

橋 梁 工 學

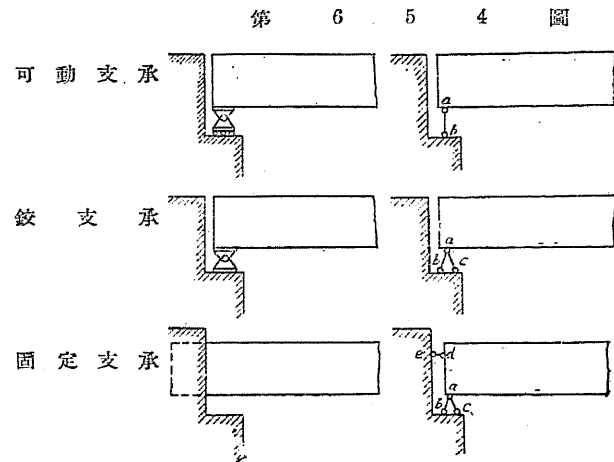
Bridge Engineering

第 4 章 靜力學不決定構造物

第 1 節 靜力學決定構造物と靜力學不決定構造物.

§ 112. 靜力學不決定量 (不靜定量) Statical redundancy.

我々の取扱ふ構造物は常に一平面内にあるものと假定せられるのであつて其の上構を下構に連絡する方法を別ちて次の三種とする。



(I) 可動支承 Movable support. とは單に上下の方向の反力に抵抗し得る構造であつて左右の移動に對しても廻轉に對しても自由である。

(II) 鉸支承 Hinged support. とは上下, 左右の移動が拘束せられ唯鉸の廻りの廻轉のみが自由である。

(III) 固定支承 Fixed support. とは上下, 左右の移動及廻轉共に拘束

せられ完全に下構に連絡されて毫も運動の自由を有しないものである。

今是等支承の連絡を両端に鉸を有し單に張力若くは壓力のみを受ける短桿 Short link を以て表す時は第 654 圖の如く考へる事が出来る、乃ち可動支承は短桿一本を以て下構と連絡するものと同一にして左右の移動及 α 點の廻りの廻轉は自由である、鉸支承は短桿二本を以て連絡するものと同一にして短桿の交點を中心とする廻轉のみが自由である、固定支承は短桿三本を以て連絡するものと同一にして所謂完全なる連結 Rigid connection である、而して短桿の受ける應力は要する處支承の反力に外ならない。

上構を形成する系(平盤 Disc と稱す)を完全に繋結するには三本以上の短桿を必要とし之以下の數を以て連結する平盤は之を支ふるものの上に安定するとは云ひ難いのである。

一つの平盤に外力が作用して平衡状態を保つ場合短桿に生ずる應力(反力)を見出すべき静力学平衡方程式は

$$\sum H=0 \quad \sum V=0 \quad \sum M=0$$

の三つである、故に三本の短桿を以て支えられる平盤の反力は上記の諸式を以て求める事が出来得るけれども四本以上の短桿を以て支えられる場合は静力学の平衡条件のみを以て是等の反力を求める事が出来ないのである、乃ち前者を静力学決定構造物 Statically determinate structure と稱し後者を静力学不決定構造物 Statically indeterminate structure 又は不靜定反力 Redundant reaction を有する構造物と稱するのである。

一般に構造物中に含まれる平盤の數を e とするならば一つの平盤に付き静力学平衡条件は上記の三つなるを以て e 個の平盤に付いては $3e$ 丈の短桿を有するも其の反力は静力学のみにて見出し得るのである、乃ち短桿の數 N が

$$N=3e \dots\dots\dots(291)$$

第 4 1 表 (其 一)

型 式	構 造 様 式	平盤數	桿數	不靜定量
單 桁(構)		1	3	0
突 庇 桁(構)		1	3	0
連 續 桁(構)		1	4	1
ゲルバー桁(構)		3	9	0
同 上		5	15	0
三 鉸 拱		2	6	0
二 鉸 拱		1	4	1
無 鉸 拱		1	6	3
框 桁(構)		1	4	1
同 上		1	6	3
同 上		1	9	6
同 上		1	6	3
ゲルバー構		3	11	2
バランスド拱		2	8	2

なる時は静力学決定構造物にして $N > 3e$ なる時は静力学不決定構造物にして $N - 3e = n$ 丈の不静定反力を有する結果となる、若し $N < 3e$ なる時は其の構造物は安定ならざるものにして我々の取扱ふ資格のないものである。

第 41 表 (其一) は種々なる型式の橋梁に付き (291) 式に依つて不静定反力の数を示すものである。

以上述べたる事柄に於ては構造物を幾つかの平盤に別ちたるのみにして其の平盤の内容に對して何等考慮されて居ないのである、若し平盤が結構にして § 66. にて既述せる過分結構なる時は假令 (291) 式に依つて不静定反力を有しないにしても其の平盤の内容は静力学不決定構造物たるを免れない、以上の兩者を區別して不静定反力を有する構造物を外的静力学不決定構造物 Externally statical-indeterminate structure と稱し不静定部材を有する構造物を内的静力学不決定構造物 Internally statical-indetermin-

第 4 1 表 (其 二)

型 式	構 造 様 式	平盤數	部材數	格點數	不静定部材數
單 樑 橋		1	37	20	0
同 上		1	34	18	1
同 上		1	6	4	1
繫 拱 橋		1	43	22	1
バ ラ ン ス D 構 拱		1	29	16	0

ate structure と稱するのである、而して兩者は聯立して一つの構造物に成立し得る事は勿論である (第 41 表其二)。

尙第 41 表 (其三) は平盤と桿とを混用したる構造物にして平盤は静力学決定構造物であつても桿數が格點數に比較して過剰なる場合は内的静力学不決定構造物となる實例を示すものである。

第 4 1 表 (其 三)

型 式	構 造 様 式	平盤數	格點數	桿數	部材數	不静定部材數
ト ラ ス 桁		1	1	3	3	1
ラ ン ゲ ル 桁		1	9	3	19	1
吊 橋		1	11	5	21	1

以上説明せる静力学不決定構造物は其の内的たりと外的たりとを問はず其の解法は同一である、乃ち内的静力学不決定構造物に於ては其の不静定部材の應力 (不静定應力 Redundant stress と稱す) のみを殘して其の不静定部材を除去し且其の不静定應力を恰も不静定反力の如く取扱へば宜しいのである。

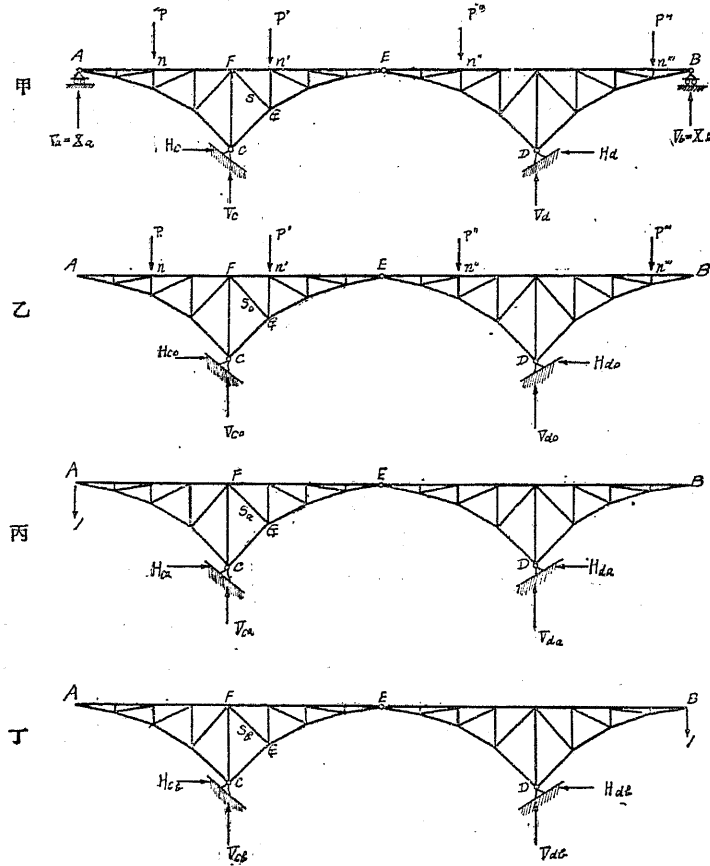
§ 113. 静力学不決定構造物の一般的説明 General analysis of statically indeterminate structures.

(a) 結構.

第 655 圖甲は一種の拱橋 (バランスドアーチ) であつて第 41 表(其一) に示すが如く平盤の數は 2 にして桿數は 8 なるを以て 2 の不静定反力を有する、且結構の内容に於ては第 41 表 (其二) に示すが如く不静定部材を有しない、乃ち該構造物は二次の外的静力学不決定構造物である。

扱て V_a, V_b, V_c, V_d 及 H_c, H_d の六つの反力の内孰れの二つを不静定反力

第 6 5 5 圖



と撰ぶ可きか設計者の自由であるけれども實際問題として其の撰定は構造物解法の難易に甚大なる關係を有するものである、今 V_a 及 V_b を不靜定反力 X_a 及 X_b と假定する。

第 655 圖 乙、丙、丁に示すが如く X_a 及 X_b を除去したる結構を假想する時は其の結構は明かに三鉸拱にして靜力學決定構造物となる（後章參照）、斯くの如く靜力學不決定構造物を解決するに當り假想される靜力學決

定構造物を該靜力學不決定構造物の**基本系 Principal system** と稱し解法の根幹となるものである、乃ち甲圖の如き構造物を考へる更りに乙、丙、丁圖の如き基本系を數度誘導し

- 1) P, P', \dots なる實際荷重に依る反力 ($V_{co}, V_{do}, H_{co}, H_{do}$) 及任意の部材 FG の應力 S_0 を求む (乙圖)。
- 2) 凡ての荷重を除去し A 點に單一荷重のみを X_a と反對の方向に作用せしめ其の場合の反力 ($V_{ca}, V_{da}, H_{ca}, H_{da}$) 及 FG の應力 S_a を求む (丙圖)。
- 3) (2) と同様凡ての荷重を除去し B 點に單一荷重のみを X_b と反對の方向に作用せしめ其の場合の反力 ($V_{cb}, V_{db}, H_{cb}, H_{db}$) 及 FG の應力 S_b を求む (丁圖)。

以上の三つの場合を考慮し甲の場合は乙の場合と丙の場合（但し單一荷重の更りに $-X_a$ を作用す）及丁の場合（但し單一荷重の更りに $-X_b$ を作用す）との合併と見做す事が出来る、乃ち

$$\left. \begin{aligned} V_c &= V_{co} - X_a V_{ca} - X_b V_{cb} \\ V_d &= V_{do} - X_a V_{da} - X_b V_{db} \\ H_c &= H_{co} - X_a H_{ca} - X_b H_{cb} \\ H_d &= H_{do} - X_a H_{da} - X_b H_{db} \\ S &= S_0 - X_a S_a - X_b S_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (292_a)$$

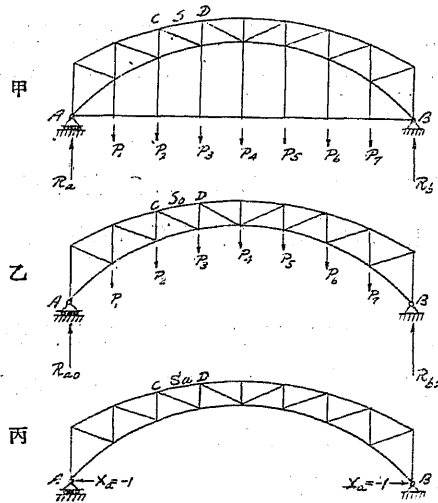
にして X_a 及 X_b を求め得るならば他の反力及部材の應力は自ら解決が出来るのである。

第 656 圖甲は第 41 表（其二）に示すが如く不靜定部材一個を有する一次の內的靜力學不決定構造物である、而して其の不靜定部材 AB を除去せしむる乙圖の如き單構を其の基本系とする。

甲圖を考慮する更りに乙、丙圖の如く基本系を再度誘導し

- 1) 實際荷重 P_1, P_2, \dots に依る反力 (R_{a0}, R_{b0}) 及任意の部材 CD 應力 S を求む (乙圖).
- 2) 凡ての荷重を除去し不静定應力の位置に不静定應力と反對の方向に單一荷重を作用し CD の應力 S_a を求む (丙圖).

第 6 5 9 圖



然る時は甲圖に於ける CD の應力 S は (292_a) 式の場合と同様

$$S = S_0 - X_a S_a \dots \dots \dots (292_b)$$

上式中 X_a …… 不静定應力.

にして X_a を求め得るならば凡ての部材應力は自ら解決し得るのである.

反力 R_a 及 R_b は外的には静力學決定構造物なるを以て單構の場合と同一にして

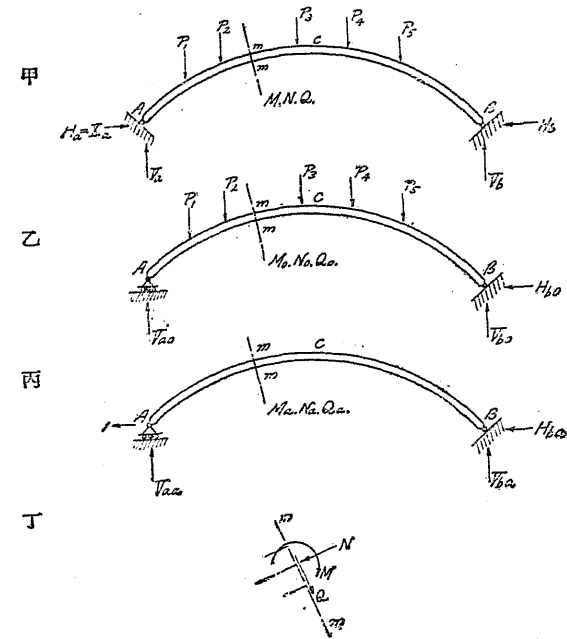
$$R_a = R_{a0} \quad R_b = R_{b0}$$

である。

(b) 桁又は肋.

