土木工學 上卷

豫備數學

第一篇

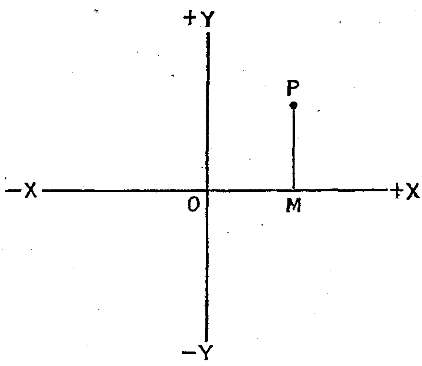
解析幾何學大意

解析幾何學(Analytical Geometry)ハ數學ノ一分科ニシテ線或ハ面積ニ關スル問題ヲ研究シ或ハ點ノ位置及曲線ノ形ヲ表ハス爲ニ幾何學ニ代數的解析法ヲ應用シタルモノナリ.

第一章 點(Point)

1. 諸定義 一平面ニ於テ一點Oヲ過リ二ツノ直線XOX及YOYヲ引ケ. 其交角ハ任意ナレドモ通常直角ナルヲ便利トス.

第1圖



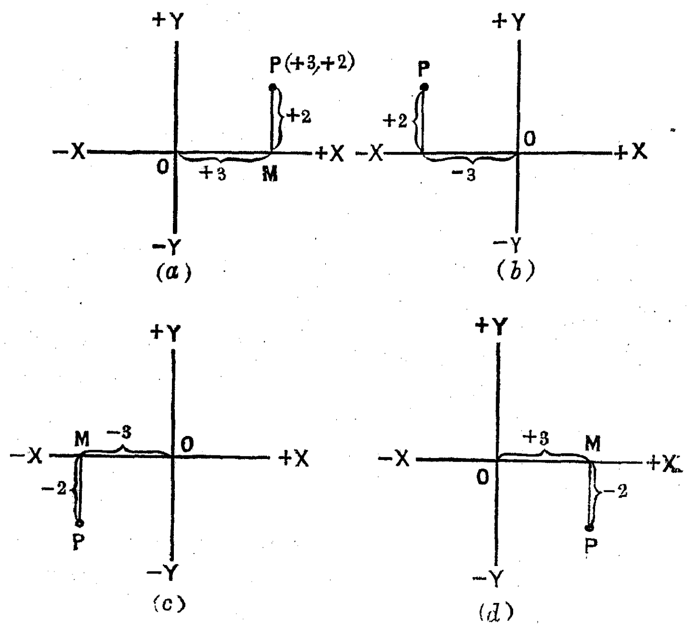
此Oヲ原點(Origin)ト稱シXOXヲX軸(X-Axis)ト稱シYOYヲY軸(Y-Axis)ト稱ス. 平面上ノ任意ノ一點PヨリY軸ニ平行ニPMヲヒキX軸トMニ於テ交ルトセヨ. 然ルトキハPMヲP點ノ縦距(Ordinate)ト稱シOMヲ横距(Abscissa)ト稱ス. 而テ横距ハMガ

Oヨリ右方ニ在レバ正トシ左方ニ在レバ負ナリトス．縱距ハPガX軸ヨリ上ニ在レバ正トシ下ニ在レバ負トス．橫距ヲ示スニxヲ以テシ縱距ヲヲ示スニyヲ以テス．

コノ橫距及縱距ヲ知ルトキハ其點ノ位置ヲ知ルヲ得．如斯ニ點ノ位置ヲ表ハスモノヲ總稱シテ座標 (Coordinates) ト謂フ．X軸及Y軸ヲ總稱シテ座標軸 (Coordihates Axes) ト謂ヒ其交角ガ直角ナルトキハ之ヲ正座標軸 (Rectangnlar Coordinates Axes) ト謂フ．直角ナラザレバ之ヲ斜座標軸 (Obliqne Coordinates Axes) ト稱ス．

例令バ第2圖 (a) ニ於ハ $x=+3$ $y=+2$ 之ヲ記スルニ $(+3, +2)$ ヲ以テス．同樣ニシテ (b) 圖ニ於テハ座標ハ $(-3, +2)$, (c) 圖ニ於テハ $(-3, -2)$, (d) 圖ニ於テハ $(+3, -2)$ ナリ．

第2圖

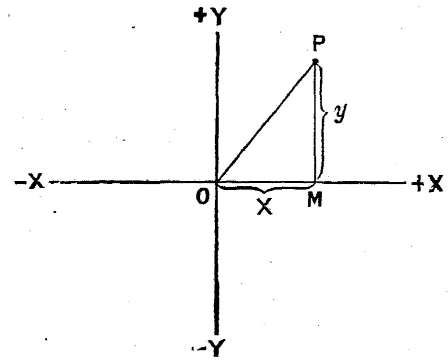


2. 任意ノ點ヨリ其座標ヲ用ヰテ原點マデノ距離ヲ求ムルコト． 任意ノ一點Pノ座標ヲ (x, y) トスレバ

$$\overline{OP}^2=x^2+y^2$$

$$\therefore\ \overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}\ \cdots\cdots(1)$$

第3圖



次ニ第4圖ノ如ク斜座標軸ノ場合ヲ考フルニ

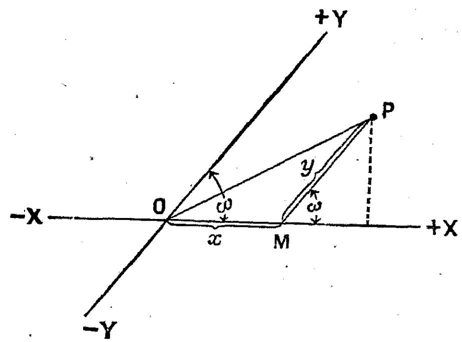
$$\overline{OP}^2=\overline{OM}^2+\overline{PM}^2-2\overline{OM}\ \overline{PM}.\cos OMP$$

$$\overline{OP}^2=\overline{OM}^2+\overline{PM}^2+2\overline{OM}.\overline{PM}.\cos XOY$$

$$\therefore\ \overline{OP}^2=x^2+y^2+2xy\cos\omega$$

$$\therefore\ \overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\omega}\ \cdots\cdots(2)$$

第4圖



(1) 式ニ於テハ x 及 y ハ共ニ平方ナレバ其等ノ符號ノ正負ハ距離ニハ無關係ナリ．

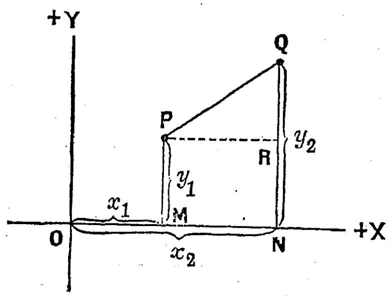
(2) 式ニ於テ ω ガ鋭角ニシテ x ト y トガ同符號ナルトキハ $2xy\cos\omega$ ハ正ニシテ x ト y トガ異符號ナルトキハ負トナル．又 ω ガ鈍角ナルトキハ之ニ反ス．卽チ $2xy\cos\omega$ ガ正ナルカ負ナルカニ因リテ $\overline{OP}$ ナル距離ニ差異アリ．

3. 二點間ノ距離ヲ求ムルコト． 二點ヲP及Qトシ其座標ヲ夫々 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) トセヨ．

X軸ニ並行ニPRヲ引キ之トQNトノ交點ヲRトセヨ．

$$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{QR}^2$$

第5圖



而テ $\overline{PR}=\overline{ON}-\overline{OM}=x_2-x_1$

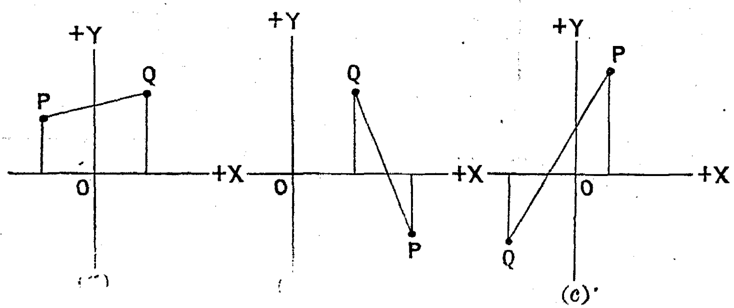
$\overline{QR}=\overline{QN}-\overline{PM}=y_2-y_1$

∴ $\overline{PQ}=\sqrt{\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}}$ ....(3)

(3)式ハ第6圖ノ場合ニモ同樣ニ適用スルヲ得. 讀者自ラ之ヲ試ムベシ.

