第十一章 橋桁の振動[1]

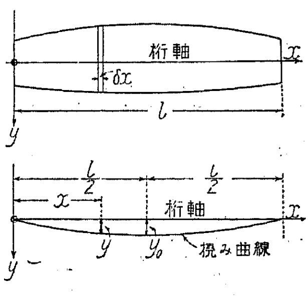
〔50〕 單支桁の振動

動荷重が橋桁上を走過する時は桁に振動起り、衝擊作用に著しき影響を及ぼす。而して桁の振動は其の構造、寸法、重量及動荷重の大きさ、位置、速度、性質等に依りて異なり極めて複雜なる動力學的問題なるが、動荷重に因る週期的外力と桁自身の鉛直振動との週期が略ぼ等しき時は共鳴作用を起し桁に對して頗る危險なるを以て、以下主として橋桁の主振動(Principal vibration)の週期の計算法に就て述べる。

(1) 單支桁の振動

單支桁は兩端に於て自由に角變位を爲し、一端に於て水平變位をも爲し得るを以て、桁の中立軸を x 軸、左端を原點とし、鉛直下向に y 軸を採り、橋桁の單位長に對する全荷重を w、重力の加速度を g、彎曲力率に對して有效なる桁の斷面慣性能率を I、材料の彈性係數を E とすれば(第 220 圖參照)、桁の上下運動の方程式は

第 220 圖



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\frac{w}{g}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \quad \cdots(192)$$

然るに δx なる部分の有する勢力は

位置の勢力 $\delta E_p = \frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\delta x$

運動の勢力 $\delta E_k = \frac{1}{2}\,\frac{w}{g}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\delta x$

今 Barling の假定により x の方向に勢力の移動なく、且つ振動に對する抵抗

---

[1] 著者:“橋桁の振動並に其の衝擊作用との關係に就て”土木學會誌 10 卷 1 號

を無視すれば δx なる區分の全勢力は不變なるを以て

$$\delta E_p+\delta E_k = \frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\delta x+\frac{1}{2}\frac{w}{g}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\delta x = const.$$

各區分の運動を單一振動なりとし

u = 振動の半振幅， T = 週期， p = 振動數 $= \frac{2\pi}{T}$

とすれば、 $y = u \sin pt$ にして

$$\delta E_p+\delta E_k = EI\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 \sin^2 pt\,\delta x+\frac{w}{g}p^2u^2\cos^2 pt\,\delta x$$

然るに、勢力不滅律 (Conservation of energy) により

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta E_p+\delta E_k) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2u}{dx^2} + pu\sqrt{\frac{w}{gEI}} = 0 \quad \cdots\cdots(193)$$

(193) 式の一般解は

$$u = A\sin mx+B\cos mx \qquad \text{茲に} \quad m^2 = p\sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad \cdots\cdots(194)$$

兩端に於て上下運動なきを以て $B = 0$ 及 $A\sin ml = 0$、故に m の最小値は π/l にして主振動の週期は

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2}{\pi}l^2\sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad \cdots\cdots(195)$$

（2）桁の撓み曲線に依る振動週期の計算法

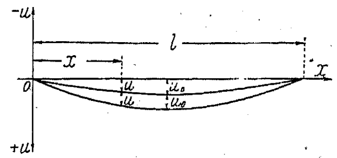
單支桁が x なる點の單位長の全重量（自重及載荷重） w なる連續的靜荷重により u なる撓みを有する時、桁軸は此靜力的平衡の位置より上下に $2u$ たけの振幅の振動を爲し、$\pm u$ に於て位置の勢力のみを有し、靜力的平衡の位置に於ては運動の勢力のみを有する。

位置の勢力 $\quad E_p = \frac{1}{2}\int_0^l wu\,dx$

運動の勢力 $\quad E_k = \frac{1}{2g}\int_0^l w(pu)^2\,dx$， 茲に $p = \frac{2\pi}{T}$

桁の有する全勢力は不變にして且つ振動數 p を一定とすれば

第 221 圖



$E_p = E_k$ より

$$p^2 = \frac{\int_0^l wu\,dx}{\frac{1}{g}\int_0^l wu^2\,dx} \quad \cdots\cdots(196)$$

然るに w, u は既知なるを以て p 從て T を求め得る。桁の全長に亘り w が一樣なる時は

$$u = \frac{w}{24EI}(x^4-2lx^3+l^3x) \qquad p^2 = 97.55\frac{gEI}{wl^4}$$

$$\therefore \quad T = \frac{l^2}{1.572}\sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad \cdots\cdots(197)$$

即ち、此方法は近似的計算法なるも (195) 式の結果と殆んど一致する。

重量を有せざる等斷面桁が $x = a$ に W なる集中荷重を有する場合は

$$u = \frac{Wa^2(l-a)^2}{3EIl}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{Wa^2(l-a)^2}{3gEIl}} \quad \cdots(198)$$

等布荷重 w 及端より a なる點に集中荷重 W を有する場合は

$$T \doteqdot \frac{\pi}{2}l^2\sqrt{\frac{32\frac{W}{l}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(1-\frac{a}{l}\right)^2+w}{6gEI}} \quad \cdots\cdots(199)$$

多くの點に $W_1, W_2 \cdots\cdots W_n$ なる荷重を有する時、W_m なる一荷重を有する場合の週期を T_m とすれば全部の荷重を載せたる時の週期 T は

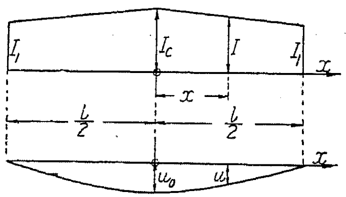
$$T \doteqdot \sqrt{T_1^2+T_2^2+\cdots\cdots+T_n^2} \quad \cdots\cdots(200)$$

（3）鈑桁の振動週期

實際の鈑桁は斷面積及慣性能率 I 一樣ならざる場合多きを以て、先づ I を x

の適當なる函數を以て表はし、單位長の全荷重 w に對する撓み曲線 u を求むる。今一例として I が中央より端に一次的に減ずる場合を採れば

第 222 圖



$$I = I_c\left(1-\alpha\frac{2x}{l}\right)$$

玆に　$\alpha = 1-\frac{I_l}{I_c}$

玆に I_c は中央、I_l は兩端の慣性能率である。

彎曲力率　$M_x = \frac{w}{2}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right) = \frac{wl^2}{8}\left\{1-\left(\frac{2x}{l}\right)^2\right\}$

x 斷面の撓み　$u_x = \int_x^{\frac{l}{2}}\int_0^x \frac{M}{EI}dx\,dx$

$$=\frac{wl^4}{8I_cE}\int_x^{\frac{l}{2}}\int_0^x \frac{1-\left(\frac{2x}{l}\right)^2}{1-\alpha\frac{2x}{l}}\frac{dx}{l}\frac{dx}{l} = \frac{wl^4}{8I_cE}\eta$$

然るに撓みの最大なる位置に於て桁の位置の勢力は

$$E_p = 2\int_0^{\frac{l}{2}} u_x\frac{w}{2}dx = w\int_0^{\frac{l}{2}} u_x dx$$

振動時の最大なる運動の勢力は

$$E_k = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\frac{w}{g}v^2dx, \quad 玆に \quad v = \frac{2\pi u_x}{T}$$

