

### 第九章 柱状構造物の自由振動

#### [36] 柱體の自由振動週期

##### (1) 断面一様なる柱體の自由振動週期

先づ塔状構造物中最も簡單なる断面一様の柱體に於て、下端が地面に固定される場合に對し自由振動週期を計算する。

高さに比し断面小なるを以て彎曲振動 (Bending vibration) のみを考慮し、原點を地表に採り、柱軸上に上向に  $x$  軸を採る。

- $y = x$  断面に於ける柱軸の水平撓度     $A =$  柱の断面積
- $I =$  柱の断面の慣性モーメント     $E =$  材料の弾性係數
- $l =$  柱體の高さ     $\rho =$  材料の單位體積の質量

變形に對する内部摩擦の影響を無視すれば  $y$  は次の偏微分方程式より求め得る。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots(121)$$

而て水平断面に作用する彎曲力率  $M$ , 剪力  $S$  は次の如し。

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad S = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \dots\dots\dots(122)$$

從て (121) 式より  $y$  の値を得れば (122) 式に依り  $M, S$  を求め得る。

(121) 式を解くに當り  $y$  は週期的に變化するを以て次の如く置く。

$$y = u \cos pt \dots\dots\dots(123)$$

茲に  $u$  は  $x$  のみの函数にして、(123) 式を (121) 式に代入して

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - m^4 u = 0 \quad \text{茲に } m^4 = \frac{\rho A}{EI} p^2, \quad p = \frac{2\pi}{T} \dots\dots\dots(124)$$

上の微分方程式を解きて  $u$  を求めれば

$$u = C_1 \cosh mx + C_2 \sinh mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx \dots\dots(125)$$

茲に  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分常數

柱體が自由に振動する場合の週期を自由振動週期 (Period of free vibration) と稱し、之れが地震動の週期に近き程共振の爲めに柱體の振幅從て彎曲力率大となる故に、自由振動週期が普通大地震の週期に接近せぬ方が耐震上有利である。

自由振動の場合は下端地面に固定されるを以て、此點に於ては軸に變位なく、又方向も變らぬ、即ち

$$x = 0 \text{ に於て} \quad u = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0$$

一方、上端に於て外力の作用なきを以て、彎曲力率、剪力共に零である即ち

$$x = l \text{ に於て} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0$$

依て是等の式に (125) 式の  $u$  を代入すれば 4 條件式を得、之より積分常數  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を定むれば

$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_4 = C_2 \frac{\cos ml + \cosh ml}{\sin ml + \sinh ml}$$

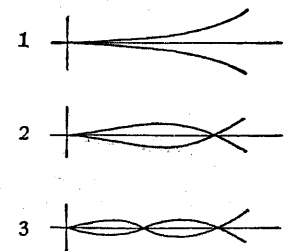
$$\therefore \cos ml \cosh ml + 1 = 0 \dots\dots\dots(126)$$

(126) 式を満足する  $m$  の値を求めれば (124) 式に依り單位時間中の振動數  $p$  從て自由振動週期  $T$  を求め得る、即ち

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{m^2 l^2} l^3 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \dots\dots(127)$$

然るに (126) 式を満足する  $ml$  の値は無數にあり、從て自由振動は一般に週期異なる無數の振動の合成であるが、普通の塔状構造物に於ては、最大の週期 ( $T_1$ ) を有する振動が最も重要であり、之を主振動 (Principal vibration) 又は第一次振動と稱し、他を第二次、第三次、... と呼び、夫等に對する  $ml$  の値は

第 181 圖 自由振動の撓度曲線



- 1 第一次振動
- 2 第二次振動
- 3 第三次振動

第一次振動	第二次振動	第三次振動
$m_1 = 1.875$	4.694	7.855

第 181 圖は第一、第二及第三次振動に於ける柱軸の撓度曲線を示す。

(2) 任意の形状の柱状構造物の主振動週期を計算する近似法

振動中の構造物の有する總勢力は運動に對する抵抗を無視すれば一定不變にして

$$E = E_p + E_k = \int_0^l \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{\rho A}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{\rho I}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right)^2 dx = const.$$

