構 造 力 學

第 I 章　総　論

§ 1. 緒　論

構造力學とは力學殊に靜力學の一般原理を各種の特殊の形態を有する構造物に應用し,之に對する各種の力の影響を研究する學問である. 從つて外力の爲に構造物の內部に生ずる內力卽ち應力も勿論構造力學に包含せらるべき問題であるが然し之は通常は材料力學又は材料强弱學或は應用彈性學に於て取扱はれ,現今の構造力學に於ては外力に依つて構造物の支點に生ずべき反力, 構造物の彈性變形を其の主要對象とする.

構造物とは任意の種類のそしてまた任意に作用する荷重を安全に支持する爲に一個の或は適當に連結せられたる棒狀物體（之を部材と言ふ）又は板狀物體（之を平盤と言はう）より成立する. 構造物を形成するすべての部材及び平盤が之に作用する外力と共にすべて一平面內にある場合,かかる構造物を平面構造物と言ひ, 然らざる場合を立體構造物と言ふ. 實際の構造物の大部分は立體構造物であるが,之を三次元的に取扱ふことは特殊のものを除けばたとへ理念上は可能であるにしても,實用上は殆んど不可能に近いことであるが故に,便宜上之を平面構造物に分解して問題を解決するのが普通である.

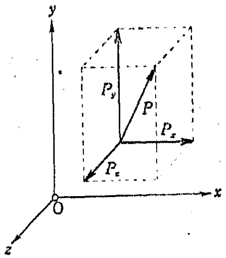
構造力學に於ては構造物を一般に剛體と假定する. 然し實際の構造物は總て完全なる剛體ではなく外力の作用に依り多かれ少かれ變形をなし又場合に依つては其の變形を考慮せざれば問題を解決し得ざる場合も屢々である. かくの如き場合に於ては構造物は總て彈性體であると假定し且つ其

の彈性變形は構造物の寸法に比較して十分に小なるものと假定する.

§2. 力 學 の 原 理

i. 力の分解.

一つの力 P を之と同一の效果を與へる二個以上の力 $P_1, P_2, \dots$ に置換へることを力の分解と言ひ $P_1, P_2, \dots$ を P の分力と言ふ. 力の分解には一般に無數の解があるが, 其の最も重要なるものは互に直角なる三方向の分力であつて, 例へば第1圖に於て與へられたる力 P の直交座標軸 x, y, z の方向の分力を P_x, P_y, P_z とすれば, 平行六面體の法則に依り



第 1 圖

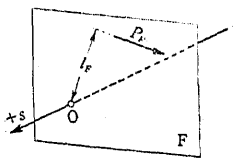
$$P_x = P\cos\alpha, \quad P_y = P\cos\beta, \quad P_z = P\cos\gamma \qquad (2.1)$$

である. 但し α, β, γ は x, y, z-軸に對する P の方向角である.

ii. 力のモーメント.

與へられたる點Oより與へられたる力 P の作用線に下せる垂線の長さを l とすれば　$M_o = Pl$　(2.2)
を點Oに對する力 P のモーメントと言ふ.

第2圖に於て P を與へられたる力, s を與へられたる指線, F を s に垂直なる任意の平面, F と s との交點を O, F に於ける P の射影を P_F, O より P_F に下せる垂線の長さを l_F とすれば, O に對する P_F のモーメント:



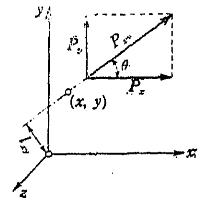
第 2 圖

$$M_s = P_F l_F \qquad (2.3)$$

を指線 s に對する P のモーメントと言ふ. 而して s の正の方向より面Fを眺めるとき P_F の方向が時針の回轉方向と同一なるときに M_s を正, 之と反

對のときに負と約束する.

指線に對する力のモーメントのうち最も重要なるものは直交座標軸に對するものである. 第3圖に於て例へば z-軸を指線とし xy-面に於ける P の射影を P_{xy}, 原點Oより P_{xy} に下せる垂線の長さを l_{xy} とすれば



第 3 圖

$$M_z = P_{xy} l_{xy}$$

である. 然るに P_{xy} と x-軸との間の角を θ, P の作用線中の任意の一點の座標を (x, y, z) とすれば $P_x = P_{xy}\cos\theta$, $P_y = P_{xy}\sin\theta$, $l_{xy} = y\cos\theta - x\sin\theta$ なるが故に

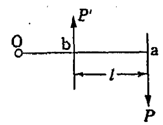
$$M_z = P_{xy} l_{xy} = P_{xy}(y\cos\theta - x\sin\theta) = P_x y - P_y x$$

になり, 之と同樣にして次式を得る:

$$M_x = \begin{vmatrix} P_y & y \\ P_z & z \end{vmatrix}, \quad M_y = \begin{vmatrix} P_z & z \\ P_x & x \end{vmatrix}, \quad M_z = \begin{vmatrix} P_x & x \\ P_y & y \end{vmatrix}. \qquad (2.4)$$

iii. 偶力及び偶力のモーメント.

互に平行なる作用線を有し方向反對なる二力の大さ相等しきとき此の二力を總稱して偶力と言ふ. 第4圖に於て偶力 P, P' を含む平面内の任意の一點をOとし, Oに對する P 及び P' のモーメントの和を M とすれば



第 4 圖

$$M = P\cdot\mathrm{Oa} - P'\cdot\mathrm{Ob} = P(\mathrm{Oa} - \mathrm{Ob}) = Pl \qquad (2.5)$$

になり, 此の M を偶力 P, P' のモーメントと言ふ. 偶力のモーメントの正負は勿論力のモーメントの正負の規約に從ふ.

偶力 P, P' があるとき, 與へられたる指線 s に對する P 及び P' のモーメントの和を指線 s に對する偶力 P, P' のモーメントと言ふ. 指線が偶力を含む平面に垂直なる場合には指線 s に對する偶力のモーメントは偶力その

もののモーメントに等しい.

iv. 力の合成.