斜座標軸ノ場合ナレバ第7圖ニ於テ

第6圖

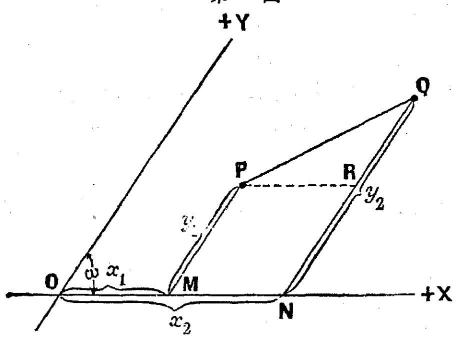


$$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{QR}^2-2\overline{PR}.\overline{QR}.\cos PRQ$$

$$\angle PRQ=\angle ONQ=\pi-\omega$$

$$\therefore\ \overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{QR}^2+2\overline{PR}.\overline{QR}.\cos\omega$$

第7圖

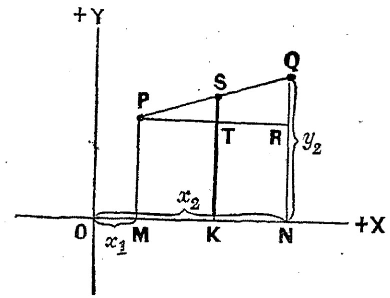


$$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega\}}$$ ....(4)

4. 二點ヲ結付クル直線ノ中點ノ座標ヲ求ムルコト.

二點P, Qノ座標ヲ夫々(x_1, y_1)及(x_2, y_2)

第8圖



トシSヲ其中點トセ. PM, SK, QNヲY軸ニ並行ニ引キ又X軸ニ並行ニPTRヲ引ケ.

$$\overline{OK}=\overline{OM}+\overline{MK}=\overline{OM}+\overline{PT}$$

$$=\overline{OM}+\frac{1}{2}\overline{PR}$$

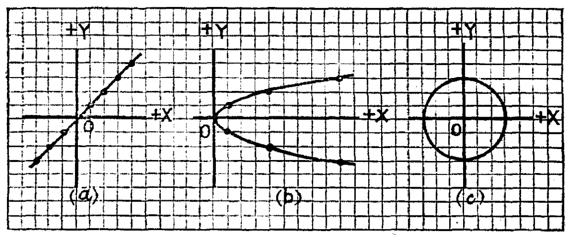
$$\therefore\ \overline{OK}=x_1+\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

$$\overline{SK}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$ ....(5)

コノ(5)式ハ軸ノ交角ニハ無關係ニシテ斜座標軸ニモ適用スルヲ得.

5. 線ノ方程式 (Equation of Lines)—方程式ノ軌跡 (Locus of Equations). 二ツノ未知數x, yヨリ成レル一ツノ方程式ハx, yノ値ヲ同時ニ決定スル能ハズト雖モ兩者ノ中ノ一ツ

第9圖



ニ或値ヲ與フルトキハ他ヲ知ルヲ得ベシ. 即チ之ヨリxトyトノ關係ヲ知ルヲ得. 故ニ斯ノ如キ方程式ニ於テx及yハ夫々橫距及縱距ヲ表ハスモノトシ之ヲ以テ線ヲ表ハス所ノ方程式ト爲スヲ得.

例令$x=y$ナル方程式アリ. 之ハ如何ナル線ヲ表ハス方程式ナルカヲ知ラントス. 今x = (−2), (−1), (0), (+1), (+2),

(+3)......... ノ値ヲ代入スレバ y ハ夫々 (−2), (−1), (0), (+1), (+2), (+3).........ノ値ヲトル. 即チ方程式ハ其座標ガ夫々 (−2, −2), (−1, −1), (0, 0), (+1, +1), (+2, +2)......... ナル無數ノ點ヲ表ハスナリ. 此等ノ點ノ軌跡ハ (a) 圖ノ如ク角 XOY ヲ二等分スル直線トナルナリ.

次ニ $y^2=x$ ナル方程式ヲ考フルニ x ニ順次 0, 1, 4, 9, 16...... ノ値ヲ與フレバ y ハ夫々 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ... ノ値ヲトル. 即チコノ式ハ座標ガ夫々 (0, 0), (+1, +1), (+4, +2), (+9, +3), (16, 4), (+1, −1), (+4, −2), (+9, −3), (16, −4)......... ナル無數ノ點ヲ表ハス. 即チ此等ノ點ヲ (b) 圖ノ如ク結付クレバコノ方程式ノ示ス曲線ノ形ヲ知ルヲ得.

次ニ $x^2+y^2=9$ ノ式ヲ考フルニ (x^2+y^2) ハ原點 O ヨリ點 (x, y) ニ至ル距離ノ平方ナリ. 而テ之ガ 9 ナルハ其ノ距離ガ 3 ナルヲ示ス. 故ニ此方程式ハ原點 O ヨリ 3 ナル距離ニアル點ノ軌跡ヲ表ハスヲ以テ (c) 圖ノ如ク半徑 3 ナル圓ナルヲ知ルベシ.

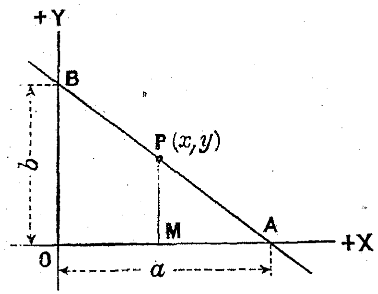
方程式ニ於テ任意ノ點ノ座標 (x, y) ヲ流通座標 (Current Cordinates) ト稱ス. 或ハ斯ノ如キ x, y ヲ變數 (Variables) ト稱スルコトアリ. 之ニ對シテ數字ニテ示セル數又ハ變化セザルモノト見做セル數ヲ常數 (Constant) 或ハ不變數ト稱シ通常 a, b 等ノ文字ヲ以テ表ハス.

第二章　直線 (Right Lines)

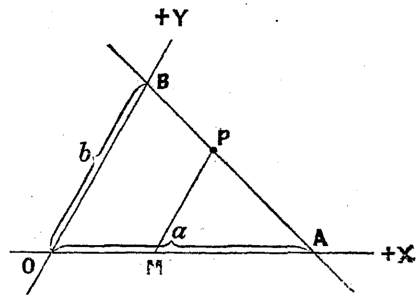
6. 或直線ノ座標軸上ノ截片ヲ知リテ其方程式ヲ求ムルコト. 一ツノ直線ガ X 軸ト交ル點ヲ A トシ Y 軸ト交ル點ヲ B トスレバ $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ ヲ夫々 X 軸及 Y 軸上ノ截片 (Intercept) ト稱ス.

此直線上ニ任意ノ點 P ヲ取リ其座標ヲ (x, y) トシ截片 $\overline{OA}, \overline{OB}$ ヲ夫々 a, b トセヨ. MP∥OB ナルヲ以テ

第 10 圖



第 11 圖



$$\frac{\overline{MP}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OA}-\overline{OM}}{\overline{OA}} \qquad \therefore \frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}=1-\frac{x}{a}$$

$$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \cdots\cdots(6)$$

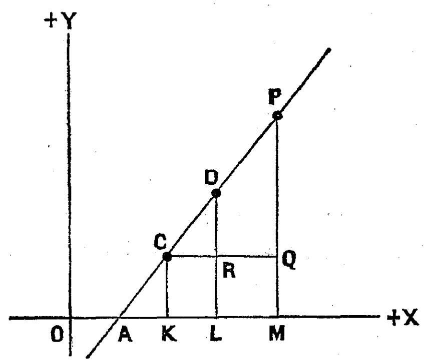
例令兩軸上ノ截片ガ $5, 6\frac{1}{2}$ ナル直線ノ方程式ハ

$13x+10y=65$ 　ナルガ如シ.

勿論 (6) 式ハ正及斜座標軸ノ何レノ場合ニモ同樣ニ適用スルヲ得.

