2}, \\ Q_x &= p\left(\frac{l}{2} - x\right), \\ M_x &= \frac{p}{2}x(l-x), \\ M_{\max} &= \frac{pl^2}{8} \end{aligned} \right\} (19.18)$$



第 65 圖

になり、曲げモーメント圖は拋物線になる。

c) 等變分布荷重の場合. 第 66 圖の如き等變分布荷重の場合には

$$p = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{l} u$$

であり、且つ荷重が全長に互つて作用するものとすれば $a=0, b=l$ にな

り、之等の關係を考慮して (19.10), (19.11) に於ける積分を行へば

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{l}{6} (2p_1 + p_2), & R_B &= \frac{l}{6} (p_1 + 2p_2), \\ Q_x &= \frac{l}{6} (2p_1 + p_2) - p_1 x - \frac{p_2 - p_1}{2l} x^2, \\ M_x &= \frac{l}{6} (2p_1 + p_2) x - \frac{p_1}{2} x^2 - \frac{p_2 - p_1}{6l} x^3 \end{aligned} \right\} \quad (19.19)$$

を得る。即ち剪断力圖は拋物線、曲げモーメント圖は三次拋物線にて示される。

剪断力を零とすべき x を x_0 とすれば

$$x_0 = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2)} - p_1}{p_2 - p_1} l \quad (19.20)$$

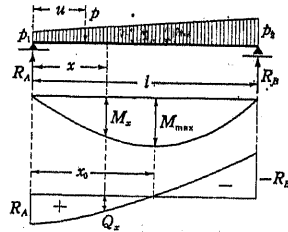
になり、之を M_x に代入すれば

$$M_{\max} = [2\sqrt{\frac{1}{3}(p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2)} + p_1] \frac{x_0^2}{6} \quad (19.21)$$

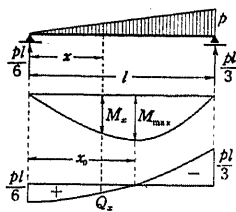
を得る。

特に $p_1 = 0$ の場合 (第 67 圖) には $p_2 = p$ とすれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{pl}{6}, & R_B &= \frac{pl}{3}, \\ Q_x &= \frac{pl}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2}\right), \\ M_x &= \frac{pl^2}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \frac{x}{l}, \\ M_{\max} &= \frac{pl^2}{9\sqrt{3}}, & x_0 &= \frac{l}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$



第 66 圖



第 67 圖

iii. 間接荷重に依る反力及び断面力。

間接荷重が作用する場合に於ても其の反力は、荷重が其の位置に於て梁に直接に作用するものとして算出せるものに等しい。何となれば反力は § 13 の如く外部的釣合条件のみに依つて定まるからである。

第 68 圖の如く格點 $m-1, m$ 間に間接荷重 P が作用する場合、格點 $m-1, m$ に於て梁 AB に作用する荷重 P_{m-1}, P_m の大きさは其の點に於ける小梁の反力の値に等しい。故に (19.9) に依つて

$$P_{m-1} = \frac{P\beta}{\lambda}, \quad P_m = \frac{P\alpha}{\lambda} \quad (19.23)$$

になる。

格點 $m-1, m$ に於ける曲げモーメント

を M_{m-1}, M_m とすれば

$$M_{m-1} = R_A x_{m-1}, \quad M_m = R_B x'_m$$

である。然るに反力は P を直接荷重とせる場合の反力に相等しきが故に M_{m-1}, M_m も亦 P を直接荷重とせる場合の $m-1, m$ に於ける曲げモーメントに等しい。このことは多數の荷重が間接に作用する場合に於ても同様であつて、従つて

定理 19.2. 間接荷重に依る格點に於ける曲げモーメントは直接荷重と假定せる場合の該格點に於ける曲げモーメントに相等し。

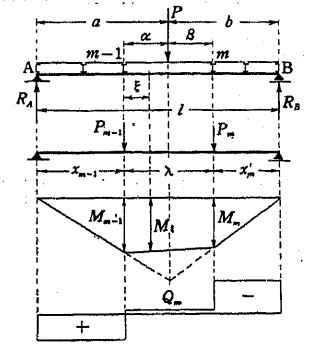
系. 間接荷重に對する曲げモーメント圖は直接荷重と假定せる場合の曲げモーメント圖上に於て各格點に對應する點を結べる多角形なり。

而して各格間に於ける曲げモーメントは直線的に變化するが故に、格點 $m-1, m$ 間に於て $m-1$ より ξ の距離に於ける曲げモーメントは

$$M_\xi = \frac{\lambda - \xi}{\lambda} M_{m-1} + \frac{\xi}{\lambda} M_m = M_{m-1} + \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda} \xi, \quad (19.24)$$

或は

$$M_\xi = M_{m-1} + Q_m \xi. \quad (19.25)$$



第 68 圖

剪断力は勿論各格間毎に夫々常數であつて、格間 $m-1, m$ に於ける剪断力 Q_m は

$$Q_m = R_A - \sum_0^{m-1} P = - (R_B - \sum_m^n P) \quad (19.26)$$

になる。但し $\sum_0^{m-1} P$ 及び $\sum_m^n P$ は夫々格點 $m-1$ より左或は m より右にある荷重の總和である。

§ 20. 連行移動荷重を受ける單純梁の反力 及び断面力の最大値

列車荷重の如く荷重相互の間隔が不變なる第 69 圖の如き連行移動荷重が單純梁上を移動する場合の反力、剪断力及び曲げモーメントの最大値及び之を生ずべき荷重及び断面の位置を決定せんとする。

i. 最大反力.

第 69 圖の荷重に依る反力は (19.1) 式より多少の演算を行ふことに依り

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{1}{l} \left[a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \cdots + a_{n-1} \sum_1^{n-1} P + a_n \sum_1^n P \right], \\ R_B &= \frac{1}{l} \left[a_0 \sum_1^n P + a_1 \sum_2^n P + \cdots + a_{n-2} \sum_{n-1}^n P + a_{n-1} P_n \right] \end{aligned} \right\} \quad (20.1)$$

になる。茲に於て a_n 又は a_0 を變數と考へれば R_A は a_n が極大なる場合、即ち P_1 が A 上に來る場合に於て、 R_B は a_0 が極大なる場合、即ち P_n が B 上に來る場合に於て夫々極大になる。之等の場合に於ては夫々

$$a_n \text{ 或は } a_0 = l - \sum_1^{n-1} a$$

なるが故に之を (20.1) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} R_{A,\max} &= \frac{1}{l} \left[a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \cdots + a_{n-1} \sum_1^{n-1} P + \left(l - \sum_1^{n-1} a \right) \sum_1^n P \right], \\ R_{B,\max} &= \frac{1}{l} \left[a_{n-1} P_n + a_{n-2} \sum_{n-1}^n P + \cdots + a_1 \sum_2^n P + \left(l - \sum_1^{n-1} a \right) \sum_1^n P \right] \end{aligned} \right\} \quad (20.2)$$

を得る。 $P_1 (P_n)$ が A (B) 上に來る場合に $P_n (P_1)$ に續 (先) 行する荷重が梁上に載るとするも、 $P_1 (P_n)$ が A (B) 上に來る場合に於て $R_A (R_B)$ が極大となることには變りはない。而して P_1, P_n には何等の條件もないから、集中荷重の各々が支點上に來る場合毎に反力は極大になり、其のうちの最大なるものを梁の絶対最大反力と言ふ。

ii. 最大剪断力.

A より任意の距離 x にある断面 C に於ける剪断力 Q_C は

$$Q_C = \frac{1}{l} \left[a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \cdots + a_{n-1} \sum_1^{n-1} P + a_n \sum_1^n P \right] - \sum_1^{m-1} P \quad (20.3)$$

である。故に a_n が極大 (P_m が C の右に無限に近づく場合) 或は極小 (P_{m-1} が C の左に無限に近づく場合) のときに Q_C は極大又は極小になる。之等の場合に於ては夫々

$$a_n = l - x - \sum_m^{n-1} a \quad \text{或は} \quad a_n = l - x - \sum_{m-1}^{n-1} a$$

なるが故に

$$\left. \begin{aligned} Q_{C,\max} &= \frac{1}{l} \left[a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \cdots + \left(l - x - \sum_m^{n-1} a \right) \sum_1^n P \right] - \sum_1^{m-1} P, \\ Q_{C,\min} &= \frac{1}{l} \left[a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \cdots + \left(l - x - \sum_{m-1}^{n-1} a \right) \sum_1^n P \right] - \sum_1^{m-1} P, \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

になる。但し P_m 又は P_{m-1} が C に無限に近づくために新しき荷重が梁上

に来る場合には其の影響を考慮すべきである。然し何れにしても集中荷重の各々がCに近づく場合毎に Q_C は極大又は極小になり、其のうちの絶対値の最大なるものをCに於ける絶対最大剪断力と言ふ。

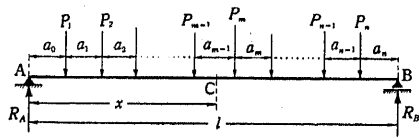
次に(20.4)に於て x を變數と考へれば $x=0$ 即ちCがAに合致し P_1 がAに無限に近づく場合に於て $Q_{C,max}$ は極大になり、 $x=l$ 即ちCがBに合致し P_n がBに無限に近づく場合に於て $Q_{C,min}$ は極小になる。之等の極大値及び極小値を $Q_{A,max}, Q_{B,min}$ とすれば

$$Q_{A,max} = +R_{A,max}, \quad Q_{B,min} = -R_{B,max} \quad (20.5)$$

であるが故に、之等のうちの絶対値の最大なるもの即ち梁の絶対最大剪断力は梁の絶対最大反力に等しくなる。

iii. 最大曲げモーメント.

第69圖のCに於ける曲げモーメント M_C は(19.8)より



第69圖

$$M_C = \frac{1}{l} \left[(l-x) \sum_1^{m-1} \left(P_i \sum_0^{i-1} a \right) + x \sum_m^n \left(P_i \left(l - \sum_0^{i-1} a \right) \right) \right] \quad (20.6)$$

になり、本式に於て a_0 を變數と考へれば

$$M_C = \frac{a_0}{l} \left[l \sum_1^{m-1} P - x \sum_1^n P \right] + C$$

の形に整理することが出来る。但しCは a_0 を含まざる常數項である。之と同様に荷重が圖示の位置より左に進行して P_m がCの左に来る時の曲げモーメントを M_C^0 とすれば

$$M_C = \frac{a_0'}{l} \left[l \sum_1^m P - x \sum_1^n P \right] + C'$$

と書くことが出来る。但し a_0' 及び C' は此の場合の a_0 及びCである。

$$\left. \begin{aligned} \text{今} \quad & l \sum_1^{m-1} P - x \sum_1^n P < 0 \quad \text{即ち} \quad \sum_1^{m-1} P < \frac{x}{l} \sum_1^n P, \\ & l \sum_1^m P - x \sum_1^n P > 0 \quad \text{即ち} \quad \sum_1^m P > \frac{x}{l} \sum_1^n P \end{aligned} \right\}$$

従つて

$$\sum_1^{m-1} P < \frac{x}{l} \sum_1^n P < \sum_1^m P \quad (20.7)$$

なりとすれば、 a_0 が小、 a_0' が大となるに従つて夫々 M_C 及び M_C^0 は増大する。故に P_m がC上に来る場合に於て M_C は極大になり、此の場合には $a_0 = x - \sum_1^{m-1} a$ なるが故に(19.7)及び(20.1)より

$$\begin{aligned} M_{C,max} = & \frac{x}{l} \left[a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \dots + a_{n-1} \sum_1^{n-1} P + \left(l - x - \sum_m^{n-1} a \right) \sum_1^n P \right] \\ & - \left[a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \dots + a_{m-1} \sum_1^{m-1} P \right] \end{aligned} \quad (20.8)$$

になる。(20.7)の條件を満足する荷重は一般に多數あつて、其の各々がC上に来る場合毎に M_C は極大になり、其のうち最大なるものをCに於ける絶対最大曲げモーメントと言ふ。

(20.8)に於て x を變數と考へれば

$$\frac{dM_{C,max}}{dx} = 0,$$

即ち

$$\left. \begin{aligned} x = & \frac{a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \dots + a_{n-1} \sum_1^{n-1} P + \left(l - \sum_m^{n-1} a \right) \sum_1^n P}{2 \sum_1^n P}, \\ \text{但し} \quad & \sum_1^{m-1} a \leq x \leq l - \sum_m^{n-1} a \end{aligned} \right\} \quad (20.9)$$

なる断面に於て $M_{C,max}$ は極大になる。かかる極大値は一般に多数あつて其のうち数値の最大なるものを梁の絶対最大曲げモーメントと言ふ。

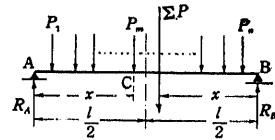
(20.9) 式中の $l - \sum_{m=1}^{n-1} a_m$ は $x + a_n$ に相等しきが故に (20.9) 式の x は

$$x = \frac{a_1 P_1 + a_2 \sum_1^2 P + \dots + a_{n-1} \sum_1^{n-1} P + a_n \sum_1^n P}{\sum_1^n P}$$

$$= \frac{P_1 \sum_1^n a + P_2 \sum_2^n P + \dots + P_{n-1} (a_{n-1} + a_n) + P_n a_n}{\sum_1^n P} \quad (20.10)$$

になる。即ち x は B より荷重の合力までの距離に等しきことが知られる。従つて次の定理を得。

定理 20.1. 梁の最大曲げモーメントは (20.7) の条件を満足する荷重 P_m と全荷重の合力との中點が梁の中點に一致する場合の荷重 P_m の作用點に於て生ず。(第 70 圖参照)



第 70 圖

§ 21. 單純梁の影響線

連行移動荷重に對する解析的解法は上記の如くであるが、連行移動荷重のみならず其の他の移動荷重に對しても影響線を利用する方が簡明である。

i. 反力.