與へられたる二個以上の力 $P_1, P_2, \ldots$ が同時に作用するとき之と同一の効果を有する一力 R 又は一對の偶力 R, R' を與へられたる多數の力の合力又は合偶力と言ひ, 之を求めることを力の合成と言ふ.

直交座標軸 x, y, z の方向の P 及び R の分力を P_x, P_y, P_z 及び R_x, R_y, R_z とし, x, y, z-軸に對する P 及び R のモーメントを M_x, M_y, M_z 及び $\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \Sigma P_x, \quad R_y = \Sigma P_y, \quad R_z = \Sigma P_z, \\ \bar{M}_x &= \Sigma M_x, \quad \bar{M}_y = \Sigma M_y, \quad \bar{M}_z = \Sigma M_z \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

であつて, 合力 R の大さ及び座標軸に對する方向角は

$$\left.\begin{aligned} &R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\Sigma P_x)^2 + (\Sigma P_y)^2 + (\Sigma P_z)^2}, \\ &\cos\alpha = R_x/R, \quad \cos\beta = R_y/R, \quad \cos\gamma = R_z/R \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

より決定せられる.

合力 R の作用線を決定するために $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 及び (x, y, z) を夫々 R 及び P の作用線中の任意の一點とすれば (2.4) 及び (2.6) の兩式より

$$\begin{vmatrix} R_y & \bar{y} \\ R_z & \bar{z} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} P_y & y \\ P_z & z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} R_z & \bar{z} \\ R_x & \bar{x} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} P_z & z \\ P_x & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} R_x & \bar{x} \\ R_y & \bar{y} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} P_x & x \\ P_y & y \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

を得, 本式より R の作用線が通過すべき點 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ を定め得.

上記の場合に於て $\Sigma P_x = 0$, $\Sigma P_y = 0$, $\Sigma P_z = 0$ ならば $R = 0$ になり合力は存在せざることになる. 然るに此の場合に於ても $\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ のうちの少くとも一つが零に等しくないときには, 偶力 R, R' を考へ其の座標軸に對するモーメントを $\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ に等しくすれば, 偶力 R, R' は與へられたる多數の力の合偶力である.

上述の事項より容易に次の定理が得られる.

定理 2.1. 同一の大さ及び作用線を有し且つ方向反對する二力は合力又は合偶力に影響を及ぼすことなし.

定理 2.2. 合力又は合偶力を求むる場合に於て力は之を其の作用線中任意の位置に移動せしむるも差支へなし.

§ 3. 平面力の分解及び合成

本節に於ては力はすべて同一平面内に作用するものとし, 此の平面上に座標軸 Oxy をとる.

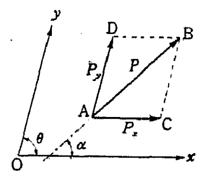
i. 一力の與へられたる二方向の分力.

第5圖に於て與へられたる力 $P = $ AB の x, y-軸の方向の分力 P_x, P_y は平行四邊形の法則に依り AC, AD にて與へられるが故に

$$P_x = P\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \quad P_y = P\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \tag{3.1}$$

になり, 特に x, y-軸が直交座標軸なるときには

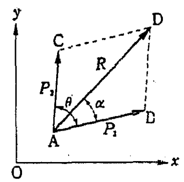
$$P_x = P\cos\alpha, \quad P_y = P\sin\alpha. \tag{3.2}$$



第 5 圖

ii. 二力の合力.

第6圖に於て與へられたる二力 P_1, P_2 の作用線の交點を A とすれば定理 2.2 に依り P_1, P_2 は共に點 A に作用するものと考へることが出來る. 然るときは平行四邊形の法則に依り AD が合力 R を示すが故に, 合力の作用線は A を通過し其の大さ及び方向は次式に依り與へられる.



第 6 圖

$$R=\sqrt{P_1^2+P_2^2+2P_1P_2\cos\theta},\quad \tan\alpha=\frac{P_2\sin\theta}{P_1+P_2\cos\theta}. \tag{3.3}$$

特に P_1, P_2 が互に直角なる場合, 例へば x, y-軸に平行なる場合には

$$R=\sqrt{P_1^2+P_2^2},\qquad \tan\alpha=P_2/P_1. \tag{3.4}$$

iii. 多數の力の合力.

與へられたる多數の力 P の合力 R の大さ及び方向は (2.6), (2.7) より

$$\left.\begin{aligned}R_x=\Sigma P_x,\quad R_y=\Sigma P_y,\quad R=\sqrt{R_x^2+R_y^2},\\ \cos\alpha=R_x/R,\quad \cos\beta=R_y/R.\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

P の作用線がすべて一點に會する場合には R の作用線もまた此の點を通過する. P の作用線がすべて一點に會せざる場合の R の作用線は (2.8) の第三式より

$$R_y\bar{x}-R_x\bar{y}=\Sigma(P_yx-P_xy) \tag{3.6}$$

になる. 但し $(\bar{x},\bar{y})$ 及び (x,y) は R 及び P の作用線中の任意の一點である.

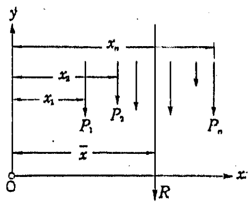
特に第7圖の如く P がすべて y-軸に平行なる場合には $P_x=0, P_y=P$ なるが故に, $R_x=0$, 從つて

$$R=R_y=\Sigma P \tag{3.7}$$

になり, R の作用線の位置は (3.6) 式より

$$R\bar{x}=\Sigma Px,\ 即ち\ \bar{x}=\frac{\Sigma Px}{\Sigma P} \tag{3.8}$$

に依り決定せられる.



