第二篇

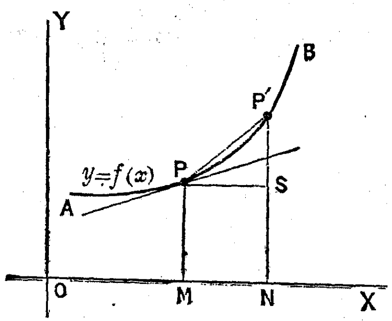
微積分學大意

第六章　微分學 (Differential Calculus)

29. <u>函數及微分係數</u> (Function and Differential Coefficient). 玆ニ x, y ナル兩數アリテ x ガ種々ノ値ヲ取ルトキ之ニ應ジテ y モ亦種々ノ値ヲ取ルトキハ y ハ x ノ<u>函數</u>ナリト謂フ而シテ x ハ種々ノ値ヲ取ルユヘ之ヲ<u>自變數</u> (Independent Variable) ト謂ヒ y ハ x ノ値ニ因リテ定マルモノナルヲ以テ<u>從變數</u> (Dependent Variable) ト謂フ又此等兩變數ニ對シテ常ニ一定ノ値ヲ有スル量ヲ<u>常數</u> (Constant) ト稱ス.

例ヘバ $y=2x+1$ ハ x ノ函數トシテ y ヲ表ハセル式ニシテ y バ x ノ<u>代數函數</u> (Algebraic Function) ナリ. 一般ニ y ガ x ノ函數ナルコトヲ表ハスニハ $y=f(x)$ ノ如キ記號ヲ用フ又 $y=2x+1$ ナルトキ反對ニ x ヲ y ノ函數トシテ表ハセバ $x=\frac{1}{2}(y-1)$ トナル卽チ一般ニ $y=f(x)$ ヨリ x ヲ y ノ函數トシテ表ハシタルモノヲ $x=F(y)$ トスレバ $y=f(x)$ ト $x=F(y)$ トハ互ニ<u>反函數</u> (Inverse Function) ナリ.

第 36 圖



第 36 圖ニ於テ曲線 AB ハ正座標軸 OX, OY ニ關シテ $y=f(x)$ ヲ表ハスモノトシ $P(x, y)$, $P'(x', y')$ ヲ AB 上ノ二點トシ PP′ 線ガ X 軸トナス角ヲ α トスレ

$$\tan\alpha=\frac{P'S}{PS}=\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$$

$(x'-x)$ ヲ h トスレバ

$$\tan\alpha=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

h ヲ漸次減ジテ遂ニ零トナセバ PP′ ハ切線トナル. $h=0$ ナル極限ニ於ケル $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ノ値ヲ $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ニテ表ハシ切線ガ X 軸トナス角ヲ i ニテ表ハセバ

$$\tan i=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

但シ Lim. ハ<u>極限</u> (Limit) ヲ表ハス記號ナリ.

次ニ P′ ト P トノ横距ノ差 $(x'-x)$ ヲ Δx, 縱距ノ差 $(y'-y)$ ヲ Δy トスレバ $\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ナリ而シテ $h=\Delta x=0$ ナル極限ニ於ケル $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ノ値ヲ $\mathrm{Lim}_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ニテ表ハシ之ニ $\frac{dy}{dx}$ ナル記號ヲ用フレバ

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad\text{...........(37)}$$

此 $\frac{dy}{dx}$ ヲ y ノ x ニ對スル<u>微分係數</u>又ハ x 點ニ於ケル $f(x)$ ノ微分係數ト謂ヒ或函數ノ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求ムルコトヲ <u>y ヲ x ニ就テ微分スルト謂フ.</u> $\frac{dy}{dx}$ ヲ略シテ $f'(x)$ ト書クコトアリ.

$\frac{dy}{dx}$ ノ符號ノ變化及値ノ增減ヲ知レバ縱距ノ變化スル狀態ヲ詳ニスルヲ得ベシ是レ微分學卽チ微分係數ニ關スル研究ノ必要ナル所以ナリ.

<u>例題 1.</u> $y=x^n$ ノ微分係數ヲ求ム但シ n ハ正整數ナリ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\frac{(x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-1}h^2+\ldots\ldots\ldots+h^n)-x^n}{h}$$

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h+\ldots\ldots\ldots\ldots+h^{n-1}]$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

例題2. $y=ax^n+b$ ノ微分係數ヲ求ム但シ n ハ正整數ニシテ a 及 b ハ常數ナリ.

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{[a(x+h)^n+b]-(ax^n+b)}{h}$$

$$=\mathrm{Lim}_{h=0}[nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}ax^{n-2}h+\dots\dots\dots\dots+ah^{n-1}]$$

$$=nax^{n-1}$$

以上二ツノ例題ヨリ知ルガ如ク $y=ax^n$ ノ微分係數ハ $y=x^n$ ノ微分係數ノ a 倍ニシテ常數 b ハ微分係數ニ何等ノ影響ヲ及ボサズ.

$y=f(x)$ ガ種々ノ形ナルトキ其都度 $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ナル式ヲ解キテ微分係數ヲ求ムルハ甚ダ煩ハシキヲ以テ如何ナル形ノ函數ナリトモ一般ニ適用セラルヽ法則ヲ知レバ便ナリ.

30. 二ツノ函數ノ和又ハ差ノ微分係數.

$$y=f(x)+\phi(x)$$

トスレバ

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{[f(x+h)+\phi(x+h)]-[f(x)+\phi(x)]}{h}$$

$$=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[\phi(x+h)-\phi(x)]}{h}$$

$$=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{d\phi(x)}{dx}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(38)$$

又同樣ニシテ

$$y=f(x)-\phi(x)$$

トスレバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{d\phi(x)}{dx}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(38_a)$$

如斯ニ二ツノ函數ガ如何ナル函數ナリトモ夫等ノ和又ハ差ノ微分係數ハ其各別ノ函數ノ微分係數ノ和又ハ差ニ等シ.

例題. $y=3x^2\pm2x$ ノ微分係數ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(3x^2)}{dx}\pm\frac{d(2x)}{dx}=6x\pm2.$$

31. 二ツノ函數ノ乘積ノ微分係數.

$$y=f(x).\phi(x)$$

トスレバ

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f(x+h).\phi(x+h)-f(x).\phi(x+h)+f(x).\phi(x+h)-f(x).\phi(x)}{h}$$

$$=\mathrm{Lim}_{h=0}\phi(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\mathrm{Lim}_{h=0}f(x)\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\phi(x)\frac{df(x)}{dx}+f(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(39)$$

如斯ニ $f(x)$ ト $\phi(x)$ トガ如何ナル函數ナリトモ夫等相乘積ノ微分係數ハ $f(x)$ ノ微分係數ト $\phi(x)$ トノ乘積ニ $\phi(x)$ ノ微分係數ト $f(x)$ トノ乘積ヲ加ヘタルモノニ等シ.