依て　$E_p = E_k$　により

$$T^2 = \frac{\pi^2}{2gE}w\frac{l^4}{I_c}\frac{\int_0^{\frac{l}{2}}\eta^2dx}{\int_0^{\frac{l}{2}}\eta\,dx} = \frac{\pi^2w}{2gE}\frac{l^4}{I_c}\lambda \quad \cdots(201)$$

玆に　$\lambda = \int_0^{\frac{l}{2}}\eta^2dx\Big/\int_0^{\frac{l}{2}}\eta dx$

振動週期 T は

$$\left.\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{\pi^2}{2gE}\lambda}\;l^2\sqrt{\frac{w}{I_c}} = C\,l^2\sqrt{\frac{w}{I_c}} \\ C &= \sqrt{\frac{\pi^2}{2gE}\lambda} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(202)$$

λ 及 C のディメンションは

$$[\lambda] = 0, \quad [C] = \left\{\left[\frac{L}{T^2}\right]\left[\frac{LM}{T^2L^2}\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{[T]^2}{[M]^{\frac{1}{2}}}$$

玆に $[L]$ は長さ、$[M]$ は質量、$[T]$ は時の單位を示す。

即ち α が與へらるれば λ を知り、從て C を知り振動週期 T を計算し得る。$10^4 C$ の値は第 35 表第 223 圖（a）に示す。

第 35 表　10^4C の値 (m-t-sec)

α =	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
λ =	0.0821	0.0863	0.0940	0.1025	0.1171	0.1296
10^4C =	0.444	0.455	0.472	0.496	0.530	0.568

計算例

鈑桁、單線軌道、徑間 $l = 21.34\,m$、　礫床（米國鐵道協會報告 Vol. 12 Part 3 參照）

鈑桁橋の重量	$37\,t$	礫床重量	$61.5\,t$
機關車一臺重量	$164.2\,t$	總重量	$262.7\,t$

端斷面　$I_l = 2\times2.831\times10^{-2}\,m^4$,　同中央　$I_c = 2\times4.186\times10^{-2}\,m^4$

$$\alpha = \frac{I_c-I_l}{I_c} = 0.324, \quad C = 0.465\times10^{-4}\ \text{〔第 223 圖（}a\text{）〕}$$

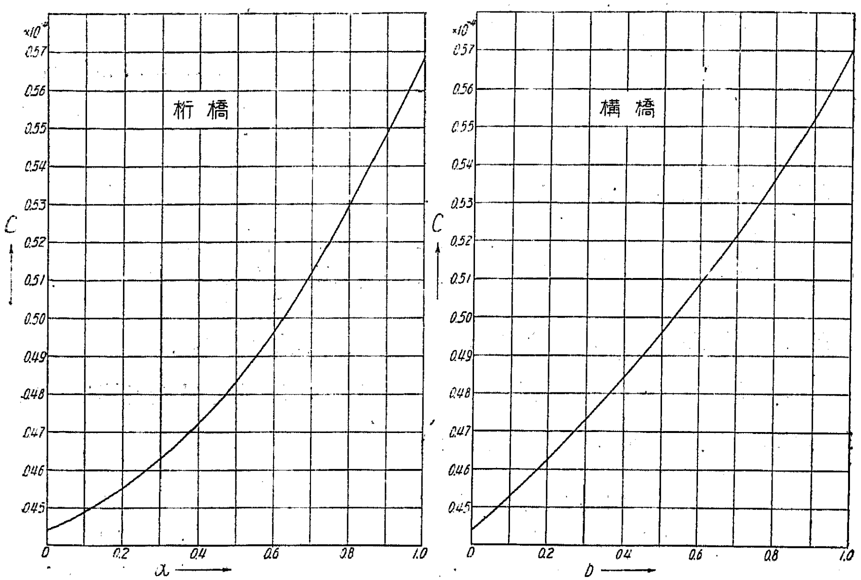
(202) 式により

$$\therefore\ T = 0.465\times10^{-4}\times21.34^2\sqrt{\frac{262.7}{21.34}\times\frac{1}{8.37\times10^{-2}}} = 0.256\,sec$$

（4）構桁の振動

第 223 圖

(a) (b)

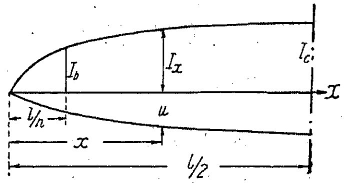


構桁にありて支端の慣性能率が零なる場合は、端より中央迄の I の變化を次式を以て表はす。

$$I_x = ax^b$$

今、格間數を n とし、端の次ぎの格點に於ける慣性能率を I_b、中央のそれを I_c とすれば

第 224 圖



$$I_c = a\left(\frac{l}{2}\right)^b \qquad \therefore \quad a = \left(\frac{2}{l}\right)^b I_c$$

$$I_b = a\left(\frac{l}{n}\right)^b \qquad \therefore \quad \left(\frac{n}{2}\right)^b = \frac{I_c}{I_b}$$

$$\therefore \quad b = \log\frac{I_c}{I_b} \Big/ \log\frac{n}{2}$$

依て(3)の場合と同樣の方法に依り

$$u = \frac{w}{2E}\,\frac{1}{a}\int_0^x dx\int_x^{\frac{l}{2}}(lx^{1-b}-x^{2-b})dx$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} u\,dx = \left[\frac{-w}{2aE(2-b)(3-b)(4-b)}\right]\left(\frac{l}{2}\right)^{5-b}\Phi_1$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} u^2\,dx = \left[\frac{w}{2aE(2-b)(3-b)(4-b)}\right]^2\left(\frac{l}{2}\right)^{9-2b}\Phi_2$$

玆に $\Phi_1 = 2-\frac{2-b}{5-b}-\frac{(4-b)^2}{2}$

$$\Phi_2 = \frac{4(4-b)^2}{7-2b}+\frac{(2-b)^2}{9-2b}+\frac{1}{3}(4-b)^4-2(2-b)-\frac{4(4-b)^3}{5-b}$$
$$+\frac{2(2-b)(4-b)^2}{6-b}$$

然るに $T^2 = \frac{2\pi^2}{g}\,\frac{w}{EI_c}\left(\frac{l}{2}\right)^4\frac{-1}{(2-b)(3-b)(4-b)}\,\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$

依て $T = Cl^2\sqrt{\frac{w}{I_c}}$ ……………………………………(203)

と置き b の種々の値に對する C の値を計算すれば第36表及第223圖(b)に示すが如く、此場合 C のデインメンションは

$$[C] = \left[\frac{1}{gE}\right]^{\frac{1}{2}} = [T]^2[M]^{-\frac{1}{2}}$$

第 36 表 10^4C の 値

b =	0.05	0.08	0.1	0.3	0.5	1.0
10^4C =	0.448	0.451	0.453	0.473	0.496	0.570

計算例

ワーレン構、錬鐵製、單線鐵道橋、 $l = 30.48\,m$、 格間數 11

$I_c = 0.0898\,m^4$、$I_1 = 0.0734\,m^4$、 $b = \log\frac{I_c}{I_1}\Big/\log\frac{11}{2} = 0.118$

$\therefore \quad C = 0.455\times10^{-4}$

自重のみの場合 ; 自重 $1.637\,t/m$、 鋼製と假定すれば (203) 式により

$$T = 0.455\times10^{-4}\times30.48\times\sqrt{\frac{1.637}{0.0898}} = 0.180\ sec$$

