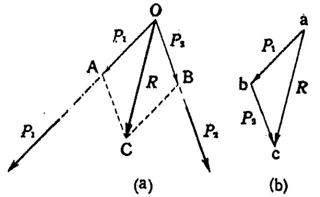
第 II 章　平面圖解力學

§ 9. 力の多角形

作用線が一點 O に會する二力 P_1, P_2 の合力 R は既に § 3, ii に於て說明せるが如く平行四邊形の法則に依り第 24 圖 (a) の如き作圖に依り之を求めることが出來る．かかる平行四邊形 OACB を力の平行四邊形と言ふ．



第 24 圖

然し合力 R の大さ及び方向を知るには必ずしも力の平行四邊形を描くを要せず，第 24 圖 (b) の如く，任意の一點 a をとり，a より P_1 に等しく ab, b より P_2 に等しく bc をとれば，始點 a より終點 c に向ふ線分が R の大さ及び方向を示すことは明かである．かかる三角形 abc を力の三角形と言ひ，之を描くに際し P_1, P_2 のうち何れを最初にとるも其の結果は同一である．

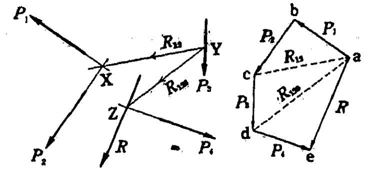
多數の力，例へば $P_1, P_2, \ldots$ の合力 R を求めるには，先づ其のうちの任意の二力，例へば P_1, P_2 の合力 R_{12} を前記の平行四邊形の方法に依り求め，次に R_{12} と殘りの任意の一力，例へば P_3 との合力 R_{123} を同樣にして求め，以下順次此の方法を繰返せば最後の合力は卽ち求むる合力である．此の際とるべき力の順序は全く任意である．

上記の方法は實際に於ては可成り複雜なる作圖を必要とするが故に，散在する多數の力の合力を求むるには次の方法に依る方が一般に便利である．

作圖法．第 25 圖に於て P_1 乃至 P_4 を與へられたる力とし，任意の一點 a より出發して

$$ab = P_1, \quad bc = P_2, \quad cd = P_3, \quad de = P_4$$

なるが如き多角形 abcde を描けば，終點 a より終點 e に至る線分 ae が合力 R の大さ及び方向を示す．與へられたる力の作用線がすべて一點に會する場合には合力の作用線も亦該點を通過すべきことは明かであるが，與へられたる力が散在する場合の合力の作用線を求めるには，先づ P_1 と P_2 の作用線の交點 X より ac に平行線を引き之と P_3 の作用線との交點 Y を求め，次に Y より ad に平行線を引き之と P_4 作用線との交點を Z とすれば Z は卽ち合力の作用線が通過すべき點である．



第 25 圖

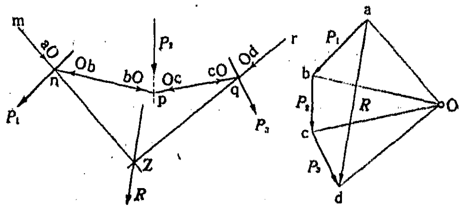
證明．P_1, P_2 の合力 R_{12} は力の三角形 abc に於ける ac であつて X を通過して ac に平行なる直線卽ち XY 上に作用する．R_{12} と P_3 との合力 R_{123} は力の三角形 acd に於ける ad であつて Y を通過して ad に平行なる直線卽ち YZ 上に作用する．最後に R_{123} と P_4 との合力は卽ち求むる合力 R であつて，其の大さ及び方向は力の三角形 ade の ae に依りて示され，其の作用線は R_{123} の作用線 YZ と P_4 の作用線との交點 Z を通過する．

かくの如き多角形 abcde を力の多角形と言ひ之を作圖するに際しとるべき力の順序は全く任意である．

§ 10. 連　力　圖

i. 連力圖に依る力の合成.