第 7 圖

§4. 力 の 釣 合

多數の力が同時に一物體に作用し, しかも該物體の運動又は靜止の狀態に何等の變化を來さざるとき之等多數の力は, 或は該物體は釣合の狀態にあり或は釣合ふと言ふ. 構造力學に於て問題とするものは物體の靜止の狀態である.

すべて物體の運動又は靜止の狀態を變化せしむる原因が力なるが故に, 物體が釣合の狀態にある場合には之に作用するすべての力の合力及び合偶力は零でなければならない. 故に釣合の條件は (2.6) 式より

$$\Sigma P_x=0,\ \Sigma P_y=0,\ \Sigma P_z=0; \tag{4.1}$$

$$\Sigma M_x=0,\ \Sigma M_y=0,\ \Sigma M_z=0 \tag{4.2}$$

の六式になる. 但し x, y, z-軸は共に同一平面內にあらざる限り任意であるが通常は之を直交座標軸にとる.

すべての力の作用線が一點に會する場合には合力が零ならば合偶力は必然的に零となるが故に, 此の場合の釣合に對しては (4.1) 式が必要且つ十分なる條件である.

力がすべて同一平面內に作用するとき, 此の平面を xy-面とすれば, 此の場合の釣合條件は

$$\Sigma P_x=0,\quad \Sigma P_y=0,\quad \Sigma M_z=0 \tag{4.3}$$

になる. 此の場合, 座標原點の位置は任意なるが故に (4.3) の最後の式は xy-面上の任意の一點に對する力のモーメントの和が零なることを意味し, 若しすべての力の作用線が一點に會する場合には此の條件は不必要になる.

P_x, P_y は P の任意の方向の分力なるが故に, P の水平及び鉛直方向の分力を H 及び V, 任意の一點に對する P のモーメントを M とすれば (4.3) 式は

$$\Sigma H=0,\quad \Sigma V=0,\quad \Sigma M=0 \tag{4.4}$$

と書き換へることが出來る.

また力の作用面卽ち xy-面上の任意の三點を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, P の作用線上の任意の一點を (x, y), 上記の三點に對する P のモーメントを夫々 M_1, M_2, M_3 とすれば, (2.4) 式の如く

$$M_1 = \begin{vmatrix} P_x & (x - x_1) \\ P_y & (y - y_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_x & x \\ P_y & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_x & x_1 \\ P_y & y_1 \end{vmatrix} = M_z - P_x y_1 + P_y x_1$$

となるが故に

同様にして

$$\left.\begin{aligned} \Sigma M_1 &= \Sigma M_z + x_1 \Sigma P_y - y_1 \Sigma P_x, \\ \Sigma M_2 &= \Sigma M_z + x_2 \Sigma P_y - y_2 \Sigma P_x, \\ \Sigma M_3 &= \Sigma M_z + x_3 \Sigma P_y - y_3 \Sigma P_x \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

を得,之を書き換へれば次の如くになる.

$$\Sigma P_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \Sigma M_1 \\ 1 & x_2 & \Sigma M_2 \\ 1 & x_3 & \Sigma M_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & -y_1 \\ 1 & x_2 & -y_2 \\ 1 & x_3 & -y_3 \end{vmatrix}}, \quad \Sigma P_y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma M_1 & -y_1 \\ 1 & \Sigma M_2 & -y_2 \\ 1 & \Sigma M_3 & -y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & -y_1 \\ 1 & x_2 & -y_2 \\ 1 & x_3 & -y_3 \end{vmatrix}}, \quad \Sigma M_z = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma M_1 & x_1 & -y_1 \\ \Sigma M_2 & x_2 & -y_2 \\ \Sigma M_3 & x_3 & -y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & -y_1 \\ 1 & x_2 & -y_2 \\ 1 & x_3 & -y_3 \end{vmatrix}}. \qquad (4.6)$$

故に (4.5) より,力が釣合へる場合,即ち $\Sigma P_x, \Sigma P_y, \Sigma M_z$ が共に零なる場合には $\Sigma M_1, \Sigma M_2, \Sigma M_3$ は共に零に等しく,また(4.6)より,$\Sigma M_1, \Sigma M_2, \Sigma M_3$ が共に零に等しき場合には $\Sigma P_x, \Sigma P_y, \Sigma M_z$ が共に零に等しく,即ち力が釣合ふことを知る. 但し(4.6)式の分母が零に等しき場合,即ち (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) が一直線上にある場合には $\Sigma M_1, \Sigma M_2, \Sigma M_3$ が共に零となるも $\Sigma P_x, \Sigma P_y, \Sigma M_z$ は不定になる. 故に平面力の釣合の條件は次の定理の如く言ひ現すことが出來る:

定理 4.1. 平面力の釣合に對する必要且つ十分なる條件は共に一直線上にあらざる任意の三點に對する力のモーメントの和が夫々零に等しきことなり.

上記の事項より容易に次の諸定理が得られる.

定理 4.2. 一力或は一偶力のみが作用する場合には釣合は成立せず.

定理 4.3. 一力と一偶力とは釣合ふを得ず.

定理 4.4. 二力が釣合ふ爲には其の作用線及び大さが等しく且つ方向反對なることが必要にして且つ十分なり.

定理 4.5 三力が釣合ふ爲には其の作用線が一點に會するを要す.

上記の力の釣合の諸原理は一個の物體に就て成立するのみならず,靜止の狀態にある物體を任意の斷面にて任意の數の部分に分ち其の一部分をとりて其の斷面に於ける應力を此の部分に對する外力と考へるときに於ても,或は任意の數の物體が適當に連結されたる場合に於ても同樣に成立すべきものである.