桁又は肋の如き等質體 Isotropic body の構造物に於ても同様である。

第 6 5 7 圖



第 657 圖甲は二鉸肋拱にして一つの不静定反力を有する構造物である、今四つの反力の内 H_a を不静定反力 X_a と假定すれば其の基本系は乙及丙圖に示す單桁となる、故に甲圖を考慮する更りに乙及丙圖の基本系を再度誘導して

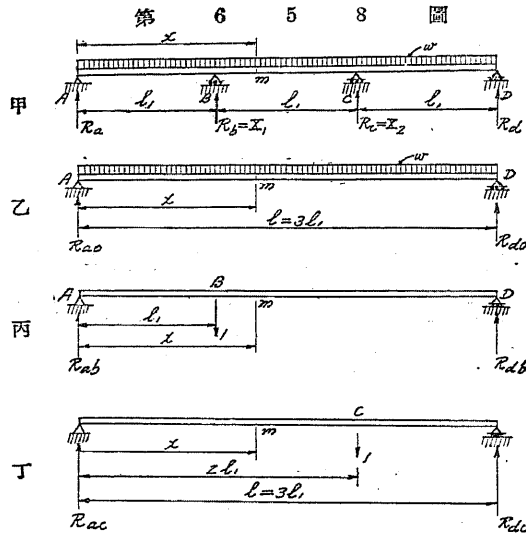
- 1) P_1, P_2, \dots なる實際荷重に依る反力及任意の断面 $m-m$ の彎曲率, 直軸力及剪力 (M, N, Q) を求む (乙圖).
- 2) 凡ての荷重を除去し A 點に單一荷重のみ X_a と反對の方向に作用せしめ其の場合の反力及 $m-m$ 断面の彎曲率, 直軸力及剪力 (M, N, Q) を求む.

然る時は甲圖の場合の反力及任意の断面の彎曲率, 直軸力及剪力 (M, N, Q) は兩者を綜合して

$$\left. \begin{aligned} V_a &= V_{a0} - X_a V_{aa} \\ V_b &= V_{b0} - X_a V_{ba} \\ H_b &= H_{b0} - X_a H_{ba} \\ M &= M_0 - X_a M_a \\ N &= N_0 - X_a N_a \\ Q &= Q_0 - X_a Q_a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(293)$$

である。

例題 22. 第 658 圖甲の連続桁に於て任意の點 m の彎曲率 M 及剪力 Q を求む。



三徑間の連続桁にして二つの不静定反力を有する、而して $R_b = X_1, R_c = X_2$ と假定し AD なる単桁を基本系とすれば (293) 式と同様にして

$$\left. \begin{aligned} R_a &= R_{a0} - X_1 R_{a1} - X_2 R_{a2} \\ M &= M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 \\ Q &= Q_0 - X_1 Q_1 - X_2 Q_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(294)$$

である、而して R_{a0}, M_0, Q_0 は基本系に實際荷重の作用したる場合の A 支點の反力及 m 點の彎曲率及剪力なるを以て (乙圖)。

$$\begin{aligned} R_{a0} &= \frac{3wl_1}{2} \\ M_0 &= \frac{wx}{2}(3l_1 - x) \\ Q_0 &= w\left(\frac{3l_1}{2} - x\right) \end{aligned}$$

である、 R_{ab}, M_b, Q_b は基本系に $X_1 = -1$ のみ作用したる場合の A 支點の反力及 m 點の彎曲率及剪力なるを以て (丙圖)。

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \frac{2}{3} \\ M_b &= R_{ab}x - 1(x - l_1) = l_1 - \frac{1}{3}x \\ Q_b &= R_{ab} - 1 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

である、又 R_{ac}, M_c, Q_c は基本系に $X_2 = -1$ のみ作用したる場合の A 支點の反力及 m 點の彎曲率及剪力なるを以て (丁圖)。

$$\begin{aligned} R_{ac} &= \frac{1}{3} \\ M_c &= \frac{1}{3}x \\ Q_c &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

にして是等の値を (294) 式に挿入すれば

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{3wl_1}{2} - \frac{2}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2 \\ M &= \frac{wx}{2}(3l_1 - x) - \left(l_1 - \frac{1}{3}x\right)X_1 - \frac{1}{3}xX_2 \\ Q &= w\left(\frac{3l_1}{2} - x\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)X_1 - \frac{1}{3}X_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(295)$$

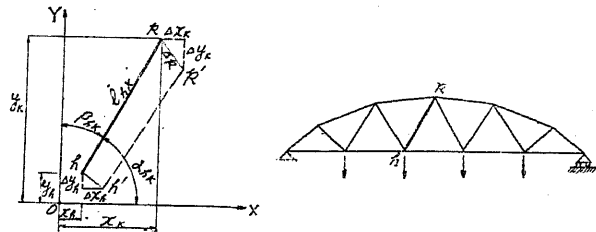
となる、乃ち X_1 及 X_2 を求める事が出来るならば他の値は容易く計算する事が出来る。

以上の結果よりして X_a, X_b 及 X_c, \dots の如き不静定反力 (或は不静定部材の應力) が解れば他の反力及部材の應力は自ら之を決定する事が出来る、而して其の方法は不静定反力の数或は構造物の形状等に依りて様ではないが要する處構造物の弾性變形 Elastic deformation に立脚する事は同一である、故に弾性變形の研究は此の種の問題を解決する根本となるものである、次に構造物の弾性變形及之に關聯する諸法則を簡単に説明する事にする。

§ 114. 弾性變形 Elastic deformation.

第 659 圖に於ける結構の任意の部材 hk の兩端 h 及 k の變位 Displacement を知りて部材の變形を求める。

第 6 5 9 圖



今部材 hk の原長 Original length を l_{hk} とし兩端の坐標を (x_h, y_h) 及 (x_k, y_k) とすれば

$$l_{hk}^2 = (x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 \dots\dots\dots(293)$$

にて表す事が出来る、次に結構が外力の作用を受け l_{hk} が Δl_{hk} 丈の變形を受け上記の坐標が $\Delta x_h, \Delta y_h$ 及 $\Delta x_k, \Delta y_k$ なる變化を受けたとする、然る時は

$$\begin{aligned} (l_{hk} + \Delta l_{hk})^2 &= [(x_k + \Delta x_k) - (x_h + \Delta x_h)]^2 + [(y_k + \Delta y_k) - (y_h + \Delta y_h)]^2 \\ &= [(x_k - x_h) + (\Delta x_k - \Delta x_h)]^2 + [(y_k - y_h) + (\Delta y_k - \Delta y_h)]^2 \\ \therefore l_{hk}^2 + 2l_{hk}\Delta l_{hk} + \Delta l_{hk}^2 &= (x_k - x_h)^2 + 2(x_k - x_h)(\Delta x_k - \Delta x_h) + (\Delta x_k - \Delta x_h)^2 \\ &\quad + (y_k - y_h)^2 + 2(y_k - y_h)(\Delta y_k - \Delta y_h) + (\Delta y_k - \Delta y_h)^2 \\ &\quad \dots\dots\dots(297) \end{aligned}$$

(297) 式に (296) 式を挿入し $\Delta l_{hk}^2, (\Delta x_k - \Delta x_h)^2$ 及 $(\Delta y_k - \Delta y_h)^2$ を省略する時は

$$\begin{aligned} l_{hk}\Delta l_{hk} &= (x_k - x_h)(\Delta x_k - \Delta x_h) + (y_k - y_h)(\Delta y_k - \Delta y_h) \\ \Delta l_{hk} &= (\Delta x_k - \Delta x_h) \cos \alpha_{hk} + (\Delta y_k - \Delta y_h) \cos \beta_{hk} \dots\dots(298) \end{aligned}$$

である、而して部材 hk の應力を S_{hk} 、斷面積を A_{hk} とする時は

$$\begin{aligned} \Delta l_{hk} &= \frac{S_{hk}l_{hk}}{A_{hk}E} \\ &= \frac{S_{hk}l_{hk}}{A_{hk}E} + \epsilon t l_{hk} \text{ (温度の變化 } t \text{ なる場合)} \end{aligned} \left. \dots\dots(299) \right\}$$

なるを以て (298) 式及 (299) 式に依り

$$\begin{aligned} \Delta l_{hk} &= \frac{S_{hk}l_{hk}}{A_{hk}E} = (\Delta x_k - \Delta x_h) \cos \alpha_{hk} + (\Delta y_k - \Delta y_h) \cos \beta_{hk} \\ &= \frac{S_{hk}l_{hk}}{A_{hk}E} + \epsilon t l_{hk} = (\Delta x_k - \Delta x_h) \cos \alpha_{hk} + (\Delta y_k - \Delta y_h) \cos \beta_{hk} \end{aligned} \left. \dots\dots(300) \right\}$$

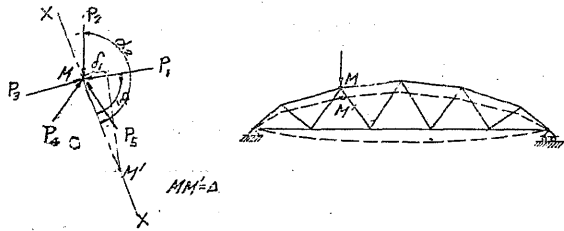
となる。

§ 115. 假想働の原理 Principle of virtual work.

一つの物體に力の一系が作用して平衡状態を保つてゐる時何等か他の原因に依つて其の物體が變位をなしたと想像する場合其等の力の働 (力量に其の力の方向の變位量を乘じたるもの) の總和は零である。

今簡単に結構に適用して該原理を證明して見やう、第 660 圖に於ける結構に外力が作用して平衡状態を保つてゐるものとする、任意の格點 M を採り之に集る外力及部材の應力を P_1, P_2, \dots とする、然る時は力の平衡條

第 6 6 0 圖



件に依り

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots = 0$$

である、而して何等か他の原因に依り以上の平衡状態を破る事なく M 點が M' 點に變位したるものとし其の値を Δ とすれば

$$(P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots) \times \Delta = 0$$

$$P_1 \Delta \cos \alpha_1 + P_2 \Delta \cos \alpha_2 + \dots = 0$$

である、然るに

$\Delta \cos \alpha_1$ は P_1 の方向に於ける Δ の射影 Projection.

同様に $\Delta \cos \alpha_2$ は P_2 の方向に於ける Δ の射影

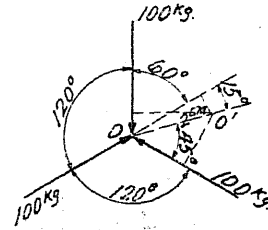
なるを以て是等を $\delta_1, \delta_2, \dots$ にて表す時は

$$\left. \begin{aligned} P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots &= 0 \\ \Sigma P \delta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (301)$$

となる、尙 (301) 式に於て Δ の方向は羸ち實際 M 點の變位の方のみに限らず如何なる方向に假想考慮した値であつても何等差支えはない、乃ち $P \cdot \delta$ は外力及應力の實際爲したる働を表はすものではなくたゞ形に於て働の式の表現を探つてゐるに過ぎないものである、故にこの表現方を假想働 Virtual work と稱し、假想働の原理 (301) 式は構造物の應力解法の根本となる法則である。

第 661 圖に於て O 點に作用する三力は明かに平衡を保つてゐる、今 O

第 6 6 1 圖



點が OO' の方向に 2 糎丈變位したるものと假定する、然る時は

(301) 式の假想働は

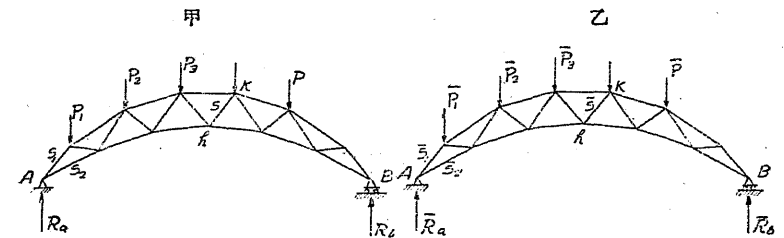
$$\begin{aligned} \Sigma P \delta &= -100 \times 2 \cos 75^\circ - 100 \times 2 \cos 45^\circ + 100 \times 2 \cos 15^\circ \\ &= -51.76 - 141.42 + 193.18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

にして (301) 式の實證である。

§ 116. モールの働に関する第一公式 Otto Mohr's first work equation.