7. 與ヘラレタル二點ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求ムルコト. 與ヘラレタル點ヲ C 及 D トシ其座標ヲ夫々 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) トセヨ. C 及 D ヲ通ル直線上ニ任意ノ點 P ヲトリ其座標ヲ (x, y) トセヨ. 縱線 CK, DL, 及 PM ヲ引ケ. C ヨリ OX ニ並行ニ CRQ ヲ引キ之ト DL 及 PM トノ交點ヲ R 及 Q トセヨ. △CDR ト △CPQ トハ相似ナルヲ以テ

第 12 圖



$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{DR}}=\frac{\overline{CQ}}{\overline{CR}}$$

$\overline{PQ}=y-y_1$ 　$\overline{DR}=y_2-y_1$

$\overline{CQ}=x-x_1$ 　$\overline{CR}=x_2-x_1$

$$\therefore\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ \text{......}(7)$$

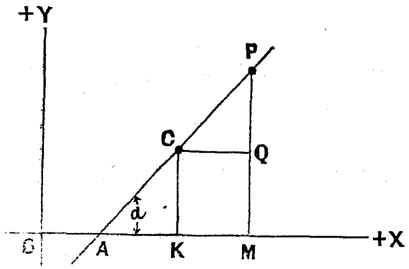
而テ通常之ヲ下ノ如ク變形シテ用フルコト多シ.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\ \text{......}(7a)$$

斜座標軸ノトキモ之ト同一ノ式ナリ.

8. 與ヘラレタル一點ヲ過リX軸ト與ヘラレタル角ヲナス直線ノ方程式ヲ求ムルコト. ACPヲ與ヘラレタル點Cヲ過リX軸ト與ヘラレタル角αヲナス直線トス. 點Cノ座標ヲ(x_1, y_1)トス. 此直線上ニ任意ノ點Pヲトリ其座標ヲ(x, y)トス. CQヲOXニ平行ニヒキ之トPMトノ交點ヲQトセヨ.

第 13 圖



$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}}=\tan QCP \qquad \frac{y-y_1}{x-x_1}=\tan\alpha$$

$$\therefore\ y-y_1=(x-x_1)\tan\alpha$$

而テ $\tan\alpha$ ヲ m ト記セバ

$$y-y_1=m(x-x_1)\ \text{......}(8)$$

(8)式ノ格段ナル場合ヲ列擧スレバ次ノ如シ.

(a) 與ヘラレタル點Cガ原點ニ一致スルトキ即チ原點ヲ過ル直線ノ方程式ハ

$$y=mx\ \text{......}(8a)$$

(b) 與ヘラレタル點CガY軸上ニアルトキY軸上ノ截片ヲbトスレバ

$$y=mx+b\ \text{......}(8b)$$

(c) 與ヘラレタル點CガX軸上ニアルトキX軸上ノ截片ヲaトスレバ

$$y=m(x-a)\ \text{......}(8c)$$

(d) X軸ニ並行ナル直線ノトキハ

$$y=b\ \text{......}(8d)$$

(e) Y軸ニ並行ナル直線ノトキハ

$$x=a\ \text{......}(8e)$$

(f) X軸ニ一致スル直線ノトキハ

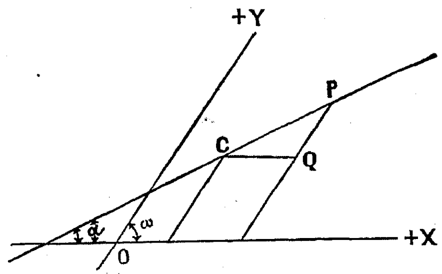
$$y=0\ \text{......}(8f)$$

(g) Y軸ニ一致スル直線ノトキハ

$$x=0\ \text{......}(8g)$$

次ニ第14圖ノ斜座標軸ノ場合ヲ考フルニ

第 14 圖



$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}}=\frac{\sin QCP}{\sin QPC}$$

$$\therefore\ \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$$

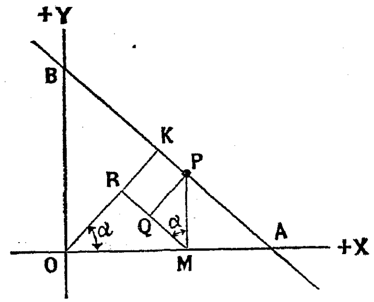
$$\therefore\ y-y_1=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}(x-x_1)$$

$\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}=m$ トスレバ

$$y-y_1=m(x-x_1)\ \text{......}(9)$$

9. 原點ヨリ或直線ニ下シタル垂線及コノ垂線ガX軸トナス角ヲ用ヰテ其直線ノ方程式ヲ求ムルコト. ABヲ與ヘラレタル直線トシPヲ此上ノ任意ノ點トス. 垂線$\overline{OK}=p$ 垂線OKガX軸トナス角ヲαトス. ABニ並行ニMRヲ引キ之トOKトノ交點ヲRトセヨ. 第15圖ニ於テ

第 15 圖



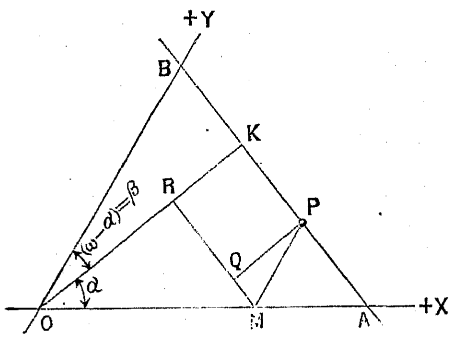
$$\overline{OR}+\overline{RK}=\overline{OK}=p$$

$$\overline{OR}=\overline{OM}.\ \cos\alpha=x.\ \cos\alpha$$

$$\overline{RK}=\overline{PQ}=PM.\ \sin QMP=y.\ \sin\alpha$$

$$\therefore\ x.\cos\alpha+y.\sin\alpha=p\ \text{......}(10)$$

第 16 圖



第 16 圖ニ於テ

$$\overline{OR}=\overline{OM}.\cos MOR$$

$$\overline{RK}=\overline{PM}.\cos MPQ$$

$$\overline{OR}=x.\cos\alpha$$

$$\overline{RK}=y.\cos(\omega-\alpha)=y.\cos\beta$$

$$\therefore\quad x.\cos\alpha+y.\cos\beta=p \qquad \text{.....................(11)}$$

10. <u>x及yノ一次方程式ハ直線ヲ表ハス.</u>

一次方程式ノ一般形ハ

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$$

式中 A, B 及 C ハ常數ナリ. コノ方程式ニ適合スル三點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 及 (x_3, y_3) ヲ取レバ

$$\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}=0 \quad \text{.........................}(a)$$

$$\mathrm{A}x_2+\mathrm{B}y_2+\mathrm{C}=0 \quad \text{.........................}(b)$$

$$\mathrm{A}x_3+\mathrm{B}y_3+\mathrm{C}=0 \quad \text{.........................}(c)$$

(b) 式ヨリ (a) 式ヲヒケバ

$$\mathrm{A}(x_2-x_1)+\mathrm{B}(y_2-y_1)=0 \quad \text{.........................}(d)$$

又 (c) ヨリ (a) ヲヒケバ

$$\mathrm{A}(x_3-x_1)+\mathrm{B}(y_3-y_1)=0 \quad \text{.........................}(e)$$

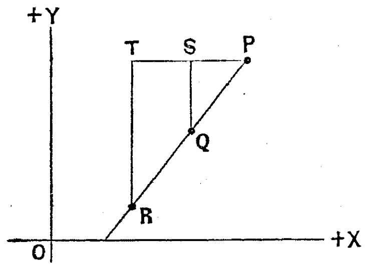
(d) 式ヨリ
$$-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{y_2-y_1}{(x_2-x_1)}$$

(e) 式ヨリ
$$-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$

$$\therefore\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$

第 17 圖ニ於テ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ヲ夫々 P, Q, R トシ P ヨリ X 軸ニ並行ニ引キタル直線ト Q 及 R ニ於ケル縱線トノ交リヲ夫々 S 及 T トスレバ上記ノ式ハ

第 17 圖



$$\frac{\overline{QS}}{\overline{PS}}=\frac{\overline{RT}}{\overline{PT}}$$

ナルコトヲ示ス. 卽チ △QPS ト △RPT トガ相似形ナルヤ明カナリ. 故ニ一次方程式ハ直線ヲ表ハスコトヲ知ルベシ. 而テ斜座標軸ノ場合ニ於テモ同様ニ證明スルヲ得.