茲に、右邊末項中  $\frac{\partial y}{\partial x}$  は角變位を表はし  $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$  は角速度を表はす。従て末項は廻轉運動に對する動勢力を表はすものなるも、普通の場合初二項に比して極めて小なるを以て之を無視して差支ない。

今、 $y = u \sin pt$  ( $u$  は各部分の極限變位) と置けば、 $E_p, E_k$  の極大値は相等しきを以て

$$p^2 \int_0^l \rho A u^2 dx = \int_0^l EI \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$\therefore p = \frac{2\pi}{T_1} = \left[ \frac{\int_0^l EI \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho A u^2 dx} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(128)$$

上式に於て  $u$  即ち振動時の軸の撓み曲線の形は不明なるも Lord Rayleigh が塙體に對する計算によれば、自由端に單位荷重を載せたる場合の撓み曲線を用ふるも  $T_1$  の誤差は僅かに 1.7% に過ぎざるを以て、此の場合

$$u = \frac{1}{6EI} (3lx^2 - x^3)$$

1) 著者：“塔状構造物の振動並にその耐震性に就て” 土木學會誌 5 卷 3 號 p. 589  
 2) Lord Rayleigh: Theory of Sound, Vol. 1, p. 287

と假定し、 $I$  及  $A$  を  $x$  の函數として表はし (128) 式を積分すれば主振動の週期  $T_1$  を計算し得る。

$I$  及  $A$  を表はす  $x$  の函數が複雑にして積分困難なる時は、各長  $\Delta x$  なる微區分に分ちて積算法を用ふる。上端に於ける單位荷重に對し

$$M = -(l-x), \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{l-x}{EI}$$

然るに

$$\int_0^l EI \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M^2}{I} dx = \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{M^2}{I} \Delta x$$

$$\int_0^l \rho A u^2 dx = \rho \int_0^l \frac{A}{E} \left( \int_0^l \frac{M}{I} dx \right)^2 dx = \rho \sum_0^l \frac{A}{E} \left( x \sum_0^l \frac{l-x}{I} \Delta x - \sum_0^l \frac{(l-x)x}{I} \Delta x \right)^2 \Delta x$$

次に (128) 式の他の略解法を述べんに、或る形状の構造物に於て撓み曲線  $u_1$  及振動週期  $T_1$  を知れる時、之に近似せる形状の他の構造物の週期  $T_2$  は

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{2\pi}{p_2} \right) / \left( \frac{2\pi}{p_1} \right) = \frac{p_1}{p_2}$$

$$= \left[ \frac{\int_0^l \rho_2 A_2 u_2^2 dx}{\int_0^l E_2 I_2 \left( \frac{d^2 u_2}{dx^2} \right)^2 dx} \cdot \frac{\int_0^l E_1 I_1 \left( \frac{d^2 u_1}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho_1 A_1 u_1^2 dx} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(129)$$

然るに、一般に  $\int_0^l f(x) dx = l \times \bar{f}(x)$  の平均値なるを以て、 $\int_0^l E_1 I_1 \left( \frac{d^2 u_1}{dx^2} \right)^2 dx$  は  $E_1 \left( \frac{d^2 u_1}{dx^2} \right)^2$  を輕重率とする  $I_1$  の平均値に  $l$  を乘じたるものと考ふることを得べく、 $\int_0^l \rho_1 A_1 u_1^2 dx$  は  $\rho_1 u_1^2$  を輕重率とせる  $A_1$  の平均値に  $l$  を乘じたるものと考ふる事を得、第二の構造物に對しても亦同様である。而して輕重率は近似値を用ふるも誤差微小なるを以て  $u_2$  の代りに  $u_1$  を用ひ

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ \frac{\text{weighted mean of } A_2}{A_1} \cdot \frac{\text{weighted mean of } I_1}{I_2} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(130)$$