然るに錬鐵製にして E は鋼の 28/30 なるを以て

$$T = 0.183\times\sqrt{1.07} = 0.189\ sec$$

本桁は 3.28 t/m の活荷重に對して設計されたるものなるを以て、滿載荷重の場合の振動週期を求むれば

$$T = 0.189\times\sqrt{\frac{1.637+3.28}{1.637}} = 0.327\ sec$$

大森博士[1]が上記の構桁に於て列車通過の際檢測せられたる振動週期は久慈川鐵道橋に於て最大 0.35 *sec* 平均 0.34 *sec*、酒匂川鐵道橋に於て 0.27～0.35 *sec* 平均 0.31 *sec* であつた。

上記の如く橋桁の振動週期は（202）式及（203）式に依て充分正確に而も容易に計算し得べく、週期は大體 l^2, $\sqrt{w}$ 及 $1/\sqrt{I}$ に比例する。

〔51〕 橋桁の振動と衝撃作用

荷重の通過に依て生ずる橋桁の振動及之に因る衝撃作用は鋪裝せる道路橋にありては普通輕微なるも、設計荷重に近き重量の列車が高速を以て走過する鐵道橋に於ては、機關車働輪の有する過平衡對重 (Overbalanced weight) の影響に依り著しく振動を大ならしめ、其の結果衝撃係數を增大せしむる。

（1）機關車働輪の過平衡對重

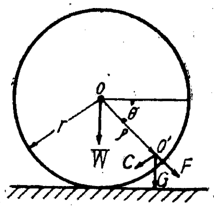
働輪の廻轉に依り過平衡對重に作用する遠心力は其の重心 O' に作用し、此荷重は OO' が鉛直下向の時に正の最大にして、鉛直上向の時に負の最大となる。今

G = 過平衡對重の重量, ρ = O' 點の半徑

c = 〃 線速度, r = 車輪 〃

v = 車輪外緣の速度 , F = 遠心力

第 225 圖



1) F. Omori, "The Deflection and Vibration of Railway Bridges" Bull. Imp. Earthq. Invest. Comm. Vol. 1, No. 4

$$F = \frac{G}{g}\,\frac{c^2}{\rho} = \frac{G}{g}\,\rho\,\frac{v^2}{r^2} = cv^2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots(204)$$

今、L をある瞬間に於ける全活荷重、W を列車又は機關車重量、W' を過平衡對重による力とすれば、F に依る荷重は $\sin\theta$ に比例し $2\pi r/v$ を週期として變化す。

$$L = W+W' = W+F\sin\frac{v}{r}t \ \cdots\cdots\cdots\cdots(205)$$

獨逸の舊式機關車[1]に於て（204）式の c は $m-t$ 單位にて

	旅客機關車		貨物機關車	
	働輪 (Driving)	聯結輪 (Coupling)	働輪	聯結輪
c =	0.118～0.158	0.049～0.069	0.200～0.250	0.108～0.140

米國鐵道協會の橋桁衝撃試驗[2]に用ひたる機關車に於ては

	全重量 t	働輪荷重 t	輪外徑 m	過平衡對重 t
	74.4～108.2	20.0～25.5	1.40～2.14	0.121～0.740
平均	86.6	21.55	0.89	0.355

上記の平均値を用ひ過平衡對重に依る週期的荷重の極大値 F と機關車全重量 W との比を求むれば

速度 $km/hour$	20	30	40	50	60	70	80	90	100
F/W (%)	1.22	2.74	4.87	7.61	11.0	14.9	19.5	24.6	30.4

即ち F は速度の二乘に比例するを以て、速度大なる場合は著大なる週期的外力を及ぼし桁の振動を助長する。

（2）週期的外力と桁振動との共鳴

列車が橋上を走過する場合、週期的外力の週期 T_f と載荷せる桁の自由振動週

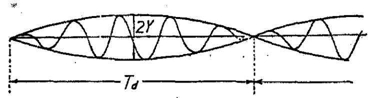
1) Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II Brückenbau Bd. II, 4 Auflage S. 51

2) Proceeding of the American Railway Engineering and Maintenance of Way Association, Vol. 12 Part 3, p. 13

期 T_b とが接近する時は唸り（Beat）の現象を生じて、其の振幅、從て衝撃作用を大ならしめる。而して桁の週期は活荷重の位置に依て異なり夫等の關係は頗る複雜なるも唸りの週期 T_a は

$$T_a = \frac{2T_f}{T_f - T_b} \qquad \text{又は} \qquad T_a = \frac{2T_b}{T_b - T_f}$$

第 226 圖

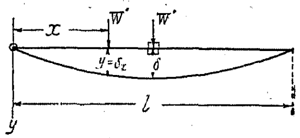


T_f と T_b とが接近する程唸りの週期 T_a は長くなり、最大振幅 $2Y$ も大となる。米國鐵道協會の衝撃計算に於ては桁の中央に全荷重が集中し、週期的外力 W' も亦同點に定着して作用するものと假定せしが、是に依て走行列車の影響を論ずる事は困難である。

此場合に對する著者の近似法を述べんに、一般に桁の荷重と撓み δ との間に次の關係が成立する。但し x は桁の左支點より右方に計る。

$x = \frac{l}{2}$ に於ける荷重 W' に因る x 點の撓み δ_x は x に於ける荷重 W' に因る $x = \frac{l}{2}$ 點の撓みに等し。

第 227 圖



今、桁の I を一様なりと假定すれば

$$\delta_x = \frac{W'x}{48EI}(3l^2 - 4x^2)$$

依て總過平衡對重が機關車の重心に集中作用するものとし、其の質量を m とすれば

$$W' = m\frac{\rho}{r^2}v^2 \sin\frac{v}{r}t$$

今、列車荷重 L 及桁の死荷重 W_0 とが中央に集中し、週期的外力 W' のみが機關車の速度を以て走行するものと假定し、全質量 $M = \frac{1}{g}(L+W_0)$、中央に於ける桁軸の鉛直變位を y、桁の中央に於て單位撓みを生ずる爲に中央に加ふべき荷重卽ち桁の彈性力（Elastic force）を k とすれば

彈性力＋外力 ＝ 質量×加速度

$$\therefore \quad -ky + \frac{W'\delta_x}{\frac{l^3}{48EI}} = -ky + m\rho\frac{v^2}{r^2}\sin\frac{v}{r}t\ \frac{x}{l}\left(3 - 4\frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$= M\frac{d^2y}{dt^2} \quad \cdots\cdots(206)$$

今 W' が左端に來りし瞬間を時の起點に採れば $x = vt$ にして、

$\frac{m\rho v^3 t}{r^2 l}\left(3 - 4\frac{v^2}{l^2}t^2\right)\sin\frac{v}{r}t = f(t)$ と置けば（206）式は

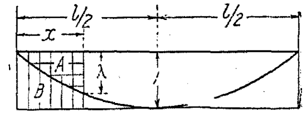
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{M}y = \frac{1}{M}f(t) \quad \cdots\cdots(207)$$

然るに上式を解きて限界條件を入れゝば極めて複雜なる式となり、之に依て振動の累積を研究する事は困難なるを以て次の如き略法を用ひる。

週期的荷重 W' が x に在るときと中央に存するときとの中央に於ける撓みの比 λ は

第 228 圖

$$\lambda = \frac{x\ \text{點の撓み}}{\text{中央の撓み}} = \frac{x}{l}\left(3 - 4\frac{x^2}{l^2}\right)$$