一次方程式ハ直線ヲ表ハスヲ以テ今或直線ヲ次ノ式ニテ表ハストス.　$lx+my=d$

然ラバ
$$\frac{x}{\frac{d}{l}}+\frac{y}{\frac{d}{m}}=1$$

之ヲ (6) 式ト比較スレバ X 軸上ノ截片ハ $\frac{d}{l}$ ニシテ Y 軸上ノ截片ハ $\frac{d}{m}$ ナリ.

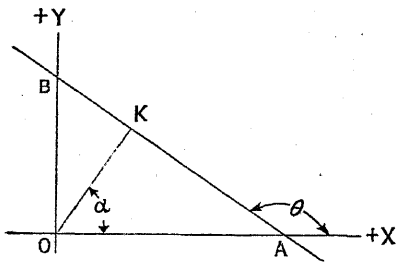
又直線ノ式ガ $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ ナルトキハ

$$\frac{x}{-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}+\frac{y}{-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}}=1$$

卽チ之ヲ (6) 式ト比較スレバ兩軸上ノ截片ハ夫々 $-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$ 及 $-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$ ナルコトヲ知ルベシ.

11. <u>直線 $lx+my=d$ ガ X 軸トナス角, 原點ヨリノ垂線及此垂線ガ X 軸トナス角ヲ求ムルコト.</u> 此直線ヲ AB トシ之ト X 軸トナス角 XAB ヲ θ トシ原點ヨリノ垂線 $\overline{OK}$ ヲ p トシ $\angle\mathrm{XOK}=\alpha$ トス.

第 18 圖



$$\tan\theta=-\tan BAO=-\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=-\frac{\frac{d}{m}}{\frac{d}{l}}=-\frac{l}{m}$$

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\frac{d^2}{l^2}+\frac{d^2}{m^2}=\frac{d^2}{l^2m^2}(l^2+m^2)$$

$$\left.\begin{aligned} p=\overline{OK}=\frac{\overline{OA}.\overline{OB}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{d}{l}\cdot\frac{d}{m}}{\frac{d}{lm}\sqrt{l^2+m^2}}=\frac{d}{\sqrt{l^2+m^2}} \\ \tan\alpha=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\theta=\frac{m}{l} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

12.　二直線ノ交角ヲ求ムルコト.　二直線ノ方程式ヲ

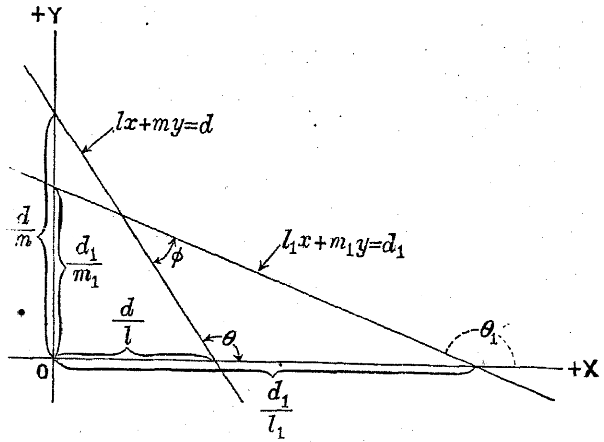
$$lx+my=d \qquad l_1x+m_1y=d_1$$

トセヨ. コノ二直線ガX軸トナス角ヲθ及θ_1トシ其交角ヲϕトスレバ

$$\tan\theta=-\frac{l}{m} \qquad \tan\theta_1=-\frac{l_1}{m_1}$$

$$\tan\phi=\tan(\theta\sim\theta_1)=\frac{\tan\theta\sim\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\tan\theta_1}=\frac{lm_1-l_1m}{ll_1+mm_1}\cdots\cdots\cdots(13)$$

第 19 圖



故ニ二直線ガ並行ナル爲ニハ $\tan\phi=0$ ナルコトヲ必要トス.
即チ　$\tan\theta\sim\tan\theta'=0$

$$\therefore\ \frac{l}{m}=\frac{l_1}{m_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

二直線ガ互ニ垂直ナル爲ニハ $\tan\phi=\infty$ ナルベキナリ.

$$\therefore\ 1+\tan\theta.\tan\theta_1=0$$

$$\therefore\ 1+\frac{ll_1}{mm_1}=0 \qquad \therefore\ \frac{l_1}{m_1}=-\frac{m}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

(14)式ハ斜座標軸ノトキモ適用スルコトヲ得.

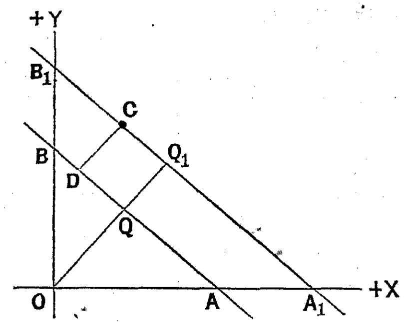
13.　與ヘラレタル點ヨリ與ヘラレタル直線マデノ距離ヲ求ムルコト.　ABヲ與ヘラレタル直線 $lx+my=d$ トシCヲ與ヘラレタル點(x_1, y_1)トス.　Cヲ通リABニ並行ナル直線A_1CB_1ヲ引ケバ此直線ノ方程式ハ(8)式ヨリ

$$lx+my=lx_1+my_1$$

原點ヨリAB及A_1B_1ニ下シタル垂線ヲOQ及ビOQ_1トスレバ求ムル距離$\overline{DC}$ハ

$$\overline{DC}=\overline{OQ_1}-\overline{OQ}$$

第 20 圖



而テ(12)式ヨリ

$$\overline{OQ_1}=\frac{lx_1+my_1}{\sqrt{l^2+m^2}} \qquad \overline{OQ}=\frac{d}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$\therefore\ \overline{DC}=\frac{lx_1+my_1-d}{\sqrt{l^2+m^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

此式ニ實數ヲ入レテ若シ負量トナルトキハ

$$\overline{OQ_1}<\overline{OQ}$$

トナル.　然ルトキハ次ノ如クシテ正量ヲ得.

$$\overline{DC}=\frac{d-lx_1-my_1}{\sqrt{l^2+m^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16a)$$

二ツノ直線ガ並行ナルトキ其方程式ヲ夫々

$$lx+my=d_1 \qquad lx+my=d_2$$

トセヨ.　然ルトキハ求ムル二線間ノ距離ハ次ノ如シ.

$$距離=\frac{d_1\sim d_2}{\sqrt{l^2+m^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16b)$$

14. 與ヘラレタル二直線ノ交點ヲ求ムルコト. 二直線ノ方程式ヲ知リテ其交點ノ座標ヲ知ラント欲スレバ其二方程式ヲ聯立方程式ト見做シ之ヲ解キテ x 及 y ノ値ヲ見出スベシ. 是レ求ムル交點ノ横距及縱距ナリ. 何トナレバ此二方程式ハ交點ニ於テノミ x 及 y ガ共通ノ値ヲ有スレバナリ.

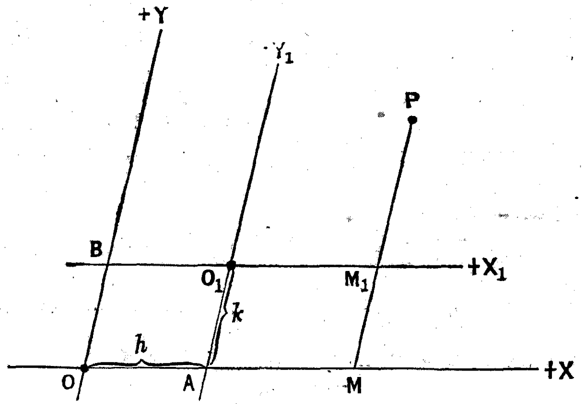
例ヘバ二直線　$3x-2y=8$　$2x+y=10$

ノ交點ヲ求ムルニハ之ヲ解キテ $x=4,\ y=2$ ヲ得.