今一つの結構 AB の二つの平衡状態を考慮する。

第 6 6 2 圖



(甲) は P_1, P_2, \dots, P なる荷重が作用して部材に S_1, S_2, \dots, S なる應力を生じ平衡を保つものにして部材の變形を Δl 、格點の變位を δ とし

(乙) は前者と全く無關係なる他の荷重 $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}$ が作用して部材に $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}$ なる應力を生じ平衡を保つものとする。

然る時は (298) 式に依り部材 hk の變形 Δl_{hk} は

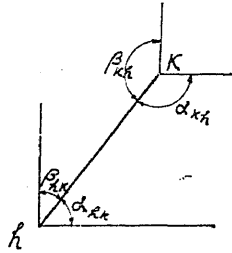
$$\Delta l_{hk} = (\Delta x_k - \Delta x_h) \cos \alpha_{hk} + (\Delta y_k - \Delta y_h) \cos \beta_{hk}$$

にして hk の應力 \bar{S}_{hk} を兩邊に乗すれば

$$\bar{S}_{hk} \Delta l_{hk} = \bar{S}_{hk} (\Delta x_k - \Delta x_h) \cos \alpha_{hk} + \bar{S}_{hk} (\Delta y_k - \Delta y_h) \cos \beta_{hk} \dots (302)$$

である、尙第 663 圖に依り

第 6 6 3 圖



$$\begin{aligned} \cos \alpha_{hk} &= -\cos \alpha_{kh} \\ \cos \beta_{hk} &= -\cos \beta_{kh} \\ S_{hk} &= S_{kh} \text{ (同一部材の應力なるが故} \\ &\text{に符號も大きさも同じ)} \end{aligned}$$

なるを以て (302) 式は

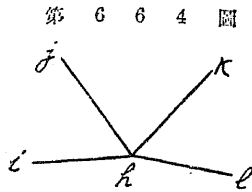
$$\begin{aligned} \bar{S}_{hk} \Delta l_{hk} &= -[(\bar{S}_{hk} \cos \alpha_{hk} \Delta x_{hk} + \bar{S}_{hk} \cos \beta_{hk} \Delta y_{hk}) \\ &+ (\bar{S}_{kh} \cos \alpha_{kh} \Delta x_k + \bar{S}_{kh} \cos \beta_{kh} \Delta y_k)] \end{aligned}$$

となる, 如斯方程式が各部材に於て求め得られ是等を總計して

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{S}_{hk} \Delta l_{hk} &= -\Sigma [(\bar{S}_{hk} \cos \alpha_{hk} \Delta x_{hk} + \bar{S}_{hk} \cos \beta_{hk} \Delta y_{hk}) \\ &+ (\bar{S}_{kh} \cos \alpha_{kh} \Delta x_k + \bar{S}_{kh} \cos \beta_{kh} \Delta y_k)] \dots \dots \dots (303) \end{aligned}$$

である, 而して (303) 式右邊の () 内の項は部材の一端に一個宛存在するものである, 故に () 内の項を各格點毎に集め更に是等を結構の有する全格點に亘つて集めるならば (303) 式の右邊が得られる事となる, 乃ち假りに格點 h に集まる部材に就いては

$$\begin{aligned} &\bar{S}_{hi} \cos \alpha_{hi} \Delta x_h + \bar{S}_{hi} \cos \beta_{hi} \Delta y_h \\ &\bar{S}_{hj} \cos \alpha_{hj} \Delta x_h + \bar{S}_{hj} \cos \beta_{hj} \Delta y_h \\ &\bar{S}_{hk} \cos \alpha_{hk} \Delta x_h + \bar{S}_{hk} \cos \beta_{hk} \Delta y_h \\ + &\bar{S}_{hl} \cos \alpha_{hl} \Delta x_h + \bar{S}_{hl} \cos \beta_{hl} \Delta y_h \\ &\Sigma^h \bar{S} \cos \alpha \Delta x_h + \Sigma^h \bar{S} \cos \beta \Delta y_h \end{aligned}$$



にして Δx_h 及 Δy_h は格點 h の變位なるを以て各項に共通にして上式は

$$\Delta x_h \Sigma^h \bar{S} \cos \alpha + \Delta y_h \Sigma^h \bar{S} \cos \beta$$

となる, 如斯項を全格點に亘りて總計して

$$\Sigma (\Delta x_h \Sigma^h \bar{S} \cos \alpha + \Delta y_h \Sigma^h \bar{S} \cos \beta)$$

は (303) 式の右邊の [] の内の項と同一である, 而して h なる特定點の更りに m なる任意の格點を以て表し (303) 式は一般に

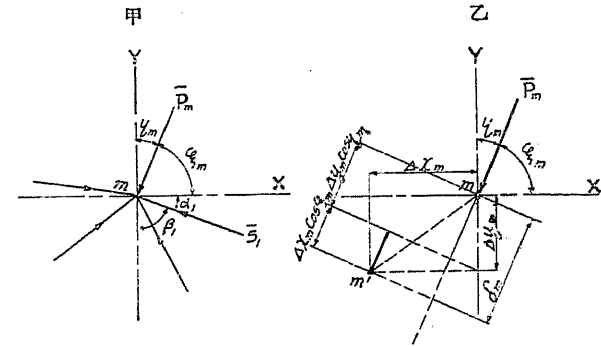
$$\Sigma \bar{S} \Delta l = -\Sigma (\Delta x_m \Sigma^m \bar{S} \cos \alpha + \Delta y_m \Sigma^m \bar{S} \cos \beta) \dots \dots \dots (304)$$

上式中 Σ^m …… 格點 m に集まる部材の合計を意味し
 Σ …… 結構の全格點の合計を意味す。

とする。

今 m 格點の平衡條件に依り第 665 圖甲に於て

第 6 6 5 圖



$$\bar{P}_m \cos \xi_m + \Sigma^m \bar{S} \cos \alpha = 0$$

$$\bar{P}_m \cos \eta_m + \Sigma^m \bar{S} \cos \beta = 0$$

なるを以て是等を (304) 式に挿入して

$$\Sigma \bar{S} \Delta l = \Sigma \bar{P}_m (\Delta x_m \cos \xi_m + \Delta y_m \cos \eta_m) \dots \dots \dots (305)$$

を得, (305) 式の内 $(\Delta x_m \cos \xi_m + \Delta y_m \cos \eta_m)$ は第 665 圖乙に示すが如く m 點の變位の \bar{P}_m の方向に於ける射影 δ_m にして

$$\Sigma \bar{S} \Delta l = \Sigma \bar{P}_m \delta_m \dots \dots \dots (306_a)$$

である, 尙 \bar{P} は外力の全部を含むものなれば勿論支點の反力をも包含する. 今反力を除き他の外力を \bar{P} にて表す時は

$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m + L = \Sigma \bar{S} \Delta l \dots\dots\dots(306_b)$$

上式中 L ……反力の假想働の合計,

となる。

(306) 式内の $\delta, \Delta l$ は 第 662 圖甲の場合に於ける變位及變形にして \bar{P}, \bar{S} 及 \bar{R} は同圖乙の場合に於ける荷重, 應力及反力にして兩者の間には何等關係がない, 故に甲の場合を實際荷重 Actual loading の場合, 乙の場合を便宜荷重 Conventional loading の場合とすれば次の如く云ふ事が出来る。

便宜荷重に其の作用點の實際變位の該便宜荷重の方向に於ける射影を乗じたる値を全格點に亘つて總計したも ($\Sigma \bar{P}_m \delta_m + L$) と便宜荷重に因る部材應力に該部材の實際變形を乗じたる値を全部材に亘つて總計したも ($\Sigma \bar{S} \Delta l$) と相等し。

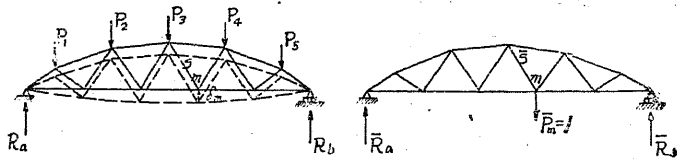
以上は要するに假想働の法則 (301) 式を構造物に應用したるものにしてモール氏の働に關する第一公式と稱し結構の平衡に關する基礎的法則として廣く利用せられるものである。

§ 117. モールの働に關する第二公式 Otto Mohr's second work equation.

第二公式とは任意の格點の變位を求める爲に第一公式を使用したものである。

第 6 6 6 圖

甲 (實際荷重) 乙 (便宜荷重)



例へば第 666 圖の結構に於て甲の如く P_1, P_2, \dots, P_5 なる荷重が作用したる場合 m 格點の垂直變位を求めんとするには乙の如く m 點に $\bar{P}_m=1$ なる便宜荷重を垂直の方向に作用せしめる, 然る時は (306) 式に依り

$$1. \delta_m = \Sigma \bar{S} \Delta l - L \dots\dots\dots(307_a)$$

にして若し支點が沈下しないものとすれば

$$\delta_m = \Sigma \bar{S} \Delta l = \Sigma \bar{S} \left(\frac{S l}{EA} + \epsilon l \right) \dots\dots\dots(307_b)$$

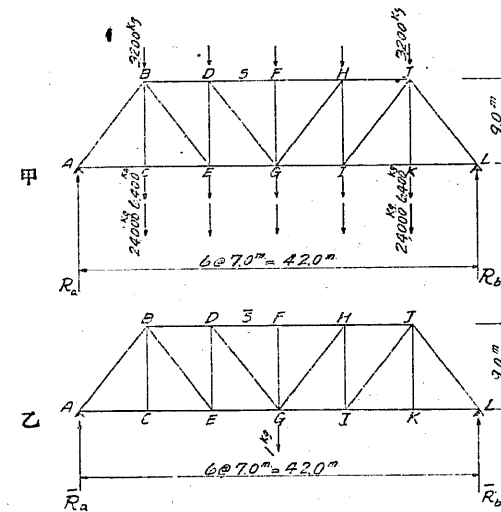
上式中 δ_m ……實際荷重に因る m 點の變位.
 \bar{S} ……便宜荷重に因る部材の應力.
 S ……實際荷重に因る部材の應力.
 A ……部材の斷面積.
 E ……部材の彈性係數.
 l ……部材の長.
 t ……溫度の變化.
 ϵ ……溫度に對する伸縮係數.

にして尙溫度の變化なき場合には

$$\delta_m = \Sigma \frac{\bar{S} S}{EA} l \dots\dots\dots(307_c)$$

となる。

第 6 6 7 圖



例題 23. 第 667 圖のブラット構に甲圖の如く載荷したる場合 G 點の垂直撓度を求む、但し $E=2,100,000 \text{ kg/cm}^2$. とす.

乙圖は同構に於て G 點に單一垂直荷重(變位を求めんとする方向に)を載荷したるものにして (307_c) 式に於ける値は次表の如くなる。

第 4 2 表

部 材	l cm.	A cm. ²	S kg.	\bar{S} kg.	$\Delta l = \frac{S}{EA} l$	$\frac{\bar{S} S}{EA} l$
AC	700	82	+ 65,330	+0.389	+0.266	0.103
CE	700	82	+ 65,330	+0.389	+0.266	0.103
EG	700	148	+104,530	+0.778	+0.235	0.183
BD	700	140	-104,530	-0.778	-0.249	0.194
DF	700	160	-117,600	-1.167	-0.245	0.286
AB	1,140	195	-106,420	-0.633	-0.296	0.188
BE	1,140	95	+ 63,850	+0.633	+0.365	0.231
DG	1,140	95	+ 21,280	+0.633	+0.122	0.077
BC	900	75	+ 30,400	0	+0.174	0
DE	900	80	- 20,000	-0.500	-0.107	0.054
FG	900	80	- 3,200	0	-0.017	0

$$\Sigma \frac{\bar{S} S}{EA} l = 2.838 \text{ cm.}$$

§ 118. クレベエイヨンの法則 Clapeyron's law.

一つの結構に外力が作用したる際結構は漸次弾性變形を受け之に伴ふて部材に内力を生ずるのである、而して結構が最後變形に到達し部材の内力と外力とが完全に均衡し茲に全く静止の状態となるのである。

外働 External work とは結構の變形進行中に於て外力に依つて爲される働であつて之に抵抗しつゝ部材の内部に於て爲される内力の働を内働 Internal work と稱するのである。

今一つの結構の任意の格點 m に外力 P_m が作用し之が爲に部材に應力

S 及變形 Δl を生じ且 m 點が外力の方向に δ_m 丈移動したものと假定する、然る時は外力 P_m は零より漸次増加し P_m に至つて平衡状態に達するを以て其の爲せる働は $\frac{1}{2} P_m \delta_m$ にして數多の外力が同時に作用する場合に於ては外力の爲せる働の合計 W は

$$W = \frac{1}{2} \Sigma P_m \delta_m$$

である、尚モール氏の働に関する第一公式に依り

$$\Sigma P_m \delta_m = \Sigma S \Delta l$$

なるを以て

$$W = \frac{1}{2} \Sigma P_m \delta_m = \frac{1}{2} \Sigma S \Delta l = \frac{1}{2} \Sigma \frac{S^2 l}{EA} \dots\dots\dots(308)$$

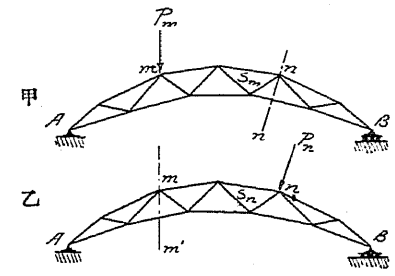
である、乃ち

温度の變化一定なる一つの結構に外力が作用したる場合該外力の爲す働は外力の増加する徑路(直線的に増すとも或は曲線的に増すとも)及作用の順序に關係なく外力に其の作用點の該外力の方向に於ける變位を乗じたるものの半分である、之をクレベエイヨンの法則と云ふ。

§ 119. マクスウエルの法則 Maxwell's law, or Law of reciprocal displacements.