§ 5. 外力(荷重及び反力)

構造物に作用する外力は之を荷重と反力とに分けることが出來る. 荷重とは構造物上に積載せられる物體の重量,水壓,土壓或は風壓等の如く構造物に對し主動的に作用する外力を意味し,反力とは荷重と釣合を保つが爲に構造物の支點に於て受動的に作用すべき外力であり,反力の大さ及び方向は荷重に依つて變化する. 從つて反力は一般に荷重の函數である. 構造物には其の外部より作用する荷重の他に構造物自身の重量或は地震動の加速度に依るが如き質量力が作用するが,構造力學に於ては便宜上之等をすべて荷重の中に包含せしめる.

i. 荷 重

構造物の自重の如く常に一定の位置に作用する荷重を固定荷重,列車又は自動車の重量の如く構造物上を移動する荷重を移動荷重と言ひ,移動荷重のうち各荷重間の間隔が夫々不變なるものを特に連行荷重と言ふ. 或る一點に作用する荷重を集中荷重,或る範圍に分布する荷重を分布荷重と言

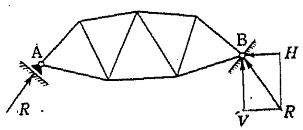
ひ，分布荷重のうち一樣に分布するものを等分布荷重，作用點の座標の一次函數を以て表されるものを等變分布荷重と言ふ．列車又は自動車等の荷重は實際には相當の面積を有する輪帶と構造物表面との接觸面に分布するが，其の作用面積が構造物の寸法に比較して十分に小なる場合には之を集中荷重と見做すのが普通である．

荷重は一般に之を靜荷重と假定する．靜荷重とは靜力學的に作用する荷重，即ち其の大さが零より最終値に達するまで徐々に增大し構造物に對して振動又は衝擊等の影響を及ぼさざるものである．之に反し動力學的に作用する荷重，即ち振動又は衝擊の影響を伴ふものを動荷重と言ふ．列車，自動車等の荷重は勿論動荷重であるが，便宜上之を靜荷重として計算を進め其の振動又は衝擊等の影響は之を別途に考慮するのが普通である．

ii. 反 力.

反力は構造物の種類，其の支點の狀態に依り種々異なるものであるが，平面構造物に於て特に重要なるものは次の三型式の支點に生ずる反力である．

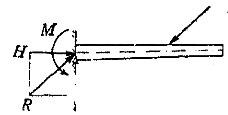
a) 移動端に於ける反力．移動端とは其の點に於て構造物が回轉自由なるのみならず且つ或る一方向に移動可能なる支端又は支點であつて，之を“可動端”又は“滑動端”とも言ふ．かかる支端又は支點に於ては，例へば第8圖のAに於けるが如く支點の移動可能方向に垂直なる反力のみが作用する．



第 8 圖

b) 回轉端に於ける反力．回轉端とは其の點に於て構造物は自由に回轉し得るも移動不可能なる支端又は支點であつて，かかる支點をアーチ等に於ては“鉸端”とも言ふ．回轉端に於ては例へば第8圖のBに於けるが如く一反力が作用するが，其の大さ及び方向を定める必要があり，それには獨立なる二分力，例へば水平分力 H 及び鉛直分力 V を決定することが必要であり且つ十分である．

c) 固定端に於ける反力．固定端とは其の點に於て移動及び回轉が不可能なる支端であつて，此の點に於ては反力の大さ，方向及び作用線を決定する必要があり，それには例へば第9圖に示すが如く水平反力 H，鉛直反力 V 及び反力のモーメント M を決定すれば十分である．



第 9 圖

§ 6. 斷 面 力

外力の作用に依り構造物の內部に生ずる內力即ち應力を算出するためには，吾々は通常構造物を應力を算出せんとする位置に於て切斷せるものと假定し，其の片側の部分をとつて其の切斷面に作用する應力を此の部分に對する外力と考へて前記の釣合條件を適用する．

今，構造物又は其の部材を任意の平面にて切斷し其の切斷面上に η, ζ-軸を有する任意の座標軸 $O\xi\eta\zeta$ をとり，斷面の左側に作用するすべての外力を合成すれば ξ, η, ζ-軸の方向の力 N_ξ, Q_η, Q_ζ 及び ξ, η, ζ-軸に對する力のモーメント M_ξ, M_η, M_ζ が得られ，此の N, Q, M を總稱して該斷面の斷面力と言ふ．更に該斷面の右側に作用するすべての外力の N, Q, M を夫々 N', Q', M' とすれば，釣合の狀態に於ては一般に

$$N+N'=0,\quad Q+Q'=0,\quad M+M'=0$$

即ち

$$N=-N',\quad Q=-Q',\quad M=-M' \tag{6.1}$$

である．

棒狀部材の場合に於ては切斷面を切斷位置に於ける部材の軸に垂直にと

り，座標原點を切斷面の圖心に一致せしめ，ξ, η, ζ を直交座標軸にとるのが普通である．此の場合に於ては N_ξ を軸方向力又は垂直力，Q_η, Q_ζ を剪斷力又は接線力，M_ξ を振りモーメント，M_η, M_ζ を曲げモーメントと言ふ．

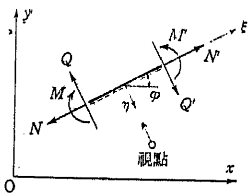
平面構造物に於ては外力はすべて構造物を形成する部材の軸と同一平面内にあり從つて振りモーメント M_ξ は常に消失する．而して軸方向力，剪斷力及び曲げモーメントの正負は，座標軸とは全く無關係に，適當なる視點を基準として次の如く規約する．

1. 斷面の左側に於ける軸方向力が左向に作用する場合，即ち軸方向力が張力なる場合を正とし，之が右向の場合即ち壓力なる場合を負とする．

2. 斷面の左側に於ける剪斷力が視線の方向に作用する場合を正，之と反對なる場合を負とする．

3. 斷面の左側に於ける曲げモーメントが視點より眺めて時針の回轉と同方向なる場合を正，時針の回轉と反對方向なる場合を負とする．

例へば部材の軸及び外力を含む平面 xy に $\xi\eta$-面が一致する場合には $Q_\zeta = 0$, $M_\eta = 0$ であつて此の場合の軸方向力 N_ξ, 剪斷力 Q_η, 曲げモーメント M_ζ を夫々單に N, Q, M とし，その正の方向を圖示すれば第10圖の如くになる．視點は部材の下側又は右側にとるのが常であるが，之を明示する必要ある場合には第10圖の如く視點のある部材の側に點線を附するのが常である．