第三章　座標軸ノ變換
(Transformation of Co-ordinate Axes)

15. 軸ノ方向ヲ變ズルコトナクシテ原點ヲ移スコト.

第21圖



OX, OY ヲ原ノ軸トシ O_1X_1, O_1Y_1 ヲ新軸トセヨ. 任意ノ點 P ノ座標ハ原軸ニ關シテハ (x, y) ニシテ新軸ニ關シテハ (x_1, y_1) ナリトシ原軸ニ關シテ新原點 O_1 ノ座標ヲ (h, k) トス. 然ルトキハ

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{OM}=\overline{AM}+\overline{OA}=\overline{O_1M_1}+\overline{OA} & \therefore\ x=x_1+h \\ \text{又}\quad \overline{PM}=\overline{PM_1}+\overline{M_1M}=\overline{PM_1}+\overline{O_1A} & \therefore\ y=y_1+k \end{array}\right\}\ \cdots\cdots\cdots(17)$$

此ノ式ハ正又ハ斜座標軸孰レニモ適用スルヲ得.

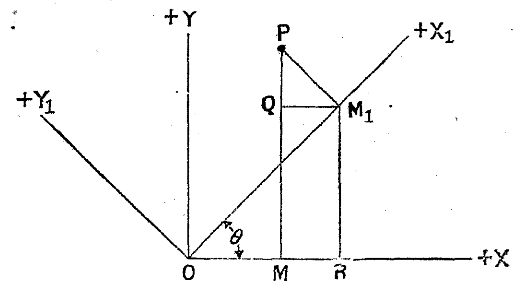
例題　直線 $x+2y=1$ アリ. 軸ノ方向ヲ變ズルコトナクシテ原點ヲ $(3, -4)$ ニ移セ.

$$(x_1+3)+2(y_1-4)=1 \qquad \therefore\ x_1+2y_1=6$$

是レ求ムル方程式ナリ.

16. 原點ヲ變ズルコトナクシテ一ツノ正座標軸ヨリ他ノ正座標軸ニ變換スルコト. 任意ノ點 P ノ座標ハ原軸

第22圖



OX, OY ニ關シテ (x, y), 新軸 OX_1, OY_1 ニ關シテ (x_1, y_1) ナリトス. 新軸ヲ原軸ヨリ角 θ ダケ廻轉シタリトセヨ.

$\angle XOX_1=\angle YOY_1=\theta$

M_1 ヨリ X 軸ニ並行ニ M_1Q ヲ引キ之ト PM トノ交點ヲ Q トセヨ.

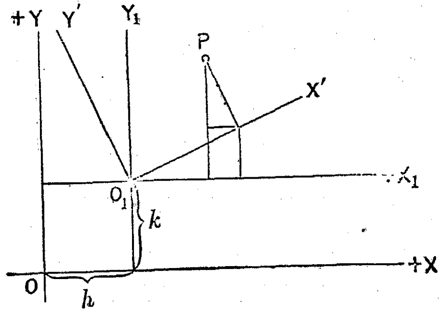
$$\left.\begin{array}{ll} \overline{OM}=\overline{OR}-\overline{MR}=\overline{OR}-\overline{QM_1} & \therefore\ x=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta \\ \text{又}\quad \overline{PM}=\overline{QM}+\overline{PQ}=\overline{M_1R}+\overline{PQ} & \therefore\ y=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta \end{array}\right\}\ \cdots\cdots(18)$$

例題　正座標軸ニ關シテ直線 $3x+2y=6$ アリ. 其軸ヲ 30° 廻轉セバ其直線ノ方程式如何.

$$3(x_1\cos 30^\circ-y_1\sin 30^\circ)+2(x_1\sin 30^\circ+y_1\cos 30^\circ)=6$$

$$\therefore\ (2+3\sqrt{3})x_1+(2\sqrt{3}-3)y_1=12$$

第23圖



17. 軸ノ方向並ニ其原點ヲ變ヘテ一ツノ正座標軸ヨリ他ノ正座標軸ニ移スコト.

原軸 OX 及 OY ニ關シテ新原點 O_1 ノ座標ヲ (h, k) トセヨ.

先ヅ軸ノ方向ヲ變ズルコトナク原點OヲO₁ニ變ズレバ

$$x=h+x_1 \qquad y=k+y_1$$

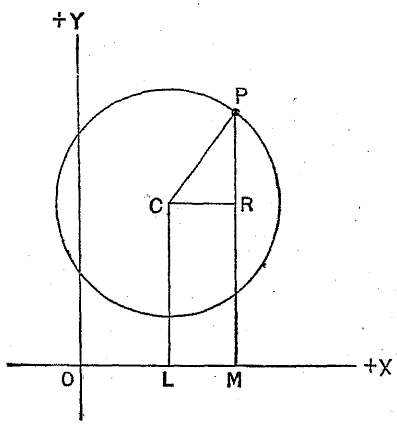
次ニO_1ヲ其儘ニシテ方向ヲ變ジテO_1Y'及O_1X'ノ位置ニ移セ. 新軸O_1X', O_1Y'ニ關シテP點ノ座標ヲ(x', y')トスレバ

$$x_1=x'.\cos\theta-y'.\sin\theta \qquad y_1=x'.\sin\theta+y'.\cos\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} x=h+x'.\cos\theta-y'.\sin\theta\\ y=k+x'.\sin\theta+y'.\cos\theta\end{array}\right\}\cdots\cdots(19)$$

第四章　圓 (Circles)

18. 圓ノ方程式ヲ求ムルコト. 圓ノ中心Cノ座標ヲ(a, b)トシ其半徑ヲrトス. 圓周上ノ任意ノ點Pノ座標ヲ(x, y)トス. C點ヨリX軸ニ並行ニCRヲ引キ之トPMトノ交點ヲRトセヨ. 先ヅ正座標軸ノ場合ヲ考フルニ ΔCRPハ直角三角形ナルヲ以テ



第24圖

$$\overline{CR}^2+\overline{RP}^2=\overline{CP}^2$$

$$\overline{CR}=x-a \qquad \overline{RP}=y-b$$

$$\therefore\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \cdots\cdots(20)$$

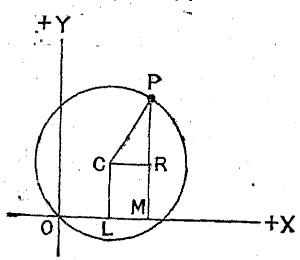
是レ圓ノ方程式ナリ.

次ニ圓ノ中心ヲ原點トスルトキハ

$$x^2+y^2=r^2\cdots\cdots(21)$$

(第9圖C參照)

次ニ圓周上ノ一點ヲ原點トスルトキハ圓ノ方程式ハ次ノ如クナル. 第25圖ニ於テ



第25圖

$$\overline{CP}^2=\overline{CR}^2+\overline{PR}^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2=r^2$$

原點Oハ圓周上ニアルヲ以テ $a^2+b^2=r^2$

$$\therefore\ x^2-2ax+y^2-2yb=0 \cdots\cdots(22)$$

次ニ直徑ヲX軸トシ其左端ヲ原點トナストキハ(22)式ニ於テ $a=r,\ b=0$ トナルヲ以テ

$$x^2-2rx+y^2=0\cdots\cdots(23)$$

19. 二次方程式ガ圓ヲ表ハスベキ要件. 一般式ハ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

先ヅ正座標軸ノ場合ヲ考フルニ上式ヲ變形スレバ

$$x^2+2\frac{B}{A}xy+\frac{C}{A}y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

(20)式ハ $\qquad x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

此ノ兩式ヲ比較スレバ

$$B=0\ ,\ \frac{C}{A}=1\ ,\ 2\frac{D}{A}=-2a\ ;\ 2\frac{E}{A}=-2b$$

$$\frac{F}{A}=a^2+b^2-r^2$$

故ニ上記ノ一般二次式ガ圓ヲ表ハスベキ要件ハ次ノ如シ.

$$B=0\ ,\ C=A\cdots\cdots(24)$$

20. 圓周上ノ任意ノ點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ムルコト. 圓ノ方程式ヲ $x^2+y^2=r^2$ トス. 圓周上ノ二點P, Qノ座標ヲ夫々(x', y')及(x'', y'')トセヨ. 然ルトキハP及Qヲ過ル割線ノ方程式ハ(7a)式ヨリ

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')\cdots\cdots(a)$$

今此ノ割線ガ切線トナルハP及Qガ一致シタル場合ナリ. 即チ $y''=y',\ x''=x'$ ナルベキナリ.