今、撓み曲線として sine 曲線  $u = 1 - \sin \frac{\pi}{2l}x$  を用ひ、檣體の場合を既知

として同一の底を有する同質の錐體の場合を求むるに

$$\text{weighted mean of } A_2 = 0.0534 A_1 = A_m$$

$$I_2 = 0.368 I_1 = I_m$$

$$\therefore T_2 = T_1 \left( \frac{A_m}{A_1} \frac{I_1}{I_m} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.787 \frac{l^2}{r_1^2} \left( \frac{\rho}{E} \frac{0.0534}{0.368} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\doteq 0.681 \frac{l^2}{r_1^2} \sqrt{\frac{\rho}{E}} = C \frac{l^2}{r_1^2} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dots \dots \dots (131)$$

茲に  $r_1$  は檣斷面の環動半徑である。

然るに Kirchhoff の正解によれば、 $T_2$  の係

數は 0.681 の代りに 0.719 にして即ち誤差は僅かに 5.58% に過ぎず、從て補正係數  $\lambda$  を求むれば、

$$\lambda = (1 + 0.0558 \frac{l}{L})$$

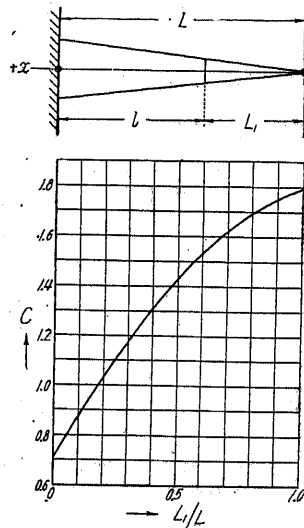
尙他の場合の  $C$  を求むれば

$l/L =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$C =$	0.719	1.10	1.42	1.66	1.787

即ち  $C$  の値は第 182 圖の曲線に示すが如く之を (40) に述ぶる正值に比すれば誤差は微小にして、從て (129) 式の近似解法は實用上極めて有效なる事を知るに足る。

上記の如き構造物が水平又は任意の方向に突出する場合は、靜荷重による撓み曲線を軸として其の兩側に運動し、振動週期は上記の場合と同一である。

第 182 圖



\*) Kirchhoff: Abhandlungen S. 339

[37] 載荷せる柱體の自由振動週期<sup>1)</sup>

載荷せる柱體の自由振動に關しては上端の荷重  $P$  が柱體の重量  $W$  に比して極めて大なるか又は極めて小なる場合のみに對して Lord Rayleigh の解法あり、依て一般の場合に對する著者の解法を述ぶる。

(1) 上端に作用する集中荷重  $P$  と等布荷重  $p$  とを有する場合

$A_0, I_0 =$  夫々柱斷面の面積及慣性能率

$w_0, w_1 =$  夫々柱單位體積に對する自重及荷重

$$w = w_0 + w_1$$

$$\rho = \frac{1}{g} w \quad E = \text{柱の彈性係數}$$

$$l = \text{柱長} \quad W = w A_0 l = (w_0 + w_1) A_0 l$$

此場合  $w = w_0 + w_1$  を柱體單位體積に對する有效重量と看做せば振動の方程式は (36) (1) の場合と全く同一にして、下端を原點として

$$EI_0 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore y = u \cos m^2 \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0}} t$$

と置き上式に代入すれば

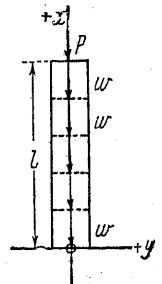
$$\frac{d^4 u}{dx^4} - m^4 u = 0$$

$$\therefore u = C_1 \cosh mx + C_2 \sinh mx + C_3 \sin mx + C_4 \cos mx \dots \dots (132)$$