第 71 圖に於て左端 A より x の距離に作用する單位集中荷重 $P=1$ に依る反力は

$$R_A = 1 - \frac{l-x}{l}, \quad R_B = 1 - \frac{x}{l}$$

であるから R_A, R_B に對する影響線縦距は $\xi = x/l$ とすれば

$$\eta_A = 1 - \xi, \quad \eta_B = \xi \quad (21.1)$$

になり、従つて R_A, R_B の影響線は第 71 圖の如くなる。

故に一個の集中荷重 P が移動する場合には P が A 又は B 上にあるときに

$$R_{A,max} = P, \quad R_{B,max} = P \quad (21.2)$$

になり、移動等分布荷重 p の場合には p が梁の全長に亙つて作用するとき

$$R_{A,max} = R_{B,max} = p \frac{1 \cdot l}{2} = \frac{pl}{2} \quad (21.3)$$

になる。

また連行移動荷重の場合には各荷重が A 又は B 上に来る度毎に R_A, R_B が極大になることは容易に了解せられる。

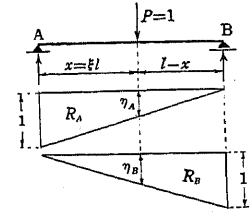
ii. 剪斷力.

任意の断面 C に於ける剪斷力 Q_C は荷重が AC 間にある場合には $-R_B$ に等しく、荷重が CB 間にある場合には $+R_A$ に等しきが故に Q_C に對する影響線縦距は

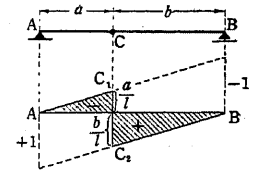
$$A \sim C: \eta_Q = -\xi, \quad C \sim B: \eta_Q = 1 - \xi \quad (21.4)$$

になり、影響線は第 72 圖の AC_1C_2B になる。

故に一個の集中荷重 P が移動する場合には P が C の右或は左に無限に近くあるときに Q_C は極大或は極小になる。即ち



第 71 圖



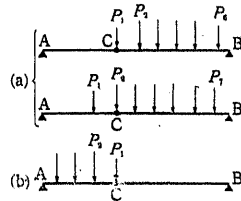
第 72 圖

$$Q_{C,max} = + \frac{Pb}{l}, \quad Q_{C,min} = - \frac{Pa}{l}. \quad (21.5)$$

等分布荷重 p の場合には p が CB 或は AC 上に作用するときに Q_C は極大或は極小になる。即ち

$$Q_{C,max} = + \frac{Pb^2}{2l}, \quad Q_{C,min} = - \frac{Pa^2}{2l}. \quad (21.6)$$

連行移動荷重の場合には荷重の各々が C の右或は左に無限に近づく場合毎に Q_C は極大或は極小になるが、普通の場合には第 73 圖(a)の場合に Q_C は極大になり、同圖(b)の場合に極小になる。



第 73 圖

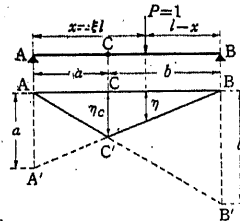
iii. 曲げモーメント.

任意の断面 C に於ける曲げモーメント M_C は荷重が AC 間にあるときには R_{Bb} に等しく、荷重が CB 間にあるときには R_{Aa} に等しきが故に M_C に対する影響線縦距は

$$A \sim C: \eta_M = b\xi, \quad C \sim B: \eta_M = a(1-\xi) \quad (21.7)$$

になり、従つて影響線は第 74 圖の AC'B になる。特に C に於ける影響線縦距は

$$\eta_C = \frac{ab}{l}. \quad (21.8)$$



第 74 圖

故に一個の集中荷重 P に対しては P が C 上に作用するときに

$$M_{C,max} = P\eta_C = \frac{Pab}{l} \quad (21.9)$$

になり、等分布荷重 p に対しては p が梁の全長に作用するときに

$$M_{C,max} = p \frac{\eta_C l}{2} = \frac{pab}{2} \quad (21.10)$$

になる。前記兩場合に於て a 従つて b を變數と考へれば

$$\eta_C = \frac{a(l-a)}{l}, \quad \frac{d\eta_C}{da} = \frac{l-2a}{l}$$

なるが故に $a = l/2$, 即ち C が梁の中點に一致するときに (21.9), (21.10) の値は極大になる。其の値は夫々 $Pl/4$ 及び $pl^2/8$ である。

連行移動荷重が作用する場合に、其のうちの任意の荷重 P_m が C 上にあるものとし、其の左及び右にある荷重の合力を夫々 $\Sigma P_l, \Sigma P_r$ とすれば第 75 圖に従つて

$$M_C = P_m\eta_C + \Sigma P_l \cdot \eta_l + \Sigma P_r \cdot \eta_r$$

である。今、荷重が Δx だけ左に進行せるものとし、其の時の M_C を M'_C とすれば

$$\begin{aligned} M'_C &= P_m\eta_C \left(1 - \frac{\Delta x}{a}\right) + \Sigma P_l \cdot \eta_l \left(1 - \frac{\Delta x}{x_l}\right) + \Sigma P_r \cdot \eta_r \left(1 + \frac{\Delta x}{x_r}\right) \\ &= M_C - \Delta x \left[P_m \frac{\eta_C}{a} + \Sigma P_l \frac{\eta_l}{x_l} - \Sigma P_r \frac{\eta_r}{x_r} \right] \end{aligned}$$

になる。然るに

$$\frac{\eta_l}{x_l} = \frac{\eta_C}{a}, \quad \frac{\eta_r}{x_r} = \frac{\eta_C}{b}$$

なるが故に上式は

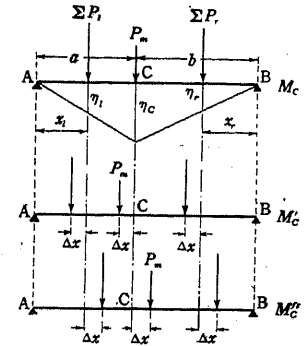
$$M'_C = M_C - \eta_C \Delta x \left[\frac{P_m + \Sigma P_l}{a} - \frac{\Sigma P_r}{b} \right]$$

になり、同様に荷重が Δx だけ右に動ける場合の M_C を M''_C とすれば

$$M''_C = M_C + \eta_C \Delta x \left[\frac{\Sigma P_l}{a} - \frac{P_m + \Sigma P_r}{b} \right]$$

になる。故に P_m が C 上に作用するときの M_C が極大であるためには

$$\frac{\Sigma P_l + P_m}{a} - \frac{\Sigma P_r}{b} > 0, \quad \frac{\Sigma P_l}{a} - \frac{P_m + \Sigma P_r}{b} < 0,$$



第 75 圖

即ち

$$\frac{\sum P_l + P_m}{\sum P_r} > \frac{a}{b} > \frac{\sum P_l}{P_m + \sum P_r} \quad (21.11)$$

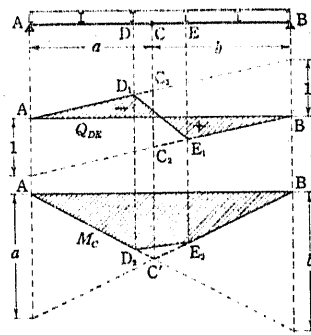
なることが必要である。全荷重の合力を $\sum P$ とし

$$\sum P_r = \sum P - (\sum P_l + P_m), \quad b = l - a$$

なることを考慮すれば (21.11) の条件が前節において解析的に導來せる (20.7) の条件に相等しきことを容易に證明することが出来る。

iv. 間接荷重に対する影響線

間接荷重の場合、反力の影響線は直接荷重に対するものと同一であるが、例へば第 76 圖の C に於ける Q_C 及び M_C の影響線は定理 12.1 に依つて夫々 AD_1E_1B 及び AD_2E_2B になる。尚、一つの格間中に於ては剪斷力は一定なるが故に Q_C の影響線は格間 DE に於ける剪斷力の影響線である。



第 76 圖

§ 22. 單純梁の圖解法

i. 固定荷重に対する圖解法

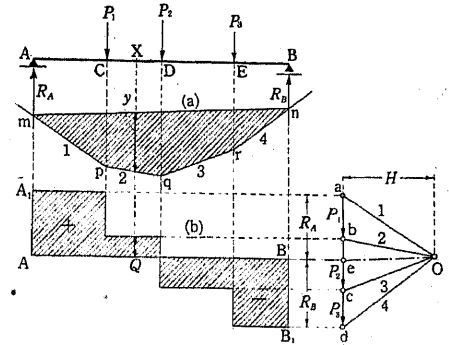
a) 集中荷重. 第 77 圖に於て AB を集中荷重 P_1, P_2, P_3 を受ける單純梁とする。今 P_1, P_2, P_3 の力の多角形 abcd を描けば、此の場合には一つの直線 (之を力線と言ふ) になる。任意の極と a, b, c, d とを連結し、之等に平行に連力圖 mpqrn を描き、mn に平行に Oe を引けば § 10, iii に依り ae, ed は夫々與へられたる荷重 P_1, P_2, P_3 の A, B を通過して鉛直方向に作用する分力の大きさと方向を示す。然るに反力は之等分力に大き相等しく方向反對

なるべきが故に

$$R_A = ea, \quad R_B = de \quad (22.1)$$

になる。

次に梁の任意の一點、例へば X の左にある外力は R_A と P_1 とであつて之に對する連力圖は nmpq である。従つて其の始邊 nm と終邊 pq



第 77 圖

とに依り、X を通る鉛直線が切取られる長さを y とすれば § 10, ii の (10.1) に依つて、X に對する R_A と P_1 のモーメントの和即ち X に於ける曲げモーメントは

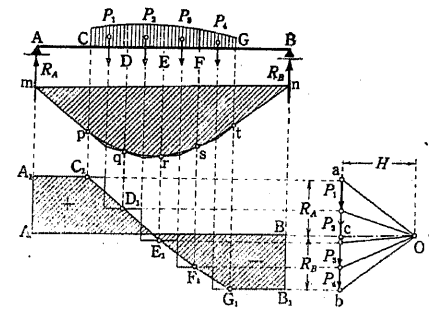
$$M = Hy \quad (22.2)$$

になる。此のことは任意の X に就て成立し、従つて第 77 圖の連力圖 mpqrn は各斷面に於ける曲げモーメントの $1/H$ を示すことになる。即ち之を曲げモーメント圖と見ることが出来る。

また第 77 圖に於て (b) の如き作圖を行へば之に依り剪斷力圖を得ることは特に説明を要しないことである。

b) 分布荷重. 分布荷重が作用する場合には之を第 78 圖に示すが如く任意の部分に分割し、分割せる各部分

の荷重の合力 P_1, P_2, P_3, \dots を集中荷重と考へて作圖を行へばよい。但し荷

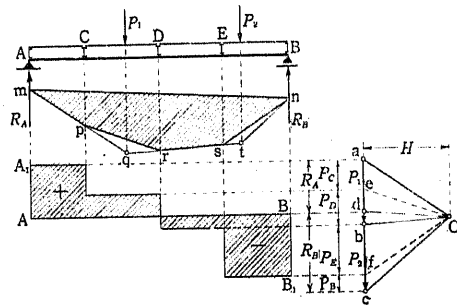


第 78 圖

重の分割點 C, D, E, ... に於ける曲げモーメント及び剪斷力は分割せる荷重を集中荷重と考へたる場合の値に等しきが故に、之等の分割點 C, D, E, ... に對應する連力圖上の點 p, q, r, ... 及び剪斷力圖上の點 C₁, D₁, E₁, ... を通過する曲線を描けば眞に近い曲げモーメント圖及び剪斷力圖が得られる。荷重の分割は細分する程眞に近い結果が得られる。等分布荷重の場合には pqr... は拋物線, C₁G₁ は一直線になる。

c) 間接荷重. 第 79 圖

の如く間接荷重が作用する場合には先づ直接荷重として連力圖 mqrtn を描く。反力は直接荷重の場合に相等しきが故に、Od を mn に平行に引けば R_A = da, R_B = ed である。次に C, D, E



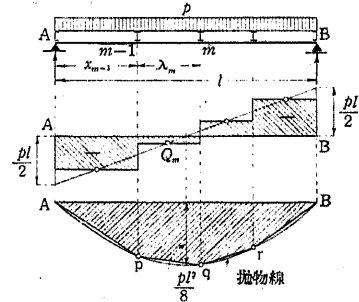
第 79 圖

を通る鉛直線が上記の連力圖に交る點を p, r, s とすれば定理 19.2 の系に依り多角形 mp₁rsn が曲げモーメント圖になる。剪斷力圖を描くには格點荷重を知る必要がある。今 O より Oe // rp, Of // ns なるが如くに ef を定めれば § 10, iii に依り

$$P_C = ae, \quad P_D = eb, \quad P_E = bf, \\ P_B = fc$$

になる。故に a, e, d, b, f より水平線を引いて圖示の如き作圖を行へば剪斷力圖が得られる。

第 79 圖の方法は荷重の如何に



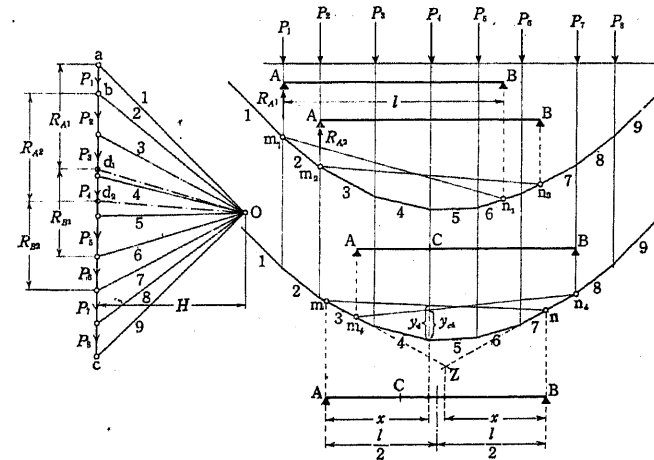
第 80 圖

拘らず常に應用し得る方法であるが、特に第 80 圖の如き滿載等分布荷重が間接に作用する場合には、必ずしも上記の方法に依るを要せず、先づ直接荷重としての剪斷力圖 AA₁BB₁ を描き、A₁B₁ 上に於て各格間の中點に對應する點を通過する階段形の圖形を描けば之即ち求むる剪斷力圖である。何となれば、例へば格間 m-1, m に於ける剪斷力 Q_m は

$$Q_m = \frac{pl}{2} - px_{m-1} - \frac{p\lambda_m}{2} = \frac{pl}{2} - p\left(x_m + \frac{\lambda_m}{2}\right)$$

であつて、直接荷重とせる場合の格間 m-1, m の中點に於ける剪斷力に等しいからである。曲げモーメント圖を描くには定理 19.2 の系に依り直接荷重に對する曲げモーメント圖(拋物線)を描き、各格點に對應する點 p, q, r を連結する多角形を描けばよい。

ii. 移動荷重に對する圖解法.