故に W' が走行する場合と中央に止まる場合との桁に與ふる勢力の平均量の比は

$$\left.\begin{array}{lll} x < \frac{l}{2} & \text{の場合}, & \frac{1}{x}\int_0^x \lambda\,dx = \frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{l^3} \\ x > \frac{l}{2} & 〃\ , & 〃 = \frac{1}{x}\left[\frac{5l}{8} - \frac{1}{l}\left\{\frac{3}{2}(l-x)^2 - \frac{1}{l^2}(l-x)^4\right\}\right] \end{array}\right\} \cdots(208)$$

然るに W' が中央に止まる場合は

$$x < \frac{l}{2} \quad \text{の場合}, \quad y = \frac{m\rho}{2M}\left[\frac{3}{2l}vt - \left(\frac{vt}{l}\right)^3\right](\sin pt - pt\cos pt)$$

$$x > \frac{l}{2} \quad 〃\ , \quad y = \frac{m\rho}{2M}\left[\frac{5l}{8vt} - \frac{1}{lvt}\left\{\frac{3}{2}(l-vt)^2 - \frac{1}{l^2}(l-vt)^4\right\}\right]$$

$$\times(\sin pt - pt\cos pt)$$

玆に $\quad p$ ＝ 單位時間の振動數 ＝ $\sqrt{\frac{k}{M}}$

上式より t の大なる程卽ち W' が長く作用する程、y の極大値は大となる。而て一定の週期的外力が中央に作用する場合の中央の半振幅 u は次式を以て表はされる。

$$u = \frac{m\rho}{2M}pt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(209)$$

然るに $p = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$ にして機關車が桁を走過する時間を t_1 とすれば、$l = vt_1$ 故に $pt_1 = \frac{v}{r}t_1$ なるを以て之を (209) 式に代入して

$$u = \frac{m\rho}{2M}\frac{l}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(210)$$

然して W' の移動する影響を考慮する時は、(208) 式の $\frac{1}{x}\int_0^x \lambda dx$ を乘ずる。(210) 式に依り桁中央の最大振幅は對重の質量 m、其の重心點の半徑 ρ 及徑間 l に比例し、桁の總重量（死荷重＋活荷重）に逆比例する。

然るに全活荷重を l にて除したる q が等布する場合の中央の撓み δ は ql^4/I に比例する、而して桁の中央の高さは大體總重量 $(W+L)$ を l にて除したる $w+q$ が等布するとして定めらるゝを以て、桁の高さと徑間との比が一定なりとすれば、上記の δ は $ql^4/(w+p)l^3 = ql^2/M$ に比例する。從つて振動に因る最大撓み u_{max} と靜力撓み δ との比卽ち彎曲應力に對する衝擊係數 i は

$$i \propto \frac{l}{M} \times \frac{M}{ql^2} \propto \frac{1}{ql}$$

然るに最大列車荷重に就て考ふれば q は一定なるを以て、W' の週期と $(L+W')$ を載せるたる桁の振動週期とが一致する如き速度を以て列車を運轉すれば、彎曲應力に對する衝擊係數は徑間 l に逆比例する。

(3) 週期的外力と桁振動とが週期を異にする場合

此場合、外力と桁との週期異なるを以て前者の振動數を p_1、後者のそれを p とし、振動の方程式は (207) 式と同一にして

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{M}y = \frac{1}{M}f(t)$$

先づ、米國鐵道協會の解を用ひ W' を中央に止まるものとし

$\frac{k}{M} = p^2$, $\frac{m\rho}{M} = R$ と置けば

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{M}y = Rp_1^2 \sin p_1t$$

$$\therefore \quad y = \frac{Rp_1^2}{p^2-p_1^2}\left(\sin p_1t - \frac{p_1}{p}\sin pt\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(211)$$

上記の結果を利用し振動累積の現象を研究せんが爲め次の如く置く

$$p = p_1(1+\varepsilon) \qquad (\varepsilon \text{ は } 1 \text{ に對して小})$$

$$\sin pt = \sin(1+\varepsilon)p_1t \doteqdot \sin p_1t + \varepsilon p_1t\cos p_1t$$

$$\therefore \quad y = \frac{Rp_1^2}{p^2-p_1^2}\left[\left(1-\frac{p_1}{p}\right)\sin p_1t - \varepsilon\frac{p_1^2}{p}t\cos p_1t\right] \quad \cdots\cdots\cdots(212)$$

今、一振動後の半振幅を u_1 とすれば $p_1t = 2\pi$ なるを以て

$$u_1 = \frac{Rp_1^2}{p^2-p_1^2}\varepsilon\frac{p_1^2}{p}\frac{2\pi}{p_1} = \pi R\frac{1}{(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

故に n 回振動後の半振幅は

$$u_n = \frac{n\pi R}{(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(213)$$

卽ち一振動間に振幅の增大する割合 $\frac{1}{(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$ は μ にして

$$\mu = \frac{p = p_1(1+\varepsilon) \text{の場合單位時の振幅增大}}{p = p_1 \qquad 〃 \qquad 〃}$$

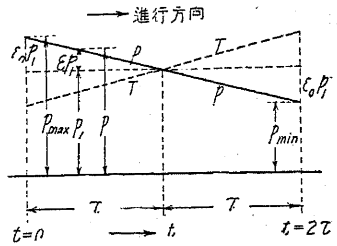
$$= \frac{1}{(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} \doteqdot 1-\frac{3}{2}\varepsilon$$

依て t 秒間の μ の平均は

$$\mu_m = \frac{1}{t}\int_0^t \left(1-\frac{3}{2}\varepsilon\right)dt$$

然るに列車先頭が左端に達してより p は漸次に小となり、先頭が右端に近づきたる時荷重最大、p 最小となる。今、機關車重心がある點に達し、 $p-p_1=\varepsilon_0 p_1$ となりて振動の累積を生じ、之れより p は直線的に減じ $t=\tau$ に於て $p=p_1$、$t=2\tau$ に於て $p_1-p=\varepsilon_0 p_1$ となり、それ以後は累積作用なしとすれば

第 229 圖



$$\varepsilon=\varepsilon_0\frac{t}{\tau}\qquad\therefore\quad \mu_m=1-\frac{3}{4}\varepsilon_0$$

然るに週期的外力 W' が中央に止まり、2τ なる間共鳴を繼續する場合、振幅は 0 より u_m に達するものとすれば W' が桁上を走過する場合 2τ 後の振幅は $u_m\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon_0\right)$ となる。然るに $u_m=\frac{m\rho}{2M}p_1 t$ なるを以て、W' が走過する場合の最大半振幅 u'_m は

$$u'_m=\frac{m\rho}{2M}\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon_0\right)p_1 t\qquad 茲に\quad \varepsilon_0=\frac{p_{max}-p_{min}}{p_1}\cdots\cdots(214)$$

而て實際の衝擊係數は（2）の場合に適當なる補正を加へざるべからず、普通開床式鐵道橋[1]に於ては

$$\frac{死荷重}{動荷重}=\frac{l}{122}\qquad〔l\ は徑間\ (m)〕$$

然るに橋桁に於て動荷重なき場合の振動週期 T_0 と滿載荷重の場合の週期 T との比は

$$\frac{T_0}{T}=\sqrt{\frac{死荷重}{死荷重+活荷重}}=\sqrt{\frac{W}{W+L}}=\sqrt{\frac{l}{l+122}}$$

$$\therefore\quad \frac{p_{max}}{p_{min}}=\sqrt{\frac{l+122}{l}}\qquad 及\quad \varepsilon_0\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{p_{max}}{p_{min}}-1\right)$$

1) Kunz : Design of Steel Bridges p. 1.

