第九章 橋桁の振動

第一節 總 論

近代文明の發達と共に車輛重量の増加、交通速度の増大を來し、之が爲め橋桁は尠なからざる動的影響を受けるに至つた。各國は斯かる動的影響を受くるも尚橋桁が安全なる様、荷重に撃衝係數を乘じて設計荷重を大にする方法を採つたが、橋桁に對する活荷重の影響は斯くの如き靜力學的方法に依つて簡單には解決が出來ないのであつて、橋桁の自己振動週期、活荷重の重量、速度、週期、彈機の有無等に依つて甚だしく趣を異にするのである。例へば團體が足並揃へて橋桁上を通過する場合、其の足並の週期と橋桁の自己振動週期とが一致する時には、橋桁は共鳴作用に依つて遂には破壞さるゝに至るのである。故にあらゆる交通荷重に對して橋梁の安全を保つには、更に深く橋桁の振動性態を研究しなければならない。

第二節 兩端鉸結され斷面積及惰性率共に一定なる棒の自己横振動

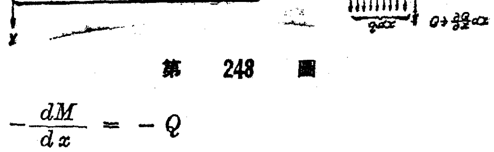
今棒が外力を受け主軸面内にて横振動を續け、或る瞬間に於ける x 點の變位を y とすれば（第248圖参照）、

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M \qquad \cdots\cdots (1)$$

但し

EJ = 橋桁の彎曲に對する剛性率

M = x 點に於ける彎曲率



第 248 圖

なる關係が成立つ。(1) 式を微分すれば

$$\frac{d}{dx}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{dM}{dx} = -Q$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{dQ}{dx} = -q \qquad \cdots\cdots (2)$$

但し

Q = 剪力

q = 等布荷重

然して（2）式の q は第248圖に於て

$$q = P(x,t) + \frac{F\gamma}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots (3)$$

但し

F = 斷面積

γ = 單位體積の重量

$P(x,t)$ = 外力

にて表はさるゝを以つて、（3）式を（2）式に代入すれば棒の横振動の微分方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = -P(x,t) - \frac{F\gamma}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots (4)$$

となる。然るに

惰性率一定なるを以て　EJ = 一定

自己横振動なるを以て　$P(x,t) = 0$

依つて惰性率一定なる棒の自己横振動は

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{F\gamma}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

但し

$$a^2 = \frac{EJg}{F\gamma}$$

にて表はされる。

（5）式を解くため

$$y = X\sin(pt+\varepsilon) \quad \cdots\cdots (6)$$

但し

X = x のみの函數

と置き（5）式に代入すれば

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{p^2}{a^2}X = k^4 X \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\left(k^4 = \frac{p^2}{a^2} = \frac{p^2 F\gamma}{EJg}\right)$$

を得。之は常係數を有する線形四次微分方程式で

$X = \cos kx$,　$X = \sin kx$,　$X = \cosh kx$,　$X = \sinh kx$

は各々（7）式を滿足するを以つて、其の一般解は

$$X = C_1\cos kx + C_2\sin kx + C_3\cosh kx + C_4\sinh kx \quad \cdots\cdots (8)$$

と置く事が出來る。式中 C_1, C_2, C_3, C_4 は環況條件に因つて定めらるべき任意常數である。兩端鉸結の條件

$$\left.\begin{array}{llll} x = 0 & \text{に於て} & X = 0, & \dfrac{d^2X}{dx^2} = 0 \\ x = l & \text{に於て} & X = 0, & \dfrac{d^2X}{dx^2} = 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

を（8）式に代入すれば

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = C_3 = 0 \\ C_2 \sin kl = 0 \\ C_4 \sinh kl = 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

となる。（10）式中に於て

$$\sinh kl \neq 0 \qquad \therefore \quad C_4 = 0$$

$$C_2 \neq 0 \qquad \therefore \quad \sin kl = 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