第 81 圖

第 81 圖に於て P₁, P₂, ... を連行移動荷重とし、之に對し圖示の如く任意の極 O に對する連力圖を描く。

此の連力圖上に於て P₁ の作用線 m₁ より水平距離 l なる點 n₁ を定め、

m_1n_1 に平行に Od_1 を引けば、第 77 圖に於て説明せるが如く d_1a は P_1, P_2, \dots, P_6 が梁上にあり、しかも P_1 が A 上にあるときの反力 (R_{A1}) である。同様に m_2n_2 の水平距離を l に等しくとり m_2n_2 に平行に Od_2 を引けば d_2b は P_2, P_3, \dots, P_6 が梁上にあり、しかも P_2 が A 上にあるときの反力 (R_{A2}) である。かくの如くにして各荷重が夫々 A 上に来るときの反力 R_A 、及び同様にして各荷重が夫々 B 上に来るときの反力 R_B を求めることが出来る。かかる反力はすべて § 20, i に於て説明せるが如く夫々極大なる反力であつて、其のうち数値の最大なるものが梁の絶対最大反力である。

次に梁の任意の一點を C とし、C がたとへば P_4 の作用線上に来るとき A 及び B に對應する連力圖上の點を m_4 及び n_4 とし、 m_4n_4 と連力圖との間に於て P_4 の作用線が切取らるる長さを yc_4 とすれば、(22.2) に依り、 P_4 が C 上に来るときの C に於ける曲げモーメントは

$$M_{O_4} = yc_4H \quad (22.3)$$

になる。故に C を順次各荷重の作用線上に位置せしめて上記の作圖を行つて夫々の場合の yc を求め、其のうち最大なるものを yc_{max} とすれば、C に於ける絶対最大曲げモーメントは

$$M_{O,max} = yc_{max}H \quad (22.4)$$

になる。

更に梁に載り得る荷重の一群、例へば P_3 乃至 P_6 をとれば、其の合力の作用線は Z を通過する。従つて定理 20.1 に依り梁 AB の中點が P_4 の作用線と Z との距離の二等分線上にあるが如く mn を引き、 P_4 の作用線が mn 及び連力圖に依り切取らるる長さを y_4 とすれば

$$M = y_4H$$

は梁の最大曲げモーメントの一つであつて、かくの如き y のうち最大なる

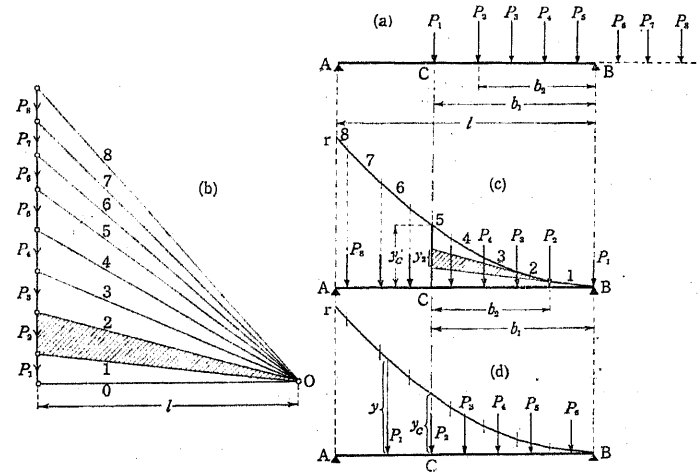
ものを y_{max} とすれば、梁の絶対最大曲げモーメントは

$$M_{max} = y_{max}H \quad (22.5)$$

になる。

iii. 反力多角形。

スパン l の單純梁 AB 上に第 82 圖 (a) の如き連行移動荷重 $P_1P_2\dots$ が左



第 82 圖

方に進行するとき、梁に載り得る全荷重 (第 82 圖の場合には P_1 乃至 P_6) を順次にとつて (b) の如き力線を描き、其の下端より水平距離 l なるが如くに極 O を定め、極 O と力線上の各荷重の區分點とを結ぶ。次に (c) に示すが如く荷重が實際とは逆の順序で右に動くものとし且つ P_1 が B 上に作用するものと假定し、(b) の極 O に對する連力圖 AB を描き、梁の任意の一點 C を通過する鉛直線が AB 及び Br に依り切取らるる長さを yc とすれば、 yc は先頭荷重 P_1 が C に達せるときの A に於ける反力 R_A 、従つて C の左側に於ける剪斷力 Q_C を示す。

何となれば例へば Br 中の 1 及び 2 の延長線に依りて C を通過する鉛直

線が切取らるる長さを y_2 とすれば、(b) 及び (c) に於て斜線を施せる三角形は互に相似なるが故に

$$y_2 : b_2 = P_2 : l, \quad y_2 = \frac{P_2 b_2}{l}$$

になり、 y_0 は此の y_2 の如きものの總和、即ち

$$y_0 = \frac{1}{l} \sum P b = R_A = Q_C \quad (22.6)$$

であるからである。

かくの如き多角形 Br を反力多角形と言ひ、荷重が如何なる位置に移動するも P_1 の位置に於ける反力多角形の縦距 y は反力 R_A 及び P_1 の作用點の左側に於ける剪斷力を示す。

次に例へば (d) の如く、 P_1 が C を越えて P_2 が C に來りたるときの C の左側に於ける剪斷力 Q_C は

$$Q_C = R - P_1 = y - P_1 \quad (22.7)$$

である。同様にして P_3, P_4, \dots が夫々 C 上に來る時の Q_C を求め得べく、之等の Q_C のうち數値の最大なるものが絶対最大の Q_C になる。列車荷重に於ては通常は P_1 が C 上に來りたるときに Q_C の數値は最大になり、従つて

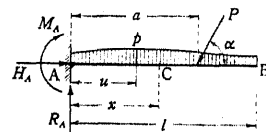
$$Q_{C, \max} = y_0 \quad (22.8)$$

になる。

§ 23. 片 持 梁

i. 一般の場合.

第 83 圖の片持梁 AB に任意の分布荷重及び集中荷重が作用するものとし、 p を固定端 A より u の距離に於ける分布荷重の強度、 P を集中荷重のうちの任意の一つ、 C を A より



第 83 圖

任意の距離 x に於ける斷面とする。但し分布荷重は梁に對して垂直に作用するものとする。

A に於ける反力は (13.7) 式より求められる。即ち

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \sum_A^B P \sin \alpha + \int_0^l p \, du, \\ H_A &= \sum_A^B P \cos \alpha, \\ M_A &= - \left[\sum_A^B P a \sin \alpha + \int_0^l p u \, du \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$

任意の斷面 C に於ける斷面力は、 C より右に作用する荷重を考慮することにより夫々次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} Q_C &= \sum_C^B P \sin \alpha + \int_x^l p \, du, \\ N_C &= - \sum_C^B P \cos \alpha, \\ M_C &= - \left[\sum_C^B P (u - x) \sin \alpha + \int_x^l p (u - x) \, du \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

之等の式より明かなるが如く

$$A \text{ に於て: } Q_A = R_A, \quad N_A = -H_A, \quad M_A = M_A,$$

$$B \text{ に於て: } Q_B = 0, \quad N_B = 0, \quad M_B = 0$$

であつて、曲げモーメントは一般に負號をとり、剪斷力は左端が固定端なる場合には一般に正であるが、右端が固定端なる場合には一般に負になる。曲げモーメント及び剪斷力は共に固定端に於て最大數値を示す。

ii. 鉛直集中荷重の場合.

第 84 圖の如く鉛直集中荷重 P_1, P_2, \dots, P_n が作用する場合には、反力は

$$R_A = \sum_1^n P, \quad H_A = 0,$$

$$M_A = - \left[P_1 \lambda_1 + P_2 (\lambda_1 + \lambda_2) + \dots \right. \quad (23.3)$$

$$\left. \dots + P_n \sum_1^n \lambda \right],$$

任意の荷重 P_m の作用点に於ける曲げモーメント M_m 及び P_m の左側に於ける剪断力 Q_m は

$$M_m = - \left[P_{m+1} \lambda_{m+1} + \dots + P_{n-1} \sum_{m+1}^{n-1} \lambda + P_n \sum_{m+1}^n \lambda \right], \quad (23.4)$$

$$Q_m = \sum_m^n P$$

になり、曲げモーメント圖及び剪断力圖は圖示の如くなる。

iii. 分布荷重の場合.

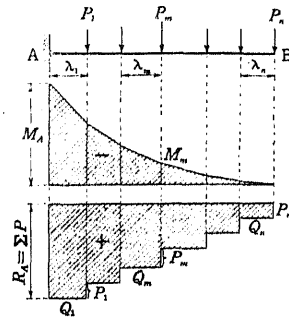
第85圖の如く等分布荷重 p が梁の全長に作用する場合には

$$R_A = pl, \quad M_A = - \frac{pl^2}{2}$$

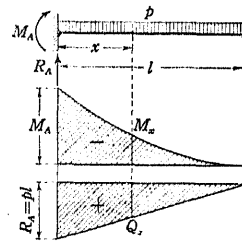
$$Q_m = p(l-x), \quad M_m = - \frac{p}{2} (l-x)^2 \quad (23.5)$$

であつて、剪断力圖は直線、曲げモーメント圖は拋物線になる。

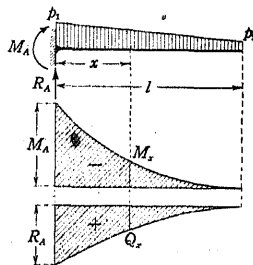
第86圖の如き等變分布荷重が作用する場合には



第84圖



第85圖



第86圖

$$R_A = \frac{(p_1 + p_2)l}{2}, \quad Q_m = \left[p_2 + \frac{p_1 - p_2}{2l} (l-x) \right] (l-x),$$

$$M_A = - \frac{(p_1 + 2p_2)l^2}{6}, \quad M_m = - \left[p_2 + \frac{p_1 - p_2}{3l} (l-x) \right] \frac{(l-x)^2}{2} \quad (23.6)$$

になり、特に $p_2 = 0$ の場合には

$$R_A = \frac{p_1 l}{2}, \quad M_A = - \frac{p_1 l^2}{6},$$

$$Q_m = \frac{p_1}{2l} (l-x)^2, \quad M_m = - \frac{p_1}{6l} (l-x)^3, \quad (23.7)$$

また $p_1 = 0$ の場合には

$$R_A = \frac{p_2 l}{2}, \quad M_A = - \frac{p_2 l^2}{3},$$

$$Q_m = \frac{p_2}{2l} (l^2 - x^2), \quad M_m = - \frac{p_2}{6l} (2l+x)(l-x)^2 \quad (23.8)$$

になる。

iv. 影響線.

單位集中荷重 $P=1$ が固定端 A より x の距離に作用するとき、反力 R_A は $P=1$ の位置に關せず常に

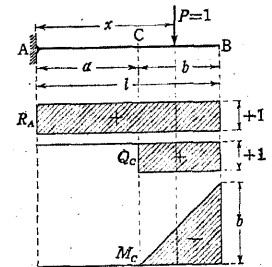
$$R_A = P = 1$$

なるが故に、 R_A に対する影響線は第87圖に示すが如く基準線に平行にして且つ1なる距離にある直線になる。

任意の断面を C とすれば、 $P=1$ が AC 間に作用する場合には M_C, Q_C 共に零に等しく、 $P=1$ が CB 間に作用する場合に限り

$$M_C = -1(x-a), \quad Q_C = +1$$

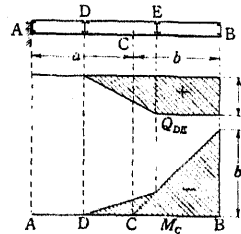
なるが故に M_C, Q_C に対する影響線は夫々第87圖の如くなる。従つて Q_A に対する影響線は R_A に対する影響線に合致し、 M_A に対する影響線は A より基準線 AB



第87圖

の負の側に 45° の方向に引ける直線になる。

間接荷重の場合の影響線のうち R_A 及び M_A に対するものは直接荷重の場合の影響線に等しく、任意の格間に於ける剪断力及び任意の断面に於ける曲げモーメントに対する影響線は定理 12.1 に依り第 88 圖の如くなる。



第 88 圖

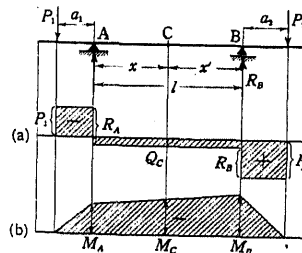
§ 24. 張出梁

i. 反力及び断面力.