然ルニP及Qハ圓周上ノ點ナルヲ以テ

$$x'^2+y'^2=x''^2+y''^2=r^2 \qquad \therefore\ y''^2-y'^2=x'^2-x''^2$$

$$\therefore\ \frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{x''+x'}{y''+y'}$$

故ニ(a)式ハ $$y-y'=-\frac{x''+x'}{y''+y'}(x-x')$$

PトQガ一致スルトキハ

$$y-y'=-\frac{2x'}{2y'}(x-x')$$

$$\therefore\ yy'+xx'=y'^2+x'^2$$

$$\therefore\ xx'+yy'=r^2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

21. X軸トα角ヲナセル切線ノ切點ノ座標及切線ノ方程式ヲ求ムルコト. 前節ノ切線ノ方程式 $xx'+yy'=r^2$ ヨリ

$$y=-\frac{x'}{y'}x+\frac{r^2}{y'} \qquad \therefore\ -\frac{x'}{y'}=\tan\alpha$$

コノ式ト圓ノ方程式 $x'^2+y'^2=r^2$ トヨリ x' 及 y' ヲ求ムレバ

$$(-y'.\tan\alpha)^2+y'^2=r^2$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ y'&=\pm\frac{r}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\pm r\cos\alpha\\ x'&=-(\pm r.\cos\alpha)\tan\alpha=\mp r.\sin\alpha\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

是レ切線ノ切點ノ座標ナリ. 之レヲ切線ノ式ニ入ルレバ

$$y=x.\tan\alpha\pm\frac{r}{\cos\alpha}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

是レ切線ノ方程式ニシテ $\tan\alpha=m$ トスルトキハ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(27a)$$

22. 圓周上ノ任意ノ點ニ於ケル法線ノ方程式ヲ求ムルコト. 圓周上ノ任意ノ點 (x',y') ニ於ケル法線 (Normal Line) ハ其點ヲ過リテ切線 $xx'+yy'=r^2$ ニ垂直ナル直線ナリ.

故ニ(15)式ヨリ

$$y-y'=\frac{y'}{x'}(x-x')$$

$$\therefore\ y=\frac{y'}{x'}x\ \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

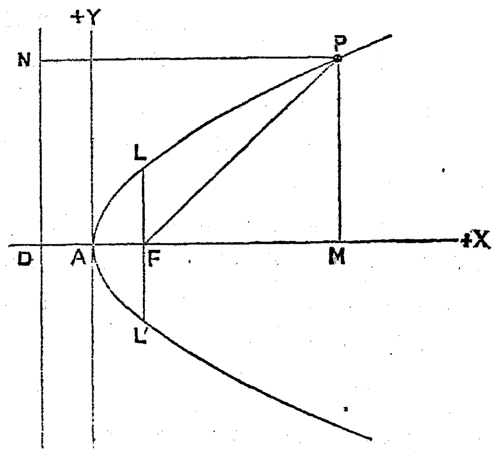
即チ法線ハ必ズ圓心ヲ過ルコトヲ知ルベシ.

第五章 圓錐曲線 (Conic Sections)

23. 定義 圓錐曲線トハ一定點ヨリノ距離ト一定直線ヨリノ距離トノ比ガ變化セザル如キ點ノ軌跡ヲ云フ. 其一定點ヲ焦點 (Focus) ト稱シ其一定直線ヲ準線 (Directrix) ト稱シ其不變ナル比ヲ偏心率 (Eccentricity) ト稱ス. コノ偏心率ガ1ニ等シキカ1ヨリ小ナルカ1ヨリ大ナルカニ從ツテ圓錐曲線ヲ三種ニ區別ス. 卽偏心率ガ1ニ等シキトキ之ヲ拋物線 (Parabola) ト稱シ1ヨリ小ナルトキハ之ヲ橢圓 (Ellipse) ト稱シ1ヨリ大ナルトキハ之ヲ双曲線 (Hyperbola) ト稱ス. 圓錐曲線トハ平面ニテ圓錐面ヲ截リタルトキ生ズル曲線ノ總稱ニシテ其截面ノ位置ノ如何ニヨリテ以上三種ノ曲線ヲ生ズルモノナリ.

焦點ヲ過リテ準線ニ垂直ナル直線ヲ軸ト稱シ焦點ヲ過リテ軸ニ垂直ナル弦ヲ通徑 (Latus Rectum) ト稱ス. 曲線ト軸トノ交點ヲ頂點 (Vertex) ト稱ス. 第26圖ニ於テFハ焦點, DNハ準線, DAYハ軸ナリ. 又Aハ頂點ニシテLFL′ハ通徑ナリ. Pハ曲線上ノ任意ノ點ニシテ偏心率ヲeトスレバ定義ニ由リ

第 26 圖



$$\overline{FP}=e\,\overline{NP}$$

24. 頂點ヲ原點トシ軸ヲX軸トシタル正座標軸ニ關スル圓錐曲線ノ方程式ヲ求ムルコト. 第26圖ニ於テ $\overline{DF}=c$ トセヨ. 縱線PMヲ引ケバ $\overline{FP}=e\overline{NP}$, 頂點Aハ $\overline{DF}$ ヲ1 e ナル比ニ分ツヲ以テ

$$\overline{DA}=\frac{c}{1+e},\qquad \overline{AF}=\frac{ec}{1+e}$$

$$\overline{FP}^2=\overline{FM}^2+\overline{PM}^2=\left(x-\frac{e.c}{1+e}\right)^2+y^2$$

$$\overline{NP}=\overline{DA}+\overline{AM}=\frac{c}{1+e}+x$$

$$\left[\left(x-\frac{e.c}{1+e}\right)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}=e\left(\frac{c}{1+e}+x\right)$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{e.c}{1+e}\right)^2+y^2=e^2\left(\frac{c}{1+e}+x\right)^2$$

$$\therefore\quad x^2-2\frac{e.c}{1+e}x+\frac{e^2c^2}{(1+e)^2}+y^2=\frac{e^2c^2}{(1+e)^2}+2\frac{e^2c}{1+e}x+e^2x^2$$

$$\therefore\quad (1-e^2)x^2+y^2-2e.cx=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

是レ圓錐曲線ノ一般方程式ナリ.

25. 三ツノ圓錐曲線ノ方程式ヲ求ムルコト. 先ヅ拋物線ニ於テハ $e=1$ ナルヲ以テ (29) 式ハ次ノ如ク變ズ.

$$y^2=2cx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

便宜ノ爲ニ $c=2a$ トスルヲ通例トス. 即チ此ノトキ a ハ頂點ト焦點トノ距離ヲ表ハスヲ以テ

$$y^2=4ax \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (30a)$$

次ニ楕圓及双曲線ノ式ヲ求ムルニハ先ヅ (29) 式ノ示ス曲線ガ軸ト交ル點ヲ求ムベシ. 同式ニ於テ $y=0$ トスレバ

$$(1-e^2)x^2-2ecx=0$$

$$\therefore\quad x=0 \quad 或ハ \quad x=\frac{2ec}{1-e^2}$$

即チ軸ト曲線トハ二點ニ於テ交ルヲ知ル. 此ノ二點間ノ中點ヲCトス. 頂點ヨリCニ至ル距離ハ $\frac{ec}{1-e^2}$ ナルヲ以テ原點ヲCニ移スニハ x ノ代リニ $\left(x+\frac{ec}{1-e^2}\right)$ ヲ代入スベシ.