第　10　圖

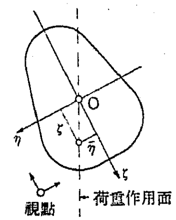
第10圖に於て部材の或る斷面の左側及び右側に作用する外力の x, y-軸の方向の分力の總和を夫々 X, Y 及び X', Y' とすれば，該斷面に作用する軸方向力及び剪斷力は次の如くになる．

$$\left.\begin{aligned} N &= -X\cos\varphi - Y\sin\varphi = X'\cos\varphi + Y'\sin\varphi, \\ Q &= -X\sin\varphi + Y\cos\varphi = X'\sin\varphi - Y'\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

§ 7.　部材の應力

i.　斷面力と應力との釣合．

部材の切斷面に作用する應力は其の斷面に依り切斷せられたる片側の部分に作用する外力と共に釣合はねばならない．今，切斷せられたる左側の部分を考へ，其の切斷面の圖心を原點，切斷面を $\eta\zeta$-面とし ξ-軸が右方に向ふ直交座標軸をとり，切斷面上の任意の一點 (ξ, η, ζ) に於ける應力の ξ, η, ζ の方向の分應力を夫々 $\sigma_\xi, \tau_\eta, \tau_\zeta$ (σ_ξ を垂直應力，τ_η 及び τ_ζ を剪斷應力と呼ぶ) とすれば，之等の應力の合力は切斷面の左側に作用する外力の合力，即ち該切斷面に於ける斷面力と釣合はねばならない．部材の軸が荷重作用面内にあり，且つ視點を第11圖の如くにとり軸方向力 N_ξ, 剪斷力 Q_η, Q_ζ, 曲げモーメント M_η, M_ζ の正負に關しては前節の規約を採用するものとすれば，應力と斷面力との釣合の條件は次の五式になる．



第　11　圖

$$-N_\xi + \int \sigma_\xi dA = 0,\ M_\eta - \int \sigma_\xi \zeta dA = 0,\ M_\zeta + \int \sigma_\xi \eta dA = 0; \tag{7.1}$$

$$-Q_\eta + \int \tau_\eta dA = 0,\quad -Q_\zeta + \int \tau_\zeta dA = 0. \tag{7.2}$$

然し上記の五式を滿足すべき應力の分布型式は一般に無數に存在するが故に，之のみを以て應力を一意的に決定することは不可能であつて，應力を一意的に決定するには應力の分布に關して何等かの假定を設くる必要がある．

ii. 垂直應力.

棒狀物體の垂直應力の分布に關する普通の假定は垂直應力は等變分布をなすと言ふ Navier の假定[1] であり，之を式にて示せば

$$\sigma_\xi = a + b\eta + c\zeta \qquad (7.3)$$

になる．

今，斷面が第 11 圖の如く ζ-軸に就て左右對稱なりとすれば η, ζ-軸は斷面の主軸となり，從つて斷面一次モーメント $\int \eta dA$, $\int \zeta dA$ 及び斷面相乘モーメント $\int \eta\zeta dA$ が共に零に等しきことを考慮しつつ (7.3) を (7.1) に代入して a, b, c を求むれば

$$a = \frac{N_\xi}{A}, \quad b = -\frac{M_\zeta}{I_\zeta}, \quad c = +\frac{M_\eta}{I_\eta} \qquad (7.4)$$

を得る．但し A は斷面積，I_ζ 及び I_η は夫々 ζ 及び η-軸に對する斷面二次モーメント，即ち

$$A = \int dA, \quad I_\zeta = \int \eta^2 dA, \quad I_\eta = \int \zeta^2 dA \qquad (7.5)$$

である．(7.4) を (7.3) に代入すれば σ_ξ は

$$\sigma_\xi = \frac{N_\xi}{A} - \frac{M_\zeta}{I_\zeta}\eta + \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta \qquad (7.6)$$

になる．

斷面の左側の部分に作用する外力の合力の作用線が第 11 圖に示すが如く $(\bar{\eta}, \bar{\zeta})$ の點を通過するものとすれば

$$M_\zeta = -N_\xi \bar{\eta}, \quad M_\eta = +N_\xi \bar{\zeta}$$

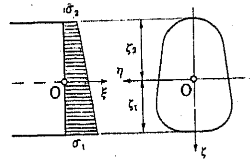
なるが故に σ_ξ は次の如くになる．

$$\sigma_\xi = N_\xi\left(\frac{1}{A} + \frac{\bar{\eta}}{I_\zeta}\eta + \frac{\bar{\zeta}}{I_\eta}\zeta\right). \qquad (7.7)$$

1) 之は“變形前平面であつた斷面は變形後も平面である”と言ふ Bernoulli の假定及び Hooke の法則より導き得る假定である．

實際の構造物に於ては殆んど例外なく荷重作用面に對して左右對稱なる斷面を使用する．かかる場合に於ては ζ-軸が荷重作用面上に位置し從つて $M_\zeta = 0$ となるが故に

$$\sigma_\xi = \frac{N_\xi}{A} + \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta \qquad (7.8)$$



第 12 圖

になる．此の場合に於て第 12 圖の如く ζ-軸の方向の上下の緣端に於ける垂直應力を σ_1, σ_2 とし，η-軸より緣端に至る距離を ζ_1, ζ_2 とすれば

$$\sigma_1 = \frac{N_\xi}{A} + \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta_1, \quad \sigma_2 = \frac{N_\xi}{A} - \frac{M_\eta}{A}\zeta_2 \qquad (7.9)$$

になり，此の σ_1, σ_2 を緣(へり)應力と呼ぶ．

斷面の圖心に N_ξ が作用し $M_\eta = 0$, $M_\zeta = 0$ なる場合には

$$\sigma_\xi = \frac{N_\xi}{A}, \qquad (7.10)$$

之と反對に $N_\xi = 0$ にして曲げモーメント M_η のみが作用する場合には

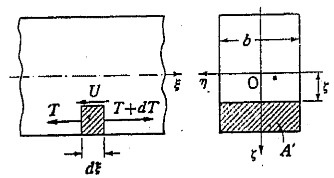
$$\sigma_\xi = \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta, \quad \sigma_1 = \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta_1, \quad \sigma_2 = -\frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta_2 \qquad (7.11)$$

になる．

iii. 剪斷應力.