力の合力は前節の方法に依り一般に之を求め得るが，與へられたる力が平行なるか，或は略々平行なる場合には前節の方法は全く或は實際上作圖不可能になる．かかる場合には次の作圖法に依ればよい．



第 26 圖

作圖法．第26圖に於て與へられたる力 P_1, P_2, P_3 の合力 R を求むるには，先づ力の多角形 abcd を作り，任意の一點 O を選び，O と力の多角形の各角點とを結び，次に任意の位置に於て

mn // Oa,　np // Ob,　pq // Oc,　qr // Od

なるが如く P_1, P_2, P_3 の作用線を連結する多角形 mnpqr を描き，其の始邊 mn 及び終邊 rq との交點を Z とするとき，求むる合力 R の大さ及び方向は ad に等しく，其の作用線は Z を通過する．

證明．ad が R の大さ及び方向を示すことは前節に於て既に證明した．今 mn, np, pq, qr 上に夫々圖示の如く aO, Ob, bO, Oc, cO, Od に等しき力が作用するものと想像し，先づ三角形 aOb を力の三角形と考へれば

$P_1 =$ aO, Ob の合力，

同樣にして　$P_2 =$ bO, Oc の合力，

$P_3 =$ cO, Od の合力，

故に　$R = P_1, P_2, P_3$ の合力 $=$ aO, Ob, bO, Oc, cO, Od の合力

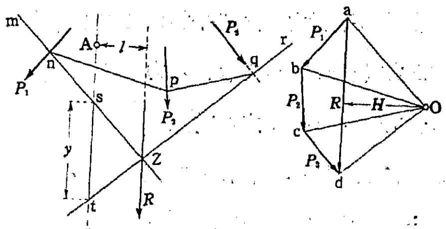
になる．然るに Ob, bO の合力及び Oc, cO の合力は共に零に等しきが故に

R は aO, Od 二力の合力に等しく，從つて R の作用線は aO, Od の作用線，卽ち mn と rq との交點 Z を通過する．

かかる多角形 mnpqr を連力圖，點 O を其の極，Oa の如き線を極射線と言ふ．而して極は力の多角形上を除き之を任意の位置に選び得るが故に，與へられたる力系に對して無數の連力圖を描くことが出來る．但し力の多角形の始點と終點とを結ぶ直線上に極を選ぶときは Z を求むること不可能になる．

ii. 力のモーメント.

第27圖に於て力 P_1, P_2, P_3 の點 A に對するモーメントを求むるには先づ i にて說明せる方法に依り合力 R を求め，點 A より R に下せる垂線の長さを l とすれば，求めるモーメントは $M = Rl$ である．次に A を通過して R に平行線を引き，之が連力圖の始邊及び終邊或は其の延長線に依りて切取らるる長さを y とし，極 O より ad に下せる垂線の長さを H とすれば



第 27 圖

$$\triangle \mathrm{Zst} \backsim \triangle \mathrm{Oad}, \qquad y : l = R : H$$

なるが故に

$$M = R\,l = H\,y \tag{10.1}$$

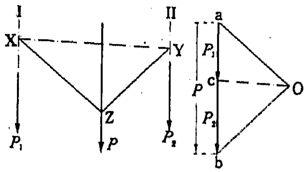
になる．かかる H を極距と言ふ．

iii. 力の分解.

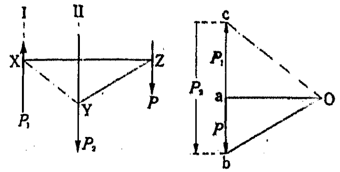
第28圖に於て與へられたる力を P とし，P に平行なる二直線 I 及び II 上に作用する P の分力 P_1 及び P_2 を求める．

先づ P に等しく ab をとり，任意の極 O を選んで Oa, Ob を結び，P の作用線上の任意の一點 Z より Oa, Ob に平行線を引き之と定直線 I, II との交

點を夫々 X, Y とする．XY を結び極 O より之に平行線を引き ab との交點



第 28 圖

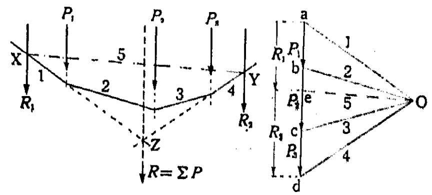


第 29 圖

を c とすれば ac, cb が求める分力 P_1, P_2 である．何となれば i に說明せる所により P_1, P_2 の合力が P であるからである．

若し定直線 I, II が共に P の片側にある場合に於ても其の作圖法は全く上記と同樣である (第 29 圖).

多數の平行力の之に平行なる二直線上の分力を求むるには, 第 30 圖に示すが如く先づ與へられたる力の合力 R を求め, 之を前記の方法に依り與へられたる二直線上の分力に分解すればよい.

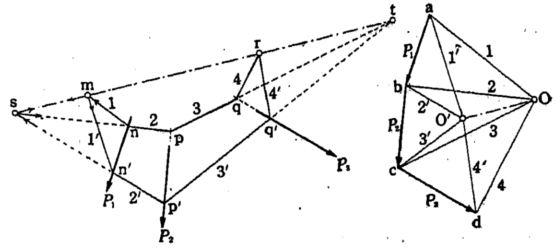


第 30 圖

iv. 連力圖に關する定理及び問題.

a) 定理 10.1. 任意の二極に相當する二連力圖の相對邊或は其の延長線の交點はすべて二極を結ぶ直線に平行なる一直線上にあり.