第 668 圖に於ける一つの結構 A B の任意の格點 m に P_m なる荷重のみが作用したる場合部材の應力を S_m 其の變形を Δl_m とし(甲)、別に同一結構の任意の他の格點 n に P_n なる荷重のみが作用したる場合部材の應力を S_n 其の變形を Δl_n とする(乙)。

第 6 6 8 圖



然る時はモール氏の働に關する第一公式に依り甲の場合を實際荷重，乙の場合を便宜荷重とすれば

$$P_n \delta'_{nm} = \sum S_n \Delta l_m = \sum S_n \frac{S_m l}{EA} \dots\dots\dots (309)$$

上式中 δ'_{nm} ……甲の場合の n 點の變位の P_n の方向 (nm') に於ける射影。

となり，逆に乙の場合を實際荷重，甲の場合を便宜荷重とすれば前同様に

$$P_m \delta'_{mn} = \sum S_m \Delta l_n = \sum S_m \frac{S_n l}{EA} \dots\dots\dots (310)$$

上式中 δ'_{mn} ……乙の場合の m 點の變位の P_m の方向 (mm') に於ける射影。

となる，故に (309) 式と (310) 式とに依り

$$\sum P_n \delta'_{nm} = \sum P_m \delta'_{mn} \dots\dots\dots (311_a)$$

となる，之をベティーの式 Betti's formula と云ふ。

若し $P_n = P_m = 1$ なる時は $\delta'_{nm} = \delta_{nm}$ ， $\delta'_{mn} = \delta_{mn}$ にして

$$\delta_{nm} = \delta_{mn} \dots\dots\dots (311_b)$$

上式中 δ_{nm} …… n 點に單一荷重が作用したる場合の m 點の變位 (mm' の方向)。

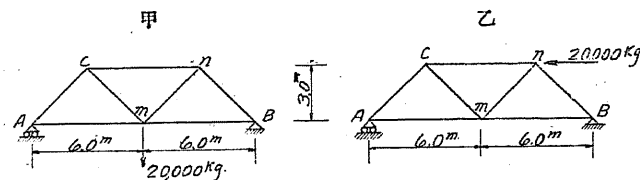
δ_{nm} …… m 點に單一荷重が作用したる場合の n 點の變位 (nn' の方向)。

となる，乃ち m 點に單一荷重を作用せしめたる時 n 點の n 點に作用する外力の方向の變位は n 點に單一荷重を作用せしめたる時の m 點の m 點に作用する外力の方向の變位に等し，之をマクスウエル氏の法則と云ふ。

一般に δ_{ik} なる記號は構造物の k 點に單一荷重を作用せしめたる時の i 點の變位を示すものである。

例題 24. 第 669 圖の結構に於て m 格點に $P=20,000$ kg. の垂直荷重を載荷したる際 (甲圖) の n 格點の水平撓度は n 格點に $P=20,000$ kg. の水平荷重を載荷したる際 (乙圖) の m 格點の垂直撓度に等し，但し各部分材の斷面積は $AC=Cn=Bn=50.0$ cm.² $Am=Bm=30.0$ cm.² $Cm=mn=25.0$ cm.² とし $E=2,100,000$ kg/cm.² とす。

第 6 6 9 圖



先づ m 格點に $P=20,000$ kg. を載荷したる場合の n 格點の撓度 $P\delta_{nm}$ を求む。

第 4 3 表 其 1

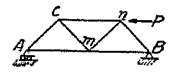
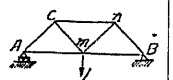
部 材			A cm. ²	l cm.	$\frac{S\bar{S}}{EA} l$
	S kg.	\bar{S} kg.			
AC	$-10,000 \times \sqrt{2}$	$-\frac{1}{4} \times \sqrt{2}$	50.0	$300 \times \sqrt{2}$	$+\frac{3 \times \sqrt{2}}{210}$
Cn	-20,000	$-\frac{1}{2}$	50.0	600	$+\frac{12}{210}$
Bn	$-10,000 \times \sqrt{2}$	$+\frac{1}{4} \times \sqrt{2}$	50.0	$300 \times \sqrt{2}$	$-\frac{3 \times \sqrt{2}}{210}$
Am	+10,000	$+\frac{1}{4}$	30.0	600	$+\frac{5}{210}$
Bm	+10,000	$+\frac{3}{4}$	30.0	600	$+\frac{15}{210}$
Cm	$+10,000 \times \sqrt{2}$	$+\frac{1}{4} \times \sqrt{2}$	25.0	$300 \times \sqrt{2}$	$+\frac{6 \times \sqrt{2}}{210}$
mn	$+10,000 \sqrt{2}$	$-\frac{1}{4} \times \sqrt{2}$	25.0	$300 \times \sqrt{2}$	$-\frac{6 \times \sqrt{2}}{210}$

$$P\delta_{nm} = \frac{1}{210} (3 \times \sqrt{2} + 12 - 3 \times \sqrt{2} + 5 + 15 + 6 \times \sqrt{2} - 6 \times \sqrt{2})$$

$$= \frac{32}{210} = 0.152 \text{ cm.}$$

次に n 格點に $P=20,000 \text{ kg.}$ を載荷したる場合の m 格點の撓度 $P\delta_{mn}$ を求む。

第 4 3 表 其 2

部 材			A cm. ²	l cm.	$\frac{S\bar{S}}{EA} l$
	S kg.	\bar{S} kg.			
AC	$-5,000 \times \sqrt{2}$	$-\frac{1}{2} \times \sqrt{2}$	50.0	$300 \times \sqrt{2}$	$+\frac{3 \times \sqrt{2}}{210}$
Cn	-10,000	-1	50.0	600	$+\frac{12}{210}$
Bn	$+5,000 \times \sqrt{2}$	$-\frac{1}{2} \times \sqrt{2}$	50.0	$300 \times \sqrt{2}$	$-\frac{3 \times \sqrt{2}}{210}$
Am	+5,000	$+\frac{1}{2}$	30.0	600	$+\frac{5}{210}$
Bm	+15,000	$+\frac{1}{2}$	30.0	600	$+\frac{15}{210}$
Cm	$+5,000 \times \sqrt{2}$	$+\frac{1}{2} \times \sqrt{2}$	25.0	$300 \times \sqrt{2}$	$+\frac{3 \times \sqrt{2}}{210}$
mn	$-5,000 \times \sqrt{2}$	$+\frac{1}{2} \times \sqrt{2}$	25.0	$300 \times \sqrt{2}$	$-\frac{3 \times \sqrt{2}}{210}$

$$P\delta_{mn} = \frac{32}{210} = 0.152 \text{ cm.}$$

乃ち $\Gamma\delta_{mn} = P\delta_{nm}$

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}$$

にして (311) 式の成立する事が例示された譯である。

§ 120. カステリアノの法則及最小働の原理 Castigliano's law and Principle of least work.

(a) カステリアノの法則.

一つの弾性體に外力が作用し弾性變位をなしたる場合任意の外力 P_m の作用點の變位 δ_m (P_m の方向) は其の弾性體の爲したる内働 W を P_m にて微分したる値に等し。

今假りに一つの結構に外力が作用して平衡状態を保つ時は § 118. クレベイヨンの法則 (308) 式に依り

$$W = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 l}{EA}$$

にして

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial}{\partial P_m} \left(\frac{S^2 l}{EA} \right) = \sum \frac{S l}{EA} \frac{\partial S}{\partial P_m} \dots \dots \dots (312)$$

である、然るに

$$S = P_1 \bar{S}_1 + P_2 \bar{S}_2 + \dots + P_m \bar{S}_m + \dots$$

上式中 \bar{S}_1 は $P_1=1$ のみ作用したる場合の部材の應力.

\bar{S}_2 は $P_2=1$ のみ作用したる場合の部材の應力.

\bar{S}_m は $P_m=1$ のみ作用したる場合の部材の應力.

なる故

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = \bar{S}_m \dots \dots \dots (313)$$

にして (313) 式を (312) 式に代入すれば

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \sum \bar{S}_m \frac{S l}{EA}$$

となる、而して § 117 モール氏の働に關する第二公式 (307.) 式に依り

$$1. \delta_m = \sum \bar{S}_m \frac{S l}{EA}$$

なるを以て

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \delta_m \dots \dots \dots (314)$$

である。

(b) **メナブレアの法則** Menabrea's law.

(314) 式に於て P_m なる力を變位の起らない様なものに採れば當然

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = 0 \dots\dots\dots(315_a)$$

である、故に不静定構造物に於て支承が不動のものとするれば其の不静定反力 X_a, X_b, \dots を (314) 式の P_m に採り

$$\frac{\partial W}{\partial X_a} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial X_b} = 0 \dots\dots\dots(315_b)$$

となる、而して (315_a) 式は P_m なる外力が構造物の内働を最小にする事を示すものであつて之を**最小働の原理**と云ふ、乃ち弾性體に作用する力の爲す働は該弾性體が平衡を保つに必要な最小量の働である。

§ 121. 等質體 Isotropic body の變形及働.

弾性體の働に關する法則及原理は桁及肋の如き等質體にも適用し得るものである (附録其一参照)、而して等質體に作用する斷面の應力は直軸力、彎曲率及剪力にて表されるを以て是等の項を使用した實際設計に適應した形の式を求める。

尙剪力の影響は設計に於ては殆ど省略せられ直軸力及彎曲率の二者の影響のみを考慮する、甚しきは直軸力の影響をも省略する事がある。

第 670 圖甲に於て直軸力 N に因る dx の部分の變形を Δdx とすれば

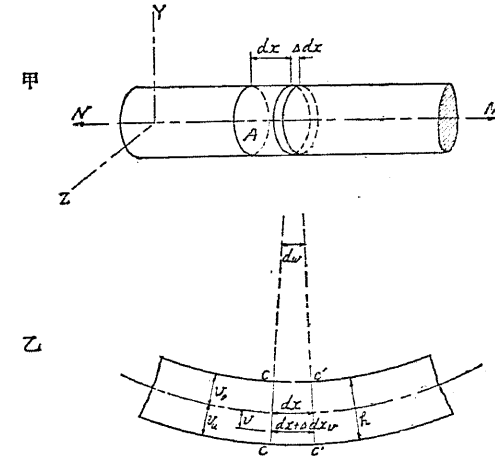
$$\Delta dx = \frac{\sigma_n}{E} dx = \frac{N}{EA} dx \dots\dots\dots(316_a)$$

にして温度の變化を考へた場合には

$$\Delta dx = \left(\frac{\sigma_n}{E} + \epsilon t \right) dx = \left(\frac{N}{EA} + \epsilon t \right) dx \dots\dots\dots(316_b)$$

である、又同圖乙に於て彎曲率 M に因り dx の部分が dw 丈の角變位を

第 6 7 0 圖



受けたとする、然る時は上端縁 cc' は若干縮み下端縁 cc' は若干伸びる、乃ち變形後の上端 cc' を $dx - \Delta dx_o$ 、下端 cc' を $dx + \Delta dx_u$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta dx_o}{dx} &= \frac{\sigma_o}{E} = \frac{M v_o}{EI} \\ \frac{\Delta dx_u}{dx} &= \frac{\sigma_u}{E} = \frac{M v_u}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(317)$$

にして

$$dw = \frac{\Delta dx_o + \Delta dx_u}{h} = \frac{M}{EI} \times \frac{v_o + v_u}{h} dx = \frac{M}{EI} dx \dots\dots\dots(318)$$

である、故に dx の部分の假想働は

$$\bar{N} \Delta dx + \bar{M} dw$$

にして等質體全體の假想働の合計は

$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m + L = \int (\bar{N} \Delta dx + \bar{M} dw) \dots\dots\dots(319_a)$$

である、(319_a) 式に (316) 式及 (318) 式を挿入して

$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m + L = \int \frac{\bar{M} M}{EI} dx + \int \frac{\bar{N} N}{EA} dx + \int \bar{N} \epsilon t dx \dots\dots\dots(319_b)$$

を得、(319) 式は (306) 式に該當する式であつて \bar{P}_m, \bar{M} 及 \bar{N} は便宜荷重に依る任意の断面 m の外力、彎曲率及直軸力にして δ_m, M 及 N は實際荷重に依る m 断面の撓度、彎曲率及直軸力を表す。

今便宜荷重 $\bar{P}_m=1$ とし反力の假想働 $L=0$ とすれば

$$1. \delta_m = \int \frac{\bar{M}M}{EI} dx + \int \frac{\bar{N}N}{EA} dx + \int \bar{N}\epsilon t dx \dots \dots \dots (320)$$

上式中 \bar{M} 及 \bar{N} は $\bar{P}_m=1$ なる時の m 點の彎曲率及直軸力。

にして (307) 式に匹敵するものである。

又クレベエイヨンの法則に依り

$$W = \frac{1}{2} \Sigma P_m \delta_m = \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int N\epsilon t dx \dots \dots (321_a)$$

を得。

同様なる結果を附録其一 (16) 及 (17) 式より求める事が出来る、乃ち剪力の影響を省略し σ_y 及 σ_z の應力を考慮せざる時は

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{\sigma_x^2}{E} dV + \int \sigma_x \epsilon t dV$$

である、然るに $\sigma_x = \frac{M}{I} v + \frac{N}{A}$ なるを以て (第 670 圖参照)

$$= \int \int \frac{1}{2E} \left(\frac{Mv}{I} \right)^2 dx dA + \int \int \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2 dx dA + \int \int \frac{N}{A} \epsilon t dx dA$$

$$W = \int \frac{M^2 dx}{2EI^2} \int v^2 dA + \int \frac{N^2 dx}{2EA^2} \int dA + \int \frac{N}{A} \epsilon t dx \int dA$$

にして $\int v^2 dA = I, \int dA = A$ なるを以て

$$W = \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int N\epsilon t dx \dots \dots \dots (321_b)$$

である。

(321) の式に依り等質體の外力の働 W は

$$W = \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int N\epsilon t dx$$

なるを以てカスチリアノ及メナブリアの法則を適用して次の結果を得。

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_m} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} dx + \int \epsilon t \frac{\partial N}{\partial P_m} dx = \delta_m \dots (322)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X_a} &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_a} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_a} dx + \int \epsilon t \frac{\partial N}{\partial X_a} dx = \delta_a \\ &= 0 \end{aligned} \right\} (323)$$

§ 122. 不静定量の求め方 Solution of redundancies.