（11）式より

$$kl = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots\cdots,\ i\pi \quad \cdots\cdots (12)$$

從つて

$$p_1 = ak_1^2 = \frac{a\pi^2}{l^2};\quad p_2 = \frac{4a\pi^2}{l^2};\quad p_3 = \frac{9a\pi^2}{l^2};\ \cdots\cdots\ p_i = \frac{i^2 a\pi^2}{l^2} \ \cdots (13)$$

なる値を得。

斯くして振動曲線は（6）式、（8）式並びに（12）式より

$$y_i = B_i \sin\frac{i\pi x}{l}\sin(p_i t + \varepsilon_i) \quad \cdots\cdots (14)$$

の和である事が判る。

又（14）式に於て t の代りに $\left(t+\dfrac{2\pi}{p_i}\right)$ と置いても y_i の値は變らないのであつて、i 次の自己振動週期は

$$T_i = \frac{2\pi}{p_i} = \frac{2l^2}{i^2\pi}\sqrt{\frac{F\gamma}{EJg}} \quad \cdots\cdots (15)$$

なる事が判る。今第一次振動のみを考ふるとすれば、第一次振動週期は

$$T_1 = \frac{2l^2}{\pi}\sqrt{\frac{F\gamma}{EJg}} \quad \cdots\cdots (15')$$

にて與へらる。

第三節　橋桁の自己振動

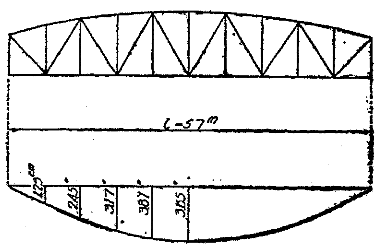
前節に於ては兩端鉸結され、斷面積及惰性率共に一定なる棒の自己横振動を論じた。然るに實際の橋桁にあつては兩端鉸結、斷面積一定と看做し得るも、惰性率不變なりと考へる事は出來ないから、前記の式を應用するには次の如き考察を要するのである。即ち今支間 l なる橋桁が等布荷重 q を受けて中央に於て η なる撓度を生じたるものとすれば、其の橋桁と等しき剛度を有し惰性率一定なる棒の等値惰性率は

$$J' = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{E\eta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

にて與へられる。故に（16）式の J' を用ひて（15）式に依り橋桁の自己振動週期を計算すればよろしい。

〔例〕

今第 249 圖の如き構橋に於て



第　249　圖

支　間　$l = 57\ m$

死荷重　$q = 43.86\ kg/cm$（片側の構）

此の死荷重に依り中央部に於て $\eta = 3.85\ cm$ なる撓度を生じたるものとすれば、等値惰性率は（16）式より

$$J' = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{E\eta} = \frac{5}{384}\frac{43.86\times 5\,700^4}{2\,100\,000\times 3.85}$$
$$= 69\,467\,000\ cm^4$$

となる。又

$$F\gamma = q = 43.86\ kg/cm$$

故に橋桁の第一次自已振動週期は（15′）式により

$$T_1 = \frac{2l^2}{\pi}\sqrt{\frac{F\gamma}{EJg}} = \frac{2\times 5\,700^2}{3.1416}\sqrt{\frac{43.86}{2\,100\,000\times 69\,467\,000\times 980}} = 0.348 \text{ 秒}$$

振動數は

$$n_1 = \frac{1}{0.348} = 2.87 \text{ 回/秒}$$

第四節　走行荷重に因る橋桁の强制振動

荷重が橋桁上を極めて緩やかに移動する場合には、橋桁は唯撓度を生ずるのみであるが、或る速度を以つて走行する場合には撓度の外に振動が起る。强制振動は自動車、馬車、輾壓機等の如