剪斷應力を求むるに際し問題を簡單にせんが爲に部材の斷面が荷重作用面に對し左右對稱とし其の對稱軸を ζ-軸とする．

第 13 圖に於て η-軸より ζ の距離に於ける剪斷應力 τ_ζ を求むるために，第 13 圖に於て斜線を施せる微小部分を切取りたるものと假定し，其の左右兩面に作用する垂直應力 σ_ξ の合力の差を dT とすれば



第 13 圖

$$dT = \int_{A'} d\sigma_\xi \, dA.$$

また前述の如く切取りたる部分の上面に $-\xi$ の方向に作用する剪斷應力はその位置に於ける τ_ζ に等しく，此の位置に於ける斷面の幅を b とし，τ_ζ が η の方向には不變と假定すれば[1] 切取りたる部分の上面に作用する剪斷應力の合力は

$$U=\tau_\zeta\, b\, d\xi$$

になる．然るに部材が釣合の狀態にある場合には其の中の任意の一部分も釣合の狀態にあるが故に $dT-U=0$ でなければならない．故に之より

$$U=dT:\quad \tau_\zeta\, b\, d\xi=\int_{A'} d\sigma_\xi\, dA$$

を得る．然るに σ_ξ は (7.8) 式に依り與へられ，若し $d\xi$ の間に於て部材の斷面及び N_ξ を不變と假定すれば

$$d\sigma_\xi=\frac{dM_\eta}{I_\eta}\,\zeta$$

になり，從つて

$$\tau_\zeta\, b\, d\xi=\frac{dM_\eta}{I_\eta}\int_{A'}\zeta\, dA$$

を得る．然るに後述の如く一般に $dM_\eta/d\xi=Q_\zeta$ なるが故に

$$\tau_\zeta=\frac{Q_\zeta}{I_\eta b}\int_{A'}\zeta\, dA \tag{7.12}$$

になる．本式右邊の積分は面積 A' の η-軸に對する斷面一次モーメントであつて之を $G_{A'}$ とすれば τ_ζ は次の如くになる．

$$\tau_\zeta=\frac{Q_\zeta\, G_{A'}}{I_\eta\, b}. \tag{7.13}$$

§ 8. 構造物の安定，不安定及び靜定，不靜定

i. 總　說

構造物が荷重の如何に拘らず常に靜止の狀態を保ち得るとき該構造物は

1) 此の假定は斷面が矩形なる場合に於てのみ成立する．

安定なりと言ひ，然らざる場合を不安定と言ふ．安定なる構造物に於て其のすべての反力及び斷面力が力の釣合條件のみに依つて決定され得る場合に該構造物は靜定なりと言ひ，然らざる場合を不靜定と言ふ．上記の如く力の釣合は安定に對する必要條件ではあるが然し十分條件ではない．何となれば一般には不安定なる構造物も或る特定の外力に對しては釣合を保ち得る場合があるからである．從つて安定に對する必要且つ十分なる條件は如何なる荷重に對しても常に力の釣合が成立することである．

安定の問題は之を外部的と內部的とに分けて考察することが出來る．外部的安定とは構造物が常に其の位置を保ち得ること，卽ち換言すれば位置の安定であつて，之は構造物の安定にとつて根本的のものである．何となれば，如何に內部的に安定なる構造物と雖も其の位置を保ち得ないならば之を全體的に安定なりとは言ひ得ないからである．內部的安定とは構造物が其の反力を取除きたる場合に於ても常に其の形狀を保ち得ること，卽ち換言すれば形狀の安定である．而して外部的に安定なる場合のうちすべての反力が釣合條件のみに依り決定せられる場合を外部的靜定，然らざる場合を外部的不靜定と言ふ．內部的に安定なる構造物が外部的に靜定に支持せられる場合或はかく支持せられるものと假定する場合に於て其の斷面力がすべて力の釣合條件のみに依り決定せられる場合を內部的靜定，然らざる場合を內部的不靜定と言ふ．

ii. 平面構造物の場合．

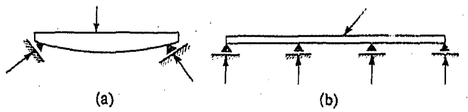
a) 外部的不安定，安定，及び不靜定．構造物が外部的に安定なるが爲には其の荷重と反力とは釣合はねばならない．平面構造物に於ける釣合條件は (4.3) 或は (4.4) の三式なるが故に，互に獨立なる反力[1] の總數を r と

1) 支點に反力として作用する力のモーメントも反力の一つとして取扱ふ．

すれば, r 個の未知數に對し三個の方程式が適用されることになる. 從つて r の大小に依つて次の場合が區別せられる:

1. $r<3$: 外部的不安定,
2. $r=3$: 外部的安定且つ靜定,
3. $r>3$: 外部的安定且つ不靜定.

但し此のうち $r<3$ は外部的不安定に對する必要且つ十分なる條件であるが, $r \geqq 3$ は外部的安定に對する十分なる條件ではない. 例へば第14圖(b)に於ては $r=4$ なるに拘らず明かに不安定である.