上述せる弾性學に關する公式を適當に應用して不静定量の數丈の方程式を作り是等の聯立方程式を解いて各不静定量を求め之に依つて構造物の全應力を決定するのである、一般に不静定量の聯立方程式を解く事は可成り煩雜であつて實際に於ては不適當なる事が往々ある、故に各不静定量に付き獨立した方程式を作る様努めるのである。

不静定量を求める爲屢々用ひられる方法は次の如きものである。

(a) モールの働に關する方程式に依るもの。

§ 113. 第 671 圖に示す拱橋に於ける不静定量 X_a 及 X_b を求める。

今基本系に於て實際荷重 (乙) に依る A 點の垂直變位を δ_a, C 點及 D 點の垂直變位を δ_c, δ_b 水平變位を η_c, η_b とし各部材の變形を dL とする、次に便宜荷重として

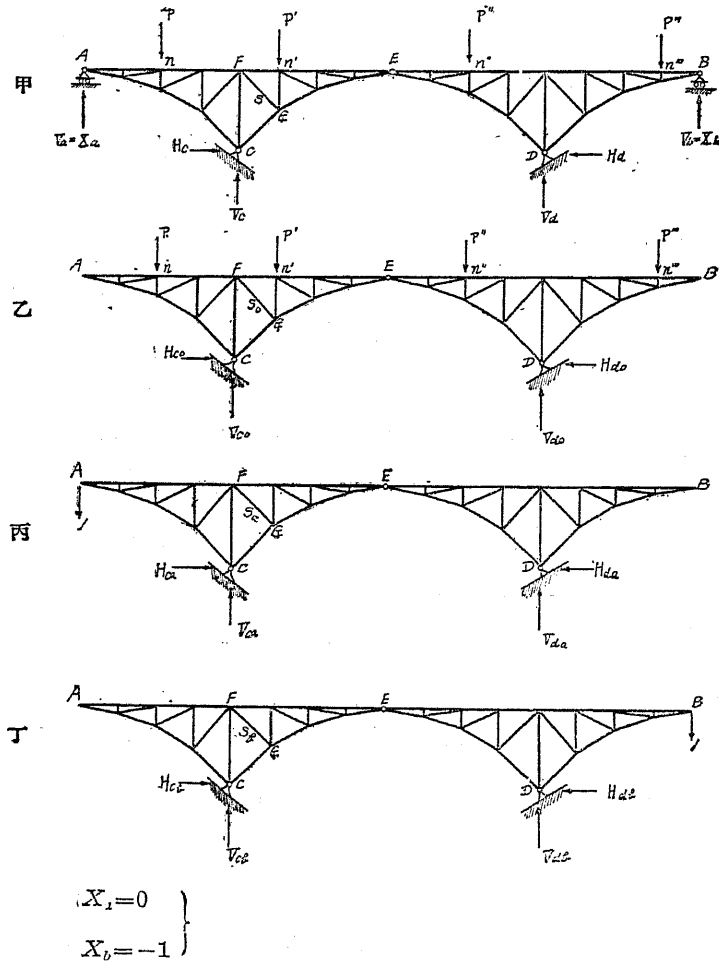
$$\left. \begin{aligned} X_a &= -1 \\ X_b &= 0 \end{aligned} \right\}$$

のみを作用せしめ (丙) 各部材の應力を S_a, C 點及 D 點の反力を V_{ca}, H_{ca} 及 V_{da}, H_{da} とすればモールの公式を適用して

$$\left. \begin{aligned} 1. \delta_a + V_{ca}\delta_c + H_{ca}\eta_c + V_{da}\delta_b + H_{da}\eta_b &= \Sigma S_a dL \\ &= \Sigma S_a \left(\frac{Sl}{EA} + \epsilon t l \right) \end{aligned} \right\} \dots (324_a)$$

を得、同様に便宜荷重として

第 6 7 1 圖



のみを作用せしめ(丁)各部材の應力を S_0 , C 點及 D 點の反力を V_c , H_{cb} 及 V_{db} , H_{db} とすれば

$$\left. \begin{aligned} 1. \delta_b + V_{cd}\delta_c + H_{cb}\eta_c + V_{db}\delta_d + H_{db}\eta_d &= \sum S_b \Delta l \\ &= \sum S_b \left(\frac{Sl}{EA} + \epsilon tl \right) \end{aligned} \right\} \dots (324_b)$$

を得, (324) 式の左邊中

$$\begin{aligned} V_{ca}\delta_c + H_{ca}\eta_c + V_{da}\delta_d + H_{da}\eta_d \\ V_{cb}\delta_c + H_{cb}\eta_c + V_{db}\delta_d + H_{db}\eta_d \end{aligned}$$

は C 及 D 支點の假想働にして各 L_a 及 L_b とすれば

$$\left. \begin{aligned} \delta_a + L_a &= \sum S_a \left(\frac{Sl}{EA} + \epsilon tl \right) \\ \delta_b + L_b &= \sum S_b \left(\frac{Sl}{EA} + \epsilon tl \right) \end{aligned} \right\} \dots (324_c)$$

である, 而して (292) 式に依り

$$S = S_0 - X_a S_a - X_b S_b$$

なるを以て (324_c) 式に挿入して

$$\left. \begin{aligned} \delta_a + L_a &= \sum S_a [(S_0 - X_a S_a - X_b S_b) \rho + \epsilon tl] \\ \delta_b + L_b &= \sum S_b [(S_0 - X_a S_a - X_b S_b) \rho + \epsilon tl] \end{aligned} \right\} \dots (325)$$

$$\text{上式中 } \rho = \frac{l}{EA}$$

を得, 若し支承が沈下しないものと假定すれば δ_a, δ_b 及 L_a, L_b は各零なるを以て

$$\left. \begin{aligned} \sum S_a S_0 \rho - X_a \sum S_a^2 \rho - X_b \sum S_a S_b \rho + \sum S_a \epsilon tl &= 0 \\ \sum S_b S_0 \rho - X_a \sum S_a S_b \rho - X_b \sum S_b^2 \rho + \sum S_b \epsilon tl &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (326)$$

にして (326) 式中 X_a 及 X_b 以外の値は皆與へられたる値若しくは計算し得る値なるを以て二つの聯立方程式を解く事に依り X_a 及 X_b を見出し得るのである。

(b) マクスウエルの法則に依るもの。

(326) 式と同様なる結果がマクスウエルの法則に依る時は部材の應力 (S) ではなく構造物の弾性變位を以て表されたる形として得られる。

今 δ_{ik} を以て構造物の k 格點に單一垂直荷重 (我々の取扱ふ荷重はすべ

て垂直荷重なるを以て如斯限定す)を作用せしめたる時の他の任意の格點 i の垂直撓度 (荷重のみに因る) を表し δ_{ii} を以て温度の變化のみに因る i 格點の垂直撓度を表すものとすればモールの働に關する第二公式 (307) 式に依り

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik} &= \Sigma \frac{S_i S_k}{EA} l = \Sigma S_i S_k \rho \\ \delta_{ii} &= \Sigma S_i \epsilon t l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (327)$$

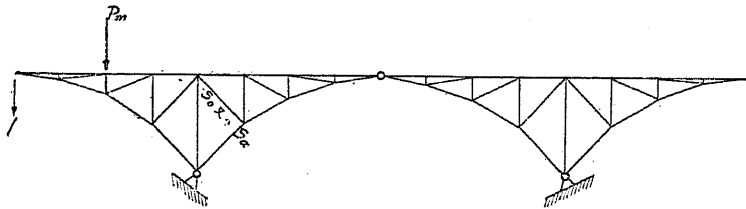
上式中 $S_i \dots i$ 格點に單一垂直荷重 (便宜荷重) のみを載荷したる場合の部材の應力。
 $S_k \dots k$ 格點に單一垂直荷重 (實際荷重) のみを載荷する場合の同上部材の應力。

である、 i 及 k 點は任意の格點なるを以て

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} &= \Sigma S_a^2 \rho & \delta_{ab} &= \Sigma S_a S_b \rho & \delta_{bb} &= \Sigma S_b^2 \rho \\ \delta_{ai} &= \Sigma S_a \epsilon t l & \delta_{ii} &= \Sigma S_i \epsilon t l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (328)$$

を得、尙第 672 圖に示す基本系に於て P_m を便宜荷重、 $X_n = -1$ を實際荷重としてモールの公式を適用すれば

第 6 7 2 圖



$$\left. \begin{aligned} \Sigma P_m \delta_{ma} &= \Sigma S_o \Delta l_a = \Sigma S_o S_a \rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (329)$$

同様にして $\Sigma P_m \delta_{mb} = \Sigma S_o \Delta l_b = \Sigma S_o S_b \rho$

上式中 $S_o \dots P_m$ のみを作用せしめたる時の部材の應力。

なるを以て (328) 式及 (329) 式の値を (325) 式及 (326) 式に挿入する時は

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ia} + L_a &= \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{ia} - X_b \delta_{ab} + \delta_{ai} \\ \delta_{ib} + L_b &= \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (330_a)$$

或は $\Sigma P_m \delta_{ma} = \Sigma S_o S_a \rho$ を δ_{oi} にて表す時は

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ia} + L_a &= \delta_{oi} - X_a \delta_{ia} - X_b \delta_{ib} + \delta_{ai} \\ \delta_{ib} + L_b &= \delta_{ob} - X_a \delta_{bi} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (330_b)$$

にして若し支承が沈下しないならば $\delta_{ia} + L_a$ 及 $\delta_{ib} + L_b$ の値は零にして

$$\left. \begin{aligned} \delta_{oi} - X_a \delta_{ia} - X_b \delta_{ib} + \delta_{ai} &= 0 \\ \delta_{ob} - X_a \delta_{bi} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (331)$$

である。

尙 (331) 式を等質體に適用する場合一般に δ_{ik} は (320) 式に依り

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik} &= \int M_i M_k \frac{dx}{EI} + \int N_i N_k \frac{dx}{EA} \\ \delta_{ii} &= \int N_i \epsilon t dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (332)$$

上式中 $M_i, N_i \dots i$ 點に單一垂直荷重 (便宜荷重) のみを

を作用せしめたる場合任意の断面に於ける彎曲率及直軸力。

$M_k, N_k \dots k$ 點に單一垂直荷重 (實際荷重) のみを

を作用せしめたる場合同断面に於ける彎曲率及直軸力。

にして i 及 k は任意の點なるを以て

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} &= \int M_a^2 \frac{dx}{EI} + \int N_a^2 \frac{dx}{EA} = [M_a^2] + [N_a^2] \\ \delta_{ab} &= \int M_a M_b \frac{dx}{EI} + \int N_a N_b \frac{dx}{EA} = [M_a M_b] + [N_a N_b] \\ \delta_{bb} &= \int M_b^2 \frac{dx}{EI} + \int N_b^2 \frac{dx}{EA} = [M_b^2] + [N_b^2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (333)$$

$$\left. \begin{aligned} \dots\dots\dots \\ \delta_{u1} &= \int N_n \epsilon t dx \\ \delta_{v1} &= \int N_o \epsilon t dx \end{aligned} \right\}$$

上式中 $[M_i M_k] \dots \int M_i M_k \frac{dx}{EI}$ の略號.
 $[N_i N_k] \dots \int N_i N_k \frac{dx}{EA}$ の略號.

である、又結構の場合と同様に

$$\delta_{o1} = \sum P_n \delta_{o1} = \int M_o M_n \frac{dx}{EI} + \int N_o N_n \frac{dx}{EA} \dots\dots\dots (334)$$

上式中 $M_o, N_o \dots$ 基本系に於て P_n のみを作用せしめたる時の任意の断面に於ける彎曲率及直軸力.

である。

(c) カステリアノの法則に依るもの.

最小働の原理に依つて弾性體の變形働を不靜定量を以て部分微分して得たる値 Partial first derivative を零として得る聯立方程式を解く方法である。結構に對しては

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\partial W}{\partial X_a} = \sum S \rho \frac{\partial S}{\partial X_a} + \epsilon t l \frac{\partial S}{\partial X_a} = 0 \\ \delta_2 &= \frac{\partial W}{\partial X_b} = \sum S \rho \frac{\partial S}{\partial X_b} + \epsilon t l \frac{\partial S}{\partial X_b} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (335)$$

等質體に對しては

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_a} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_a} dx + \int \epsilon t \frac{\partial N}{\partial X_a} dx \\ \delta_2 &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_b} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_b} dx + \int \epsilon t \frac{\partial N}{\partial X_b} dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (336)$$

を使用するのである。

(d) 其の他の方法.

彈性荷重 Elastic load を考慮したり或は他の方法に依り 撓度の多角形 Deflection polygon を作り不靜定量の影響線を求め之に依り不靜定量を算出する方法である。

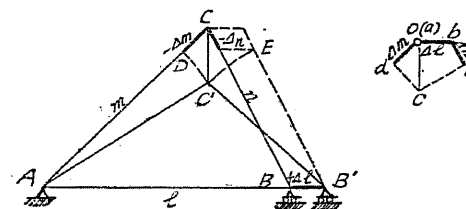
§ 123. ウキリオト・モール變形圖 Williot-Mohr's displacement diagram.

結構の格點變位は § 117. モールの働に關する第二公式に依り求め得るけれども總ての格點の移動を求める事は非常なる手數を要する、ウキリオト・モール變形圖は斯の如き場合に使用して甚だ便利である。

(a) ウキリオトの變形圖 Williot displacement diagram.