茲に  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は常數にて次の限界條件より定めらる。

$$x = 0 \text{ に於て柱は固定さるゝを以て } u = 0 \text{ 及 } \frac{du}{dx} = 0$$

第 183 圖



1) 著者: “載荷せる構造物の振動並に其の耐震性に就て” 土木學會誌 6 卷 4 號

2) Lord Rayleigh: Theory of Sound. Vol. 1, p. 289

$$\therefore C_3 = -C_2, C_4 = -C_1$$

上端に於て 弾性力 =  $P$  の質量  $\times P$  に作用する加速度

$$\therefore EI_0 \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=l} = \frac{P}{g} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=l}$$

且つ彎曲力率は零なるを以て

$$\left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=l} = 0$$

上記の 4 条件式に依り積分常数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を消去すれば

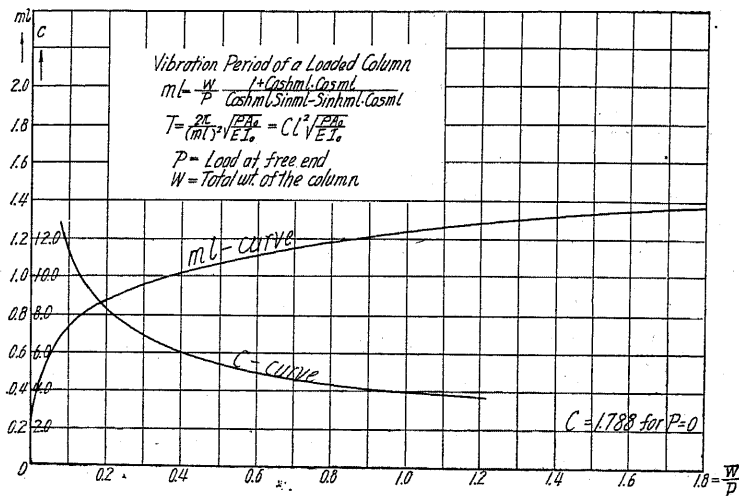
$$ml = \frac{W}{P} \frac{1 + \cosh ml \cos ml}{\cosh ml \sin ml - \sinh ml \cos ml} \dots (133)$$

上式より  $W/P$  の種々の値に対する  $ml$  の値を試算法に依て求めれば

$W/P = 0.1$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	$\infty$
$ml = 0.733$	0.868	1.020	1.118	1.190	1.247	1.290	1.323	1.340	1.875
$C = 11.7$	8.31	6.10	5.01	4.44	4.07	3.76	3.58	3.48	1.787

茲に  $T = C l^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}, C = \frac{2\pi}{(ml)^2} \dots (134)$

第 184 圖



(2) 多數の荷重を有する柱體の振動週期の近似値

種々の荷重が任意の點に作用する場合は  $x$  點の單位長の重量と荷重との和の  $1/g$  を  $\rho A$  と置けば、振動時微區分の有する勢力は

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \Delta x, \Delta E_k = \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \Delta x$$

運動に對する抵抗を無視すれば、振動體の總勢力は不變にして

$$E_p + E_k = \frac{1}{2} \sum EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \Delta x + \frac{1}{2} \sum \rho A \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \Delta x + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=l}^2 = \text{const.}$$

$\rho A$  が等布なる場合は

$$P^2 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \div 12 EI / l^4 \rho A (1 + 4 \frac{P}{W}) \dots (135)$$

即ち、上端の荷重は之を 4 倍して全長に割り當てれば柱體の自重と全く同一に取扱ひ得る、従て下端より

$x_1, x_2, x_3 \dots l$  等の點に自重及荷重の和  $q_1, q_2, q_3 \dots P$  が集中して存する場合

$$P^2 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = 3 EI / l^3 (x_1^2 q_1 + x_2^2 q_2 + \dots + l^2 P) \dots (136)$$