く一定なる重量が走行する場合と、足並を揃へた團體、騎馬等の如く週期的外力が走行する場合とによつて其の趣を異にするのである。今其の各々に就きて述ぶれば

（1）P なる集中荷重が v なる速度を以つて橋桁上を走行せる場合の橋桁の振動式は

$$y = \frac{2gPl^3}{F\gamma\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi x}{l}}{i^2(i^2\pi^2a^2 - v^2l^2)}\sin\frac{i\pi vt}{l}$$
$$-\frac{2gPl^4v}{F\gamma\pi^3a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi x}{l}}{i^3(i^2\pi^2a^2 - v^2l^2)}\sin\frac{i^2\pi^2at}{l^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

（但し P が桁端に來りし時を以つて $t = 0$ となす）

にて表はされる。（17）式中第一項は强制振動を、第二項は橋桁の自己振動週期を示すものである。今活荷重 P の橋桁に與へる動的影響を考へるため、第一次振動のみをとりて（$i = 1$）橋桁中央に於ける最大撓度を計算すれば、最大撓度は（17）式第一項及び第二項の絕對値の和なるを以て

$$y_{max} = \frac{2gPl^3}{F\gamma\pi^2}\left(\frac{1}{\pi^2a^2 - v^2l^2} + \frac{vl}{a\pi}\frac{1}{\pi^2a^2 - v^2l^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

にて與へらる。今

$$\alpha^2 = \frac{v^2l^2}{a^2\pi^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

と置けば、（18）式は

$$y_{max} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4}\frac{1+\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4}\frac{1}{1-\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

なる形となる。（20）式中に於て

$$\frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} = \frac{Pl^3}{48.7EJ} \fallingdotseq \frac{Pl^3}{48EJ}$$

で、之は支間 l なる橋桁中央に P なる集中荷重が載つた場合、荷重下の撓度を表はすのである。（誤差は約 1.5％、之は（17）式の第一次振動のみを採つても充分であるとの證明にもなる）

故に今

δ_d ＝ 橋桁中央に於ける動的撓度

δ_s ＝ 橋桁中央に於ける靜的撓度

とすれば

$$\delta_d = \frac{1}{1-\alpha}\delta_s \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (21)$$

なる關係が成立する。（21）式に依つて走行集中荷重に依る動的影響を知る事が出來るので、道路橋に於ける衝擊係數算出の根據となるものである。

（2）週期的外力 $P\cos\omega t$ が v なる速度を以つて橋桁上を走行する場合の橋桁の振動は

$$
y = \frac{Pl^3}{EJ\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\frac{\sin\left(\frac{i\pi v}{l}+\omega\right)t}{i^4-(\beta+i\alpha)^2}+\frac{\sin\left(\frac{i\pi v}{l}-\omega\right)t}{i^4-(\beta-i\alpha)^2}\right.
$$

$$
\left.-\frac{\alpha}{i}\left\{\frac{\sin\frac{i^2\pi^2 a t}{l^2}}{-i^2\alpha^2+(i^2-\beta)^2}+\frac{\sin\frac{i^2\pi^2 a t}{l^2}}{-i^2\alpha^2+(i^2+\beta)^2}\right\}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (22)
$$

にて與へらる。但し P が桁端に來りし時を以つて、$t=0$ とし

$$
\alpha = \frac{vl}{a\pi} = \frac{\frac{2l^2}{\pi a}}{\frac{2l}{v}} = \frac{\tau}{2\tau_1} = \frac{\text{橋桁自己振動週期}}{2\times(\text{荷重が橋桁上を通過する時間})}
$$

$$
\beta = \frac{\omega l^2}{a\pi^2} = \frac{\frac{2l^2}{\pi a}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\tau}{\tau_2} = \frac{\text{橋桁自己振動週期}}{\text{外力の週期}}
$$

とす。外力の週期 τ_2 が橋桁自己振動週期 τ と一致せる時には共鳴作用を起し、橋桁の振幅は次第に大となる。今第一次振動のみをとる（$i=1$）とすれば、橋桁中央部の最大撓度は $t=\frac{l}{v}$ の時に生ずるを以つて、（22）式より