ウキリオトの變形圖は結構の各格點の變位を一假想基準の許に求めたものである。

第 6 7 3 圖 甲 乙



例へば第 673 圖甲の ABC なる結構に於て $AB(l)$ が Δl 丈伸び $AC(m)$ 及 $BC(n)$ が各 Δm 及 Δn 丈縮みたる時 C 點の位置を求めるに當り假想基準として A 點は固定し部材 AB の變位方向が AB の方向と一致するものとする、然る時は AB は Δl 丈伸びて B 點は B' 點に移動する。而して A 點及 B 點を中心として $m - \Delta m$ 及 $n - \Delta n$ を各半徑として描きたる圓弧の交點 C' 點は C 點の移動位置を示し CC' は C 點の移動量と其の方向とを示すものである、ウキリオトの變形圖に於ては Δm 及 Δn の長は AC 及 BC の長 m, n に比較して非常に小なる値なるを以て $\widehat{DC'}$ 及 $\widehat{EC'}$ の弧長は D 點及 E 點に於て AC 及 BC 線に立てられたる垂線

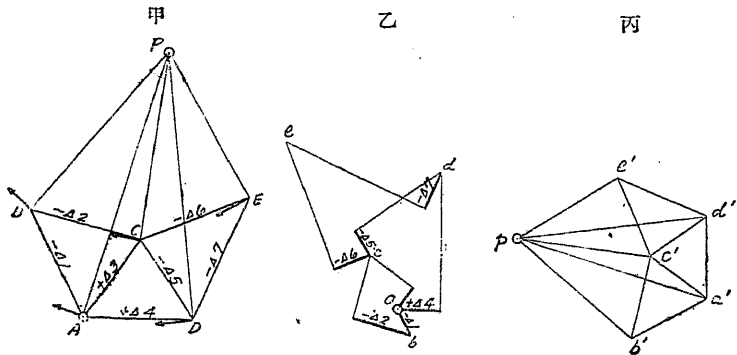
長に等しと見做しても大差はない、故に乙圖に示すが如く固定點 O より \overline{AB} 方向に $Ob=4l$ (伸張の場合は O 點より $A \rightarrow B$ の方向に又短縮の場合は O 點より $B \rightarrow A$ の方向に) と採り \overline{AC} 及 \overline{CB} に平行に $Od=4m$ (短縮なれば O 點より $C \rightarrow A$ の方向に) 及 $be=4n$ (短縮なれば b 點より $C \rightarrow B$ の方向に) と採り d 點及 e 點よりの垂線の交點 c を求める、然る時は Oc は C 點の移動量並びに其の方向を示すものである、如斯作圖(乙圖)を結構 ABC のウキリオトの變形圖と云ふのである。

(b) モールの廻轉圖 Mohr's rotation diagram.

第 674 圖甲に示す結構 $ABCED$ の各部材が $-41, -42, +43, \dots$ (「+」は伸張「-」は短縮) なる變位を受けるものとする、而して A 點を固定し \overline{AB} の方向が不變のものとしてウキリオトの變形圖を描く時は乙圖の如くなる、然るに實際に於ては \overline{AB} なる方向は結構の變形に伴ふて決して不變のものではなく廻轉を受けるのである。

今結構 $ABCED$ が P を中心として些少なる廻轉を受けるものとする、然る時は各格點の變位の方向は P と各格點を結ぶ直線 PA, PB, \dots に直角にして其の大きさは PA, PB, \dots の長さに正比例するものと見做して差支

第 674 圖



えはない、丙圖に於て pa', pb', \dots は各格點の廻轉の方向に引かれた直線にして $pa' pb', \dots$ の長は變位の大きさを表すものとするれば多角形 $a'b'c'd'e'$ は結構 $ABCED$ と相似形にして 90° 廻轉したるものである、故に結構の格點中任意の二つ格點 (A, B) の廻轉に因る變位 (a' 及 b') を定め得るならば其の他の格點の變位位置は相似多角形 $a'b'c'd'e'$ を描く事に依つて容易に求める事が出来る(例題参照)、此の相似多角形をモールの廻轉圖と云ふ。

(c) ウキリオト・モールの變形圖

結構の各格點の變位を求めんとするには上記の圖式解法を適當に併用するのである、乃ち其の順序は

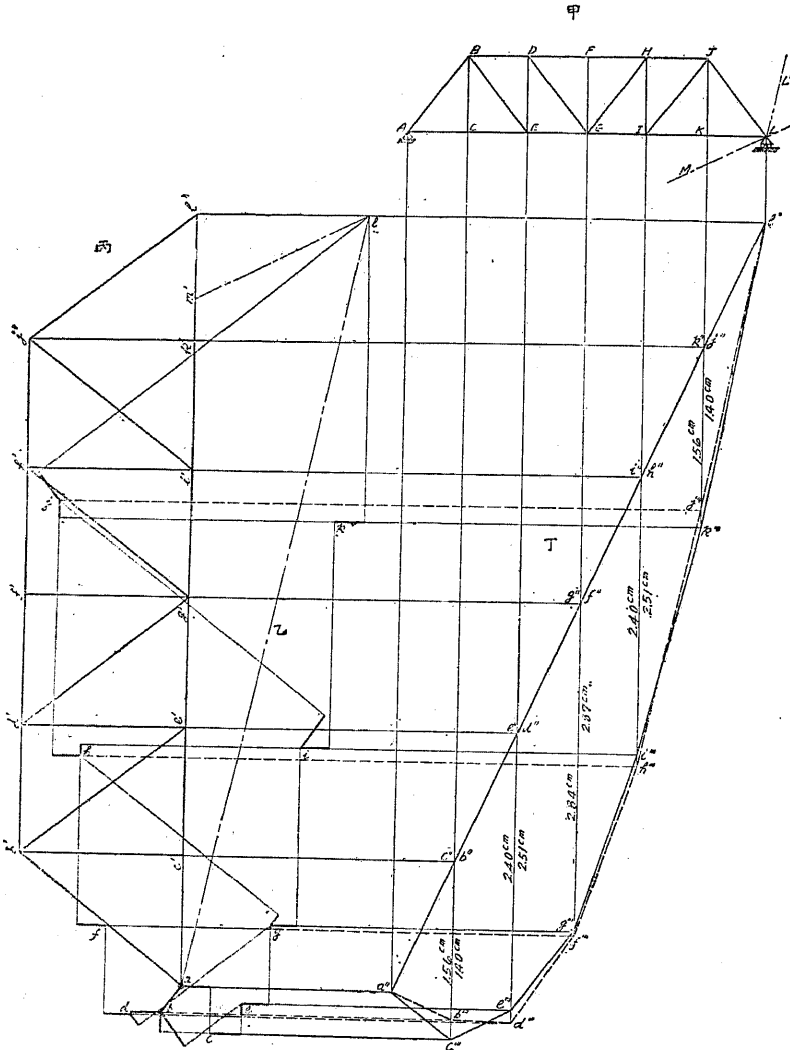
- (1) 結構中任意の一部材の方向と其の一端を固定し各部材の變形 ($4l = \frac{Sl}{EA}$) に依りてウキリオトの變形圖を描く。
- (2) (1) の假想基準の實狀を考慮してモールの廻轉圖を描く。
- (3) ウキリオトの變形圖を描く場合 $4l$ の計算に用ふる斷面は純斷面積を採らず總斷面積を採用すべし。

である、次に § 177. 例題 23. に示すプラット構のウキリオト・モールの變形圖を描いて見よう。

第 675 圖甲に於て A 點を固定し \overline{AB} の方向を一定としてウキリオトの變形圖を求める時は $abcd \dots l$ (乙) となる、而して直線 al は L 格點の變位量並に其の方向を與ふるのである、然るに L 格點の變位は輿子臺(水平)上の水平變位のみにして垂直變位は支承が不沈である限りは到底認められないものである、以上の誤差は専らウキリオトの變形圖の假想基準たる \overline{AB} の方向を一定と假定した事柄が實狀に適合しない結果に外ならない、故にモールの廻轉圖に依つて之を修正する必要がある、乃ち結構 $ABCD \dots$

…… L を A 点を中心として L 点の變位が l' となる迄廻轉するのである、 $a'l'$ (若し L 点の輻子臺が ML の如く傾斜する場合は $m'l' // ML$ として

第 6 7 5 圖



am') を下弦とする相似形 $ab'c'd' \dots l'$ (丙) はモールの廻轉圖にして bb' , cc' , dd' , ……は實際の變位量及其の方向を表すものである、而して其の下弦格點の撓度多角形は $a''c''e'' \dots l''$ (丁) にして上弦格點の夫れは $a''b''d'' \dots l''$ (丁) である、 G 点の撓度は 2.84 cm. にして囊の計算にて求められた結果 (2.838 cm.) と比較して大差はないのである、加之同一載荷状態に於ける全格點の撓度が同時に求め得る特徴がある。

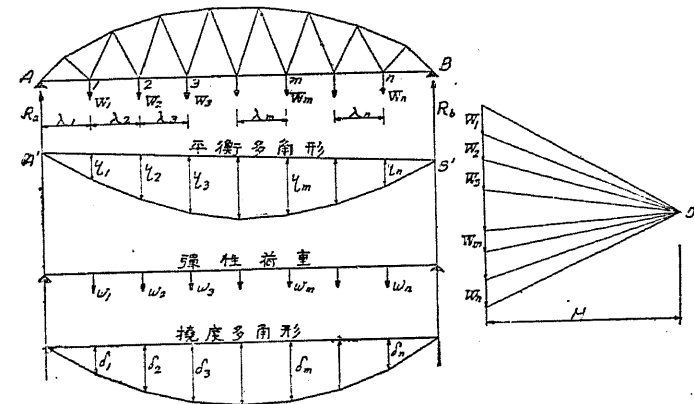
§ 124. 彈性荷重 Elastic load.

結構の格點變位はウキリオト。モールの變形圖に依り容易に之を求むることが出来るけれども大なる構造物に於ては其の假定の誤差が逐次累積して時には相當の差異を生ずることがある、斯る場合次の彈性荷重を使用して遙かに精確なる結果を得る事が出来る。

彈性荷重に依つて格點の撓度を求める方法とは撓度多角形と平衡多角形との關係を基として外力の更りに特殊の荷重を作用せしめ之に依つて得たる平衡多角形が直ちに撓度多角形になる様にしたものである、而して其の特殊の荷重を彈性荷重と稱するのである。

第 676 圖に於て格點 1. 2. 3. ……に於ける彎曲率を M_1, M_2, M_3, \dots と

第 6 7 6 圖



すれば

$$M_1 = R_a \lambda_1 = H \eta_1$$

$$M_2 = R_a(\lambda_1 + \lambda_2) - W_1 \lambda_2 = H \eta_2$$

$$M_3 = R_a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - W_1(\lambda_2 + \lambda_3) - W_2 \lambda_3 = H \eta_3$$

.....

にして

$$M_2 - M_1 = (R_a - W_1) \lambda_2 = H(\eta_2 - \eta_1)$$

$$M_3 - M_2 = (R_a - W_1 - W_2) \lambda_3 = H(\eta_3 - \eta_2)$$

.....

従つて
$$W_2 = H \left[\frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3} \right]$$

$$W_3 = H \left[\frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3} - \frac{\eta_4 - \eta_3}{\lambda_4} \right]$$

である、一般式として

$$W_m = H \left[\frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}} \right] \dots \dots \dots (337)$$

を得。

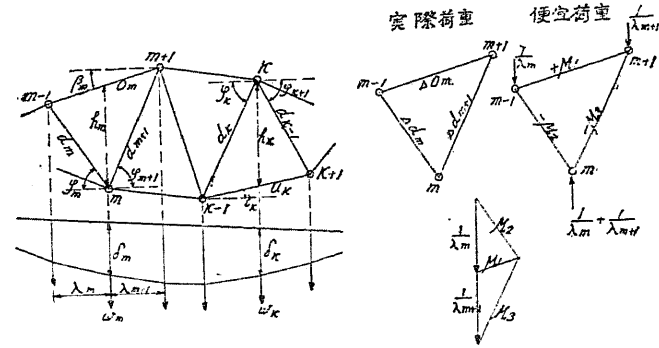
(337) 式に依れば m 格點に作用する外力 W_m と其の點及其兩側二點に於ける平衡多角形の縦距との間には一定の關係が存するものである、故に今彈性荷重 $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m, \dots, w_n$ が求め得られ其の平衡多角形が直ちに撓度多角形となるものとし且極距 $H=1$ と採り得るならば

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{\lambda_2} - \frac{\delta_3 - \delta_2}{\lambda_3} \\ w_3 &= \frac{\delta_3 - \delta_2}{\lambda_3} - \frac{\delta_4 - \delta_3}{\lambda_4} \\ &\dots \dots \dots \\ w_m &= \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (338)$$

でなくてはならない。

(a) ストローベン構の彈性荷重.

第 677 圖



第 677 圖のストローベン構に於て

- o_m 下弦格點 m に對する上弦材の長.
- u_k 上弦格點 k に對する下弦材の長.
- d_m 對角材 $(m-1) \sim m$ の長.
- Δo_m o_m の變形量.
- Δu_k u_k の變形量.
- Δd_m d_m の變形量.
- λ_n $(m-1) \sim m$ の分格長.
- β_m o_m の水平軸となす角.
- γ_2 u_k の水平軸となす角.
- φ_m d_m の水平軸となす角.