(3) 細き支柱に大なる荷重を載せたる場合の振動週期

柱體の質量に比し荷重著しく大に其の寸法も大なる時は、荷重の角運動の振動に對する影響を考慮する必要がある。Lord Rayleigh の近似解法に依れば支柱の質量を無視し、振動時の柱軸の形を上端に單位水平力を加へたる場合と等しと假定し、 $P$  の重心  $G$  の變位及角變位の極大値を夫々  $u = \delta, \frac{du}{dx} = \alpha$  とすれば

$$x \text{ 點に於て } u = \frac{3\delta - \alpha l}{l^2} x^2 + \frac{\alpha l - 2\delta}{l^3} x^3$$

依て  $R$  を振動方向に直角なる中軸の周りの  $P$  の環動半徑とすれば

1) Lord Rayleigh: Theory of sound Vol. 1, p. 289

$$E_p = \frac{2EI}{l^3} (3\delta^2 - 3\delta l\alpha + l^2\alpha^2)$$

$$E_k = \frac{P}{2g} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=l}^2 + R^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right)_{x=l}^2 \right]$$

然るに  $E_p + E_k = const.$

$$\therefore p^2 = 3gEI/Pl^3 \left( 1 + \frac{9}{4} \frac{R^2}{l^2} \right)$$

即ち 
$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{Pl^3}{3gEI} \left( 1 + \frac{9}{4} \frac{R^2}{l^2} \right)} \dots (137)$$

[38] 楔状體の自由振動週期<sup>1)</sup>

(1) 單體楔状體

硬地盤上に築造されたる單體の橋脚は大體截頭楔状體に類似し、橋桁を架設せざる場合の振動週期は理論的に計算する事を得る。載荷せる截頭楔状體の振動に關しては [39] (1) に述ぶる。

完全なる楔状體の振動は夙に Kirchoff 教授<sup>2)</sup>の計算せる所なるも、實際の構造物に近似する截頭楔状體に於ては、微分方程式は同一なるも限界條件異なるを以て計算は益しく複雑となる。

自由振動の方程式

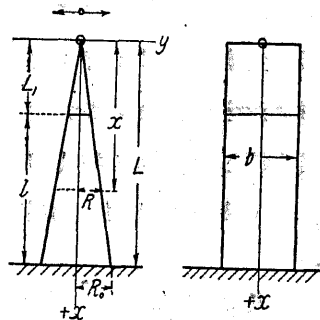
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots (138)$$

幅  $b = const.$ , 半厚  $R = \frac{x}{L} R_0$

断面積  $A = A_0 \frac{x}{L}$

慣性能率  $I = I_0 \frac{x^3}{L^3}$

第 185 圖



<sup>1)</sup> 著者: “載荷せる構造物の振動並に其の耐震性に就て” 土木學會誌 6 卷 4 號 p. 583  
<sup>2)</sup> Kirchoff: Abhandlungen S. 339

今  $y = u \cos pt$  と置けば (138) 式は

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \frac{\rho A_0}{EI_0} p^2 L^2 x u = \mu^2 x u \dots (139)$$

茲に 
$$\mu^2 = \frac{\rho A_0}{EI_0} p^2 L^2 = const.$$

依て  $\mu x = v$  と置けば (139) 式は次の二微分方程式

$$v \frac{d^2 u}{dv^2} + 2 \frac{du}{dv} \pm u = 0$$

と等値にして、二式の解は共に (139) 式の解であり、之を夫々  $u_1, u_2$  とすれば

$$u_1 = v^{-\frac{1}{2}} \left[ C_1 J_1(2v^{\frac{1}{2}}) + C_2 Y_1(2v^{\frac{1}{2}}) \right]$$

$$u_2 = v^{-\frac{1}{2}} \left[ C_3 I_1(2v^{\frac{1}{2}}) + C_4 K_1(2v^{\frac{1}{2}}) \right]$$

故に (139) 式の完全解は

$$u = v^{-\frac{1}{2}} \left[ C_1 J_1(2v^{\frac{1}{2}}) + C_2 Y_1(2v^{\frac{1}{2}}) + C_3 I_1(2v^{\frac{1}{2}}) + C_4 K_1(2v^{\frac{1}{2}}) \right] \dots (140)$$