然ラバ (29) 式ハ

$$(1-e^2)\left(x+\frac{ec}{1-e^2}\right)^2+y^2-2ec\left(x+\frac{ec}{1-e^2}\right)=0$$

$$\therefore\quad (1-e^2)x^2+y^2=\frac{e^2c^2}{1-e^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

楕圓ニ於テハ　$\frac{ec}{1-e^2}=a,\qquad \frac{ec}{\sqrt{1-e^2}}=b$

ト記ス. 然ルトキハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

双曲線ニ於テハ

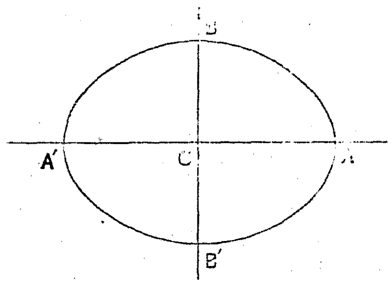
$$\frac{ec}{e^2-1}=a,\qquad \frac{ec}{\sqrt{e^2-1}}=b$$

トス. 然ラバ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

コノ兩曲線ハ共ニX軸及Y軸ニ對シテ對稱ナリ. 仍テCニ對シテモ亦對稱ナリ. Cヲ中心ト稱シAA′, BB′ヲ軸ト稱ス.

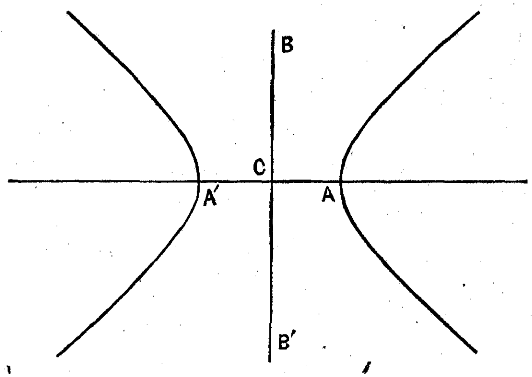
第 27 圖



楕圓ニ於テハ a 即チ $\overline{CA}$ ヲ長半軸 (Major Semi-Axis) ト稱シ, b 即チ $\overline{CB}$ ヲ短半軸 (Minor Semi-Axis) ト稱ス. 但シ b ハ a ヨリ小ナリ. 又單ニ $\overline{AA'}$ ヲ長軸 (Major Axis) ト稱シ, $\overline{BB'}$ ヲ短軸 (Minor Axis) ト稱ス.

双曲線ニ於テハ a 即チ $\overline{CA}$ ヲ貫半軸 (Transverse Semi-Axes) ト稱シ, b 即チ $\overline{CB}$ ヲ屬半軸 (Conjugate Semi-Axis) ト稱ス. 又單ニ $\overline{AA'}$ ヲ貫軸 (Transverse Axis) ト稱シ, $\overline{BB'}$ ヲ屬軸 (Conjugate Axis) ト稱ス.

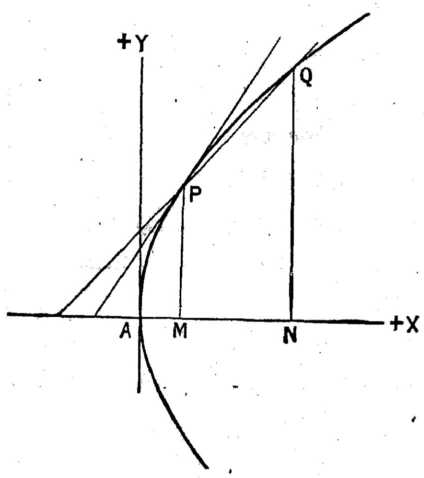
第 28 圖



前述ノ如ク此兩曲線ハ $\overline{BB'}$ ニ對シテ對稱ナルヲ以テ焦點及準線ハ各々二ツ宛アリテ中心ヨリノ距離ハ夫々相等シ.

26. 拋物線ノ任意ノ點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ムルコト. 拋物線上ノ二點 P, Q ノ座標ヲ (x', y') 及 (x'', y'') トセヨ. コノ二點ヲ過ル直線ノ方程式ハ (7a) 式ヨリ

第 29 圖



$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$$

而シテ P 及 Q ハ拋物線上ノ點ナルヲ以テ

$$y'^2=4ax'$$

$$y''^2=4ax''$$

$$\therefore\ y''^2-y'^2=4a(x''-x')$$

$$\therefore\ \frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{4a}{y''+y'}$$

$$\therefore\ y-y'=\frac{4a}{y''+y'}(x-x')$$

今PトQト一致シタ

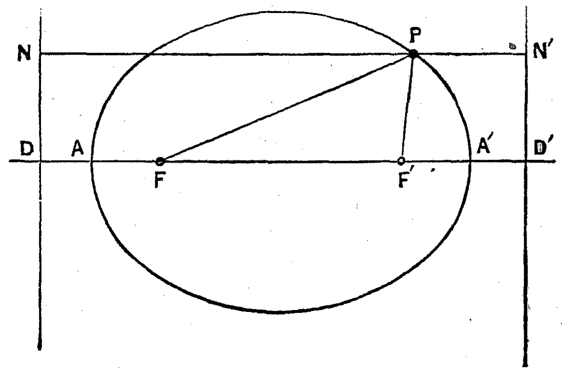
リトセヨ、即チ　$y''=y'$

$$\therefore\ y-y'=\frac{2a}{y'}(x-x')\qquad \therefore\ yy'-y'^2=2ax-2ax'$$

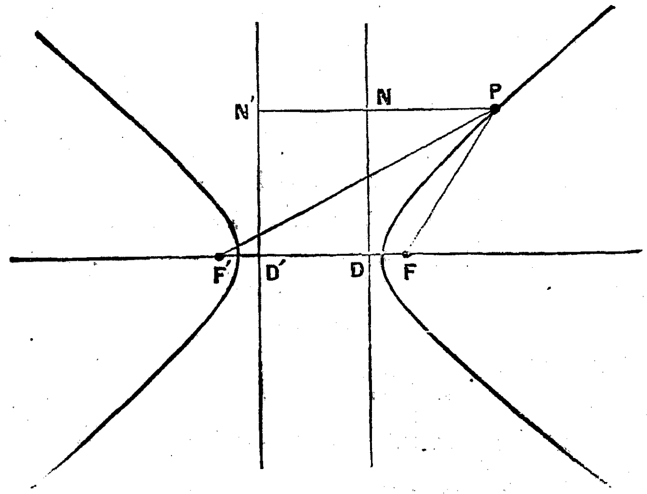
而シテ $y'^2=4ax'$ ナルヲ以テ　$yy'=2a(x+x')$ ………………(34)

27. 楕圓ニ於テハ其任意ノ點ヨリ兩焦點ニ至ル距離

第 30 圖



第 31 圖



ノ和ハ不變ニシテ長軸ニ等シ. 双曲線ニ於テハ其任意ノ點ヨリ兩焦點ニ至ル距離ノ差ハ不變ニシテ實軸ニ等シ.

楕圓ニ於テハ　$\overline{FP}=e\overline{NP}$,　$\overline{F'P}=e\overline{N'P}$

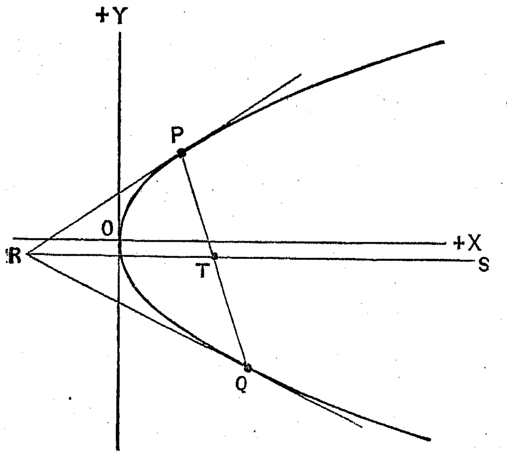
$\therefore\ \overline{FP}+\overline{F'P}=e(\overline{NP}+\overline{N'P})=e\overline{NN'}=$ 不變量 $=e(\overline{DF}+\overline{FD'})=\overline{AF}+\overline{FA'}=$ 長軸.

双曲線ニ於テハ　$\overline{FP}=e\overline{NP}$,　$\overline{F'P}=e\overline{N'P}$

$\therefore\ \overline{F'P}-\overline{FP}=e(\overline{N'P}-\overline{NP})=e\overline{NN'}=$ 不變量 $=e(\overline{D'F}-\overline{DF})=\overline{A'F}-\overline{AF}=$ 實軸.

28. 拋物線ノ性質. 拋物線上ニ任意ノ點 $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$ ヲトリ其點ニ於テ切線PR及QRヲ引キR點ニ於テ交ラシムレバRヲ通リテX軸ニ平行ナル直線RSハ弦PQヲTニ於テ二等分ス.