第 31 圖に於て二極 O, O′ に相當する連力圖 mnpqr, m′n′p′q′r′ の任意の二對の相對邊, 例へば相對する初邊及び第二邊の交點を m 及び s とする．今 mn, mn′ 上に Oa, aO′ に等しき力が作用するものと想像すれば其の合力 R_m は m を通過し其の大さ及び方向は OO′ に等しい．同樣に sn, sn′ 上に Ob, bO′ に相當する力が作用するものとすれば其の合力 R_s は s を通過し其



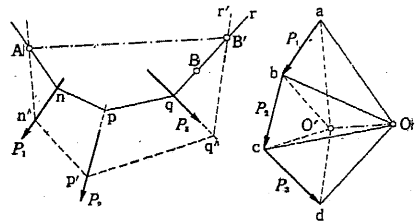
第 31 圖

の大さ及び方向は OO に等しい．然るに bO, Oa の合力は ab に等しく n を通過し, aO′, O′b の合力は ba に等しく n′ を通過するが故に, Oa, aO′, Ob, bO′ の四力の合力及び合偶力は零に等しい．故に R_m と R_s とは同一直線上に作用せざるべからず, 從つて m と s とを結ぶ直線は OO′ に平行でなければならない.

之と同樣にして m と r, m と t とを結ぶ直線がすべて OO′ に平行なることを證明し得べく, 從つて本定理が證明せられる．また本定理より次の系を得.

系. 二定邊の各々が定點を通過する連力圖に對する極は該二定點を結ぶ直線に平行なる一直線上にあり.

b) 問題 1. 任意の二邊が各々與へられたる點を通過すべき連力圖を求む. 例へば第 32 圖に於て初邊及び終邊が夫々與へられたる點 A, B を通過するが如き連力圖を描くには, 先づ任意の極 O′ を選びこれに依つて初邊が A 點を通過するが如き連力圖 An′p′q′r′ を描く．此の終邊 q′r′ は偶然なる場合の他は一般に點 B を通過せず．次に q′r′ 上に任意の一點 B′ をとり A, B′ 及び B, B′ を結び, O′O // AB′, dO // BB′



第 32 圖

なるが如く點 O を定め, O を極とし初邊が點 A を通過するが如き連力圖を描けば此の連力圖の終邊は必ず點 B を通過する.

何となれば上記の兩連力圖は定理 10.1 の如く共に A, B′ の二點を通過し, そのうち O を極とする連力圖の終邊は Od 即ち B′B に平行なるが故に點 B を通過する. 本作圖に於て點 B′ は任意なるが故に本問題を滿足する連力圖は無數に存在する.

若し中間の任意の二邊が各々與へられたる點を通過すべき連力圖を描くには, 此の二邊を夫々初邊及び終邊と考へて上記と同樣の作圖を行へばよい. 何となれば所定の二邊より前或は後の邊に就ては何等の條件もないからである.

c) 問題 2. 任意の三邊が各々與へられたる點を通過すべき連力圖を求む. 連力圖のうち與へられたる邊 α, β, γ が夫々定點 A, B, C を通過するが如く作圖するには, 先づ b) の方法に依り α, β が A, B を通過すべき極 O_1 及び β, γ が B, C を通過すべき極 O_2 を求め, 次に AB, BC を結び, O_1 及び O_2 より $O_1O \parallel AB$, $O_2O \parallel BC$ なるが如き二直線を引き其の交點を O とすれば, O を極とする連力圖は即ち求むる連力圖である.

何となれば, O_1O 上に極を有する連力圖は A, B を通過し, O_2O 上に極を有する連力圖は B, C を通過し, 從つて O を極とする連力圖は A, B, C を通過する. かかる連力圖は唯一である.

§ 11. 釣合の圖解的條件

平面力の釣合條件は合力及び任意の一點に對するモーメントの總和が共に零なるべきことである. 合力が零であるためには力の多角形の始點と終點とが一致すること, 即ち力の多角形が閉合することが必要であつて且つ

十分である. 次に任意の一點に對する力のモーメントの總和が零なるためには, § 10, ii より明かなるが如く第 27 圖に於ける y が常に零なることが必要にして且つ十分である. 第 27 圖の y が常に零なることは, 連力圖の初邊と終邊とが同一直線であること即ち連力圖が閉合することである. 從つて平面力の釣合の圖解的條件は次の如くになる.