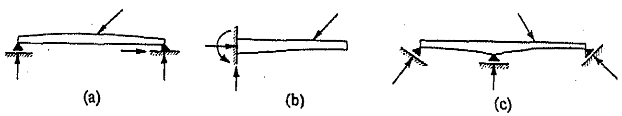

第 14 圖　外部的不安定の例

尙, 外部的に不靜定なる場合に於て

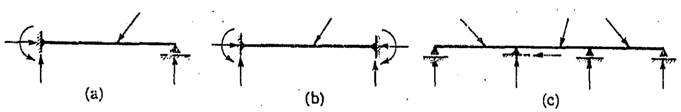
$$n_0 = r - 3 \qquad (8.1)$$

を外部的不靜定次數と呼び, かかる場合に外部的に n_0 次の不靜定と言ふ.

第15圖は外部的に安定且つ靜定なる例であつて此のうち (a) を單純梁,

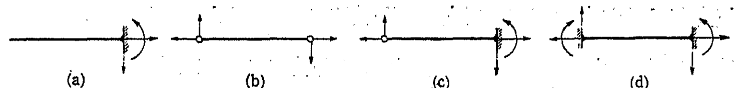

第 15 圖　外部的靜定の例

(b) を片持梁と言ふ. 第16圖は外部的に不靜定なる例であり, 此のうち (a) は一次, (b) は三次, (c) は二次の不靜定であつて (b) を固定梁, (c) を連續梁と言ふ.


第 16 圖　外部的不靜定の例

b) 全體的不安定, 安定, 靜定及び不靜定. 構造物を形成する部材の結合點を節點と呼び, 部材端の回轉が自由なる節點を滑節, 部材が剛結せらるる節點を剛節と言ふ. 部材の支點も移動端及び回轉端は之を滑節, 固定端は之を剛節と考ふべきである.

平面構造物を形成する部材は其の材端の節點の種類に依り第17圖の四種



第 17 圖　平面構造物に於ける部材の種類

に區別せられる. 扨て各部材及び外力がすべて同一平面內にある場合には, 部材の兩端に作用すべき斷面力の數は (a), (b), (c), (d) に對して夫々 3, 4, 5, 6 であり, 之等の斷面力と各部材に直接に作用する外力とに對し各部材に就き夫々三個の釣合條件が適用せらるるが故に, 各部材に就き未知數として殘存すべき斷面力の數は (a) 乃至 (d) に對し夫々 0, 1, 2, 3 になる. 從つて一構造物中に於ける (b), (c), (d) の種類の部材の總數を夫々 m_1, m_2, m_3 とすれば, 構造物全體に就き決定を要する未知數の總數は

$$u = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + r \qquad (8.2)$$

になる.

之を決定すべきものは各節點に於ける釣合條件である. 然るに平面構造物の滑節に於ける釣合條件は $\Sigma H=0$, $\Sigma V=0$ の二個であり, 剛節に於ては更に $\Sigma M=0$ を加へたる三個であるが故に, 構造物中に存在する滑節の總數を k_2, 剛節の總數を k_3 とすれば, 構造物全體に就き

$$c = 2k_2 + 3k_3 \qquad (8.3)$$

個の方程式が得られ, u と c とを比較することに依り次の如き判別條件が得られる.

1. $u < c$: 全體的不安定(必要且つ十分條件),

2. $u = c$: 全體的安定且つ靜定(必要條件),

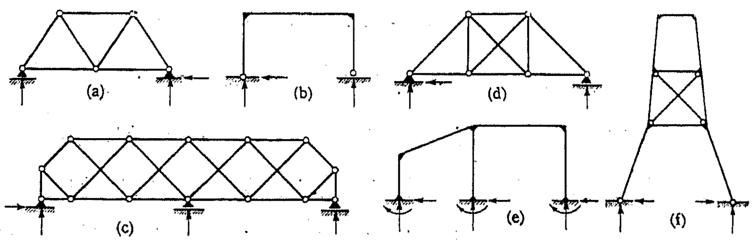
3. $u > c$: 全體的安定且つ不靜定(必要條件).

尙,不靜定の場合に於て

$$n = u - c = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + r - (2k_2 + 3k_3) \qquad (8.4)$$

を全體的不靜定次數,かかる場合を全體的に n 次の不靜定と言ふ.

例へば第18圖の (a),(b),(c)はすべて全體的に靜定であり,(d),(e),(f)



第 18 圖

は第1表に示すが如く全體的に夫々一次,六次,九次の不靜定である.

第 1 表 (第18圖參照)

第18圖	未知數					條件數			$n = u - c$
	m_1	m_2	m_3	r	u	k_2	k_3	c	
(a)	7	0	0	3	10	5	0	10	0 靜定
(b)	0	2	1	3	10	2	2	10	0 靜定
(c)	24	0	0	4	28	14	0	28	0 靜定
(d)	10	0	0	3	13	6	0	12	1 不靜定
(e)	0	0	5	9	24	0	6	18	6 不靜定
(f)	2	2	7	4	31	2	6	22	9 不靜定

c) 內部的不安定,安定,靜定及び不靜定. 構造物が外部的に靜定に支持せられる場合或はかく支持せられるものと假定する場合に於ては $r = 3$ なるが故に

$$u_i = m_1 + 2m_2 + 3m_3, \quad c_i = 2k_2 + 3k_3 - 3 \qquad (8.5)$$

とすれば u_i と c_i との大小に依つて次の三場合が區別せられる.

1. $u_i < c_i$: 內部的不安定(必要且つ十分條件),

2. $u_i = c_i$: 內部的安定且つ靜定(必要條件),

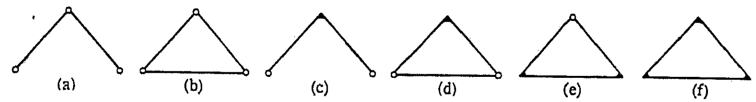
3. $u_i > c_i$: 內部的安定且つ不靜定(必要條件).