之れより ε_0 と l との關係を求むれば

$$\varepsilon_0\doteqdot\frac{26.8}{l+13.4}\qquad\therefore\quad 1-\frac{3}{4}\varepsilon_0\doteqdot\frac{l-6.7}{l+13.4}$$

然るに衝擊係數 i は振動に因る最大撓み u'_m と總荷重 Mg に因る靜力的撓みとの比なるを以て

$$i=\frac{m\rho}{2M}\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon_0\right)l\Big/\frac{ql^2}{M}=\frac{m\rho}{2q}\,\frac{1-\frac{3}{4}\varepsilon_0}{l}\cdots\cdots\cdots(215)$$

然るに $\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon_0\right)\Big/l=(l-6.7)/l(l+13.4)$ なるを以て l が著しく大なる場合 i の理論形は

$$i=\frac{c}{c'+l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(216)$$

にして現今廣く用ひらるゝ衝擊公式なるが、$m,\ \rho$ の影響を無視し、且つ 6.7 m に對し l が著しく大なる場合にのみ適用し得るものにして、彎曲力率及弦材應力に對する合理的の式は

$$i=\frac{m\rho}{2ql}\,\frac{l-6.7}{l+13.4}=\frac{m\rho}{2(W+L)}\,\frac{l-c'}{l+c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(217)$$

卽ち弦材に對する衝擊作用を合理的に推定するには、限界速度、過平衡對重の質量及位置、活荷重並に桁の寸法、構造及重量等を必要とする。

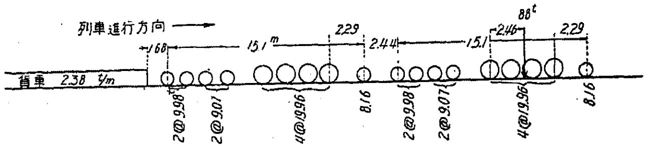
（4）橋桁の最危險速度及衝擊係數の推定

最危險速度を以て列車の主要部が橋桁上を通過する間に、振動の累積に依て振動の增大する事は前項に述べたが、先頭の機關車の最後の働輪迄桁上に來り一機關車分の週期的外力が作用する時より、活荷重の重心が桁の中央に達する迄振動の累積が繼續するものとすれば、此期間 2τ の始終に於て單位時間の振動數は p_{max} より p_{min} に減ずるを以て、最大半振幅 u'_m は (214) 式に依て求め得るが、實際は p_{max} の決定困難なる爲め後記の計算例に於ては活荷重なき場合の振動數を p_{max} とし、且つ機關車重量を其の長さに等布するものとして計算せるを

以て計算上の最危險速度は實際より多少大となる。而して 2τ の間振動が累積するものと假定せし爲め衝擊係數も多少過大となる。併し乍ら此問題を正確に取扱ふ事は極めて困難にして實際上の效果之に伴はざるものあるを以て、本計算の如く概括的に取扱ひ、衝擊係數の性質を明かにすると共に橋桁の構造と最危險速度との關係並に衝擊係數の大體を推定する事も有益であると思ふ。

次に掲ぐる諸例中 1～4 は米國鐵道協會報告中の資料に據り、列車荷重は 3 を除くの外凡て E—44 にして、先頭部は重量 88 t 重心位置左端働輪より 2.46 m である。

第 230 圖



計算例 1.

鈑桁、桁長 21.34 m、礫床、設計荷重 E—44、徑間 20.8m、$I_c = 0.0837\,m^4$

$I_t = 0.0566\,m^4$、從つて $\alpha = 0.324$　故に第 223 圖 (a) より

$C = 0.465\times10^{-4}$

全死荷重　$W = 98.5\,t$　　最大活荷重　$L_1 = 158.7\,t$

車輛のみが桁上を占むる場合は　$L_2 = 64.0\,t$

故に振動週期は (202) 式より

活荷重なき場合	$T_0 = 0.151\,sec$
先頭部のみ桁上に載る場合	$T = 0.153\,sec$
最大活荷重の場合	$T_1 = 0.245\,sec$
車輛のみ滿載の場合	$T_2 = 0.194\,sec$

働輪周圍長は 5.51 m にして 0.245 sec に一廻轉するを以て $v = 81.0\,km/hour$

實測値は 72.4 $km/hour$ (45 哩/時)

而して最大荷重の場合　$m/M = 2.12\times10^{-3}$ にして、その時の中央の撓み $\delta = 10.2\,mm$ なるを以て (214) 式より求めたる u'_m と δ との比は衝擊係數 i にして $n = 1.2$ の場合に實測衝擊係數と一致し、彎曲力率に對する i は 30 % である。

計算例 2.

プラット構、徑間 45.57 m、鋲結、下路橋、薄き礫床 (第 231 圖)

死荷重　592 t,　機關車重量　146.4 t

過平衡對重 0.547 t, 働輪周圍長 5.51 m

四貨車の重量 125.2 t,　全長　44 m

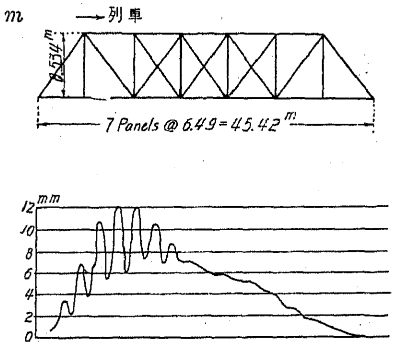
$I_b = 1.84\,m^4$,　$I_c = 2.71\,m^4$,

$2x/l = \dfrac{1}{3.5}$、從つて

$b = 0.31$　∴　$C = 0.474\times10^{-4}$

桁上の最大荷重　236.5 t

第 231 圖



振動週期

活荷重なき場合	$T_0 = 0.22\,sec$
最大荷重の場合	$T = 0.26\,sec$

最危險速度　76.3 $km/hour$　(實測値は 72.4 $km/hour$)

$\rho = 0.53\,m$,　$m/M = 0.66\times10^{-3}$,　$\delta = 0.0086\,m$

なるを以て i は　$n = 4$　なる場合に實測衝擊係數と一致し、實測衝擊係數は 45 % である。

計算例 3.

構桁橋、徑間 53.8 m、鋲結、斜橋、開床、格間 6.25 m、斜度 5.03 m

橋桁全重量	165.6 t	機關車重量	137.5 t
過平衡對重	0.74 t	働輪周圍長	6.74 m
桁上最大活荷重	274.4 t		

$I_b = 1.64\,m^4$, $I_c = 2.31\,m^4$

$b = 0.222$

$\therefore\ C = 0.465\times10^{-4}$

振動週期

活荷重なき場合

$T_0 = 0.155\,sec$

最大活荷重の場合

$T = 0.253\,sec$

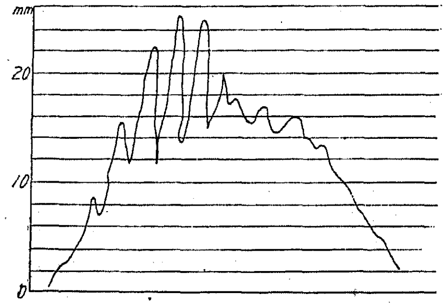
最危險列車速度

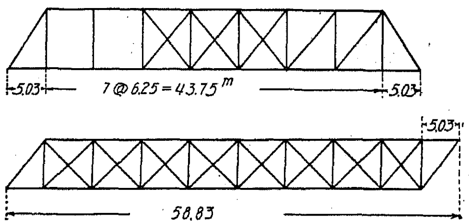
$v = 95.8\,km/hour$

(實測値 $70.8\,km/hour$)