第 89 圖の如く単純梁の両端或は一端を支點を超えて延長せるものを張出梁と言ひ、其の延長せる部分を張出部、兩支點間の部分を中央部と名付けよう。

張出部に於ける断面力は單に其の部分に作用する荷重に依つてのみ生じ、且つ其の値は張出部を片持梁と考ふることに依り容易に之を決定することが出来る。之に反し反力及び中央部に於ける断面力は、中央部に作用する荷重に依るのみならず張出部に作用する荷重の影響を受ける。然し反力及び中央部の断面力は中央部に作用する荷重に依るものと張出部に作用する荷重に依るものとの和であり、しかも前者は中央部を単純梁と考ふることに依り容易に之を算定し得るが故に、張出梁の問題に於ては張出部に作用する荷重が反力及び中央部の断面力に如何なる影響を及ぼすかを解決すれば十分である。

今第 89 圖の如く兩張出部に夫々 P_1 ,



第 89 圖

P_2 なる荷重が作用する場合の反力を求めるために鉛直方向の釣合条件 $\sum V = 0$ 及び任意の一點、例へば B に對するモーメントの釣合条件 $\sum M = 0$ を適用すれば

$$\sum V = R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0,$$

$$\sum M = R_A l - P_1(l + a_1) + P_2 a_2 = 0$$

を得、之より R_A, R_B は次の如くなる。

$$R_A = \frac{1}{l} [P_1(l + a_1) - P_2 a_2], \quad R_B = \frac{1}{l} [P_2(l + a_2) - P_1 a_1]. \quad (24.1)$$

然るに支點 A, B に於ける曲げモーメントは

$$M_A = -P_1 a_1, \quad M_B = -P_2 a_2 \quad (24.2)$$

なるが故に

$$R_A = P_1 + \frac{M_B - M_A}{l}, \quad R_B = P_2 - \frac{M_B - M_A}{l} \quad (24.3)$$

と書改めることが出来る。

次に中央部の任意の断面 C に於ける剪断力及び曲げモーメントに對しては

$$\left. \begin{aligned} Q_C &= -P_1 + R_A = P_2 - R_B, \\ M_C &= -P_1(a_1 + x) + R_A x = -P_2(a_2 + x') + R_B x', \end{aligned} \right\} \quad (24.4)$$

或は

$$Q_C = \frac{M_B - M_A}{l}, \quad M_C = M_A \frac{x'}{l} + M_B \frac{x}{l} \quad (24.5)$$

を導くことが出来る。即ち Q_C は第 89 圖 (a) に示す如く中央部に於ては断面の位置に無關係に常數になり、 M_C は x の一次式なるが故に断面の位置に依り (b) の如く直線的に變化する。

上記の結果は第 89 圖の如き集中荷重 P_1, P_2 が實際に作用する場合のみに限らず、張出部に任意の荷重が作用する場合に於ても、其の合力を P_1, P_2 とし、或は之に依る A, B に於ける曲げモーメントを M_A, M_B とすれば常に成立する關係である。

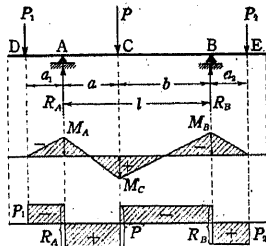
従つて中央部に作用する荷重に依る反力、剪断力及び曲げモーメントを夫々 $R_{A,0}$, $R_{B,0}$, $Q_{C,0}$, $M_{C,0}$ とすれば、張出梁に作用する全荷重に依る反力、中央部の任意の断面Cに於ける剪断力及び曲げモーメントは次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_{A,0} + P_1 + \frac{M_B - M_A}{l}, \\ R_B &= R_{B,0} + P_2 - \frac{M_B - M_A}{l}, \\ Q_C &= Q_{C,0} + \frac{M_B - M_A}{l}, \\ M_C &= M_{C,0} + M_A \cdot \frac{x}{l} + M_B \cdot \frac{x}{l}. \end{aligned} \right\} (24.6)$$

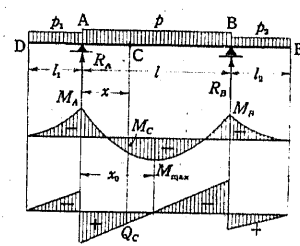
例へば第90圖の如き集中荷重が作用する場合には、 $R_{A,0}$, $R_{B,0}$, $Q_{C,0}$, $M_{C,0}$ に對しては(19.9)の結果が適用せられ

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{1}{l} [P_1(l + a_1) + P b - P_2 a_2], \\ R_B &= \frac{1}{l} [P_2(l + a_2) + P a - P_1 a_1], \\ M_A &= -P_1 a_1, \quad M_B = -P_2 a_2, \\ M_C &= \frac{1}{l} [P a b - P_1 a_1 b - P_2 a_2 a], \\ Q_{DA} &= -P_1, \quad Q_{AC} = R_A - P_1, \\ Q_{CB} &= P_2 - R_B, \quad Q_{BE} = P_2 \end{aligned} \right\} (24.7)$$

になる。



第90圖



第91圖

また第91圖の如き等分布荷重が作用する場合には

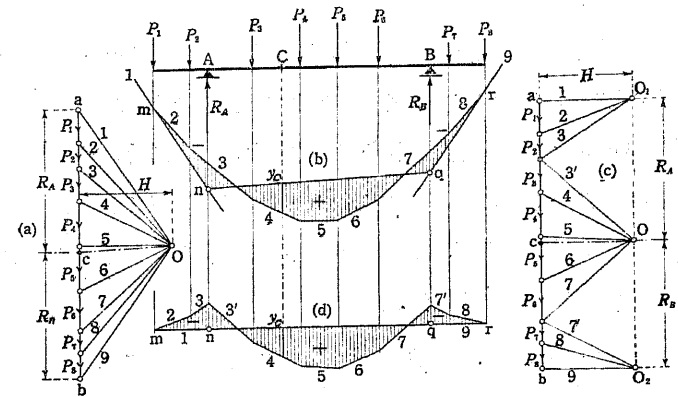
$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{pl}{2} + pl_1 + \frac{pl_1^2 - p_2 l_2^2}{2l}, \quad M_A = -\frac{pl_1^2}{2}, \\ R_B &= \frac{pl}{2} + p_2 l_2 - \frac{pl_1^2 - p_2 l_2^2}{2l}, \quad M_B = -\frac{p_2 l_2^2}{2}, \\ Q_C &= p \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{pl_1^2 - p_2 l_2^2}{2l}, \\ M_C &= \frac{p}{2} x(l-x) - \frac{pl_1^2}{2} \cdot \frac{l-x}{l} - \frac{p_2 l_2^2}{2} \cdot \frac{x}{l}, \\ M_{\max} &= \frac{1}{8} (pl^2 - 2pl_1^2 - 2p_2 l_2^2) + \frac{(pl_1^2 - p_2 l_2^2)^2}{8pl^2}, \\ x_0 &= \frac{l}{2} + \frac{pl_1^2 - p_2 l_2^2}{2pl}. \end{aligned} \right\} (24.8)$$

特に $l_1 = l_2$, $p_1 = p_2 = p$ なる場合には

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_B = p \left(\frac{l}{2} + l_1 \right), \quad M_A = M_B = -\frac{pl_1^2}{2}, \\ Q_C &= p \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad M_C = \frac{p}{2} [x(l-x) - l_1^2], \\ M_{\max} &= \frac{p}{8} (l^2 - 4l_1^2), \quad x_0 = \frac{l}{2}. \end{aligned} \right\} (24.9)$$

ii. 圖解法.

張出梁の反力及び曲げモーメントの圖解法は次の如くである。例へば第



第92圖

92 圖に於て先づ (a) の如く與へられたる荷重 P_1, P_2, \dots, P_n に等しく力線 ab を描き, 任意の極 O に就て (b) の如き連力圖を描く. 此の連力圖の始邊 1 及び終邊 9 が夫々 R_A, R_B の作用線に會する點 n 及び q を結び, (a) に於て nq に平行に Oc を引けば § 10, iii に説明せる所に依り

$$R_A = ca, \quad R_B = bc$$

になり, また任意の断面 C に於ける曲げモーメントは

$$M_C = y_c H$$

に依り決定せられる. 何となれば y_c は, C を通過する鉛直線が C の左に作用する外力 (R_A, P_1, P_2, P_3) に対する連力圖の始邊 qn 及び終邊 4 に依り切取らるる長さであるから, $y_c H$ は C の左にある外力の C に対するモーメントの和即ち C に於ける曲げモーメントに等しいからである.

mn, nq, qr を一つの水平線となるが如くに作圖するには, 先づ前記の方法に依り力線上の點 c を求めたる後, 第 92 圖 (c) の如く張出部及び中央部に對し別個の極 O_1, O, O_2 を夫々 a, c, b を通過する水平線上に選び, 之に依りて連力圖を描けば (d) の如く基準線が水平なる曲げモーメント圖が得られる.

iii. 影響線.

張出梁の影響線のうち張出部に於ける剪斷力及び曲げモーメントの影響線は片持梁に於けるものに等しく, 且つ反力並びに中央部に於ける剪斷力及び曲げモーメントの影響線は中央部に作用する荷重に對しては單純梁に於ける影響線に全く等しい. 従つて茲に於ては反力並びに中央部の任意の断面 C に於ける剪斷力及び曲げモーメントの影響線が張出部に於て如何になるかを検討すれば十分である.

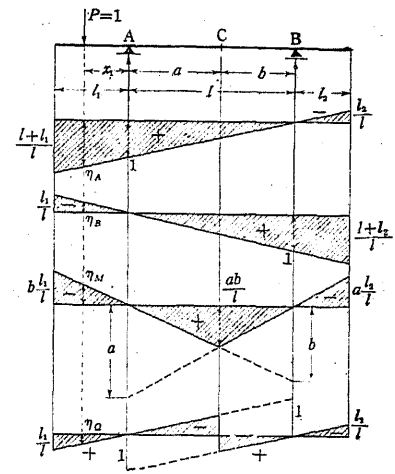
今, 左方の張出部に於て支點 A より左方に x_1 の距離に單位集中荷重 $P=1$ が作用するものとすれば (24.1) 乃至 (24.5) より

$$R_A = 1 \frac{l + x_1}{l}, \quad R_B = -1 \frac{x_1}{l}, \quad M_C = -1 \frac{x_1}{l} b, \quad Q_C = 1 \frac{x_1}{l}$$

なるが故に, R_A, R_B, M_C, Q_C に対する張出部における影響線縦距を $\eta_A, \eta_B, \eta_M, \eta_Q$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \eta_A &= 1 + \frac{x_1}{l}, \quad \eta_B = -\frac{x_1}{l}, \\ \eta_M &= -\frac{x_1}{l} b, \quad \eta_Q = \frac{x_1}{l} \end{aligned} \right\} \quad (24.10)$$

になる. 従つて R_A, R_B, M_C, Q_C に対する影響線は第 93 圖に示すが如くすべて其の中央部の單純梁としての影響線を支點を超えて延長すればよい.

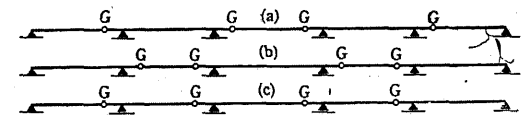


第 93 圖

§ 25. ゲルバー梁

第 94 圖の如く三個以上の支點にて支へられる梁にして, 適當なる位置に

滑節 G を配置し, 以て全體として靜定ならしめたる梁を ゲルバー梁 と言ひ, 其の外部

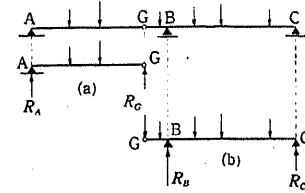


第 94 圖

的安定及び反力に就ては既に § 17 に於て説明せる所である.

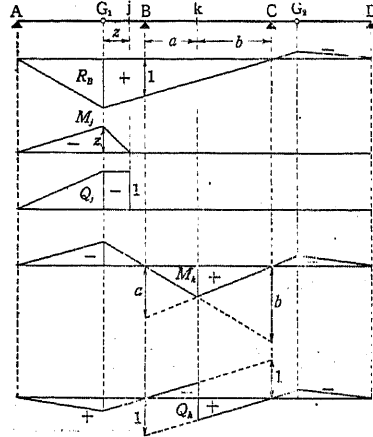
ゲルバー梁はすべて單純梁と張出梁との組合せと考へられるが故に, 其の反力及び斷面力はすべて單純梁及び張出梁に對する計算方法を組合せることに依り容易に之を算出することが出来る. 例へば第 95 圖の二スパンの

ゲルバー梁に於ては AG は (a) の如き単純梁となり, GBC は之に直接に作用する荷重の他に単純梁 AB の G に於ける反力 R_G に大き等しく方向反対なる集中荷重を受ける (b) の如き張出梁になる。

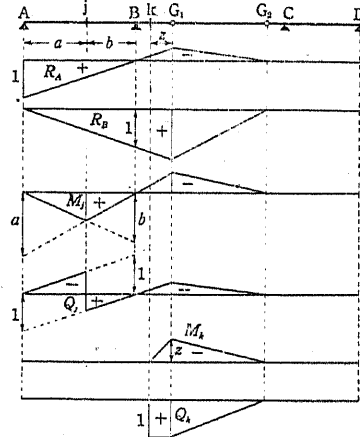


第 95 圖

ゲルバー梁の影響線は既に説明せる単純梁及び張出梁の影響線を組合せることに依り容易に之を描くことが出来る。三スパンのゲルバー梁の影響線は第 96 圖及び第 97 圖の如くなる。