例題. $y=(3x-2)(2x+3)$ ノ微分係數ヲ求ム,

$$\frac{dy}{dx}=(3x-2)\frac{d(2x+3)}{dx}+(2x+3)\frac{d(3x-2)}{dx}$$

$$=(3x-2).2+(2x+3).3$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=12x+5.$$

32. 二ツノ函數ノ商ノ微分係數.

$$y=\frac{f(x)}{\phi(x)}$$

トスレバ

$$\phi(x).y=f(x)$$

$$\phi(x)\frac{dy}{dx}+y\frac{d\phi(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{df(x)}{dx}-y\frac{d\phi(x)}{dx}}{\phi(x)}=\frac{\phi(x)\frac{df(x)}{dx}-f(x)\frac{d\phi(x)}{dx}}{\overline{\phi(x)}^2}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(40)$$

如斯ニ $f(x)$ ト $\phi(x)$ トガ如何ナル函數ナリトモ商 $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ ノ

<u>微分係數ハ$f(x)$ノ微分係數ト$\phi(x)$トノ乘積ヨリ$\phi(x)$ノ微分係數ト$f(x)$トノ乘積ヲ引キ之ヲ$\phi(x)$ノ自乘ニテ除シタルモノニ等シ.</u>

<u>例題.</u> $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ノ微分係數ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(cx+d)\frac{d(ax+b)}{dx}-(ax+b)\frac{d(cx+d)}{dx}}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{(cx+d).a-(ax+b).c}{(cx+d)^2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

33. <u>函數ノ函數ノ微分係數.</u>

$$y=f(u),\ u=\phi(x),\ \text{即チ}\ y=f[\phi(x)]$$

トスレバyハxノ函數ノ函數ナリ此場合 $\frac{dy}{dx}$ ノ値ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f[\phi(x+h)]-f[\phi(x)]}{h}$$

$$=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f[\phi(x+h)]-f[\phi(x)]}{\phi(x+h)-\phi(x)}\cdot\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

$$=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f[\phi(x+h)]-f[\phi(x)]}{\phi(x+h)-\phi(x)}\cdot\frac{d\phi(x)}{dx}$$

今 $u+\Delta u=\phi(x+h)$ トスレバ

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{(u+\Delta u)-u}\cdot\frac{d\phi(x)}{dx}$$

而シテ$h=0$ナル極限ニ於テハΔuモ亦零トナルベキヲ以テ

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{\Delta u=0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{d\phi(x)}{dx}\text{..............................}(41)$$

<u>例題.</u> $y=(2x+1)^2$ ノ微分係數ヲ求ム.

此場合ニ於テハ

$$y=u^2,\ u=2x+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du^2}{du}\cdot\frac{d(2x+1)}{dx}=2u\times 2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=4(2x+1).$$

34. <u>反函數ノ微分係數.</u>

$y=f(x)$ ナル函數ノ微分係數ハ

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{Lim}_{\Delta x=0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\mathrm{Lim}_{\Delta x=0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

然ルニ$\Delta x=0$ナル極限ニ於テハΔyモ亦零トナルベキヲ以テ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\mathrm{Lim}_{\Delta y=0}\frac{\Delta x}{\Delta y}},\quad\text{即チ}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\text{..............}(42)$$

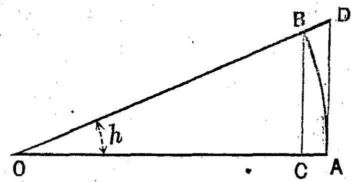
<u>例題.</u> $y=x^{\frac{1}{3}}$ ノ微分係數ヲ求ム.

此反函數ハ $x=y^3$ ニシテ $\frac{dx}{dy}=3y^2$ ナリ故ニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3}y^{-2}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

35. <u>圓函數ノ微分係數</u>

第37圖



(イ) <u>$\frac{\sin h}{h}$ 及 $\frac{\sin^2 h}{h}$ ノ極限ニ於ケル値.</u> 弧ABヲhニテ表ハセバ$\angle AOB$ハhニシテ$\sin h$ハBC線ニテ又$\tan h$ハAD線ニテ表ハサル然ラバhノ大小ニ拘ハズ次ノ關係ヲ得.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}<\widehat{AB}<\overline{AD},\\ \sin h<h<\tan h\end{array}\right\}\quad\therefore\ 1<\frac{h}{\sin h}<\frac{1}{\cos h}.$$

hガ無限ニ小サクナルニ連レテ$\cos h$從ッテ$\frac{1}{\cos h}$ハ無限ニ1ニ近寄ルベキヲ以テ此不等式ノ中間ノ項 $\frac{h}{\sin h}$ モ亦1ニ近付クベシ然ラバ$h=0$ナル極限ニ於ケル $\frac{h}{\sin h}$ ノ値ハ1即チ

$$\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{h}{\sin h}=1 \text{ 又ハ } \mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin h}{h}=1$$

次ニ $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin^2 h}{h}$ ヲ書換フレバ $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin h}{h}.\sin h$ トナル然ルニ $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin h}{h}=1$ ニシテ $\mathrm{Lim}_{h=0}\sin h=0$ ナルヲ以テ

$$\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin^2 h}{h}=0.$$

是レ $\sin h$ ハ h ノ減少ニ連レテ減ズレドモ h ニ比較シテ $\sin^2 h$ ガ遙ニ小サクナルコトヲ示スモノナリ.

第37圖ニ於テ $2\times BC$ ハ OB ヲ半徑トセル圓ニ內切スル正多角形ノ一邊ト見做スヲ得ベクシテ $\frac{\sin h}{h}$ ノ極限ニ於ケル値1ハ則チ圓ニ內切スル正多角形ノ邊ノ數ヲ無限ニ增スニ從ヒ此多角形ガ無限ニ圓ニ近ヅクコトヲ表示スルモノナリ又 $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\tan h}{h}$ ヲ書換フレバ $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos h}$ トナリ $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{1}{\cos h}=1$ ナルヲ以テ $\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\tan h}{h}=1$ ヲ得然ラバ $2\times AD$ ハ圓ニ外切スル正多角形ノ一邊ト見做スヲ得ベクシテ $\frac{\tan h}{h}$ ノ極限ニ於ケル値1ハ則チ圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ヲ無限ニ增スニ從ヒ其多角形ガ無限ニ圓ニ近ヅクコトヲ表ハスモノナリ.