$\rho = 0.509\,m$

第 232 圖





$\dfrac{m}{M} = 1.68\times10^{-3}$, $\delta = 18.3\,mm$ なるを以て i は $n = 3.5$ の場合に實測衝撃係數と一致し、實測せる i の値は 36% である。

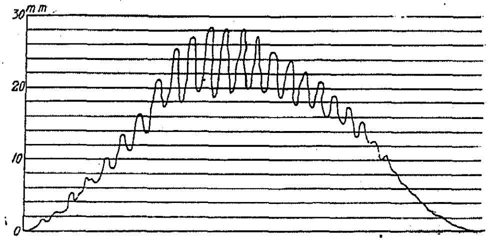
若し振動に對する有效徑間を $53.8+5.03 = 58.83\,m$ とすれば

$T_0 = 0.185\,sec$

$T = 0.302\,sec$

$v = 80.3\,km/hour$

第 233 圖

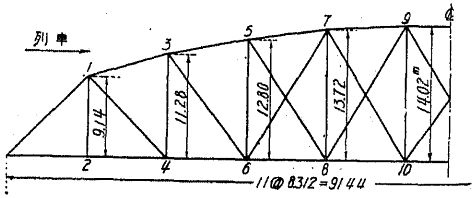


計算例 4.

構桁橋、徑間 $91.44\,m$

鉚結、下路、開床

橋桁の全重量 $505\,t$, 全長 $76.9\,m$, 機關車計算例 2 に同じ、最大活荷重 $336\,t$



$I_b = 2\times193\,m^4$, $I_c = 2\times5.44\,m^4$, $b = 0.61$

$\therefore\ C = 0.510\times10^{-4}$

振動週期 自重のみの場合 $T_0 = 0.304\,sec$

最大活荷重の場合 $T = 0.392\,sec$

最大危險速度 $v = 50.6\,km/hour$ (實測値 $40\,km/hour$)

$\dfrac{m}{M} = 0.65\times10^{-3}$, $\delta = 24.6\,mm$ なるを以て i は $n = 6$ なる場合に實測値と一致しその値は 22% である。

計算例 5.

舊日鐵型、ダブルワーレン構、徑間 $61\,m$、鉚結、下路、開床[1]

活荷重、機關車1臺重量 $24.5\,t$、列車速度 $29\,km/hour$

$I_b = 0.872\,m^4$, $I_c = 1.243\,m^4$, $b = 0.196$ $\therefore$ $C = 0.463\times10^{-4}$

桁の全重量 $165.6\,t$ 即ち $2.71\,t/m$

活荷重なき場合 $T_0 = 0.25\,sec$

機關車が桁の中央にある場合 $T = 0.36\,sec$

側輪周圍長 $4.57\,m$ $\therefore$ $v = 45\,km/hour$

試驗速度は $29\,km/hour$ なりしも、それ以上の速度にては一層大なる振動を生じた筈である。然るに人夫を歩行せしめたるに機關車と匹屑する程度の振動を生じたるが、之れ走行の歩調は約 180/分 位にして、活荷重なき場合の桁の週期 0.29 秒に一致する爲めである。

〔52〕 吊橋の上下振動[2]

普通の吊橋は中央の主徑間と兩側の側徑間とより成り吊索と補剛構とを主體とす。橋全體が同一の位相 (Phase) を以て振動する場合の主振動の週期を求むる

1) 田邊朔郎："撓度及振動の記錄" 土木學會誌 1巻 1號 p. 43

2) 著者："吊橋の振動並に其の衝撃作用に對する關係" 土木學會誌 7巻4號 p. 561

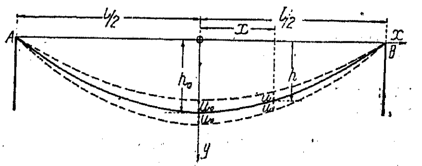
には吊線の伸縮を無視しても大過はない。

(1) 補剛構を有せざる吊橋

先づ中央徑間のみを有し、吊索が兩側の剛なる支柱の頂點に固定さるゝ場合を採り、荷重は等布にして橋床單位長當り $w = mg$ なりとすれば、索の靜力的平衡曲線は拋物線にして其の方程式は第234圖の如き座標を用ふれば

$$h = h_0\left[1-\left(\frac{2}{l}\right)^2 x^2\right]$$

第 234 圖



茲に h_0 = 索の垂れ

然るに索の主振動に於て靜力的平衡の位置よりの各點の最大撓みを u とすれば，各點は靜力的平衡位置を中心とし $2u$ なる振幅の振動を爲し、各瞬間における索の形は矢張拋物線なりとすれば、平衡位置よりの各點の最大撓みは

$$u = u_0\left[1-\left(\frac{2}{l}\right)^2 x^2\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

但し　u_0 = 中央に於ける最大撓み

從て全體の有する最大位置の勢力は（〔50〕(2) 參照）

$$E_p = \frac{mg}{2}\,2\int_0^{\frac{l}{2}} u_0\left[1-\left(\frac{2}{l}\right)^2 x^2\right]dx = \frac{mg}{3}u_0 l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

然るに各點は週期及位相同一なる振動を爲すを以て、

$$y = u \sin pt \qquad \therefore \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t} = up\cos pt$$

故に運動の勢力の最大値は

$$E_k = \frac{m}{2}\,2\int_0^{\frac{l}{2}} u_0^2 p^2\left[1-\left(\frac{2}{l}\right)^2 x^2\right]^2 dx = \frac{m}{2}u_0^2 p^2 \frac{8}{15} l \cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

mg なる荷重に依て生ずる索應力の水平分力 H は

$$H = \frac{mgl^2}{8h_0}$$

此狀態に於て mg なる等布荷重を加へたる爲めの水平分力の增加 ΔH は

$$\Delta H = \frac{mgl^2}{8h_0} = H$$

從て索全長の平均張應力 τ は

$$\tau = \Delta H\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right] = \frac{mg}{8h_0}l^2\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right] \cdots\cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

然るに索の延びに依り中央に於て u_0 なる撓みを生ずるを以て，之れより τ を求むれば

$$\tau = \frac{16}{3}\frac{h_0 u_0 AE}{l^2}\left[1-\frac{28}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{v})$$

茲に　　A = 索斷面積　　E = 索の彈性係數

然るに (iv) 及 (v) 式の τ は同一値なるを以て、之を等しと置きて u_0 を求むれば

$$u_0 = \frac{3}{16}\frac{mg}{8h_0}\frac{l^4}{h_0 AE}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right]\Big/\left[1-\frac{28}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right]$$

然るに $E_p = E_k$ なるを以て

$$p^2 = \frac{160}{3}\frac{h_0^2 AE}{ml^4} \qquad \therefore \quad T = \frac{2\pi}{p} = 0.86\frac{l^2}{h_0}\sqrt{\frac{1}{\frac{AE}{m}}} \cdots\cdots(217)$$

次に普通の吊橋の如く支柱上に於て索の支點が自由に移動する時は、兩支點より錨塊に達する迄の索 l_1 の伸長が影響するを以て、之を最も簡易に考慮するには中央索の有效彈性係數を次の如く採る。

$$E_e = E\frac{l}{l+2l_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(218)$$