第 96 圖



第 97 圖

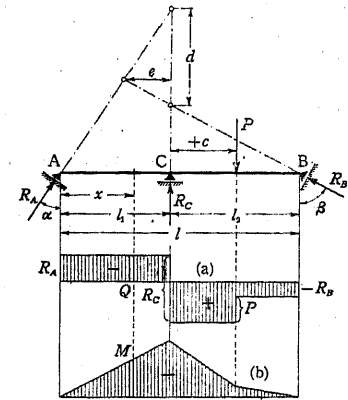
§ 26. 三點支持の静定梁

第 98 圖の如き三點支持の静定梁の反力は (13.1) に依り之を求めることが出来るが, 本圖の如く荷重が鉛直に作用し且つ R_C が鉛直なる場合には次の如くにして反力を決定することが出来る。

梁に作用する多数の鉛直荷重のうちの任意の一つを P とし, 支點 C より

P に至る距離を e (右向を正とす) とし, 荷重及び反力に對して (4.4) の釣合條件を適用すれば

$$\left. \begin{aligned} \sum H &= R_A \sin \alpha - R_B \sin \beta = 0, \\ \sum V &= R_A \cos \alpha + R_B \cos \beta \\ &\quad + R_C - \sum P = 0, \\ \sum M_C &= R_A l_1 \cos \alpha - R_B l_2 \cos \beta \\ &\quad + \sum P \cdot e = 0 \end{aligned} \right\} (26.1)$$



第 98 圖

となり, 之を解けば

$$\left. \begin{aligned} R_A &= - \frac{\sum P \cdot e}{(l_1 \cot \alpha - l_2 \cot \beta) \sin \alpha}, \\ R_B &= - \frac{\sum P \cdot e}{(l_1 \cot \alpha - l_2 \cot \beta) \sin \beta}, \\ R_C &= \sum P + \frac{\sum P \cdot e}{l_1 \cot \alpha - l_2 \cot \beta} (\cot \alpha + \cot \beta) \end{aligned} \right\} (26.2)$$

を得る。然るに第 98 圖に就て

$$d = l_1 \cot \alpha - l_2 \cot \beta, \quad e = \frac{l_1 \cot \alpha - l_2 \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} \quad (26.3)$$

であるから, (26.2) 式はまた次の如くに変換することが出来る。

$$R_A = - \frac{\sum P \cdot e}{d \sin \alpha}, \quad R_B = - \frac{\sum P \cdot e}{d \sin \beta}, \quad R_C = \sum P + \frac{\sum P \cdot e}{e}. \quad (26.4)$$

上記の如くにして反力が求められれば, 任意の断面に於ける剪断力及び曲げモーメントは容易に之を決定することが出来る。

例へば一個の集中荷重 P が第 98 圖に示せる位置に作用する場合には

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq l_1: & \quad Q = R_A \cos \alpha, \quad M = R_A x \cos \alpha; \\ l_1 \leq x \leq l_1 + e: & \quad Q = R_A \cos \alpha + R_C, \\ & \quad M = R_A \cos \alpha + R_C(x - l_1); \\ l_1 + e \leq x \leq l: & \quad Q = -R_B \cos \beta, \quad M = R_B(l - x) \cos \beta \end{aligned} \right\} (26.5)$$

になり、其の曲げモーメント圖及び剪斷力圖は圖示の如くなる。此の場合には R_A, R_B は共に負になり、且つ曲げモーメントも負になるが、 P が AC 間に作用する場合、即ち R_A と R_B の作用線の交點の存在する側に作用する場合には R_A, R_B が正となるが故に曲げモーメントは一般に正になる。

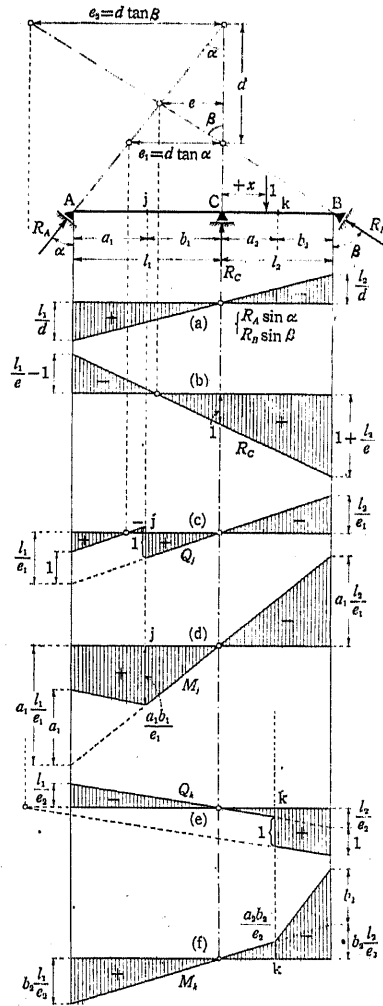
單位集中荷重 $P=1$ が梁上を移動する場合、 C より $P=1$ までの距離を x (右向を正) とすれば (26.4) 式より

$$\left. \begin{aligned} R_A &= -\frac{x}{d \sin \alpha}, \\ R_B &= -\frac{x}{d \sin \beta}, \\ R_C &= 1 + \frac{x}{e} \end{aligned} \right\} (26.6)$$

となるが故に、其の影響線は第 99 圖の (a), (b) の如くなる。

AC 間の任意の断面 j に於ける剪斷力及び曲げモーメントは $P=1$ が j の左に作用する場合 ($-l_1 \leq x \leq -b_1$) には

$$\left. \begin{aligned} Q_j &= R_A \cos \alpha - 1 \\ &= -\frac{x}{d \tan \alpha} - 1, \\ M_j &= R_A a_1 \cos \alpha - 1(-x - b_1) \\ &= -x \left(\frac{a_1}{d \tan \alpha} - 1 \right) + b_1, \end{aligned} \right\} (26.7)$$



第 99 圖

$P=1$ が j の右に作用する場合 ($-b_1 \leq x \leq l_2$) には

$$\left. \begin{aligned} Q_j &= R_A \cos \alpha = -\frac{x}{d \tan \alpha}, \\ M_j &= R_A a_1 \cos \alpha = -\frac{a_1}{d \tan \alpha} x \end{aligned} \right\} (26.8)$$

となるが故に、其の影響線は (c), (d) の如くなる。

CB 間の任意の断面 k に於ける剪斷力及び曲げモーメントは $P=1$ が k の左に作用する場合 ($-l_1 \leq x \leq a_2$) には

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= -R_B \cos \beta = +\frac{x}{d \tan \beta}, \\ M_k &= R_B b_2 \cos \beta = -\frac{b_2}{d \tan \beta} x, \end{aligned} \right\} (26.9)$$

$P=1$ が k の右に作用する場合 ($a_2 \leq x \leq l_2$) には

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= -R_B \cos \beta + 1 = +\frac{x}{d \tan \beta} + 1, \\ M_k &= R_B b_2 \cos \beta - 1(x - a_2) = -x \left(\frac{b_2}{d \tan \beta} + 1 \right) + a_2 \end{aligned} \right\} (26.10)$$

となるが故に、其の影響線は (e), (f) の如くなる。

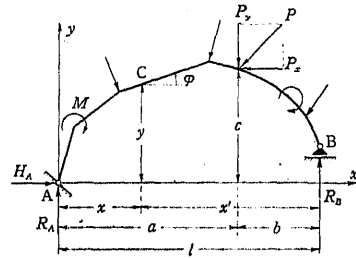
§ 27. 靜定曲り梁及びラーメン

i. 單純梁型.

第 100 圖に示すが如く曲げ剛さを有する直線又は曲線の部材を剛結せる構造物が A, B 兩支點に於て單純梁と同様に支持せられ、之に多數の集中荷重及び力のモーメントが作用するものとする。

今、回轉端 A を原點とする x, y -座標軸を圖示の如くにとり、任意の集中荷重 P の $-x, -y$ の方向の分力を P_x, P_y とし、任意の力のモーメントを M とし、之等の荷重と反力とに對して (4.4) の釣合條件を適用すれば

$$\left. \begin{aligned} \Sigma H &= H_A - \Sigma P_x = 0, \\ \Sigma V &= R_A + R_B - \Sigma P_y = 0, \\ \Sigma M_A &= -R_B l + \Sigma P_y a \\ &\quad - \Sigma P_x c + \Sigma M = 0 \end{aligned} \right\} \quad (27.1)$$



第 100 圖

になり之より次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} H_A &= \Sigma P_x, \\ R_A &= \frac{1}{l} (\Sigma P_y b + \Sigma P_x c - \Sigma M), \\ R_B &= \frac{1}{l} (\Sigma P_y a - \Sigma P_x c + \Sigma M). \end{aligned} \right\} \quad (27.2)$$

任意の一点 C の座標を \$(x, y)\$ とすれば C に於ける曲げモーメントは

$$\left. \begin{aligned} M_C &= R_A x - H_A y - \sum_A^C P_y(x-a) + \sum_A^C P_x(y-c) + \sum_A^C M \\ \text{或は} &= R_B x' - \sum_C^B P_y(x'-b) - \sum_C^B P_x(y-c) - \sum_C^B M \end{aligned} \right\} \quad (27.3)$$

になる.

C に於ける剪断力 \$Q_C\$ 及び軸方向力 \$N_C\$ を求めるために C の左或は右にある外力の \$+x, +y\$ 方向の分力の總和を \$X, Y\$ 及び \$X', Y'\$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} X &= H_A - \sum_A^C P_x, & Y &= R_A - \sum_A^C P_y; \\ X' &= -\sum_C^B P_x, & Y' &= R_B - \sum_C^B P_y \end{aligned} \right\} \quad (27.4)$$

になり, C に於ける部材の軸と \$+x\$ の方向との間を \$\varphi\$ とすれば, \$Q_C\$ 及び \$N_C\$ は (6.2) 式, 即ち

$$\begin{aligned} Q_C &= -X \sin \varphi + Y \cos \varphi = X' \sin \varphi - Y' \cos \varphi, \\ N_C &= -X \cos \varphi - Y \sin \varphi = X' \cos \varphi + Y' \sin \varphi \end{aligned}$$

より計算することが出来る.

荷重としてのモーメントが作用せず, 且つ荷重がすべて鉛直なる場合には \$P_x = 0, P_y = P\$ なるが故に

$$\left. \begin{aligned} H_A &= 0, & R_A &= \frac{1}{l} \sum_A^B P b, & R_B &= \frac{1}{l} \sum_A^B P a, \\ M_C &= R_A x - \sum_A^C P(x-a) = R_B x' - \sum_C^B P(x'-b) \end{aligned} \right\} \quad (27.5)$$

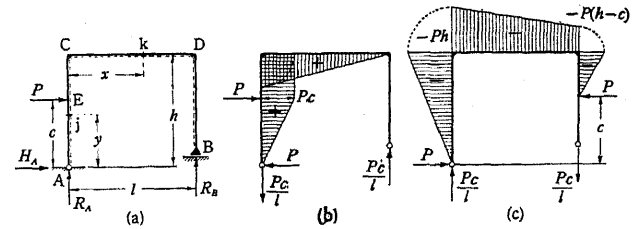
になる. 即ち反力及び曲げモーメントはスパン \$l\$ の単純梁に於けるものに全く相等的. また此の場合には \$X=0\$ であつて \$Y\$ はスパン \$l\$ の単純梁の C に於ける剪断力に等しくなるが故に之を \$Q_{C,0}\$ とすれば

$$N_C = -Q_{C,0} \sin \varphi, \quad Q_C = +Q_{C,0} \cos \varphi \quad (27.6)$$

になる.

単純梁型式の静定曲り梁或はラーメンの一般解法は上記の如くであるが, 實際の個々の問題に於ては, 之等の公式に依らずとも其の反力及び断面力を簡単に算出し得る場合が多い:

例 1. 水平荷重を受ける静定門形ラーメン. 第 101 圖 (a) の如く静定



第 101 圖

門形ラーメン ACDB の左柱に水平荷重 \$P\$ が作用するときには (4.4) の釣合条件より容易に

$$H_A = -P, \quad -R_A = R_B = \frac{Pc}{l}$$

を得る.

剪断力及び軸方向力は

$$Q_{AB} = -H_A = P, \quad Q_{BC} = 0, \quad N_{AC} = -R_A = \frac{Pc}{l},$$

$$Q_{CD} = N_{DB} = -R_B = -\frac{Pc}{l}, \quad N_{CD} = Q_{DB} = 0.$$

左柱に於て A より高さ y に於ける断面を j とすれば, j に於ける曲げモーメント M_j は

$$M_j = -H_A y = Py \quad (y \leq c)$$

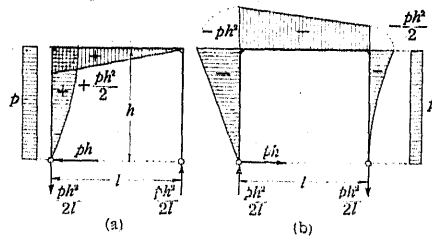
$$= -H_A y - P(y - c) = Pc \quad (y \geq c)$$

になり, CD 中の任意の断面 k に於ける曲げモーメント M_k は

$$M_k = R_B(l - x) = \frac{Pc}{l}(l - x)$$

になる. 右柱 DB に於ては曲げモーメントは零であつて, 従つて本場合の曲げモーメント圖は第 101 圖(b) の如くなる. 尚, P が右柱に作用する場合の曲げモーメント圖は第 101

圖(c) の如くなり, 左柱又は右柱に等分布荷重 p が作用する場合の曲げモーメント圖は第 102 圖の如くなる.



第 102 圖

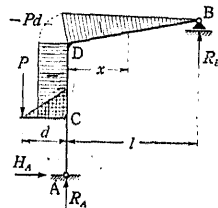
例 2. 第 103 圖の場合.

本圖の場合に $H_A = 0$ なることは明白である. R_A 及び R_B を求めるために A 又は B に對する外力のモーメントの和を零と置けば

$$\sum M_A = -Pd - R_B l = 0: \quad R_B = -P \frac{d}{l},$$

$$\sum M_B = -P(d+l) + R_A l = 0: \quad R_A = +P \frac{d+l}{l}$$

を得る.