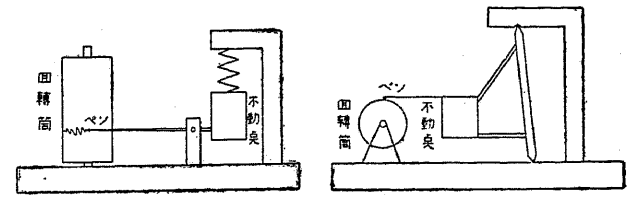
$$
\delta_{max} = \frac{1}{\alpha}\frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} = \frac{2\tau_1}{\tau}\frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (23)
$$

にて表はされる。實際の場合には τ_1 は τ に比して非常に大きいから、橋桁の動的撓度は靜的撓度に比して甚だ大となる。例へば團體が足並を揃へて橋桁上を行進する場合、團體の足並が橋桁の自己振動と一致する場合には橋桁の振幅は、次第に大となり遂には破壞さるゝに至る。然るに實際には團體の足並の週期は大體橋桁の第一次振動週期と一致するを以て、橋桁上を通過する時には足並を揃へない樣にしなければならない。

第五節　振動測定機械

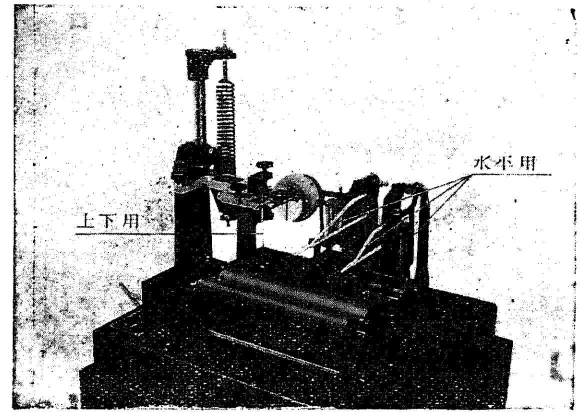
振動測定機械も其の目的及用途に依つて選ばねばならぬ。振幅、振動週期のみを必要とする場合には、普通の地震計と全然同じ理論で良い。

今大體の構造を示せば第250圖の如く、（a）は上下用、（b）は水平用である。共に慣性による不動點を作り、不動點と構造物との相互位置の變化を記錄する樣になつてゐる。上下用には不動點を作るためにスプリングを用ひ、水平用には不動點を作るために水平振子を用ひてあるため、



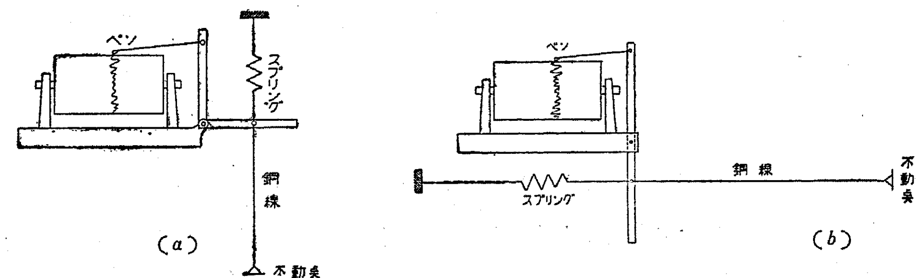
第　250　圖

スプリングの自己振動週期及び水平振子の自己振動週期が、橋桁の週期と一致せる際には共鳴作用を起し測定する事が不可能になるを以て、スプリング及び水平振子の自己振動週期を、橋桁の振動週期よりも大にして置かねばならない。大森式、今村式等は此の種の振動測定機に屬するのである（第251圖）。