(2) 補剛構 (Stiffening truss or girder) を有する場合

此場合 mg なる荷重は吊索と補剛構とに分擔され、兩者の撓み曲線の形は索に於て二次拋物線、構に於て四次曲線なるも其の差は微小なるを以て、中央に於ける撓みが相等しき如く荷重が分擔さるゝものと假定する。依て次の如き記號を用ひ

m_1g ＝ 索の負擔する荷重　　m_2g ＝ 桁又は構の負擔する荷重

u_{01} ＝ m_1g に因る索中央の撓み　u_{02} ＝ m_2g に因る桁又は構の中央の撓み

E_1 ＝ 索の弾性係數　　E_2 ＝ 桁又は構材料の弾性係數

$$u_{01} \fallingdotseq \frac{m_1g}{8h}l^2\frac{3}{16}\frac{l^2}{h_0AE_1}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2+\frac{28}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right]$$

$$= \frac{3}{8\times16}\frac{m_1gl^4}{h_0^2AE_1}\left[1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(vi)}$$

$$u_{02} = \frac{m_2g}{24E_2I}\left(\frac{l^4}{2}-\frac{l^4}{4}+\frac{l^4}{16}\right)=\frac{5}{24\times16}\frac{m_2g}{E_2I}l^4 \cdots\cdots\text{(vii)}$$

然るに　$u_{01} = u_{02} = u_0$ なるを以て

$$m_2 = \frac{9}{5}\frac{E_2I}{AE_1h_0^2}\left\{1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right\}m_1\ ,\quad m_1+m_2 = m$$

$$\therefore\ m_1 = m\Big/\left[1+\frac{9}{5}\frac{E_2I}{AE_1h_0^2}\left\{1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right\}\right]$$

$$\fallingdotseq m\Big/\left[1+\frac{9}{5}\frac{E_2}{E_1}\frac{I}{Ah_0^2}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(viii)}$$

$$\therefore\ m_2 \fallingdotseq m\frac{9}{5}\frac{E_2I}{AE_1h_0^2}\Big/\left(1+\frac{9}{5}\frac{E_2I}{AE_1h_0^2}\right)$$

$$\fallingdotseq m\Big/\left(1+\frac{5}{9}\frac{E_1}{E_2}\frac{Ah_0^2}{I}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ix)}$$

然るに全體の有する位置及運動の勢力は (ii) 及 (iii) 式に依り

$$E_p = \frac{mg}{3}u_0l = \quad E_k = \frac{m}{2}u_0^2p^2\frac{8}{15}l$$

$$\therefore\quad p^2 = \frac{5}{4}\frac{g}{u_0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(x)}$$

然るに　$u_0 = u_{01} = u_{02}$　なるを以て (vi) 乃至 (ix) 式より

$$u_0 = \frac{3}{8\times16}\frac{mgl^4}{AE_1h_0^2}\left\{1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right\}\Big/\left[1+\frac{9}{5}\frac{E_2I}{AE_1h_0^2}\times\right.$$
$$\left.\left\{1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right\}\right]$$

$$\therefore\ \frac{g}{u_0} = \frac{8\times16}{3}\frac{AE_1h_0^2}{ml^4}\left[1+\frac{9}{5}\frac{E^2I}{AE_1h_0^2}\left\{1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right\}\right]\Big/$$

$$\left\{1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(xi)}$$

(xi) 式を (x) 式に代入して

$$p^2 = \frac{160}{3}\frac{1}{ml^4}\left(AE_1h_0^2+\frac{9}{5}E_2I\right)$$

$$\therefore\quad T = \frac{2\pi}{p} \fallingdotseq \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{160}{3}}}l^2\sqrt{\frac{m}{AE_1h_0^2+\frac{9}{5}E_2I}}$$

$$\fallingdotseq 0.86\ l^2\sqrt{\frac{m}{AE_1h_0^2+\frac{9}{5}E_2I}} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(219)}$$

今、少しく正確に求むれば

$$T = 0.86\,l^2\sqrt{m\left[1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right]\Big/\left[AE_1h_0^2+\frac{9}{5}E_2I\left\{1+\frac{38}{15}\left(\frac{2h_0}{l}\right)^2\right\}\right]}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(220)}$$

但し、索の弾性係數 E_1 はその材料の 60 ～ 80 % であり、更に側徑間の索の影響を考慮すれば(218)式より　$E_e = E_1\dfrac{l}{l+2l_1}$ ，l ＝ 主徑間 ，l_1 ＝ 側徑間

(3) 富士川橋の上下振動

本橋は補剛構及橋床共に木造であるが、木材運搬用の軌道を敷設し 1919 年振動實測の當時は日本最大の吊橋にして主要寸法は

中央徑間　$l = 164.90\,m$,　側徑間　$l_1 = 46.02\,m$,　中央の垂れ $h_0 = 10.67\,m$

有效幅員　$2.74\,m$, 死荷重 $mg = 0.560\ t/m$, 質量 $m = \dfrac{0.56}{9.8} = 0.0572\,t/m$,

主索 2 本各八番鋼線 500 本撚り、斷面積　$A = 2\times0.006649\,m^2$

補剛構, 構深　$1.310\,m$,　上下弦材檜材各　$15.24\,cm\times24.4\,cm = 371.9\,cm^2$

$E_1 = 0.6\times2.1\times10^7\ t/m^2$,　$E_e = \dfrac{164.9}{164.9+2\times46.0}\,1.26\times10^7 = 8.09\times10^6\ t/m^2$ (側徑間の影響を考慮), $I = 0.0639\,m^4$,　$E_2 = 0.703\times10^6\ t/m^2$

(219) 式より

$$T = 0.86\times(164.9)^2\sqrt{\frac{0.0572}{0.0133\times8.09\times10^6\times10.67^2+\frac{9}{5}0.703\times10^6\times0.0639}}$$

$$= 0.86\times(1.649)^2\sqrt{\frac{5.72}{12.25+0.08}} = 1.59\ sec$$

即ち本例の程度の補剛構にては橋體の剛性を助くる效果なく、單に集中荷重を多くの吊線に分布するに過ぎない。

本橋の振動の實測は大森博士の指揮の下に、同氏の上下、水平二振動計を用ひて行はれたるが、活荷重として單に人馬の渡過を用ひたるを以て振動週期には影響ない。但し振動計は中央徑間の中央に二器を併置した。

振動週期

	上下動 sec		横振動 sec
1. 3 人歩調を揃へて徐行	0.5 ～ 0.60	平均 0.55	1.10
2. 同 上	〃	〃	1.16
3. 駄馬 1 頭通過	0.3 ～ 0.33	0.31	1.16
4. 1 人走行	0.30 ～ 0.35	0.315	0.315
5. 3 人走行	〃	0.326	0.326

横振動に關しては〔53〕參照。

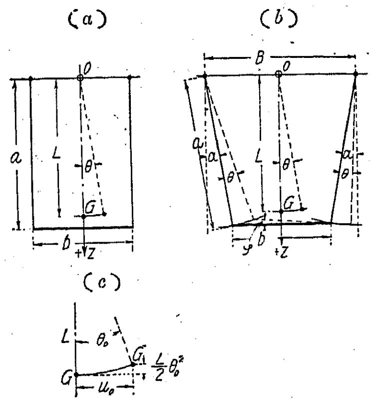
上記の結果に依れば、上下動は全く歩調と同一週期を以て强制振動をなし橋體の自由主振動とは無關係にして、横振動の週期は上下動の 1 及 2 倍に相當する。馬の速歩の歩調は蹄が床を打つピツチである。