第 103 圖

柱 AD に於ては剪断力は零であり, 曲げモーメント及び軸方向力は

$$A \sim C: \quad M = 0, \quad N = -R_A = -P \frac{d+l}{l},$$

$$C \sim D: \quad M = -Pc, \quad N = -R_A + P = -P \frac{d}{l}.$$

横梁 DB 中の任意の断面に於ては

$$M = R_B(l - x) = -P \frac{d}{l}(l - x),$$

而して $X = 0, Y = R_A - P = P \frac{d}{l}$ なるが故に

$$Q = P \frac{d}{l} \cos \varphi, \quad N = -P \frac{d}{l} \sin \varphi$$

になり, 曲げモーメント圖は圖示の如くなる.

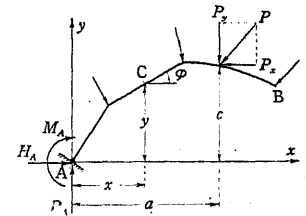
ii. 片持梁型.

第 104 圖の如き片持梁型の曲り梁又はラーメンの反力は (13.6) より

$$\left. \begin{aligned} H_A &= \sum P_x, & R_A &= \sum P_y, \\ M_A &= -\sum P_y a + \sum P_x c \end{aligned} \right\} (27.7)$$

になり, 任意の一點 C に於ける曲げモーメントは

$$M_C = -\sum P_y(a - x) + \sum P_x(c - y) \quad (27.8)$$



第 104 圖

になる.

C の右にある荷重の $+x, +y$ 方向の分力の總和 X', Y' は

$$X' = -\sum_0^B P_x, \quad Y' = -\sum_0^B P_y \quad (27.9)$$

であるから, C に於ける剪断力及び軸方向力は (6.2) 式より

$$\left. \begin{aligned} Q_C &= X' \sin \varphi - Y' \cos \varphi = -\sin \varphi \sum_0^B P_x + \cos \varphi \sum_0^B P_y, \\ N_C &= X' \cos \varphi + Y' \sin \varphi = -\cos \varphi \sum_0^B P_x - \sin \varphi \sum_0^B P_y \end{aligned} \right\} (27.10)$$

になる.

例へば第105圖の構造

物に於ては

$$H_A = 0, \quad R_A = P,$$

$$M_A = -Pa$$

になる。部材CDをC及びDに於て支持せらるる

単純梁とすれば、C及び

Dには其の反力に等しき力、即ちCには $P(l_2 - a)/l$ 、Dには $P(l_1 + a)/l$ が作用することになる。従つてBに於けるBA側、BC側及びBD側の曲げモーメントを夫々 M_B^A 、 M_B^C 及び M_B^D とすれば

$$M_B^A = -Pa, \quad M_B^C = -P \frac{l_2 - a}{l} l_1, \quad M_B^D = -P \frac{l_1 + a}{l} l_2$$

であつて、之等の間には

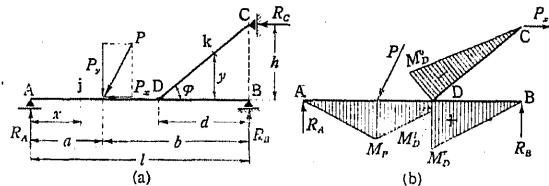
$$M_B^A + M_B^C - M_B^D = 0$$

の関係が成立する。第105圖(b)は曲げモーメント圖である。

iii. 三點支持の場合.

三點にて支持せらるる曲り梁又はラーメンの反力は(13.1)或は§26の如くにして之を求めることが出来、反力がわかれば各断面に於ける曲げモーメント、剪断力等は容易に計算することが出来る。

例1. 第106圖. 荷重Pの水平及び鉛直分力を P_x, P_y とすれば明かに



第106圖

$$R_A + R_B = P_y, \quad R_C = -P_x$$

である。次に支點Cに於ける $\Sigma M = 0$ の條件より

$$R_A l - P_y b + P_x h = 0, \quad R_A = \frac{1}{l} (P_y b - P_x h),$$

従つて

$$R_B = \frac{1}{l} (P_y a + P_x h)$$

になり、各部材に於ける断面力は次の如くなる。

$$0 \leq x \leq a: \quad M_j = R_A x, \quad Q_j = R_A, \quad N_j = 0;$$

$$a \leq x \leq (l - d): \quad M_j = R_A x - P_y (x - a), \quad Q_j = -R_B, \quad N_j = P_x;$$

$$(l - d) \leq x \leq l: \quad M_j = R_B (l - x), \quad Q_j = -R_B, \quad N_j = 0;$$

$$C \sim D: \quad M_k = R_C (h - y) = -P_x (h - y),$$

$$Q_k = -R_C \cos \varphi = P_x \cos \varphi,$$

$$N_k = -R_C \sin \varphi = P_x \sin \varphi.$$

第106圖(b)は曲げモーメント圖である。特に荷重作用點に於ては

$$M_P = R_A a = \frac{a}{l} (P_y b - P_x h)$$

になり、Dに於て其の左、右及び右上に作用する曲げモーメントを夫々 M_D^A 、 M_D^B 、 M_D^C とすれば

$$M_D^A = R_B d - P_x h, \quad M_D^B = R_B d, \quad M_D^C = -P_x h,$$

$$M_D^A - M_D^B - M_D^C = 0$$

である。

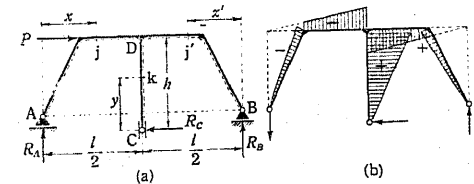
例2. 第107圖. 釣

合條件 $\Sigma H = 0, \Sigma V = 0,$

$\Sigma M = 0$ より

$$-R_A = R_B = \frac{P h}{l},$$

$$R_C = P$$



第107圖

を得る。従つて A ~ D, D ~ B, C ~ D の任意の断面を圖示の如く j, j', k とすれば

$$M_j = R_A x = -\frac{Ph}{l} x, \quad M_{j'} = R_B x' = \frac{Ph}{l} x', \quad M_k = R_C y = P y$$

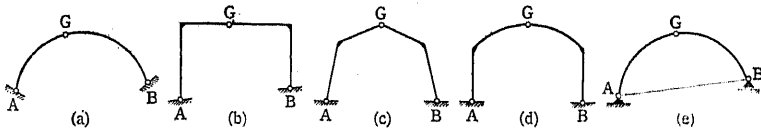
になり、特に D の左、右及び下に於ける曲げモーメントを M_D^L, M_D^R, M_D^B とすれば

$$-M_D^L = M_D^R = \frac{Ph}{2}, \quad M_D^B = Ph, \quad M_D^L - M_D^R + M_D^B = 0$$

になる。曲げモーメントの分布は第 107 圖 (b) の如くなる。

§ 28. 三鉸アーチ及びラーメン

第 108 圖 (a) の如く二個の曲り材 AG, GB を滑節 G に依つて連結し、A



第 108 圖

及び B を回転端とせる構造物を三鉸アーチと言ひ、(b) 或は (c) の如く曲り材の代りに多角形をなす部材を使用せるものを三鉸ラーメンと言ふ。實際に於てはまたアーチともラーメンともつかぬ (d) の如き形状のものも屢々使用せられる。之等の三鉸アーチ及びラーメンは力學的には全く同一の種類に屬し、本節に於て三鉸アーチに就て記述する事項はすべて其のまま任意の形状の三鉸ラーメンに應用せられる。また第 108 圖 (e) の如く B を移動端とし、其の代りに AB 間の繫材を使用して水平反力と同等の効果を發揮せしむる場合も、力學的には三鉸アーチと同等になる。

i. 鉛直荷重の場合。

第 109 圖の如く鉛直荷重を受ける三鉸アーチ或はラーメンの反力の解法

は既に § 15 に於て記述済である。即ち鉛直反力 V_A, V_B は三鉸アーチを第 109 圖 (b) の如き単純梁 A'B' にて置換へたる場合の鉛直反力 $R_{A,0}, R_{B,0}$ に等しく AB 方向の水平反力 $H_A = H_B$ の大きさは假想単純梁 A'B' に於て滑節 G' に對應する断面 G' に於ける曲げモーメント $M_{G,0}$ を $f \cos \theta$ にて除せるものに等しい。即ち

$$\left. \begin{aligned} V_A &= R_{A,0}, & V_B &= R_{B,0}, \\ H_A &= H_B = \frac{M_{G,0}}{f \cos \theta}. \end{aligned} \right\} (28.1)$$

但し第 109 圖の如き集中荷重の場合には

$$V_A = R_{A,0} = \frac{1}{l} \sum P b, \quad V_B = R_{B,0} = \frac{1}{l} \sum P a$$

なることは言ふまでもない。

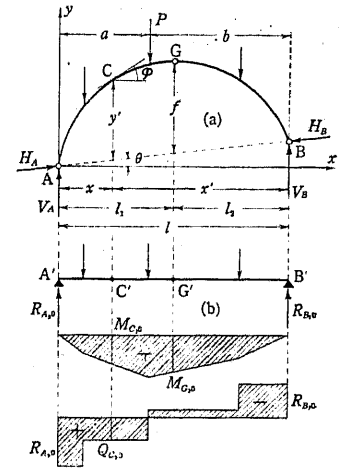
任意の断面 C に於ける曲げモーメントは

$$M_C = V_A x - \sum_A^C P(x-a) - H_A y' \cos \theta.$$

である、然るに $V_A x - \sum_A^C P(x-a)$ は假想単純梁に於て C に對應する點 C' に於ける曲げモーメント $M_{C,0}$ であるが故に M_C は一般に次の如く書くことが出来る。

$$M_C = M_{C,0} - H_A y' \cos \theta = M_{C,0} - M_{G,0} \frac{y'}{f}. \quad (28.2)$$

C に於ける剪断力 Q_C 及び軸方向力 N_C を求めるために C の左方にあるすべての外力の +x, +y 方向の分力の總和を求むれば



第 109 圖

$$X_C = H_A \cos \theta, \quad Y_C = V_A - \sum_A^C P + H_A \sin \theta.$$

依つて(6.2)式より

$$Q_C = + (V_A - \sum_A^C P) \cos \varphi - H_A \sin (\varphi - \theta),$$

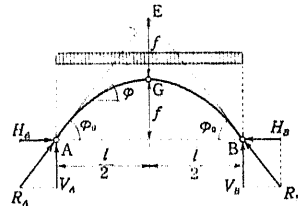
$$N_C = - (V_A - \sum_A^C P) \sin \varphi - H_A \cos (\varphi - \theta)$$

を得る。然るに $V_A - \sum_A^C P$ は假想単純梁の C' に於ける剪断力 $Q_{C,0}$ に等しきが故に

$$\left. \begin{aligned} Q_C &= + Q_{C,0} \cos \varphi - H_A \sin (\varphi - \theta), \\ N_C &= - Q_{C,0} \sin \varphi - H_A \cos (\varphi - \theta). \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

上記(28.1), (28.2) 及び(28.3)の諸式は單に集中荷重の場合に於てのみならず、任意の分布荷重の場合に於ても同様に成立する。

例へば第110圖の如く A, B が同一の高さにあり G がスパンの中央にある拋物線アーチに於ては



第110圖

$$y' = y = \frac{4f}{l^2} (l-x)x, \quad \theta = 0, \quad \tan \varphi = \frac{8f}{l^2} \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (28.4)$$

であつて、之に満載等分布荷重 p が作用する場合には

$$R_{A,0} = R_{B,0} = \frac{pl}{2}, \quad M_{G,0} = \frac{pl^2}{8}, \quad M_{C,0} = \frac{p}{2} (l-x)x,$$

$$Q_{C,0} = p \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} V_A = V_B &= \frac{pl}{2}, \quad H_A = H_B = \frac{pl^2}{8f}, \\ R_A = R_B &= \frac{pl^2}{8f} \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l} \right)^2} = H_A \sec \varphi_0, \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

而して(28.2)及び(28.3)より

$$M_C = 0, \quad Q_C = 0, \quad N_C = -H_A \sec \varphi \quad (28.6)$$

を得る。即ち合反力は起拱點 A, B に於ける切線の方向に作用し、曲げモーメント及び剪断力はアーチのすべての断面に於て零、軸方向力の大きさは常に水平反力の $\sec \varphi$ 倍に等しい。

両端が同一水平線上にある三鉸アーチの鉛直荷重に対する影響線は次の如くなる。

(1) 鉛直反力. (28.1)

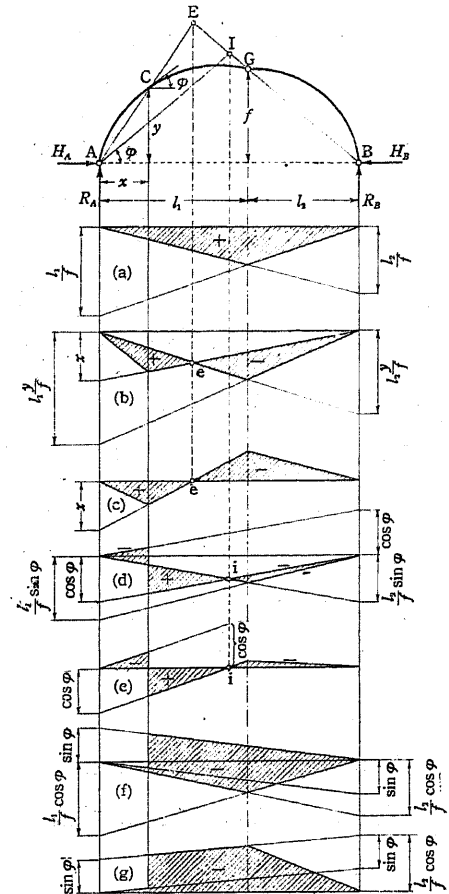
に依り V_A, V_B は假想単純梁の鉛直反力に等しきが故に、 V_A, V_B に対する影響線は假想単純梁の鉛直反力の影響線其のままである。

(2) 水平反力. $H_A = H_B$ なるが故に之を H とすれば(28.1)より

$$H = \frac{M_{G,0}}{f} \quad (28.7)$$

であるから、 H の影響線縦距は假想単純梁の曲げモーメント $M_{G,0}$ の影響線縦距の $1/f$ に等しく、従つて H の影響線は第111圖(a)の如くなる。

(3) 曲げモーメント.