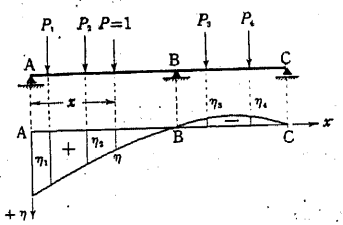
定理 11.1. 平面力の釣合に對する必要且つ十分なる條件は力の多角形及び連力圖が共に閉合することなり:

系. 作用線が一點に會する力の釣合に對する必要且つ十分なる條件は力の多角形が閉合することなり.

§ 12. 影 響 線

あらゆる種類の構造物に於て, 構造物上を荷重が移動する場合の反力, 剪斷力, 曲げモーメント等を算出するには影響線の利用が便利である.

今, 構造物上を單位集中荷重 ($P=1$) が移動するものと考へ, 此の $P=1$ が或る位置に作用する場合の或る量 X の値を算出して之を η とする. $P=1$ の作用位置が第 33 圖に示すが如く或る原點よりの距離 x にて示さるるものとすれば, η は一般に x の函數, 即ち



第 33 圖

$$\eta = f(x) \tag{12.1}$$

になり, $x\eta$-座標軸に於て上式を示す曲線を或る量 X の影響線と言ひ, η を影響線縱距, x-軸と影響線との間の面積を影響面積と言ふ. 影響線を描く場合には x-軸の下方を η の正, 上方を η の負ととるのが普通である.

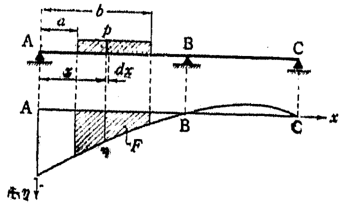
第33圖の如く實際に多數の集中荷重 $P_1, P_2, \dots$ が作用するとき各荷重の作用點に於ける η を $\eta_1, \eta_2, \dots$ とすれば，之等多數の集中荷重に依る X は

$$X = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \cdots = \Sigma P\eta \tag{12.2}$$

になる．

第34圖の如く $x = a \sim b$ 間に等分布荷重 p が作用すれば

$$X = \int_a^b p\,dx\cdot\eta = p\int_a^b \eta\,dx \tag{12.3}$$



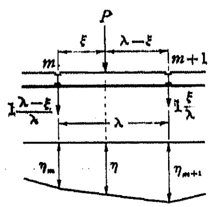
第 34 圖

になる．然るに本式右邊の積分は $x = a \sim b$ 間の影響面積であつて，之を F とすれば

$$X = pF \tag{12.4}$$

になる．

荷重が直接に作用せず，例へば第35圖の如く主構造物上に配置せられたる横梁又は支點に支持せらるる單純梁型式の小梁を通じて間接に作用する場合には，小梁に直接に作用する荷重の種類及び位置に關せず主構造物に對しては常に横梁又は小支點の位置（之を格點と言ふ）に集中荷重として作用する．第35圖の如く格點 $m, m+1$ 間に $P=1$ があるものとすれば，之に依つて格點 $m, m+1$ には後述の如く



第 35 圖

$$P_m = 1\frac{\lambda-\xi}{\lambda}, \qquad P_{m+1} = 1\frac{\xi}{\lambda}$$

なる集中荷重が作用するが故に，格點 $m, m+1$ に於ける η を η_m, η_{m+1} とすれば

$$X = 1\cdot\eta = 1\frac{\lambda-\xi}{\lambda}\eta_m + 1\frac{\xi}{\lambda}\eta_{m+1},$$

$$\eta = \eta_m + \frac{\eta_{m+1}-\eta_m}{\lambda}\xi \tag{12.5}$$

になる．然るに本式右邊は ξ の一次函數なるが故に格點 $m, m+1$ 間に於ける影響線は一つの直線になる．また格點 $m, m+1$ に於ける η が夫々 η_m, η_{m+1} に一致することも明かである．かかることはすべての格點間（之を格間と言ふ）に於て同樣に成立し，從つて次の定理を得る．

定理 12.1.　間接荷重に對する影響線は直接荷重に對する影響線上に於て各格點に對應する點を直線にて連結せる多角形なり．

尙，η を其のまま圖示する代りに便宜上 η の $1/k$，即ち $\eta' = \eta/k$ として η' を圖示することが屢々ある．此の場合には (12.2), (12.4) 式は夫々

$$X = k\,\Sigma P\eta', \qquad X = kpF' \tag{12.6}$$

になり，かかる k を影響線係數と言ふ．