尙,此の場合に於ても

$$n_i = u_i - c_i = m_1 + 2m_2 + 3m_3 - (2k_2 + 3k_3 - 3) \qquad (8.6)$$

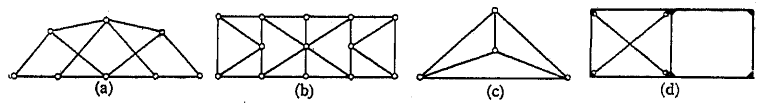
を內部的不靜定次數,かかる場合を內部的に n_i 次の不靜定と言ふ.

例へば第19圖に示すものの內部的の安定,不安定は夫々圖の下方に記せるが如く,第20圖に示すものは第2表より明かなるが如くである. また前揭第18圖のうち (c) は內部的に不安定,(a),(b),(e) は內部的に靜定,(d) 及び (f) は內部的に夫々一次及び八次の不靜定である.



(a) 不安定 (b) $n_i = 0$ (c) $n_i = 0$ (d) $n_i = 1$ (e) $n_i = 2$ (f) $n_i = 3$

第 19 圖

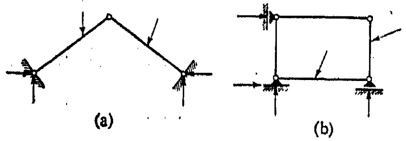


第 20 圖

第 2 表 (第20圖參照)

第20圖	未知數				條件數			n_i
	m_1	m_2	m_3	u_i	k_2	k_3	c_i	
(a)	12	0	0	12	8	0	13	−1 (不安定)
(b)	24	0	0	24	13	0	23	1 不靜定
(c)	6	0	0	6	4	0	5	1 不靜定
(d)	2	0	7	23	0	6	15	8 不靜定

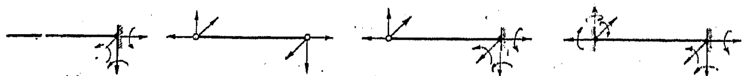
玆に特に注意すべきことは，たとへ內部的に不安定なる構造物と雖も之を適當に支持することに依り全體として安定且つ靜定になり得ることである．例へば第21圖或は第18圖(c)がその例である．



第　21　圖

iii.　立體構造物の場合．

立體構造物を形成する部材を平面構造物に於けると同樣に第22圖に示



(a) 一端滑節，他端剛節　(b) 兩端滑節　(c) 一端自由，他端剛節　(d) 兩端剛節

第 22 圖　立體構造物に於ける部材の種類

す四種類とすれば之等各種の部材の兩端に於ける斷面力の總數は(a), (b), (c), (d)に對し夫々6, 6, 9, 12である．立體構造物に於ける釣合條件は(4.1)及び(4.2)の六式であるが，(b)の種類の部材に對しては部材の軸に對する捩りモーメントは之を考慮するを要せざるが故に此の種類の部材に對しては五個の釣合條件が適用せられる．從つて各部材に就き未知數として殘存する斷面力の數は(a), (b), (c), (d)に對し夫々0, 1, 3, 6である．故に一構造物中に於ける(b), (c), (d)の如き部材の總數をm_1, m_2, m_3とし獨立なる反力の總數をrとすれば，未知數の總數u及び內部的未知數の總數u_iは夫夫

$$u = m_1 + 3m_2 + 6m_3 + r, \tag{8.7}$$

$$u_i = m_1 + 3m_2 + 6m_3 \tag{8.8}$$

になる．

之等の未知數に對し滑節に於ては(4.1)の三式，剛節に於ては之に(4.2)の三式を加へたる六式が適用さるるが故に，構造物全體としての釣合條件の總數c及び內部的釣合條件の總數c_iは夫々

$$c = 3k_2 + 6k_3, \tag{8.9}$$

$$c_i = 3k_2 + 6k_3 - 6 \tag{8.10}$$

になる．但しk_2, k_3は構造物中に於ける滑節及び剛節の總數である．

之等を比較することに依つて立體構造物の安定，不安定等に對する條件が得られ，それを表示すれば第3表の如くになる．

第　3　表

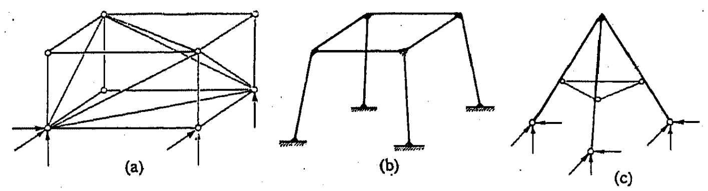
	不　安　定	安　　　定	
		靜　　定	不　靜　定
外　部　的	$r < 6$	$r = 6$	$r > 6$
內　部　的	$u_i < c_i$	$u_i = c_i$	$u_i > c_i$
全　體　的	$u < c$	$u = c$	$u > c$

勿論之等の條件は不安定に對するものを除きすべて十分なる條件ではない．また平面構造物に於けると同樣に

$$n = u - c,\quad n_0 = r - 6,\quad n_i = u_i - c_i \tag{8.11}$$

とすればn, n_0, n_iを夫々全體的，外部的及び內部的の不靜定次數と言ふ．

例へば第23圖に示す立體構造物を檢討すれば第4表の如くになる．



第　23　圖

第　4　表　（第23圖參照）

	$u_i = m_1 + 3m_2 + 6m_3$	$u = u_i + r$	$c = 3k_2 + 6k_3$	$c_i = c - 6$	n_0	n_i	n
(a)	$18 + 0 + 0 = 18$	$18 + 6 = 24$	$3\times 8 + 0 = 24$	18	0	0	0
(b)	$0 + 0 + 6\times 8 = 48$	$48 + 24 = 72$	$0 + 6\times 8 = 48$	42	18	6	24
(c)	$3 + 3\times 3 + 0 = 12$	$12 + 9 = 21$	$3\times 3 + 6\times 1 = 15$	9	3	3	6