第111圖

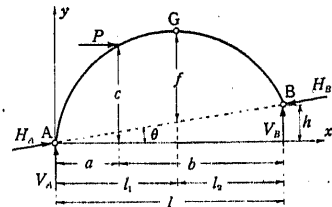
(28.2) 式に依つて、任意の断面 C に於ける曲げモーメント M_C の影響線縦距は $M_{G,0}$ の影響線縦距より $M_{G,0}$ の影響線縦距の y/f 倍を減じたるものに等しく、従つて M_C の影響線は第 111 圖 (b) の如くなる。尚、影響線縦距が零となる点 e は AC, BG の延長線の交点 E と同一鉛直線上にある。何となれば荷重の作用線が E を通過する場合には § 15, 第 49 圖に於て説明せるが如く支點 A に於ける合反力は AC の方向に作用するが故に $M_C = 0$ となるからである。従つて点 e を基點として第 111 圖 (c) の如き作圖を行へば基線が水平なる M_C の影響線が得られる。

(4) 剪断力. (28.3) の第一式に依つて、 Q_C の影響線縦距は $Q_{G,0}$ の影響線縦距の $\cos \varphi$ 倍より $M_{G,0}$ の影響線縦距の $\sin \varphi / f$ 倍を減じたるものに等しく、従つて Q_C の影響線は第 111 圖 (d) の如くなる。影響線縦距が零となるべき点 i は A より C に於ける切線に平行に引きたる線と BG の延長線との交点 I と同一鉛直線上にある。何となれば荷重の作用線が I を通過する場合には A に於ける合反力は AI の方向に、即ち C に於ける切線に平行に作用し、従つて $Q_C = 0$ となるからである。従つて点 i を基準とし (e) の如き作圖を行へば基線が水平なる Q_C の影響線が得られる。

(5) 軸方向力. (28.3) の第二式に依り、 N_C の影響線縦距は $-Q_{C,0}$ の影響線縦距の $\sin \varphi$ 倍に $-M_{G,0}$ の影響線縦距の $\cos \varphi / f$ 倍を加へたるものに等しく、従つて N_C の影響線は第 111 圖 (f) 或は (g) の如くなる。

ii. 水平荷重の場合.

第 112 圖の如く水平荷重 P が作用する場合、A, B より P に下せる垂線の長さを e_a, e_b とすれば $e_a = e, e_b = c - h$ であつて、之を (15.1) 及び



第 112 圖

(15.2) の第二式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} V_A &= -\frac{1}{l} P c_b = -P \frac{c-h}{l}, & V_B &= +\frac{1}{l} P c_a = +P \frac{c}{l}, \\ H_B &= \frac{l_2}{lf \cos \theta} M_a = +P \frac{c l_2}{lf \cos \theta} \end{aligned} \right\} (28.8)$$

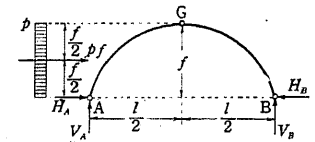
$$\text{を得、} H_A \text{ は} \quad H_A = H_B - \frac{P}{\cos \theta} \quad (28.9)$$

より求めることが出来る。

例へば第 113 圖の如き三鉸アーチに水平の等分布荷重 p が作用する場合

には

$$\begin{aligned} P &= pf, & c &= \frac{f}{2}, & l_1 &= l_2 = \frac{l}{2}, \\ \theta &= 0, & h &= 0 \end{aligned}$$



第 113 圖

であるから

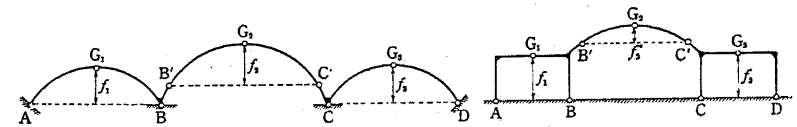
$$-V_A = V_B = \frac{pf^2}{2l}, \quad H_A = -\frac{3}{4} pf, \quad H_B = +\frac{1}{4} pf \quad (28.10)$$

になる。

§ 29. 三鉸アーチ或はラーメンを組合せたる静定構造物

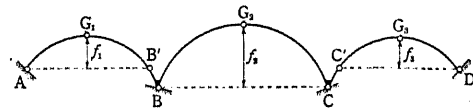
第 51 圖或は第 52 圖の如き三鉸アーチ又はラーメンのつながりに於ける反力は § 15 に於て説明せる方法に依つて求めることが出来、反力が求められれば各断面に於ける断面力は容易に算出することが出来る。

第 114 圖の如き三鉸アーチ又はラーメンが連続する場合には先づ $B'G_2C'$ を三鉸アーチとして其の反力を求め、これに大き相等しく方向反對なる力



第 114 圖

が荷重として夫々左右にある AG_1B 及び CG_2D に作用するものと考へればよく、また第 115 圖の如き連続三鉸アーチに於ては、先づ左右の三鉸アーチ AG_1B' 及び $C'G_2D$ の



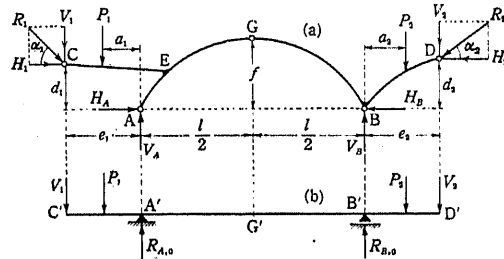
第 115 圖

B' 及び C' に於ける反力を求め、之に大き相等しく方向反對なる力が荷

重として中央のアーチ BG_2C に作用するものと考へればよい。何れにしても之等の場合には片持梁を有する三鉸アーチの反力を求める必要がある。

第 116 圖の AGB を片持梁を有する任意の三鉸アーチ或はラーメンとする。

但し支點 A, B は同一水平線上にあり、 G はスパン l の中央にあるものとする。アーチ或はラーメンの形状は G に就て左右對稱なるを要



第 116 圖

せず、また片持梁は CE の如く任意の點に固定されてもよい。 AGB の部分に作用する荷重に依る反力は前節に従つて求め得るが故に、茲には片持梁に任意の集中荷重 P_1, P_2 及び片持梁の先端に其の左或は右にある三鉸アーチの反力に大き等しく方向反對なる R_1, R_2 が作用する場合の反力を求める。

R_1, R_2 の水平及び鉛直方向の分力は

$$H_1 = R_1 \cos \alpha_1, \quad V_1 = R_1 \sin \alpha_1, \quad H_2 = R_2 \cos \alpha_2, \quad V_2 = R_2 \sin \alpha_2$$

であつて、アーチ全體に就て $\Sigma H = 0, \Sigma V = 0$ の釣合條件を適用すれば

$$\Sigma H = H_A - H_B + H_1 - H_2 = 0,$$

$$\Sigma V = V_A + V_B - P_1 - P_2 - V_1 - V_2 = 0.$$

G に於ては曲げモーメントは零であるべきが故に G の左或は右に作用する力の G に對するモーメントは零でなければならない。即ち

$$V_A \frac{l}{2} - H_A f - P_1 \left(\frac{l}{2} + a_1 \right) - V_1 \left(\frac{l}{2} + e_1 \right) - H_1 (f - d_1) = 0,$$

$$-V_B \frac{l}{2} + H_B f + P_2 \left(\frac{l}{2} + a_2 \right) + V_2 \left(\frac{l}{2} + e_2 \right) + H_2 (f - d_2) = 0$$

を得、以上の四式を聯立方程式として解けば次の結果を得る。

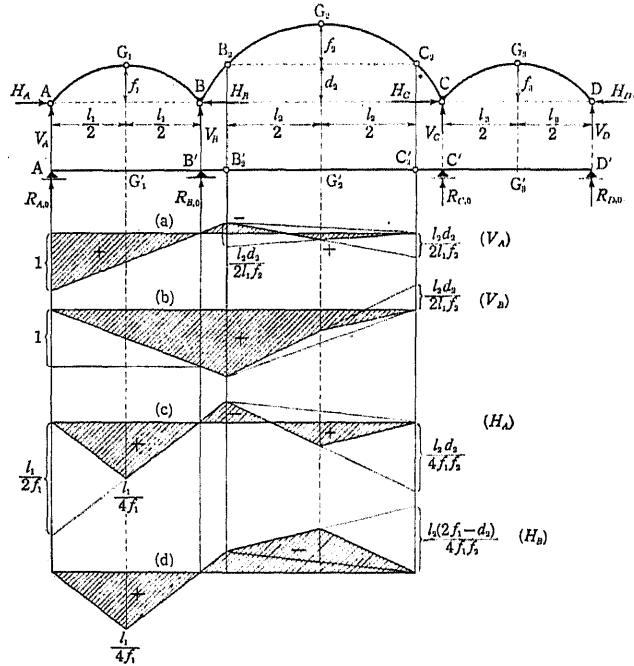
$$\left. \begin{aligned} V_A &= \frac{1}{l} [P_1(l + a_1) - P_2 a_2 + V_1(l + e_1) - V_2 e_2] \\ &\quad - \frac{1}{l} (H_1 d_1 - H_2 d_2), \\ V_B &= \frac{1}{l} [P_2(l + a_2) - P_1 a_1 + V_2(l + e_2) - V_1 e_1] \\ &\quad + \frac{1}{l} (H_1 d_1 - H_2 d_2), \\ H_A &= -\frac{1}{2f} [P_1 a_1 + P_2 a_2 + V_1 e_1 + V_2 e_2] \\ &\quad - \frac{1}{2f} [H_1(2f - d_1) - H_2 d_2], \\ H_B &= -\frac{1}{2f} [P_1 a_1 + P_2 a_2 + V_1 e_1 + V_2 e_2] \\ &\quad + \frac{1}{2f} [H_1 d_1 - H_2(2f - d_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (29.1)$$

然るに V_A, V_B の右邊の第一項は、第 116 圖 (b) の如き張出梁を假想するときの支點 A', B' に於ける反力 $R_{A,0}$ 及び $R_{B,0}$ に等しく、また H_A, H_B に於ける $-\frac{1}{2}[P_1 a_1 + P_2 a_2 + V_1 e_1 + V_2 e_2]$ は假想張出梁の中點 G' に於ける曲げモーメント $M_{G,0}$ に等しい。故に

$$\left. \begin{aligned} V_A &= R_{A,0} - \frac{1}{l} (H_1 d_1 - H_2 d_2), \\ V_B &= R_{B,0} + \frac{1}{l} (H_1 d_1 - H_2 d_2), \\ H_A &= \frac{M_{G,0}}{f} + \frac{1}{2f} (H_1 d_1 + H_2 d_2) - H_1, \\ H_B &= \frac{M_{G,0}}{f} + \frac{1}{2f} (H_1 d_1 + H_2 d_2) - H_2. \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

之等の諸式より反力が求められれば断面力の計算には大なる手数を要しない。

例へば第 117 圖の AG_1BB_2 の如く片側にのみ片持梁を有する場合には、 $B_2G_2C_2$ の B_2 に於ける水平反力を H_2 とすれば



第 117 圖

$$\left. \begin{aligned} V_A &= R_{A,0} + H_2 \frac{d_2}{l_1}, & V_B &= R_{B,0} - H_2 \frac{d_2}{l_1}, \\ H_A &= \frac{M_{G1,0}}{f_1} + H_2 \frac{d_2}{2f_1}, & H_B &= \frac{M_{G1,0}}{f_1} - H_2 \frac{2f_1 - d_2}{2f_1} \end{aligned} \right\} (29.3)$$

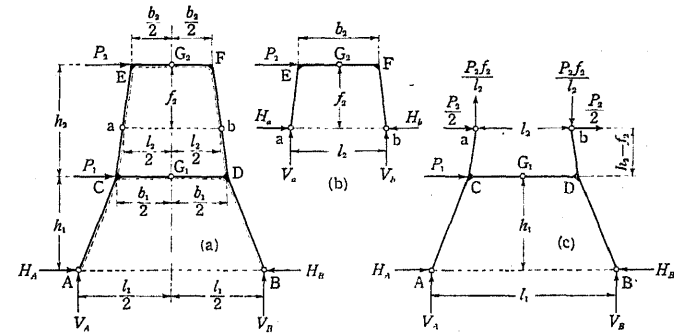
になる。但し $R_{A,0}$, $R_{B,0}$ 及び $M_{G1,0}$ は圖示の如きゲルバー梁 $A'B'C'D'$ の A' , B' に於ける鉛直反力及び G'_1 に於ける曲げモーメントである。また單純梁 $B'_2C'_2$ の G'_2 に於ける曲げモーメントを $M_{G2,0}$ とすれば $H_2 = M_{G2,0}/f_2$

であるから

$$\left. \begin{aligned} V_A &= R_{A,0} + M_{G2,0} \frac{d_2}{l_1 f_2}, & V_B &= R_{B,0} - M_{G2,0} \frac{d_2}{l_1 f_2}, \\ H_A &= M_{G1,0} \frac{1}{f_1} + M_{G2,0} \frac{d_2}{2f_1 f_2}, & H_B &= M_{G1,0} \frac{1}{f_1} - M_{G2,0} \frac{2f_1 - d_2}{2f_1 f_2} \end{aligned} \right\} (29.4)$$