(2). $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ ノ微分係數.

$$\frac{d(\sin x)}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$h=0$ ナル極限ニ於テハ $\frac{h}{2}$ モ亦零ナルベキヲ以テ

$$\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1,\quad \mathrm{Lim}_{h=0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x$$

$$\therefore\ \frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x \quad\cdots\cdots\cdots(43)$$

$\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin h}{h}=1$ 及 $\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$ ナル式ハ弧度法ニ因リテ角ヲ測ル場合ニ於テノミ成立ツモノニシテ度ヲ單位トスレバ如斯ニ簡單ナラズ是レ高等數學ニ於テ弧度法ヲ用フル所以ナリトス.

次ニ
$$\frac{d(\cos x)}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=-\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=-\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)=-\sin x$$

$$\therefore\ \frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x \quad\cdots\cdots\cdots(44)$$

例題 1. $y=a\sin x.\cos x$ ノ微分係數ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=a\left[\sin x\frac{d(\cos x)}{dx}+\cos x\frac{d(\sin x)}{dx}\right]$$

$$=a(-\sin^2 x+\cos^2 x)=a\cos 2x.$$

例題 2. $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ノ微分係數ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\frac{d(\sin x)}{dx}-\sin x\frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

例題 3. $y=\cos(ax+b)$ ノ微分係數ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(ax+b)\frac{d(ax+b)}{dx}=-a\sin(ax+b).$$

38. 對數函數ノ微分係數. $x=10^y$ ナルトキハ y ハ x ノ常用對數ニシテ之ヲ表ハスニ $y=\log x$ ヲ以テス此10ハ常用對數ノ基數ナリ. 一般ニ $x=a^y$ ナルトキハ y ハ a ヲ基數トセ

ルxノ對數ニシテ之ヲ表ハスニ $y=\log_a x$ ヲ以テス. 普通ノ計算ニハ10ヲ基數トシ高等數學ニ於テハeヲ基數トス($e=2.7182818\ldots\ldots$)從ツテ單ニ $\log x$ ト書スレバeヲ基數トセル自然對數ナリト知ルベシ.

$y=\log x$ ナルトキハ微分係數ノ定義ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\log\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$=\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{x}\mathrm{Lim}_{h=0}\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\mathrm{Lim}_{h=0}\log\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

今 $\frac{x}{h}$ ヲ m ト置ケバ $h=0$ ナル極限ニ於テ m ハ無窮大ナルベキヲ以テ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\mathrm{Lim}_{m=\infty}\log\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]$$

而シテ一般ニmガ正整數ナルトキハ二項定理ニヨリ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m\left(\frac{1}{m}\right)+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{1}{m}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{m}\right)^3$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

mガ無限ニ增セバ $\frac{1}{m}=0$ トナル此極限ニ於テハ

$$\mathrm{Lim}_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

此極限ノ値ヲeニテ表ハセバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{x}\log e$$

基數自己ノ對數卽チ $\log e$ ハ1ナルユヱ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

例題 1. $y=\log_a x$ ノ微分係數ヲ求ム.

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a},\quad 卽チ\quad y=\frac{\log x}{\log a}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x}$$

若シ對數ノ基數ガeナレバ $\frac{1}{\log a}=1$ ナルユヱ $\log x$ ノ微分係數ハ $\frac{1}{x}$ トナリテ結果ハ常ニ簡單ナリ.

例題 2. $y=\log\sin x$ ノ微分係數ヲ求ム.

第33節ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\log\sin x)}{d(\sin x)}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$=\frac{1}{\sin x}.\cos x=\cot x.$$

37. 指數函數 $y=a^x$ ノ微分係數. $a=e^b$ ナルトキハ $b=\log a$ ナルヲ以テ $a=e^{\log a}$ トナル然ラバ

$$y=a^x=(e^{\log a})^x=e^{x\log a}$$

此兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$\log y=x\log a$$

$$\frac{d(\log y)}{dx}=\log a.\frac{dx}{dx},\quad 卽チ\quad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log a$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y\log a=\log a.a^x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

若シ $a=e$ トスレバ $\log a=1$ ナルユ:

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

如斯ニ指數函數 e^x ノ微分係數ハ原ノ函數ニ等シ.

38. 高次微分係數 (Higher Differential Coefficient). $y=\sin x$ ナル函數ノ微分係數ガ $\frac{dy}{dx}=\cos x$ ナルコトハ既ニ知ル所ナリ. 此 $\cos x$ ハ x ノ一ツノ函數ナルヲ以テ之ヲ更ニxニ就テ微分スレバ $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$ ヲ得. 之ヲ $\sin x$ ノ第二次微分係數

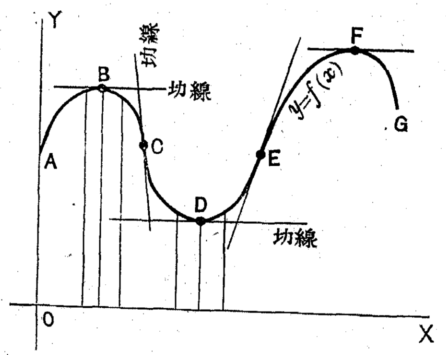
(Second Differential Coefficient) ト謂フ.

以上ノ說明ハ一般ニ適用セラルルモノナリ即チ $y=f(x)$ ノ微分係數 $\frac{dy}{dx}$ ハマタ x ノ函數ナルユヱコレガ x ニ對スル微分係數ヲ考フルヲ得而シテ之ハ $\frac{dy}{dx}$ ノ微分係數ナルニヨリ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 又ハ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ニテ表ハシ之ヲ第二次微分係數ト稱ス. コレニ對シテ $\frac{dy}{dx}$ ヲ第一次微分係數ト謂フコトアリ. $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ又 x ノ一ツノ函數ニシテ之ヲ尙一度 x ニ就テ微分シタルモノヲ第三次微分係數ト稱シ $\frac{d^3y}{dx^3}$ ニテ表ハス. 以下之ニ準ズ. 此等ヲ總括シテ高次微分係數ト謂フ.