第 32 圖



PRノ方程式ハ(34)式ヨリ

$$yy_1=2a(x+x_1)\ \ldots\ (a)$$

RQノ方程式ハ同樣ニ

$$yy_2=2a(x+x_2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (b)$$

R點ヲ求ムルニハ (a) 式及 (b) 式ヲ聯立方程式トシテ解ケバ可ナリ. 即チ兩式ヲ解キテ

$$y=\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}2a$$

是レR點ノ縱距ナリ. 尙P及Q點ハ曲線上ニアルヲ以テ

$$y_1^2=4ax_1,\qquad y_2^2=4ax_2$$

$$\therefore\ (y_1^2-y_2^2)=4a(x_1-x_2)\qquad \therefore\ 2a=\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2(x_1-x_2)}$$

之ヲ上式 y ノ値ニ代入スレバ

$$y=\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\cdot\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2(x_1-x_2)}=\frac{y_1+y_2}{2}$$

故ニRSナル直線ノ方程式ハ

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (c)$$

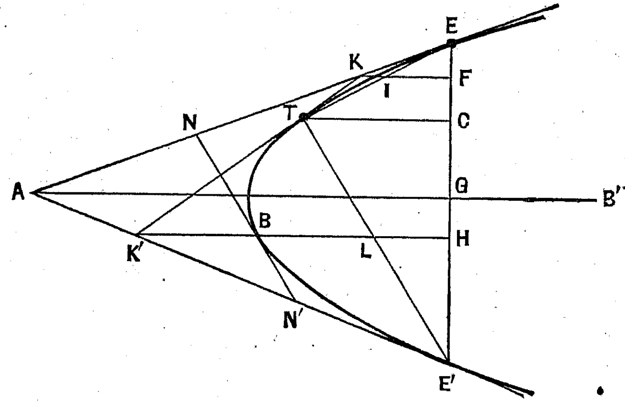
T點ハコノ直線上ニアルヲ以テ其縱距ハ $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ ナルコト明カナリ. 即P及Q點ノ縱距ノ和ノ半分ナリ. 故ニT點ハP及Q點ノ中點ニアリ(5式參照).

第33圖ニ於テ曲線上ニ任意ノ三點E, T及E'ヲ取リ其點ニ於テ切線EA, KK'及AE'ヲ引ク. 切線ノ交點ナルK, A及K'ヲ通リテX軸ニ並行線KF, AB'及K'Hヲ引ケ. 弦TE, EE'及TE'ハ夫々I, G及L點ニ於テ二等分サル. 故ニ

$$\overline{GE}=\overline{GE'},\qquad \overline{FE}=\overline{FC},\qquad \overline{HC}=\overline{HE'}$$

△EGA及△E'GAニ於テ夫々次式ヲ得.

第 33 圖



$$\frac{\overline{EK}}{\overline{KA}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}\ \ldots\ldots\ (d)\qquad \frac{\overline{AK'}}{\overline{K'E'}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{HE'}}\ \ldots\ldots\ (e)$$

然ルニ　$\overline{GH}=\overline{GE'}-\overline{HE'}=\overline{GE}-\overline{HC}=\overline{CE}-\overline{GH}$

$$\therefore\ \overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{CE}=\overline{EF}$$

而シテ $\overline{HE'}=\overline{GE'}-\overline{GH}=\overline{GE}-\overline{EF}=\overline{FG}$

故ニ(d)式及(e)式ノ左邊ハ相等シ.

$$\therefore\ \frac{\overline{EK}}{\overline{KA}}=\frac{\overline{AK'}}{\overline{K'E'}}\quad 或ハ\quad \frac{\overline{EK}}{\overline{AK'}}=\frac{\overline{KA}}{\overline{K'E'}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots (35)$$

即チコノ式ヨリ三切線EA, E'A及KK'ノ中ノ任意ノ一ツ, 例ヘバKK'ハ他ノ二ツノ切線EA及E'Aヲ比例セル二部分ニ分ツ.

次ニ別ニ一ツノ切線NN'ヲ引ケバ(35)式ヨリ

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{AK'}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{AE'}}\quad 及\quad \frac{\overline{EN}}{\overline{AN'}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{AE'}}$$

而シテ

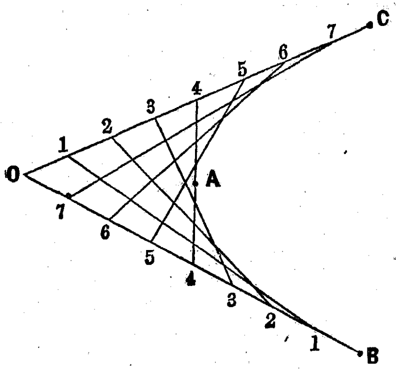
$$\frac{\overline{EK}}{\overline{AK'}}=\frac{\overline{EN}}{\overline{AN'}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{AE'}}$$

$$\therefore\ \frac{\overline{EK}}{\overline{AK'}}=\frac{\overline{EN}-\overline{EK}}{\overline{AN'}-\overline{AK'}}=\frac{\overline{EA}-\overline{EN}}{\overline{AE'}-\overline{AN'}}$$

$$\therefore\ \frac{\overline{EK}}{\overline{AK'}}=\frac{\overline{NK}}{\overline{K'N'}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{E'N'}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

一ツノ抛物線ニ數多ノ切線ヲ引ケバ其中ノ任意ノ二ツ, 例ヘバEA及E'Aハ他ノ切線ニヨリテ比例セル部分ニ分タル. 此ノ理ヲ應用シテ抛物線ヲ畫クコトヲ得.

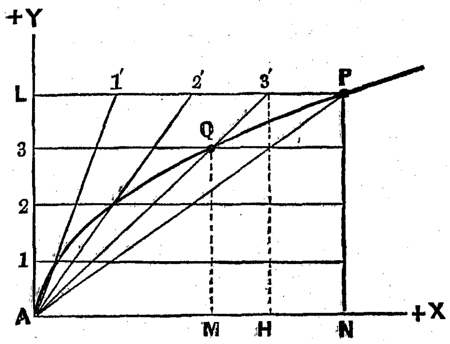
第34圖



一點Oヨリ直線OC及OBヲ引キ之ヲ同數ニ等分シ(便宜上)圖ノ如ク番號ヲ附シテ同番號ノ二點ヲ夫々連結スルトキ此等ノ直線ハA, B, Cヲ過ル抛物線ニ切ス. 故ニ此等ノ直線ニ切スル曲線ヲ引ケバ抛物線ヲ得. AハOB, OCノ中點ヲ連結スル直線ノ中點ナリ.

次ニ第35圖ニ於テ頂點A, 軸AX及曲線上ノ一點Pヲ與ヘテ抛物線ヲ引カントス. 縱線PNヲ引ケ. 而シテ矩形ANPLヲ作レ. ALヲ任意ノ數ニ等分シ, 其分割點ニAヨリ1, 2, 3等ノ番號ヲ附ス. 次ニLPヲ同數ニ等分ス. 而シテLヨリ1', 2', 3'等ノ番號ヲ附シ, 圖ノ如クAト1', 2', 3'等トヲ結ブ線ト1, 2, 3等ヲ通リテX軸ニ並行セル線ト交ル點ハ抛物線上ノ點ナリ. 故ニ此等ノ點ヲ求メテ結ベバ所要ノ曲線ヲ得. 今之ヲ證明セントス. 先ツ任意ノ一點Qヲ考フ. QM及3'Hヲ引ケ.

第35圖



$$\overline{PN}=\frac{4}{3}\overline{QM},\quad \overline{AN}=\frac{4}{3}\overline{AH},\quad \overline{AH}=\frac{4}{3}\overline{AM}$$

$$\therefore\ \overline{AN}=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\overline{AM}=\frac{16}{9}\overline{AM}$$

而シテ(30a)式ヨリ $\overline{PN}^2=4a.\overline{AN}$

$$\therefore\ \left(\frac{4}{3}\overline{QM}\right)^2=4a.\frac{16}{9}\overline{AM}\qquad \therefore\ \overline{QM}^2==4a.\overline{AM}$$

故ニコレハ(30a)式ト一致ス. 而シテQハ抛物線上ノ一點ナリ.