になる。故に V_A , V_B , H_A , H_B の影響線は、ゲルバー梁 $A'B'C'D'$ の反力 $R_{A,0}$, $R_{B,0}$ 及び G'_1 に於ける曲げモーメント $M_{G1,0}$ の $1/f_1$ 影響線中、單純梁 $B'_2C'_2$ に於て G'_2 の曲げモーメント $M_{G2,0}$ に依る影響を夫々 (29.4) に従つて加減したものに等しく、第 117 圖の如くなる。

第 118 圖 (a) の如きラーメンは滑節 G_2 , a, b, G_1 の存在に依り全體とし



第 118 圖

て靜定の構造物になる。此の構造に於て aEG_2Fb は (b) の如き三鉸ラーメンと考へられ、a 及び b に於ける反力は

$$-V_a = V_b = \frac{P_2 f_2}{l_2}, \quad -H_a = H_b = \frac{P_2}{2}$$

になり、従つて E 及び F に於ける曲げモーメントは

$$M_E = -M_F = V_a \frac{l_2 - b_2}{2} - H_a f_2 = \frac{P_2 f_2 b_2}{2l_2}$$

になる。

次に ab より下方にある部分は (c) の如き三鉸ラーメンになり、其の反力を求むれば

$$-V_A = V_B = \frac{1}{l_1} [P_1 h_1 + P_2 (h_1 + h_2)], \quad -H_A = H_B = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

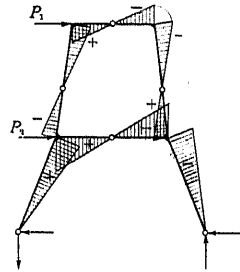
になり、之より各断面に於ける断面力は容易に決定せられる。例へば C, D の上, 下及び右或は左に於ける曲げモーメントを $M_C^o, M_C^u, M_C^r, M_D^o, M_D^u, M_D^l$ とすれば

$$M_C^o = -M_D^o = -\frac{P_2}{2} (h_2 - f_2) + \frac{P_2 f_2}{l_2} \cdot \frac{b_1 - l_2}{2} = -\frac{P_2}{2} \left(h_2 - \frac{b_1 f_2}{l_2} \right),$$

$$M_C^u = -M_D^u = V_A \frac{l_1 - b_1}{2} - H_A h_1, \quad M_C^r = -M_D^r = M_C^o - M_C^u$$

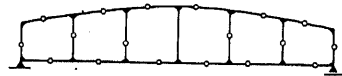
より計算出来る。第 119 圖は曲げモーメント圖である

上記の如く三鉸ラーメンの組合せとして問題を解くことは、單に第 118 圖の場合に限らず、相當數の滑節の存在に依り靜定とせる多層ラーメンに於ても、また第 120 圖の如き靜定のフィレンデール構桁に於ても同様である。



第 119 圖

n 個の格間を有するフィレンデール構桁は一般に内部的に $3n$ 次の不靜定構造であるが、之に第 120 圖の如く $3n$ 個の滑節を挿入すれば内部的に靜定になり、三鉸ラーメンの組合せと考へることが出来る。



第 120 圖

例へば第 121 圖の 4 格間左右對稱

のフィレンデール構桁に於て、滑節は中央の柱材を除く他のすべての部材の中點にあるものとし、格點 B に鉛直荷重 P が作用するものとする。

反力は單純梁と同様にし
て求められ $R_A = \frac{3}{4}P, R_E = \frac{1}{4}P$ になる。先づ aG₁j の部分をとれば、之は (a) の如く上向の荷重 $\frac{3}{4}P$ を受ける三鉸ラーメンになり、反力は

$$-V_a = V_j = \frac{3P}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_1 + h_2},$$

$$H_a = -\frac{3P}{4} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2},$$

$$H_j = \frac{3P}{4} \cdot \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

になる。次に abkj の部分は

(b) の如く實際の荷重 P の他に a, j に於て上記の V_a, V_j, H_a, H_j に方向反對なる力を受ける三鉸ラーメン bG₂k と考へられ、其の反力は次の如くなる。

$$-V_b = V_k = \frac{5P}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_2 + h_3},$$

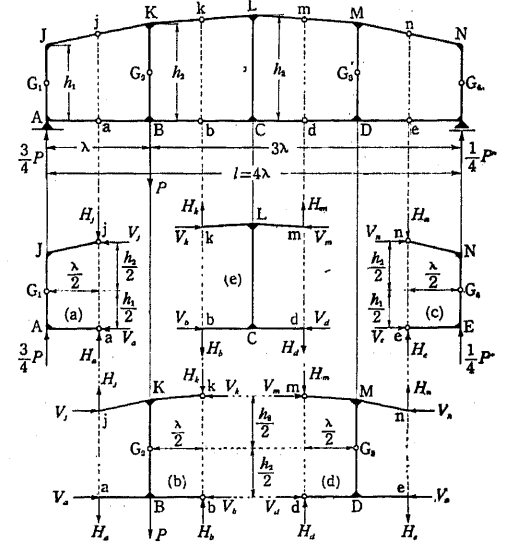
$$H_b = \frac{P}{4} \cdot \frac{3h_3 - 2h_2}{h_2 + h_3}, \quad H_k = -\frac{P}{4} \cdot \frac{3h_2 - 2h_3}{h_2 + h_3}$$

之と同様に (c), (d) の三鉸ラーメンの反力は

$$-V_e = V_n = \frac{P}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_1 + h_2}, \quad H_e = -\frac{P}{4} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad H_n = \frac{P}{4} \cdot \frac{h_2}{h_1 + h_2};$$

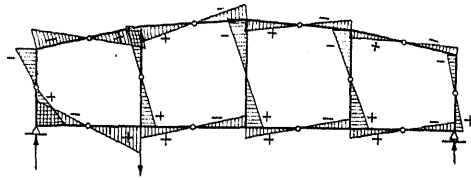
$$-V_a - V_m = \frac{3P}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_2 + h_3}, \quad H_a = -\frac{P}{4} \cdot \frac{2h_2 - h_3}{h_2 + h_3}, \quad H_m = \frac{P}{4} \cdot \frac{2h_3 - h_2}{h_2 + h_3}$$

になり、かくして各滑節に作用すべき力がわかれば、之より各断面に於ける曲げモーメント、剪斷力、軸方向力等を計算するのは容易である。第 122 圖



第 121 圖

は水平材に於てはすべて下側に、柱材に於ては右側に夫々視點をとつた場合の曲げモーメント圖である。



第 122 圖

§ 30. 補剛梁を有する滑節アーチ或はリンク

第 123 圖, 第 124 圖に示すものはすべて静定構造物である。滑節 1, 2, 3 等に依り連結される部材はすべて直線部材とし之に直接に荷重が作用しないものとすれば之等の部材には單に軸方向力のみが作用することになり、此の軸方向力を一般に S とする。尚、以下の記述に於ては荷重はすべて鉛直に作用するものとする。

扱て第 123 圖に示す構造物を圖示の如く G を通過する切斷面 $t-t$ にて切斷し、其の片側例へば左側をとり、 $t-t$ にて切斷せられたる部材の應力 S_4 及び滑節 G に於ける軸方向力 N 及び剪斷力を此の部分に對する外力と考へ、 G に對するモーメントの和が零に等しきこと及び $\Sigma H = 0$ の條件を適用すれば

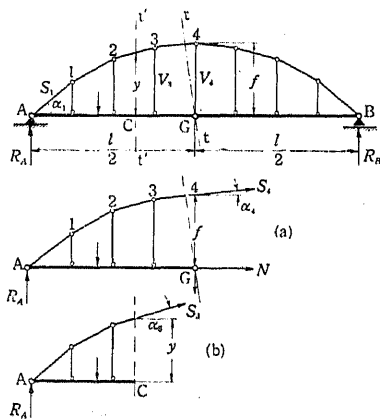
$$M_{G,0} + S_4 \cos \alpha_4 \cdot f = 0,$$

$$S_4 \cos \alpha_4 + N = 0,$$

従つて

$$N = -S_4 \cos \alpha_4 = -\frac{M_{G,0}}{f} \tag{30.1}$$

を得る。但し $M_{G,0}$ は G より左にあ



第 123 圖

る反力及び荷重の G に對するモーメントの和であつて、 AB を單純梁とせる場合の G に於ける曲げモーメントに等しい。然るに 1, 2, 3 等の各節點に於ける水平方向の釣合條件を考へれば S_1, S_2 等の水平分力の値はすべて相等しきが故に

$$S \cos \alpha = -N = -\frac{M_{G,0}}{f} \tag{30.2}$$

になる。上記の S は壓縮力であり、 N は張力である。尚、梁 AG, GB には N 以外の水平力は作用しないから、 AG, GB は其の全長に互つて一樣に N に等しき張力を受けることになる。

節點 1, 2, 3 等に於ける鉛直方向の釣合條件より之等の節點に連結する鉛直材の軸方向力が求められる。即ち一般に

$$V_i = -S_i \sin \alpha_i + S_{i+1} \sin \alpha_{i+1} = N(\tan \alpha_i - \tan \alpha_{i+1}) \tag{30.3}$$

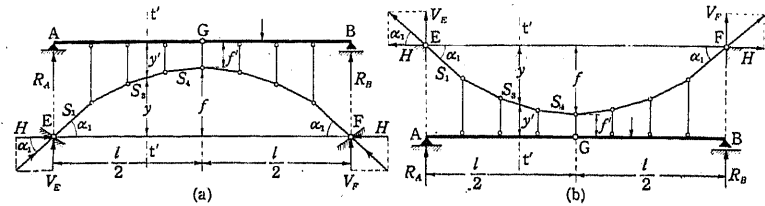
になる。 N は張力であるから V_i は一般に張力になる。

梁 AG 中の任意の斷面 C に於ける曲げモーメント M_C , 剪斷力 Q_C を求めるために、 C を通る鉛直切斷面 $v-v'$ の左方の部分に作用する力より之を計算すれば

$$\left. \begin{aligned} M_C &= M_{C,0} + S_3 \cos \alpha_3 \cdot y = M_{C,0} - \frac{M_{G,0}}{f} \cdot \frac{y}{f}, \\ Q_C &= Q_{C,0} + S_3 \sin \alpha_3 = Q_{C,0} - \frac{M_{G,0}}{f} \tan \alpha_3 \end{aligned} \right\} \tag{30.4}$$

になる。但し $M_{C,0}$ 及び $Q_{C,0}$ は C より左にある外力の C に對するモーメントの和及び之等の鉛直分力の和であつて、夫々 AB を單純梁とせる場合の C に於ける曲げモーメント及び剪斷力に等しい。

上記の N 及び M_C に對する式は § 28 にて説明せる三鉸アーチの水平反力及び曲げモーメントに對する式 (28.7) 及び (28.2) と全く同一である。従つて N 及び M_C に對する影響線は三鉸アーチの場合と全く同様にして之を求めることが出来る (第 111 圖及び第 143 圖参照)。



第 124 圖

第 124 圖に示すものも上記と同様に三鉸アーチ類似の構造物であつて、しかも (a), (b) 両者に対して全く同一の計算式が適用される。先づ S_1, S_2 等の水平分力は E 又は F に於ける水平反力 H に等しい。即ち一般に

$$S \cos \alpha = H \tag{30.5}$$

である。但し S が (a) に於ては圧縮力、(b) に於ては張力であることは言ふまでもない。

H を求めるために G を通過する切斷面 $t-t$ の左側に作用する力の G に對するモーメントの和を零と置けば

$$M_{G,0} - H(f+f) + S_4 \cos \alpha_4 \cdot f = 0$$

を得る。然るに (30.5) に依り一般に $S \cos \alpha = H$ であるから

$$M_{G,0} - Hf = 0, \quad H = + \frac{M_{G,0}}{f} \tag{30.6}$$

になる。即ち H は E 4 F を三鉸アーチと考へたる場合の水平反力に等しくなる。

E 或は F に於ける反力は S_1 或は S'_1 と同一作用線上に作用しなければならないから、E 及び F に於ける鉛直反力は

$$V_E = V_F = H \tan \alpha_1 = \frac{M_{G,0}}{f} \tan \alpha_1 \tag{30.7}$$

になる。而して構造物の外部的釣合條件より、 $R_{A,0}$ 及び $R_{B,0}$ を單純梁 AB の反力とすれば、

$$R_A + V_E = R_{A,0}, \quad R_B + V_F = R_{B,0}$$

でなければならないから、A 及び B に於ける鉛直反力は

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_{A,0} - V_E = R_{A,0} - \frac{M_{G,0}}{f} \tan \alpha_1, \\ R_B &= R_{B,0} - V_F = R_{B,0} - \frac{M_{G,0}}{f} \tan \alpha_1 \end{aligned} \right\} \tag{30.8}$$

になる (第 144 圖参照)。

次に C を通る鉛直斷面 $t'-t'$ の左側の部分に作用する力に就て M_C, Q_C を計算すれば

$$M_C = M_{C,0} - H(y+y') + S_3 \cos \alpha_3 \cdot y',$$

$$Q_C = Q_{C,0} - S_3 \sin \alpha_3,$$

従つて

$$M_C = M_{C,0} - H y = M_{C,0} - M_{G,0} \frac{y}{f},$$

$$Q_C = Q_{C,0} - H \tan \alpha_3 = Q_{C,0} - \frac{M_{G,0}}{f} \tan \alpha_3 \tag{30.9}$$

になる。此の兩式は (30.4) の兩式と全く同一であり、しかも M_C の式は三鉸アーチの曲げモーメントに對する式 (28.2) に等しい。

かくの如く第 124 圖の場合に於ても水平反力及び梁の曲げモーメントに對する式は三鉸アーチの場合と全く同一であるから、之等に對する影響線も三鉸アーチの場合と同様にして之を描くことが出来る。尙第 124 圖の場合に於ては梁 AG, GB には軸方向力は作用しない。また鉛直材の應力は (30.3) 式に依つて計算される。