茲に 
$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(n+s+1)}$$

$$Y_n(x) = \frac{1}{\sin n\pi} \left\{ \cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x) \right\}$$

$$I_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{n+2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(n+s+1)}$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \cot n\pi \left\{ I_{-n}(x) - I_n(x) \right\}$$

にして  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分常数を示す。

計算の便宜上式に  $x_1 = 2\sqrt{v}$  と置く時は

$$u = \frac{2}{x_1} \left\{ C_1 J_1(x_1) + C_2 Y_1(x_1) + C_3 I_1(x_1) + C_4 K_1(x_1) \right\}$$

固定端  $x = L$  に於て  $x_1 = 2\sqrt{\mu L} = \eta$  と置けば

變位なきを以て 
$$u = 0 \therefore u_{x_1=\eta} = 0 \dots (a)$$

方向の變化なきを以て 
$$\frac{du}{dx} = 0 \therefore \left( \frac{du}{dx_1} \right)_{x_1=\eta} = 0 \dots (b)$$

自由端  $x = L_1$  に於て  $w_1 = 2\sqrt{\mu L_1} = \xi$  と置けば

$$\text{彎曲力率零なるを以て } \left[ \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{x_1} \frac{du}{dx} \right]_{x_1 = \xi} = 0 \dots\dots\dots (c)$$

$$\text{弾性力零なるを以て } \left( \frac{d^3 u}{dx^3} \right)_{x_1 = \xi} = 0 \dots\dots\dots (d)$$

条件 a より  $C_1 J_1(\eta) + C_2 Y_1(\eta) + C_3 I_1(\eta) + C_4 K_1(\eta) = 0$

b より  $C_1 J_2(\eta) + C_2 Y_2(\eta) - C_3 I_2(\eta) - C_4 K_2(\eta) = 0$

c より  $C_1 J_3(\xi) + C_2 Y_3(\xi) + C_3 I_3(\xi) + C_4 K_3(\xi) = 0$

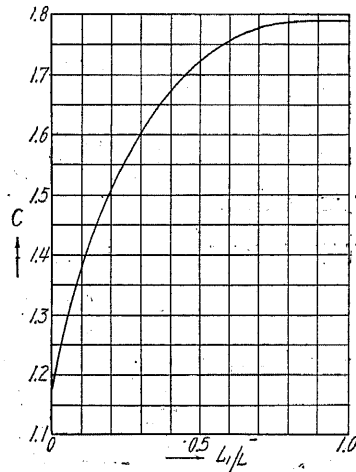
d より  $C_1 J_2(\xi) + C_2 Y_2(\xi) + C_3 I_2(\xi) + C_4 K_2(\xi) = 0$

上記の四式より積分常数  $C_1, C_2, C_3$  及  $C_4$  を消去すれば  $\eta$  と  $\xi$  との関係を示す一の条件式を得べく、其条件を満足する  $\eta$  と  $\xi$  の一組の値を知れば

$$T = Cl^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}, \quad C = \frac{8\pi\eta^2}{(\eta^2 - \xi^2)^2} \dots\dots (141)$$

に依て  $T$  を計算し得るが、夫等の計算方法は後述の截頭錐體の場合((40)(1))と同一なるを以て之を省略する。

第 186 圖



(2) 近似解法

此場合に於ても著者の近似解、(129) 式を應用すれば簡易なる數字的取扱に依て振動週期を求め得る。

今、同一の底面を有する角濶の振動週期は既知 (36) なるを以て、その諸量に尾字 1 を附し、楔體の場合に尾字 2 を附し、尙兩者の撓み曲線  $u$  を同一とし

$$u_2 = u_1 = 1 - \sin \frac{\pi}{2l} x$$

と置き、種々の場合の週期係數  $C$  ((36) 參

照) の近似値  $C'$  を求めれば

形状	$L_1/L$	$l/L$	$C'$	$C$ 正值又は補正值
完全楔状體	0	1	1.010	1.183
截頭 "	0.25	0.75	1.381	1.560
" "	0.50	0.50	1.585	1.725
" "	0.75	0.25	1.720	1.785
角濶 "	1			1.787