$\frac{dy}{dx}$ ヲ $\frac{df(x)}{dx}$ 或ハ略シテ $f'(x)$ ニテ表ハス如ク $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ 等ヲ $f''(x)$, $f'''(x)$ 等ニテ表ハスヲ常トス.

今 $y=f(x)$ ヲ正座標軸ニ關スル曲線ノ方程式ト見做シ第38圖ノ如キ形狀ABCDE……ヲ有スルモノトシテ此曲線上ノ各點ニ於ケル切線ガX軸トナス角 i ノ正切ノ變化ヲ考フルニAヨリBニ至ル間ハ $\tan i$ ハ正ニシテ絕エズ其値ヲ減ジBニ於テ零トナル. 夫ヨリ $\tan i$ ハ負トナリテBヨリC迄ノ間ハ絕エズ其値ニ於テ減少ス然ラバ曲線ノ一部分ABCニ沿ヒテハ $\tan i$ ハ絕エズ減少スルガ故ニ

第38圖



$$\frac{d(\tan i)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

ハ負ナルベキナリ. 次ニCDEナル部分ニ在リテハ同樣ニ

シテ $\tan i$ ガ絕エズ增加スルヲ見ルベシ然ラバ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ正タルベキナリ而シテ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ガ符號ヲ變ズル點ニ於テ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ニシテ此點ヲ反曲點 (Point of Inflection) ト謂フ.

如斯ニABCノ如ク曲線ガ上方ニ向フテ凸狀ヲ呈スルカ又ハCDEノ如ク上方ニ向フテ凹狀ヲ呈スルカハ第二次微分係數ニ因リテ知ルヲ得.

39. 一ツノ自變數ヲ含ム函數ノ極大及極小.

第38圖ノ如クABCD……ナル曲線ガ $y=f(x)$ ヲ表ハスモノトシ自變數 x ニ種々ノ値ヲ與フルトキ函數 $f(x)$ ノ値ノ變化ヲ考フルニ此曲線ガAヨリB迄漸次上昇シ頂上Bヲ通越シタル瞬間ヨリ次第ニ下降シテ其極Dニ至リ再ビ上昇シテFニ向フ如キモノナルトキハ $f(x)$ ハBニ於テ一ツノ極大値 (Maximum Value) ヲ有シDニ於テ一ツノ極小値 (Minimum Value) ヲ有スルト謂フ. 即チ函數 $f(x)$ ノ極大トハ自變數 x ガ漸次其値ヲ變ズルニ從ヒ $f(x)$ モ漸次其値ヲ增シ遂ニ增大ノ極ニ達シコレヨリ減ジ始メントスル如キ x ノ値ニ對スル $f(x)$ ノ値ナリ. 又函數 $f(x)$ ノ極小トハ x ガ漸次其値ヲ變ズルニ從ヒ $f(x)$ モ漸次其値ヲ減ジテ遂ニ減少ノ極ニ達シ夫ヨリ增加シ始メントスル如キ x ノ値ニ對スル $f(x)$ ノ値ナリ. 玆ニ所謂極大ハ必ズシモ最大ナラズ又極小必ズシモ最小ナラズ是レ極大或ハ極小ハ唯此等ガ起ル點ノ近クニ於ケル x ノ値ニ對シテ最モ大ナルモノ或ハ最モ小ナルモノヲ意味シ最大或ハ最小ハ函數ノ種々ノ値ノ內最モ大ナルモノ或ハ最モ小ナルモノヲ意味スレバナリ. 而シテ唯一ツノ極大或ハ極小ヲ有スル函數ノ最大値或ハ最小値ハ其極大或ハ極小ニ等シク, 數個ノ極大或ハ極小ヲ有スル函數ノ最大値或ハ最小値ハ其極大値中ノ最大ナルモノ或ハ極小値中ノ最小ナルモノニ

等シキヤ明カナリ.

函數$f(x)$ガ極大又ハ極小トナル點ニ於テ曲線ニ引キタル切線ハX軸ニ並行ニシテ$\frac{dy}{dx}=0$ナリ. 依ッテ與ヘラレタル$y=f(x)$ヨリ$f'(x)$ヲ求メテ之ヲ零ニナスベキxノ値ヲ見出スベシ是レyヲシテ極大又ハ極小ナラシムベキxノ値ナリ. 如斯ニシテ得タルxノ値ガ極大或ハ極小ノ孰レニ相當スルカヲ判定スルコト容易ナリ. 即チ第38圖ノB點ノ近クニ於テハ$f'(x)$ノ値ハ減ジツツアルユエ$f''(x)$ハ負トナルベク反之D點ノ近クニ在リテハ$f'(x)$ノ値ハ増シツツアルユエ$f''(x)$ハ正タルベシ夫故ニ

與ヘラレタル$y=f(x)$ヨリ微分係數ヲ求メテ$\frac{dy}{dx}=0$ヲ滿足スベキxノ値ヲ定メ此xノ値ニ對シテ$\frac{d^2y}{dx^2}$ガ負トナルトキハ其値ハyヲ極大ナラシムベク$\frac{d^2y}{dx^2}$ガ正トナルトキハ其値ハyヲ極小ニナスモノナリ.

解析的條件. $y=f(x)$ナル函數ガ$x=a$ニ於テ一ツノ極大値或ハ極小値ヲ有スルモノトシhヲxノ極メテ小ナル加量トスレバ

極大値ニ對シテハ

$$f(a)>f(a+h) \quad \text{且ツ} \quad f(a)>f(a-h)$$

極小値ニ對シテハ

$$f(a)<f(a+h) \quad \text{且ツ} \quad f(a)<f(a-h)$$

然ラバ極大値ニ對シテハ$f(a+h)-f(a)$及$f(a-h)-f(a)$共ニ負トナリ極小値ニ對シテハ正タルベキナリ.

てーらる氏定理(Taylor's Theorem)ニ因リ

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{1.2}+f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

$$f(a-h)-f(a)=-f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{1.2}-f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

極大値ニ對シテハ(a), (b)兩式ノ左邊, 從ッテ右邊ハ負トナルベキナリ. 而シテhヲ極メテ小サク取レバ各式右邊ノ第一項ハ其數値ニ於テ他項ノ和ヨリ大ナラシムルヲ得ベキ故, 各式右邊ノ符號ハ其第一項ノ符號ト同一ナルベキナリ. 然ルニ兩式右邊ノ第一項ノ符號相反スルヲ以テ兩式右邊ガ負トナル爲メニハ第一項ハ零ナラザルベカラズ. 即チ$f'(a)=0$ナラザルベカラズ.