とする、今一つの三角形 $(m-1) m (m+1)$ を摘出し格點 $(m-1)$ に $\frac{1}{\lambda_n}$ 、格點 $(m+1)$ に $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ なる便宜荷重を載荷し格點 m に於て支持せられるものとしモールの働の公式を適用すれば

$$\Sigma \bar{P}\delta = \frac{1}{\lambda_n}(\delta_{m-1} - \delta_m) + \frac{1}{\lambda_{m+1}}(\delta_{m+1} - \delta_m) \dots \dots \dots (339)$$

$$\Sigma \bar{S}\Delta l = +\mu_1 \Delta o_m - \mu_2 \Delta d_m - \mu_3 \Delta d_{m+1} \dots \dots \dots (340_a)$$

上式中 μ_1, μ_2 及 $\mu_3 \dots \dots$ 便宜荷重に因る部材の應力

にして

$$\mu_1 : \frac{1}{\lambda_m} = \lambda_m \sec \beta_m : h_m \quad \therefore \mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m}$$

$$\mu_2 : \frac{1}{\lambda_m} = d_m : h_m = \lambda_m \sec \varphi_m : h_m \quad \mu_2 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m}$$

$$\mu_3 : \frac{1}{\lambda_{m+1}} = d_{m+1} : h_m = \lambda_{m+1} \sec \varphi_{m+1} : h_m \quad \mu_3 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m}$$

なるを以て

$$\Sigma \bar{S}\Delta l = \frac{\Delta o_m \sec \beta_m - \Delta d_m \sec \varphi_m - \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m} \dots \dots \dots (340_b)$$

である、(338) 式及 (339) 式の右邊を比較する時は符號のみの違にして其の絶對値は同一である、乃ち

$$w_m = -\Sigma \bar{P}\delta = -\Sigma \bar{S}\Delta l = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}$$

$$= \frac{-\Delta' o_m + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1}}{h_m} \dots \dots \dots (341_a)$$

上式中 $\begin{cases} \Delta' o_m = \Delta o_m \sec \beta_m \\ \Delta' d_m = \Delta d_m \sec \varphi_m \\ \Delta' d_{m+1} = \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1} \end{cases}$

である、同様にして上弦格點 k の彈性荷重 w_k は

$$w_k = \frac{+\Delta u_k \sec \gamma_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}$$

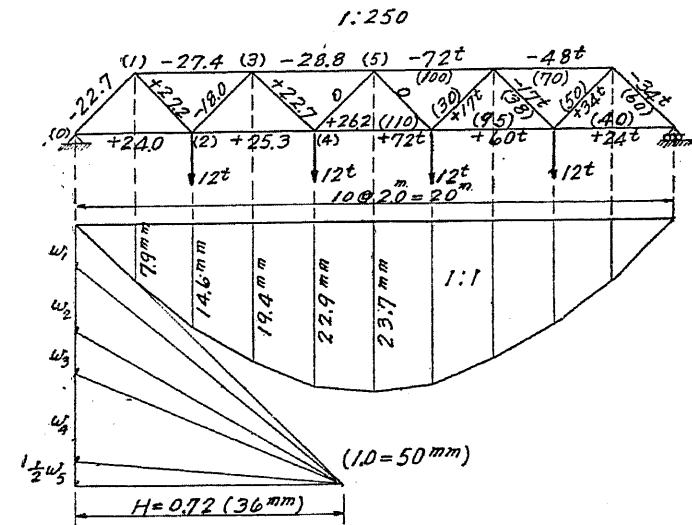
$$= \frac{+\Delta' u_k - \Delta' d_k - \Delta' d_{k+1}}{h_k} \dots \dots \dots (341_b)$$

である、而して $\Delta o_m, \Delta u_k$ 及 Δd_m 等の符號は伸張若しくは壓縮に依り

「+」「-」を採ることは勿論である。

例題 25. 第 678 圖に示すワーレン構に於て下弦の全格點に 12t の荷重を載荷したる場合各格點の撓度を求む、但し 構高は 2.0m にして $E=1,800,000 \text{ kg/cm}^2$ とす。

第 6 7 8 圖



結構の右半に示す數字は部材の應力（應）及部材の斷面積（平方厘米）を括弧の内にある數字）を表すものである。

而して平行弦なる故 $\Delta' o = \Delta o$ 及 $\Delta' u = \Delta u$ にして圖式の都合に依り $\Delta' o$ 及 $\Delta' u$ の 180 倍の値を求める、例へば部材 (1)-(3) に於て $180 \Delta' o$ は

$$180 \Delta' o = -\frac{48,000 \times 400}{1,800,000 \times 70} = -27.4 \text{ cm.}$$

である、同様にして對角材の $\Delta' d$ も $180 \Delta' d$ の値を求める、例へば部材 (1)-(2) の $180 \Delta' d$ は

$$180 \Delta' d = 180 \Delta d \times \frac{d}{\lambda} = \frac{34,000 \times 200 \times 2}{1,800,000 \times 50} = 27.2 \text{ cm.}$$

である、結構の左半に示す数字は以上の如くにして得たるものである、今 (341) 式に依り各格點の彈性荷重を求める時は

$$w_1 = \frac{1}{200} [+24.0 + 22.7 - 27.2] = 0.0975$$

$$w_2 = \frac{1}{200} [+27.4 + 27.2 - 18.0] = 0.1830$$

$$w_3 = \frac{1}{200} [+25.3 + 18.0 - 22.7] = 0.1030$$

$$w_4 = \frac{1}{200} [+28.8 + 22.7] = 0.2575$$

$$w_5 = \frac{1}{200} \times 26.2 = 0.1310$$

となる。以上の彈性荷重を荷重として極多角形及平衡多角形を描く時は直ちに撓度が得られるのである、且其の際極距 $H=1$ と採る代りに 180 と採り更に縮尺が $\frac{1}{250}$ なるを以て

$$H = \frac{180}{250} = 0.72 \text{ (50 mm.} \times 0.72 = 36 \text{ mm.)}$$

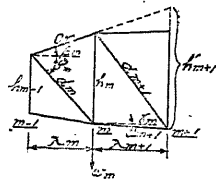
と採れば撓度多角形の縦距は 1:1 の縮尺を以て計りたる値となる。

(b) ステンデル構の彈性荷重.

上記ストレーベン構の場合と同様にステンデル構の彈性荷重を求める時は次の如くなる、而して此の場合には上弦格點の撓度と下弦格點の撓度とは別々に求めるのである。

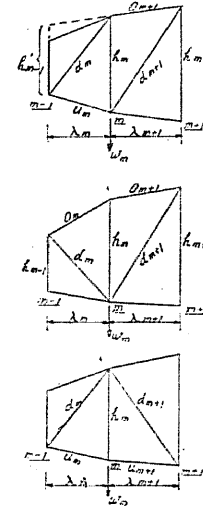
(イ) 下弦格點の彈性荷重.

第 6 7 9 圖



$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[-\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_n} + \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{n+1}} \right] \dots\dots (342_a)$$

第 6 7 9 圖



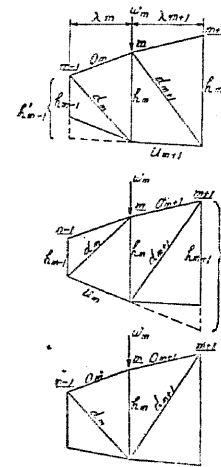
$$w_{m+1} = \frac{1}{h_{m+1}} \left[-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} + \Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} \right] \dots\dots (342_b)$$

$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[-\Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + \Delta h_m (\tan \beta_m - \tan \beta_{m+1}) - \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_n} - \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{n+1}} \right] \dots\dots (342_c)$$

$$w_{m+1} = \frac{1}{h_{m+1}} \left[+\Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} - \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} + \Delta h_m (\tan \varphi_m + \tan \varphi_{m+1}) \right] \dots\dots (342_d)$$

(ロ) 上弦格點の彈性荷重.

第 6 8 0 圖

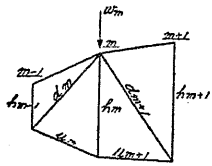


$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[-\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - \Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} + \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \right] \dots\dots (343_a)$$

$$w_{m+1} = \frac{1}{h_{m+1}} \left[-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_n} - \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{n+1}} \right] \dots\dots (343_b)$$

$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[-\Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - \Delta h_m (\tan \varphi_m + \tan \varphi_{m+1}) \right] \dots\dots (343_c)$$

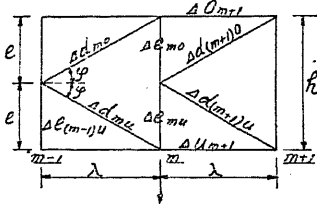
第 6 8 0 圖



$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[+\Delta'u_m + \Delta'u_{m+1} - \Delta'd_m - \Delta'd_{m+1} - \Delta h_m (\tan \gamma_m - \tan \gamma_{m+1}) + \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_n} + \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \right] \dots \dots \dots (343_d)$$

c) K 構の弾性荷重.

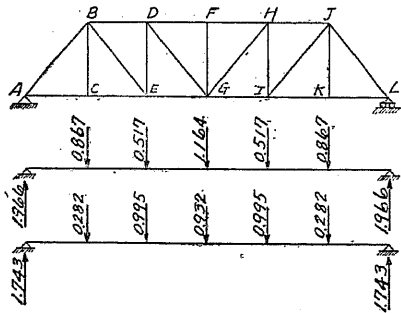
第 6 8 1 圖



$$w_m = \frac{1}{2\lambda} \left[-2\Delta e_{(m-1)u} + \Delta e_{mu} + 3\Delta e_{mu} - \Delta e_{(m+1)o} - \Delta e_{(m+1)u} + \frac{1}{2\lambda \sin \varphi} [\Delta d_{mu} - \Delta d_{mo} - \Delta d_{(m+1)u} + \Delta d_{(m+1)o}] + \frac{1}{h} (\Delta u_{m+1} - \Delta o_m) \dots \dots \dots (344) \right]$$

例題 26. § 117. の例題に示すプラット構の格点撓度を弾性荷重に依つて求む.

第 6 8 2 圖



下弦格点の弾性荷重は (342) 式に依り ($\Delta'o$ $\Delta'u$ $\Delta'd$ 及 Δh の値は第 42 表参照)

$$w_c = \frac{1}{h} \left[+\Delta'AC + \Delta'CE - \Delta'AB - \Delta'BE + \Delta BC \times \frac{2h}{\lambda} \right] = \frac{1}{900} \left[+0.266 + 0.266 - (-0.293) \times \frac{1,140}{700} - 0.365 \times \frac{1,140}{700} + 0.174 \times \frac{2 \times 900}{700} \right] = \frac{0.867}{900}$$

$$w_e = \frac{1}{h} \left[-\Delta'BD + \Delta'EG + \Delta'BE - \Delta'DG - \Delta BC \times \frac{h}{\lambda} + \Delta DE \times \frac{h}{\lambda} \right] = \frac{1}{900} \left[-(-0.249) + 0.235 + 0.365 \times \frac{1,140}{700} - 0.122 \times \frac{1,140}{700} - 0.174 \times \frac{900}{700} + (-0.107) \times \frac{900}{700} \right] = \frac{0.517}{900}$$

$$w_g = \frac{1}{h} \left[-\Delta'DF - \Delta'FH + \Delta'DG + \Delta'HG - \Delta DE \times \frac{h}{\lambda} - \Delta HI \times \frac{h}{\lambda} \right] = \frac{2}{900} \left[-(-0.245) + 0.122 \times \frac{1,140}{700} - (-0.107) \times \frac{900}{700} \right] = \frac{1.164}{900}$$

$$w_i = w_e = \frac{0.517}{900} \quad w_k = w_c = \frac{0.867}{900}$$

にして以上の如き弾性荷重を各格点に作用せしめ AL を径間とする単杆の彎曲率を求める時は直ちに撓度を與へる結果となる。

$$\delta_j = (3 \times 1.966 - 3 \times 0.867 - 0.517) \times \frac{700}{900} = 2.837 \text{ cm.}$$

$$\delta_e = (2 \times 1.966 - 0.867) \times \frac{700}{900} = 2.384 \text{ cm.}$$

$$\delta_c = 1.966 \times \frac{700}{900} = 1.529 \text{ cm.}$$

上弦格点の弾性荷重は (343) 式に依り

$$w = \frac{1}{h} \left[+\Delta'AC + \Delta'CE - \Delta'AB - \Delta'BE + \Delta DE \times \frac{h}{\lambda} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{900} \left[+0.266 + 0.266 - (-0.296) - 0.365 \times \frac{1,140}{700} - 0.107 \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{900}{700} \right] = \frac{0.282}{900} \\
 w_d &= \frac{1}{h} \left[-A'BD + A'EG + A'BE - A'DG - ADE \times \frac{h}{\lambda} + AFG \times \frac{h}{\lambda} \right] \\
 &= \frac{1}{900} \left[-(-0.249) + 0.235 + 0.365 \times \frac{1,140}{700} - 0.122 \times \frac{1,140}{700} \right. \\
 &\quad \left. - (-0.107) \times \frac{900}{700} + (-0.017) \times \frac{900}{700} \right] = \frac{0.995}{900} \\
 w_f &= \frac{1}{h} \left[-A'DF - A'FH + A'DG + A'HG - 2AFG \times \frac{h}{\lambda} \right] \\
 &= \frac{2}{900} \left[-(-0.245) + 0.122 \times \frac{1,140}{700} - 0.107 \times \frac{900}{700} \right] = \frac{0.982}{900}
 \end{aligned}$$

にして AL を径間とする単桁に於て格點に該當する點 B, D, F, \dots に以上の荷重を載荷して彎曲率を求めて撓度を得る。

$$\begin{aligned}
 \delta_f &= (3 \times 1.743 - 2 \times 0.282 - 0.995) \times \frac{700}{900} = 2.854 \text{ cm.} \\
 \delta_d &= (2 \times 1.743 - 0.282) \times \frac{700}{900} = 2.492 \text{ cm.} \\
 \delta_b &= 1.743 \times \frac{700}{900} = 1.356 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

如斯にして得られた結果はモールの働に關する公式に依りて求められた値及ウキリオト・モールの變形圖に依りて求められたもの (第 675 圖参照) と比較して大差がないのである。

(d) 等質體の彈性荷重.

ストレーベン構の彈性荷重 (341) 式に於て對角材の影響を省略する時は

$$\left. \begin{aligned} w_m &= -\frac{\Delta o_m \sec \beta_m}{h_m} \\ w_k &= +\frac{\Delta u_k \sec \gamma_k}{h_k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (345_a)$$

にして若し第 677 圖に於て m 格點より o_m 部材に至る垂直距離及 k 格點より u_k に至る垂直距離を各 γ_m 及 γ_k とすれば (345_a) 式は

$$\left. \begin{aligned} w_m &= -\frac{\Delta o_m}{\gamma_m} \\ w_k &= +\frac{\Delta u_k}{\gamma_k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (345_b)$$

となり更に m 點及 k 點の彎曲率を各 M_m 及 M_k とすれば

$$\begin{aligned} \Delta o_m &= -\frac{Sl_o}{EA} = -\frac{M_m l_o}{EA \gamma_m} \\ \Delta u_k &= +\frac{Sl_u}{EA} = +\frac{M_k l_u}{EA \gamma_k} \end{aligned}$$

上式中 l_o 及 l_u, \dots, o_m 及 u_k の部材長.