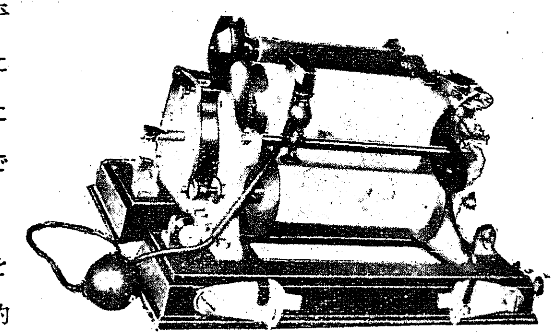
第　251　圖

振幅及振動週期と共に撓度をも記錄せんとする場合には、不動點を他の場所に求めねばならぬ。此の構造を示せば第252圖



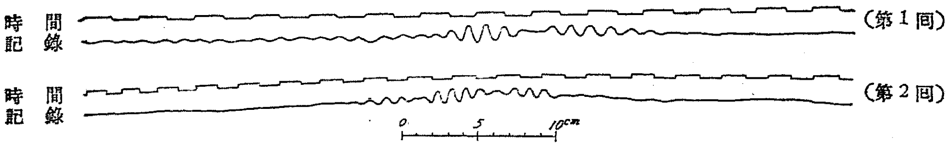
第　252　圖

の如くなる。（a）は上下、（b）は水平用である。田邊式撓度振動計は此の種に屬するものであり（第253圖）、之れに因つて測定せる實例は第254圖の如くである。



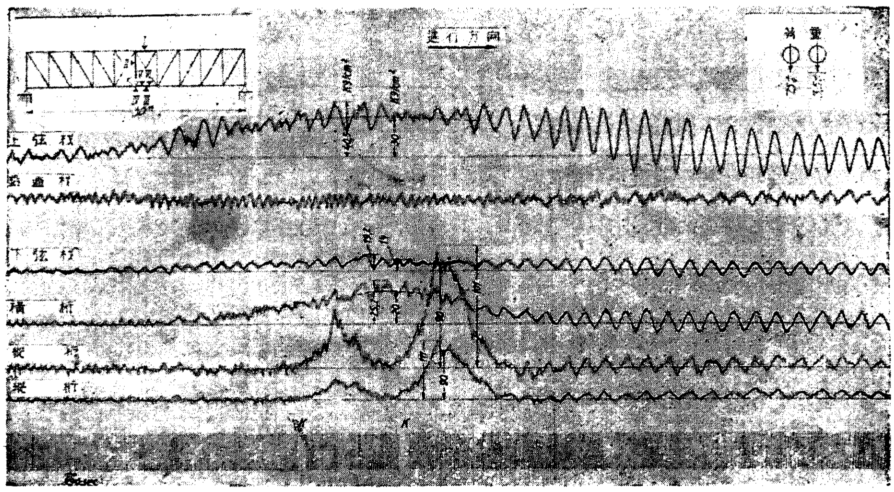
第　253　圖

最近獨逸では理論的に振動の諸問題を解く事の困難なるを知るにつれ、實驗的に之れを解決せんとし、光學的に種々の裝置を考案した。更に進んで振動に依つて各部材中に生ずる應力をも直接に求める樣になつた。



大利根橋振動記錄　千葉縣寄り構橋中央下弦材上に於て、滿載せるトラックが東京側より通過の場合、二回觀測（昭和7年5月18日）す。時間は曲線の一山が 1/2 秒を示す。

第　254　圖



第　255　圖

第255圖は其の一例で、支間 30m の道路橋上をクツションタイヤを有する11瓲の貨物自動車が、15km/時の速度にて疾走せる場合の上弦材（I）、鉛直材（II）、下弦材（III）、横桁（IV）及縦桁（V，VI）中に生ずる應力を示すものである。

其の結果を整理すれば第 45 表の如くなり、實驗的に各部材に生ずる撃衝係數を決定し得るのである。

第　45　表

部材	番號	動的應力 (kg/cm^2)	靜的應力 (kg/cm^2)	撃衝係數
上弦材	I	40.5	30	0.35
鉛直材	II	——	—	——
下弦材	III	19.2	14	0.37
横桁	IV	25.2	20	0.26
縦桁	V	102.0	90	0.12
縦桁	VI	111.0	90	0.22