次ニ(a), (b)兩式ノ右邊ニ於テ第一項ヲ除キタル殘餘ノ初項ガ右邊ノ符號ヲ支配シ其初項ハh^2ヲ含ムユエ, 此等ガ負トナル爲メニハ$f''(a)$ガ負ナラザルベカラズ.

如斯ニ$f(a)$ガ極大値ナラバ

$$f'(a)=0, \quad f''(a)<0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

同樣ニシテ極小値ニ對シテハ

$$f'(a)=0, \quad f''(a)>0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

若シ$f''(a)=0$ナレバ(a), (b)兩式右邊ノ符號ハ$f'''(a)$ヲ含ム項ニ因リテ定マル. 然ルニ$f'''(a)$ヲ含ム項ノ符號相反スルユヘ極大値或ハ極小値タルニハ$f'''(a)=0$ナルヲ要ス. 若シ$f'''(a)=0$ナレバ$f^{IV}(a)$ガ負ナルトキ$f(a)$ハ極大ニシテ$f^{IV}(a)$ガ正ナルトキ極小ナリ.

例題. $y=x^3-3x^2-9x+5$ノ極大値及極小値ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-6x-9=0$$

$$x=3 \quad \text{又ハ} \quad x=-1$$

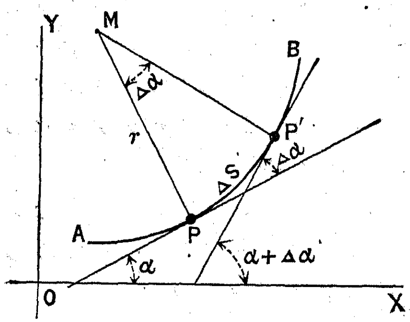
第二次微分係數$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-6$ニ$x=3$ヲ代用スレバ$\frac{d^2y}{dx^2}=12$トナルユエ$x=3$ハ函數ノ極小値ニ相當ス. 又$x=-1$ヲ代用スレバ$\frac{d^2y}{dx^2}=-12$トナリ, 之ハ極大値ニ相當スルモノナリ.

$$\text{極大値}=[x^3-3x^2-9x+5]_{x=-1}=10$$

$$\text{極小値}=[x^3-3x^2-9x+5]_{x=3}=-22$$

40. 曲度半徑 (Radius of Curvature) 曲線上ノ一點Pニ於ケル曲度トハ其點ニ於ケル切線ト其點ニ近キ他點P′ニ於ケル切線トノ間ノ角$\Delta\alpha$ヲ二點間ノ曲線ノ長サΔSニテ除シタル商ノ極限ヲ謂フ,即チ第39圖ニ於テ

第 39 圖



P點ニ於ケル曲度

$$=\operatorname{Lim}_{\Delta s=0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}$$

曲度半徑ヲrトスレバ

$$r.d\alpha=ds,\quad 即チ\quad r=\frac{ds}{d\alpha}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (a)$$

$$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\tan\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}=\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dx}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ \frac{d\alpha}{dx}&=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sec^2\alpha}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\\ ds&=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (b)$$

此等ノ値ヲ(a)式ニ代用スレバ

$$r=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (50)$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ガ1ニ比シテ極メテ小ナルトキハ

$$r=\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (50a)$$

第七章 積分學 (Integral Calculus)

41. 積分ノ意義 茲ニ微分法ノ逆,即チ微分係數ヲ與ヘテ原ノ函數ヲ求ムル方法ヲ述ベントス.

既ニ知ル如クx^3ノ微分ハ$3x^2dx$ニシテ之ヲ式ニテ表ハセバ$d(x^3)=3x^2dx$ナルユヘ$3x^2dx$ヲ微分トセル函數ガx^3ナルコトハ直チニ知リ得ベキナリ. 而シテ$3x^2dx$ヲ微分トセル函數ヲ表ハスニハ$\int 3x^2dx$ヲ以テス.

一般ニ$f(x)$ヲxノ函數トシ此微分ヲ表ハスニ$df(x)$ヲ以テシ計算ノ結果$F(x)dx$トナリタリトスレバ

$$df(x)=F(x)dx\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (a)$$

逆ニ$F(x)dx$ヲ微分トセル函數又ハ$F(x)$ヲ微分係數トセル函數ヲ示スニ$\int F(x)dx$ヲ以テシ之ガ$f(x)$トナリタリトスレバ,次ノ形ニテ表ハサル

$$\int F(x)dx=f(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (b)$$

$\int F(x)dx$ヲ$F(x)dx$ノ積分,或ハ之ヲ略シテ$F(x)$ノ積分ト謂フ. 而シテ$F(x)$ガ與ヘラレテ$f(x)$ヲ求ムルコトヲ積分法ト稱ス.

以上ノ說明ニヨリ微分法ト積分法トハ全ク逆ナルヲ知リ得ベシ.

今(a)式中ニ於テ$f(x)$ノ代リニ$\int F(x)dx$ト置ケバ

$$d\left[\int F(x)dx\right]=F(x)dx,\qquad 即チ\qquad \frac{d}{dx}\left[\int F(x)dx\right]=F(x)$$

如斯ニ$F(x)$ガxノ如何ナル函數ナリトモ之ヲ積分シテ後チ微分スレバ原ノ函數$F(x)$ヲ得.

(b)式中ノ$F(x)dx$ノ代リニ$df(x)$ヲ入ルレバ

$$\int[df(x)]=f(x),\qquad 即チ\qquad \int\left[\frac{df(x)}{dx}\right]dx=f(x)$$

然ラバ$f(x)$ガxノ如何ナル函數ナリトモ之ヲ微分シテ後

ヲ積分スレバ原ノ函數$f(x)$ヲ得.

今$f(x)$ノ微分ヲ$F(x)dx$トシCヲ任意ノ常數トスレバ$f(x)+C$ノ微分モ亦$F(x)dx$ナリ. 何トナレバ微分學ニ於テ

$$\frac{d[f(x)+C]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dC}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+0=F(x)$$

ナルヲ以テナリ. 換言スレバ或函數$F(x)$ノ積分ハ無數アリテ上式ノCニ一ツノ定値ヲ與フル毎ニ一ツノ積分ヲ得ベキナリ. 之ヲ式ニテ表ハセバ

$$\int F(x)dx=f(x)+C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

然レドモCヲ略シテ(b)式ノ如クニ書スルトモ決シテ誤リニアラズ. 是レ(c)式ハ$f(x)+C$ナル函數ガ悉ク$F(x)$ノ積分ナリトイフコトヲ表ハシ, (b)式ハ$F(x)$ノ積分ノ一ツガ$f(x)$ニシテ$C=0$ナリト解スルヲ得レバナリ. 此(c)式中ニ含メルCヲ名付ケテ積分常數(Constant of Integration)ト謂フ.