〔53〕 吊橋の横振動

(1) 兩索面鉛直の場合

先づ全く剛性を有せざる橋床を有する場合を考ふれば、吊索自身には横方向の

第 235 圖



剛性なく、且つ振動は水平にして索の應力の變化は微小なるを以て、中央徑間の全體の重心 G より支柱上の索支點までの高さを有效長とすれば、双吊振子として容易に主振動の週期を計算し得る。兩索が共に鉛直面内に在る場合重心が oz 鉛直軸に對して θ たけ廻轉したるときに生ずる位置の勢力は $\frac{1}{2}LMg\theta^2$ にして振動の極限位置に於て $\theta = \theta_0$ なる時は全體の有する勢力は位置の勢力のみにして

$$E_p = \frac{1}{2}LMg\theta_0^2 = \frac{1}{2}LW\theta_0^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

茲に $W = Mg =$ 全振動體の重量

次に振動體の有する最大運動の勢力は重心が G 點に存する瞬間にして、半振幅を u_0 とすれば

$$E_k = \frac{1}{2}Mp^2u_0^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

茲に p ＝一秒間の振動數

然るに振動に伴ふ勢力損失を無視すれば $E_p = E_k$ にして

$$E_p = E_k = \frac{1}{2}LW\theta_0^2 = \frac{1}{2}Mp^2u_0^2 \qquad \therefore\ p^2 = \frac{g}{L}$$

$$\therefore\ p = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad 即ち\ T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdots\cdots(221)$$

即ち L なる長さの單振子と同一である。

(2) 兩索面が對稱的に傾斜する場合 (Cradle suspension)

M は床面上に集中するものとし、

$\alpha =$ 吊索面の鉛直に對する傾斜角 $M =$ 荷重を加へたる全體の質量

φ_0 ＝ 振動時床面の最大傾斜角　　　I ＝ O 點の周りの質量慣性能率

θ_0 ＝ 振動の最大角變位

とすれば、運動及位置の最大勢力は

$$E_k = \frac{I}{2}\frac{4a^2}{b^2}\sin^2\alpha\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2+\frac{M}{2}a^2\cos^2\alpha\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2$$

$$E_p = const.+\frac{M}{2}ga\frac{b+2a\sin^3\alpha}{b\cos\alpha}\theta^2$$

然るに振動時 E_k の增加は E_p の減少に等しきを以て、振動の方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\frac{\partial\theta}{\partial t}}+\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

之れより主振動の週期を求め、$a\cos\alpha = L$,　$\sin\alpha \fallingdotseq \alpha$,　$I = Mr^2$,（r は環動半徑）と置けば

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\cos^2\alpha+\frac{4\alpha^2r^2}{b^2}} \fallingdotseq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{1+\frac{4\alpha^2r^2}{b^2}}\cdots(222)$$

然るに α が大ならざる場合は括弧中の第二項の値は 1 に比して極めて小なるを以て、之を無視するも振動週期の誤差は微小である。

次に索面傾斜角 α の振幅に及ぼす影響を求むるに、同一の角變位 θ を生ずる爲めに要する力の大小は θ なる角變位に依りて得る位置の勢力の大小に依り

索面鉛直の場合　　$E_p = \frac{1}{2}Mag\theta^2$

索面傾斜せる場合　　$E_p' = \frac{1}{2}Mag\theta^2\frac{b+2a\sin^3\alpha}{b\cos\alpha}$

$$\therefore \quad \frac{E_p'}{E_p} = \frac{b+2a\sin^3\alpha}{b\cos\alpha} \fallingdotseq 1+\left(\frac{2a}{b}\alpha+\frac{1}{2}\right)\alpha^2$$

今、一例として　$a = 15m$,　$b = 5m$　とすれば

$\alpha =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{E_p'}{E_p} =$	1+0.011	1+0.068	1+0.28

即ち索傾斜の振幅を減少する作用は割合に小なるものにして、從て横振動の輕

減は主として橋床の剛性に頼らねばならぬ。

（3）水平補剛構を有する場合

Barling の假定に依り長さ δ_x なる部分の有する全勢力は不變なりとし α は大ならずとすれば、t に於ける勢力は

$$\delta E_p = \frac{EI}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\delta x+\frac{mg}{2a}y^2\delta x$$

$$\delta E_k = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\delta x$$

茲に　y ＝ t　に於ける水平變位、　$u = y$　の極限値、　$y = u\sin pt$

全勢力は不變なるを以て

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta E_p+\delta E_k) = 0 \qquad \therefore \quad \frac{d^2u}{dx^2} = +u\sqrt{\frac{1}{EI}\left(mp^2-\frac{mg}{a}\right)}\cdots(\mathrm{iv})$$

然るに水平變位は微小なるを以て補剛構の徑間を l、中央の變位を u_0 とすれば、x 點の變位は　$u = u_0\sin\frac{\pi x}{l}$　を以て表はされ、從て（iv）式より

$$p = \sqrt{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{EI}{m}+\frac{g}{a}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{2}{\pi}l^2\sqrt{\frac{1}{\frac{EI}{m}+\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{g}{a}}}\cdots\cdots\cdots\cdots(223)$$

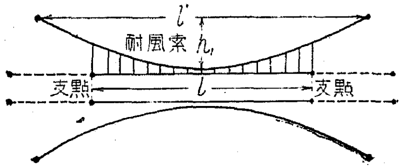
次に第236圖の如く水平耐風索を併有する場合の横振動の週期も前同樣にして求め得る。

l ＝ 吊橋中央徑間 ＝ 水平構の徑間

l' ＝ 耐風索の徑間

E_2, I ＝ 水平構の材料の彈性係數及慣性能率

第 236 圖



E_1, h_1, A' ＝ 耐風索の有效彈性係數、垂れ及斷面積

m = 單位長の全質量

$$T \doteqdot \frac{2}{\pi} l^2 \sqrt{\frac{1}{\frac{E_2 I}{m} + \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{g}{a} + 1.12 \frac{E_1 A' h_1}{m}}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (224)$$

（4）富士川橋の横振動

主要寸法は〔52〕（3）に示せるが如く、其他は水平構の深 2.74 m、水平耐風索 2 本各八番鋼線 200 本撚り、有效長 $= 164.9+2\times46\,m$、斷面積 $A' = 5.31\times10^{-3}$、$E_e = 8.09\times10^6$、垂れ 15.24 m、$a = 12.0$、$I = 0.585\,m^4$ なるを以て主振動の週期は（224）式より

$$T = \frac{2}{\pi} l^2 \sqrt{\frac{1}{\frac{7.03\times10^5\times0.639}{0.0572} + \left(\frac{164.9}{3.14}\right)^4 \times \frac{9.8}{12} + 1.12\,\frac{8.09\times10^6\times5.31\times15.2^2}{0.0572\times10^3}}}$$

$$= \frac{2}{\pi} l^2 \sqrt{\frac{1}{7.85\times10^6 + 6.2\times10^6 + 164.3\times10^6}} = 1.38\ sec$$

卽ち本例の如く幅員小なる木造床吊橋に於ては、横方向の剛性に對しては水平耐風索が最も有效にして他の影響は微小であるが、幅員大にして鋼、鐵筋混凝土等の床構造を用ふる時は水平構の效果著大となり、耐風索を用ふる必要はない。

——(完)——