にして是等の値を (345_b) 式に挿入して

$$\left. \begin{aligned} w_m &= \frac{M_m l_o}{EA \gamma_m^2} \\ w_k &= \frac{M_k l_u}{EA \gamma_k^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (345_c)$$

となる、今等質體に於て彎曲率以外の應力の影響を省略するものとすれば

(345_c) 式は直ちに利用する事が出来る、乃ち任意の斷面に於て A を突縁

の斷面とすれば單位長に對する彈性荷重 w は

$$w = 2 \frac{M \cdot 1}{EA \gamma^2} = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots (346)$$

となる。

§ 125. $\int M_i M_k dx$ の値.

(332) 式に於て彎曲率のみの影響を考慮し其の斷面が桁全長を通じて同一なる時は

$$EI \delta_{ik} = \int M_i M_k dx \dots\dots\dots (347)$$

となる。

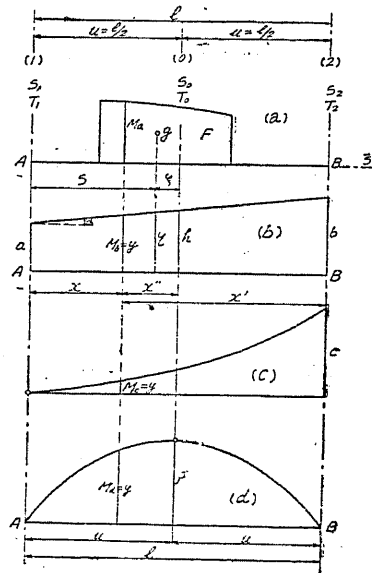
今第 683 圖に於て M_a は任意の形をとるものとし M_b は梯形, M_c は A 點に頂點を有する拋物線, M_d は徑間の中央に頂點を有する拋物線なる時は

第 6 8 3 圖

$$\begin{aligned} M_b &= y = h - x'' \tan \alpha \\ &= a + x \tan \alpha \\ &= b - x' \tan \alpha \\ &= \frac{a}{l} x' + \frac{b}{l} x \end{aligned}$$

$$M_c = y = c \frac{x^2}{l^2}$$

$$\begin{aligned} M_d &= y = f \left(1 - \frac{x''/2}{u} \right) \\ &= \frac{f}{u^2} (lx - x^2) \\ &= \frac{f}{u^2} (lx' - x'^2) \end{aligned}$$



にして

$$\bar{S} \dots\dots AB \text{ 軸に對する } M_a \text{ の面積率} = \frac{\int M_a^2 dx}{2}$$

$S_0 S_1 S_2 \dots\dots (0) (1) (2)$ 軸に對する M_b の面積率

$$= \int M_b x'' dx, \int M_b x dx, \int M_b x' dx$$

$T_0 T_1 T_2 \dots\dots (0) (1) (2)$ 軸に對する M_c の物量力率

$$= \int M_c x''/2 dx, \int M_c x^2 dx, \int M_c x'^2 dx$$

$F \dots\dots M_a$ の面積.

$g \dots\dots M_a$ の重心.

とすれば

$$\int M_a^2 dx = 2\bar{S}$$

$$\int M_a M_b dx = \int M_a (h - x'' \tan \alpha) dx = Fh - S_0 \tan \alpha$$

$$= \int M_a (a + x \tan \alpha) dx = Fa + S_1 \tan \alpha$$

$$= \int M_a (b - x' \tan \alpha) dx = Fb - S_2 \tan \alpha$$

$$= \int M_a \left(\frac{a}{l} x' + \frac{b}{l} x \right) dx = \frac{a}{l} S_2 + \frac{b}{l} S_1$$

$$= \int M_a (a + x \tan \alpha) dx = a \int M_a dx + \tan \alpha \int M_a x dx$$

$$= \int M_a dx (a + \tan \alpha \frac{\int M_a x dx}{\int M_a dx})$$

$$= \int M_a dx (a + s \tan \alpha) = F\eta$$

$$\int M_c M_d dx = T_1 \frac{c}{l^2}$$

$$\int M_a M_c dx = f \left(F - \frac{T_0}{u^2} \right)$$

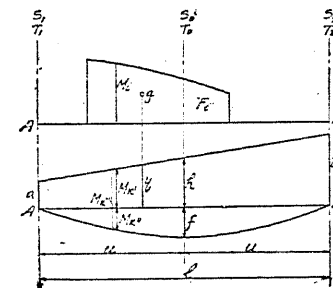
$$= \frac{f}{u^2} (S_1 l - T_1)$$

$$= \frac{f}{u^2} (S_2 l - T_2)$$

... (348)

である、尙第 684 圖に於て M_i は任意の形にして M_k は梯形と拋物線の併合なる場合には

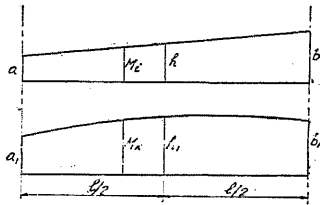
第 6 8 4 圖



$$\begin{aligned}
 \int M_i M_k dx &= \int M_i (M_k' + M_k'') dx \\
 &= F_i (\eta + f) - T_o \frac{f}{u^2} \\
 &= F_i (h + f) + S_o \tan \alpha - T_o \frac{f}{u^2} \\
 &= F_i a + S_1 \left(\frac{2f}{u} + \tan \alpha \right) - T_1 \frac{f}{u^2} \\
 &= F_i b + S_2 \left(\frac{2f}{u} - \tan \alpha \right) - T_2 \frac{f}{u^2}
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots(349)$$

にして第 685 圖は M_i が梯形, M_k が拋物線なる場合にしてシンプソン Simpson の式に依り

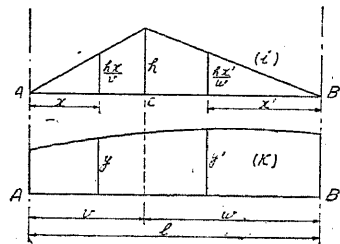
第 6 8 5 圖



$$\int M_i M_k dx = \frac{l}{6} (aa_1 + 4hh_1 + bb_1) \dots\dots\dots(350)$$

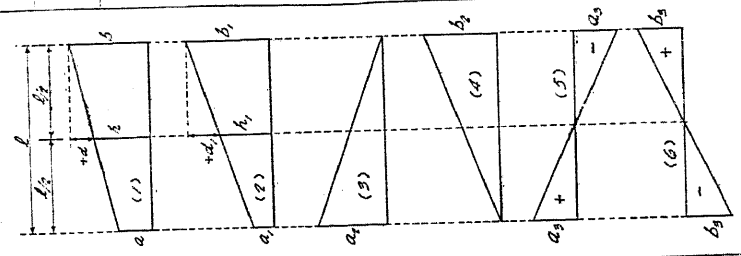
である, 第 686 圖は M_i が三角形, M_k が任意の形なる場合にして

第 6 8 6 圖



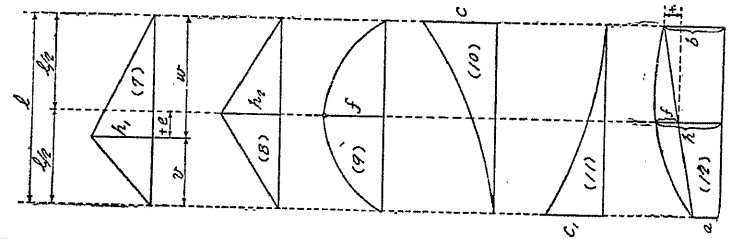
第 4 4 表 其 一

(i)	(k)	$\int M_i M_k dx$	$\int M_i M_k dx$
(1)	(9)	$\frac{l}{3} (a^2 + ab + b^2) = l \left(\frac{h^2}{3} + \frac{f^2}{3} \right)$	$\frac{2flh}{3}$
(1)	(10)	$\frac{l}{6} [a(2a_1 + b_1) + b(2b_1 + a_1)]$	$\frac{cl}{12} (3b + a)$
(1)	(11)	$= \frac{l}{6} [a_1(2a + b) + b_1(2b + a)]$	$-\frac{c_1 l}{12} (3a + b)$
(1)	(13)	$= l \left(hh_1 + \frac{df_1}{3} \right)$	$l \left(hh_1 + \frac{df_1 - f_1 h}{3} \right) =$
(1)	(14)	$= \frac{l}{6} (aa_1 + 4hh_1 + bb_1)$	$\frac{l}{6} (aa_1 + 4hh_1 + bb_1)$
(1)	(15)	$\frac{la_2}{6} (2a + b)$	$\frac{l}{6} [a_1(2a + b) + 4f_1 h]$
(1)	(16)	$\frac{lb_2}{6} (b - a)$	$\frac{f_1 l}{6} (b + 3h) =$
(1)	(17)	$-\frac{lb_2}{2} (b - a)$	$\frac{f_1 l}{12} (3a + 5b)$
(1)	(7)	$\frac{h_1}{2} \left(lh - \frac{2de}{3} \right) =$	$\frac{lc_2 l}{2} \left(a + \frac{2vd}{3l} \right)$
(1)	(8)	$\frac{h_1}{6} [a(l + v) + b(l + v)]$	$-\frac{c_2 l}{20} (4a + b)$
(1)	(3)	$\frac{hh_2 l}{2}$	$\frac{la_2}{3}$



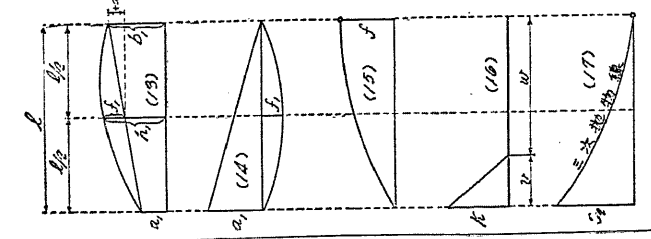
第 4 4 表 其 二

(i) (k)	$\int M_1 M_k dx$	(i) (k)	$\int M_2 M_k dx$
(3) (4)	$\frac{l a_2 b_2}{6}$	(3) (17)	$\frac{a_2 c_2 l}{5}$
(3) (5)	$\frac{l a_2 a_3}{6}$	(4) (7)	$\frac{h_1 b_2}{6} (1+v)$
(3) (6)	$-\frac{l a_2 b_3}{6}$	(4) (12)	$\frac{l b_2}{6} (v+2h)$
(3) (7)	$\frac{h_1 a_2}{6} (1+v)$	(4) (14)	$\frac{l b_2}{6} (a_1+2f)$
(3) (8)	$\frac{h_2 a_2 l}{4}$	(4) (15)	$\frac{5 b_2 f l}{12}$
(3) (9)	$\frac{f a_2 l}{3}$	(4) (16)	$\frac{l c b_2 v^2}{6l}$
(3) (10)	$\frac{c l a_2}{12}$	(4) (17)	$\frac{b_2 c_2 l}{20}$
(3) (11)	$\frac{c_1 l a_2}{4}$	(5) (5)	$\frac{a_2^2 l}{3}$
(3) (12)	$\frac{l a_2}{6} (a+2h)$	(5) (6)	$-\frac{a_2 b_2 l}{3}$
(3) (14)	$\frac{a_2 l}{3} (a_1+f)$	(5) (7)	$\frac{a_2 b_1 c}{3}$
(3) (15)	$\frac{a_2 f l}{4}$	(5) (10)	$-\frac{l a_2 c}{6}$



第 4 4 表 其 三

(i) (k)	$\int M_1 M_k dx$	(i) (k)	$\int M_2 M_k dx$
(5) (15)	$-\frac{l a_2 f}{6}$	(10) (11)	$\frac{c c_1 l}{80}$
(5) (17)	$\frac{3 l a_2 c_2}{20}$	(10) (16)	$\frac{c_1 b v^3}{12 l^2}$
(7) (7)	$\frac{h_1^2 l}{3}$	(11) (16)	$\frac{l v c_1}{12 l^2} (6 l^2 - 4 l v + v^2)$
(7) (8)	$\frac{h_1 l a_2 l}{2 l 0} \left(\frac{l}{2} - \frac{2 v^2}{3 l} \right)$	(12) (12)	$l \left[h^2 + \frac{d^2 - 2 f h}{3} + \frac{f^2}{5} \right]$
(7) (9)	$\frac{l f h_1}{3} \left(1 + \frac{v v 0}{l^2} \right)$	(12) (13)	$l \left[h h_1 + \frac{d d_1 - f h_1 - f_1 h}{3} + \frac{f f_1}{5} \right]$
(7) (10)	$\frac{h_1 c}{12} \left(3 a + \frac{v 0^2}{l} \right)$	(12) (17)	$\frac{c_2 l}{5} \left(a + \frac{b}{4} + \frac{2 f}{3} \right)$
(7) (15)	$\frac{h_1 f}{12} \left(3 l + 3 v - \frac{v^2}{l} \right)$	(17) (17)	$\frac{c_2^2 l}{7}$
(8) (9)	$\frac{5 f h_2 l}{12}$		
(9) (9)	$\frac{8 f^2 l}{15}$		
(9) (10)	$\frac{c f l}{5}$		
(10) (10)	$\frac{c^2 l}{5}$		



$$\int M_i M_k dx = \int_0^x \frac{hx}{v} y dx + \int_0^{x'} \frac{hx'}{w} y' dx'$$

$$= \frac{hl}{vw} \left[\frac{w}{l} \int_0^x y x dx + \frac{v}{l} \int_0^{x'} y' x' dx' \right] \dots (351)$$

である。

以上の公式を使用して種々なる M_i と M_k の組合せに依つて $\int M_i M_k dx$ を求める時は第 44 表の如き値となる。