42. 積分基礎公式. 主要ナル函數ヲ微分シテ得タル式ヲ積分ノ式ニ書換フレバ基礎タルベキ積分公式ヲ得ベキナリ.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \ldots\ldots\ldots \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x \ldots\ldots\ldots \int \cos x\,dx=\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x \ldots\ldots\ldots \int \sin x\,dx=-\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x \ldots\ldots\ldots \int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\operatorname{cosec}^2 x \ldots\ldots\ldots \int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x} \ldots\ldots\ldots \int \frac{1}{x}dx=\log x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \ldots\ldots\ldots \int e^x dx=e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right)=a^x \ldots\ldots\ldots \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{d}{dx}(-\cos^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ldots\ldots\ldots \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x$$

又ハ $-\cos^{-1}x$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{d}{dx}(-\cot^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2} \ldots\ldots\ldots \int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x$$

又ハ $-\cot^{-1}x$

最後ノ二ツハ二樣ノ積分ヲ有スル如クナレドモ唯常數ノ差アルノミナレバ二ツノ內孰レヲ取ルモ可ナリ

$$\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x, \qquad \tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x$$

43. xノ二ツノ函數ノ和又ハ差ノ積分. 與ヘラレタル函數ヲ$f(x)$及$\phi(x)$トスレバ

$$\frac{d}{dx}[f(x)+\phi(x)]=\frac{df(x)}{dx}+\frac{d\phi(x)}{dx}$$

之ヲ積分スレバ

$$f(x)+\phi(x)=\int\left[\frac{df(x)}{dx}+\frac{d\phi(x)}{dx}\right]dx$$

然ルニ積分ノ意義ニヨリ

$$f(x)=\int\frac{df(x)}{dx}dx. \qquad \phi(x)=\int\frac{d\phi(x)}{dx}dx$$

$$\therefore \int\left[\frac{df(x)}{dx}+\frac{d\phi(x)}{dx}\right]dx=\int\frac{df(x)}{dx}dx+\int\frac{d\phi(x)}{dx}dx \ldots\ldots\ldots (51)$$

同樣ニシテ

$$\int\left[\frac{df(x)}{dx}-\frac{d\phi(x)}{dx}\right]dx=\int\frac{df(x)}{dx}dx-\int\frac{d\phi(x)}{dx}dx \ldots\ldots\ldots (51a)$$

即チ二ツノ函數ノ和又ハ差ノ積分ハ各函數ノ積分ノ和又ハ差ニ等シ. 二ツノ函數ニ限ラズ三ツ以上ノ函數ニ就テモ亦同樣ノ法則ガ成立スルヤ明カナリ.

又Cヲ常數トシ$f(x)$ヲxノ函數トスレバ

$$\frac{d}{dx}[Cf(x)]=C\frac{df(x)}{dx}$$

之ヲ積分スレバ $$Cf(x)=\int C\frac{df(x)}{dx}dx$$

然ルニ $$f(x)=\int\frac{df(x)}{dx}dx$$

$$\therefore\quad \int C\frac{df(x)}{dx}dx=C\int\frac{df(x)}{dx}dx \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (52)$$

卽チ函數ノ積分ヲナスニ當リ常數ナル因數ハ之ヲ積分符號外ニ出スヲ得.

例題. $$\int(2x+1)(x-2)dx=\int(2x^2-3x-2)dx=2\int x^2dx-3\int x\,dx-2\int dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x$$

44. 變數ノ置換ニ依ル積分. 微分係數ヲ求ムルトキ變數ヲ新變數ニテ置換ヘテ簡單ニ演算ヲナシ得ルコトアリ．是ト同様ニ置換法ニ依リテ積分ヲナスノ便ナルコト屢々アリ.

$$\int F(x)dx=f(x)$$

トスレバ $$\frac{df(x)}{dx}=F(x)$$

今 $x=\phi(u)$ ト置ケバ $F(x)$ 及 $f(x)$ ハ共ニ u ノ函數ナリト見做スヲ得ルヲ以テ

$$\frac{df(x)}{du}=\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=F(x)\frac{dx}{du}$$

故ニ u ヲ變數トシテ之ニ就テ積分スレバ

$$f(x)=\int F(x)\frac{dx}{du}du=\int F[\phi(u)].\phi'(u).du\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (53)$$

目的トスル所ハ x ノ函數ナル $f(x)$ ヲ求ムルニ在リ．然レバ此式ノ右邊ハ u ノ函數トシテ表ハサレタル故，之レニ依リテ得タル結果ヲ再ビ x ノ項ニテ表ハスヲ要ス.

例題 1. $\int(a+bx)^n dx$.

$a+bx=u$ ト置ケバ

$$bdx=du,\quad 卽チ\quad dx=\frac{du}{b}$$

$$\therefore\quad \int(a+bx)^ndx=\int u^n\frac{du}{b}=\frac{1}{b}\int u^ndu$$

若シ $n=-1$ ナレバ

$$\int\frac{du}{u}=\log u,\quad 卽チ\quad \int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\log(a+bx)$$

又 $n\neq-1$ ナレバ

$$\int u^ndu=\frac{u^{n+1}}{n+1},\quad 卽チ\quad \int(a+bx)^ndx=\frac{1}{b}\cdot\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1}$$

例題 2. $\int\cos ax.dx$.

$ax=u$ ト置ケバ $\quad adx=du$

$$\therefore\quad \int\cos ax.dx=\int\cos u\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int\cos u\,du=\frac{1}{a}.\sin u=\frac{1}{a}\sin ax$$

例題 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

$x=au$ ト置ケバ $\quad dx=adu$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\sin^{-1}u=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

例題 4. $\int\frac{a+x}{x^2+2ax+b^2}dx$.

先ヅ $f(x)$ ヲ x ノ函數トシ $f'(x)$ ヲ其微分係數トシテ $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ナル式ノ積分ヲ求メンニ $f(x)=u$ ト置ケバ $f'(x)dx=du$ ナルヲ以テ

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{du}{u}=\log u=\log[f(x)]$$

與ヘラレタル式ニ於テ $f(x)=x^2+2ax+b^2$ トスレバ $f'(x)=2(x+a)$ ナリ． 依ツテ

$$\int\frac{a+x}{x^2+2ax+b^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(a+x)}{x^2+2ax+b^2}dx=\frac{1}{2}\log(x^2+2ax+b^2)$$

45. 部分分數ニ分チテ積分スル方法. 之レハ積分スベキ式ヲ分數ニ分チテ別々ニ積分スル方法ナリ.

例題. $\int\frac{dx}{(1-x)(2-x)}$.

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(1-x)(2-x)}=\int\frac{dx}{1-x}-\int\frac{dx}{2-x}=-\log(1-x)+\log(2-x)=\log\frac{2-x}{1-x}$$

46. 部分積分法 (Integration by Parts). $f(x)$ 及 $\phi(x)$ ガ共ニ x ノ函數ナレバ

$$\frac{d}{dx}[f(x).\phi(x)]=f(x)\frac{d\phi(x)}{dx}+\phi(x)\frac{df(x)}{dx}$$

之ヲ積分スレバ

$$f(x).\phi(x)=\int f(x)\frac{d\phi(x)}{dx}dx+\int\phi(x)\frac{df(x)}{dx}$$

$$\therefore\quad \int f(x).\phi'(x)dx=f(x).\phi(x)-\int\phi(x).f'(x)dx \quad\text{............ (54)}$$

此式ハ二ツノ函數ノ積ヨリ成レル積分ニ於テ其因數タル一ツノ函數ガ容易ニ積分シ得ルモノナルトキ之ヲ他ノ積分ニ化スルニハ如何ニナスベキカヲ表示スルモノニシテ之ヲ部分積分法ト謂フ.

例題 1. $\int\log x.dx.$

$\log x=f(x)$, $\phi'(x)=1$ トスレバ

$$f'(x)=\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x},\qquad \phi(x)=x$$

$$\therefore\quad \int\log x.dx=\log x.x-\int x.\frac{1}{x}.dx=x(\log x-1).$$

例題 2. $\int x.\sin x.dx.$

$f(x)=x$, $\phi'(x)=\sin x$ ト置ケバ

$$f'(x)=1,\qquad \phi(x)=\int\sin x.dx=-\cos x$$

$$\therefore\quad \int x.\sin x.dx=-x.\cos x-\int(-\cos x)dx=-x.\cos x+\sin x.$$

例題 3. $\int x^2.\sin x.dx.$

$f(x)=x^2$, $\phi'(x)=\sin x$ ト置ケバ

$$f'(x)=2x,\qquad \phi(x)=\int\sin x.dx=-\cos x$$

$$\therefore\quad \int x^2\sin x.dx=-x^2\cos x+\int 2x.\cos x.dx$$

$\int 2x.\cos x.dx$ ヲ求ムル爲メニ更ニ此法ヲ適用シ $f(x)=2x$, $\phi'(x)=\cos x$ トスレバ

$$f'(x)=2,\qquad \phi(x)=\int\cos x\,dx=\sin x$$

$$\therefore\quad \int 2x.\cos x.dx=2x.\sin x-\int 2.\sin x.dx$$

依リテ $$\int x^2\sin x.dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x.$$

47. 定積分 (Definite Integral). $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3$ ニ於テ x ヲ 2 トセルトキノ値ヨリ x ヲ 1 トセルトキノ値ヲ減ジタル差ヲ

$$\int_1^2 x^2dx=\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^2$$

ニテ表ハス. 而シテ其結果ハ

$$\int_1^2 x^2dx=\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$$

一般ニ次ノ記號ヲ以テ表ハス.

$$\int_a^b F(x)dx$$

之ヲ名付ケテ函數 $F(x)$ ノ a ヨリ b ニ至ル定積分ト謂ヒ, a 及 b ヲ積分ノ限界 (Limit) ト稱ス. 而シテ特ニ a ヲ下限 (Lower Limit), b ヲ上限 (Upper Limit) ト謂フ. 又 a, b 區間ノ定積分ヲ求ムルコトヲ名付ケテ $F(x)$ ヲ a ヨリ b 迄積分スルト謂フ.

定積分ニ對シテ $\int F(x)dx$ ヲ不定積分 (Indefinite Integral) ト呼ブコトアリ.

一般ニ $$\int_a^b F(x)dx=\Big|f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$$

積分常數ハ定積分ノ値ニ關係ヲ有セズ. 何トナレバ

$$\int F(x)dx=f(x)+C$$

トスレバ

$$\int_a^b F(x)dx=\Big|f(x)+C\Big|_a^b=[f(b)+C]-[f(a)+C]=f(b)-f(a)\quad\text{...... (55)}$$

又 $\int_a^b F(x)dx=f(b)-f(a)$ ナルトキハ

$$\int_b^c F(x)dx=f(c)-f(b),\qquad \int_a^c F(x)dx=f(c)-f(a)$$

$$\therefore\quad \int_a^b F(x)dx+\int_b^c F(x)dx=\int_a^c F(x)dx \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (55a)$$

即チaヨリcニ至ル定積分ハaヨリbニ至ル定積分トbヨリcニ至ル定積分トノ和ニ等シ.

次ニ
$$\int_a^b F(x)dx=f(b)-f(a),\qquad \int_b^a F(x)dx=f(a)-f(b)$$

$$\therefore\quad \int_a^b F(x)dx=-\int_b^a F(x)dx \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (55b)$$

即チ定積分ニ於テ上限ト下限トヲ入換フルトキハ其値ハ同一ニシテ符號ヲ變ズ.

例題. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}.dx$

$x=a\sin\theta$ ト置ケバ $dx=a\cos\theta.d\theta$ ナルヲ以テ

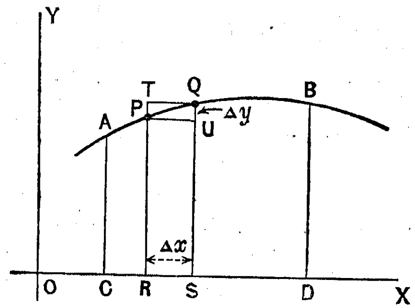
$$\int\sqrt{a^2-x^2}.dx=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta$$

而シテ $x=0$ ナルトキハ $\theta=0$ ニシテ $x=a$ ナルトキハ $\theta=\frac{\pi}{2}$ ナリ.

$$\therefore\quad \int_0^a\sqrt{a^2-x^2}.dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta.d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left|\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-(0+0)\right]=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

第 40 圖



48. 定積分ノ幾何學的意義. 第40圖ニ於テ AB ヲ一ツノ曲線トシ, 之レト X 軸及二縦距トニテ圍マレタル部分ノ面積ヲ求メントス. P點ノ正座標ヲ (x,y) トシ $RS=\Delta x$ トスレバ $SQ=y+\Delta y$ ナ

リ. 又二縦距 AC 及 BD ト X 軸トニテ圍マレタル面積, 即チ ACDB ヲ A トスレバ面積 RPQS ハ ΔA ヲ表ハスベキヲ以テ

$$\frac{\text{面積 RTQS}}{\text{面積 RPUS}}=\frac{RT}{RP}=\frac{y+\Delta y}{y}=1+\frac{\Delta y}{y}$$

$\Delta x=0$ ナル極限ニ於テハ Δy モ亦零ナリ. 依ツテ

$$\text{Lim}\frac{\text{面積 RTQS}}{\text{面積 RPUS}}=1$$

面積 RPQS ハ面積 RTQS ト面積 RPUS トノ中間ニ位スルモノナル故

$$\text{Lim}\frac{\text{面積 RPQS}}{\text{面積 RPUS}}=1,\qquad \text{即チ}\qquad \text{Lim}\frac{\Delta A}{y.\Delta x}=1$$

又ハ
$$\frac{dA}{y.dx}=1\qquad\therefore\quad dA=y.dx$$

$$A=\int y\,dx+C$$

第40圖ニ於テ横距 OC, OD ヲ夫々 a, b トスレバ

$$A=\int_a^b y\,dx$$

例ヘバ AB ヲ抛物線トシテ其方程式ヲ $y=\sqrt{2px}$ トスレバ

$$A=\int\sqrt{2px}.dx+C=\sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx+C=\frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}+C$$

座標原點ヨリ面積ヲ測ルトキハ $x=0$ ニ對シテ $A=0$ ナルガ故ニ積分常數 $C=0$ ナリ. 然ラバ $A=\frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}$ ヲ得. a 及 b ヲ横距トセル二ツノ縦距間ノ面積ハ次ノ如シ

$$\int_a^b\sqrt{2px}.dx=\left|\frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}\right|_a^b=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\left[b^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right]$$

49. 二重積分 (Double Integral). 是マデハ單一變數ニ關スル積分ノミニ就テ述ベシ故, 積分モ亦單一ナル積分ニ限ラレタリ. 然レドモ複變數函數ノ例尠ラズシテ此等函數ハ各ノ自變數ニ對シテ各積分ヲ行フコトヲ得ルノミナラズ又各ノ變數ニ就テ順次積分スルヲ得ベキナリ.

例ヘバ $\frac{d^2f(x)}{dx^2}=F(x,y)$ ノ積分ハ y ヲ一ツノ常數ト見做シ, x ニ

就テ二度積分シテ見出スヲ得、而シテ此積分ニ於テyヲ常數ト見做シタルガ故ニ積分常數ハyノ不定函數ナルベキナリ.

又 $\frac{d^2f(x)}{dy.dx}=\mathrm{F}(x,y)$ ヲ積分スルニハ之ヲ書換ヘテ

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)=\mathrm{F}(x,y)$$

第二次微分ヲナスニ當リxヲ常數ト見做シyニ就テ微分シタルモノナリ. 然ラバ

$$\frac{df(x)}{2x}=\int \mathrm{F}(x,y)dy$$

此式ニ於テ $f(x)$ ハ明カニxニ關スル其微分係數ガ $\int \mathrm{F}(x,y)dy$ ナル如キ函數ナリ.

$$\therefore \quad f(x)=\int\left[\int \mathrm{F}(x,y)dy\right]dx$$

即チ

$$f(x)=\int\int \mathrm{F}(x,y)dy\,dx \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (56)$$

二重積分ニ於テハ積分ノ順序ヲ變更スルトキハ, 一般ニ積分限界モ亦變更セザルベカラズ. 例ヘバ圓ノ方程式ヲ $x^2+y^2=r^2$ スレバ

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}, \qquad x=\pm\sqrt{r^2-y^2}$$

$$\therefore \quad 面積\ \mathrm{A}=\int_{-r}^{+r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} dx.dy=\int_{-r}^{+r}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} dy.dx=\pi r^2$$

然レドモ此第一積分ヲ書換ヘテ

$$\mathrm{A}=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}}\int_{-r}^{+r} dx.dy=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} 2r.dx=4r\sqrt{a^2-x^2}$$

トナス能ハザルガ如シ. 尤モ積分限界ガ常數ナルトキハ

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta dx.dy \qquad 及 \qquad \int_\alpha^\beta\int_a^b dy.dx$$

ナル兩式ハ共ニ $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$ ナル四ツノ直線ガ圍ム矩形ノ面積ヲ表ハスモノナルヲ以テ

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta dx.dy=\int_\alpha^\beta\int_a^b dy.dx$$

即チ限界ヲ變更スルノ要ナシ.

附錄

積分公式

1. $\int ax^n dx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}$.

2. $\int \frac{dx}{x}=\log x$.

3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}$.

4. $\int e^x dx=e^x$.

5. $\int \cos x\,dx=\sin x$. $\quad \int \cos mx\,dx=\frac{1}{m}\sin mx$.

6. $\int \sin x\,dx=-\cos x$. $\quad \int \frac{2dx}{\sin 2x}=\log\tan x$.

7. $\int \sec^2 x\,dx=\tan x$.

8. $\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx=-\cot x$.

9. $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x$.

10. $\int \mathrm{cosec}\,x\cot x\,dx=-\mathrm{cosec}\,x$.

11. $\int \tan x\,dx=\log\sec x$.

12. $\int \cot x\,dx=\log\sin x$.

13. $\int \sec x\,dx=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)$.

14. $\int \mathrm{cosec}\,x\,dx=\log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

15. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}=-\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$.

16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}=-\cos^{-1}\frac{x}{a}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\log(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$.

19. $\int \frac{dx}{a\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}=-\frac{1}{a}\mathrm{cosec}^{-1}\frac{x}{a}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}$.

21. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$

22. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=-\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+\frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right).$

23. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}}=\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}.$

24. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}.$

25. $\int\sqrt{a+bx}dx=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}.$