$C$  の値を第 186 圖に示す

$$T = Cl^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}} \quad \text{茲に } A_0, I_0 \text{ は底の値}$$

$$C \doteq 1.787 - 0.605 \left(1 - \frac{L_1}{L}\right)^2$$

} ... (142)

上記の計算法は幅と壁厚とが同一の頂點を有する中空楔状體(第187圖)にも其儘適用し得るが、兩者の頂點が一致せぬ場合(第188圖)幅(2R)と壁厚(t)との頂點の何れを用ふる方が實際に近きかを檢するに、 $u$  を同一とし  $\rho$  及  $E$  を一定とすれば (128) 式より

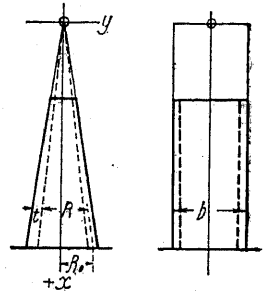
$$T^2 \propto \frac{\rho}{E} \sum \frac{Au^2}{I \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2}$$

然るに  $t$  の項は  $A$  及  $I$  に各 1 乘、環動半径  $r$  の項は  $A$  に 1 乘、 $I$  に 3 乘、結局式中に  $r^{-2}$  を含む事となり、 $r$  の變化の影響は著大にして且  $r$  は略壁中央の半径  $R$  に比例するを以て

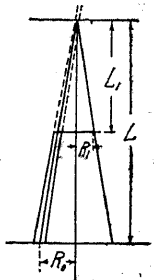
$$L = \frac{R}{R_1} L_1 \doteq \frac{r}{r_0} L_1$$

なる高さの中空楔状體として (141) 式に據るか又は (142) 式を用ふる。

第 187 圖



第 188 圖



後節に述べる中空截頭錐體の場合も同様である。

第 189 圖

次に楔状體の幅の方向の振動週期を求むるに

$$A = A_0 \frac{x}{L}, \quad I = I_0 \frac{x}{L}$$

Barling の假定を用ひ主振動週期の近似値を求む

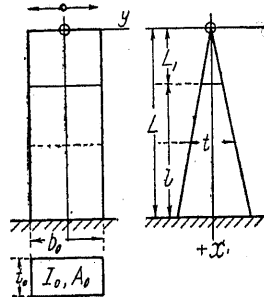
るに

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A_0}{EI_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

従て幅  $b_0$ , 厚  $t_0$  なる角礫の週期と同一にして

$$(I_0/A_0)^{\frac{1}{2}} = r_0 \text{ と置けば}$$

$$T \doteq 1.787 \frac{l^2}{r_0} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dots\dots\dots (143)$$



[39] 橋脚の振動

(1) 單體橋脚の振動週期

堅硬なる地盤に直接又は杭打に依て基礎を設けたる單體の橋脚は多く四面共に多少の傾斜を有するも、大體厚さの方向に振動する楔状體と看做し得るを以て、それ自體のみの振動週期は (142) 式より

$$T = C_2 l^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}, \quad C_2 = 1.787 - 0.605 \left(1 - \frac{L_1}{L}\right)^3$$

載荷せる柱體の振動週期は (134) 式により

$$T = C_3 l^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}, \quad C_3 = \frac{2\pi}{(ml)^2} \text{ (第 184 圖参照)}$$

従て載荷せる截頭楔状體の振動週期は

$$T = \frac{C_2 C_3}{1.787} l^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}} \dots\dots\dots (144)$$

一方 [37] (2) の近似法による載荷柱體の週期は

$$T = 1.813 l^2 \sqrt{1 + \frac{4P}{W}} \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}$$

なるを以て載荷せる截頭楔状體の振動週期は近似的に次の如く置く事を得る。

$$T = C_2 l^2 \sqrt{1 + \frac{4P}{W}} \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}} \dots\dots\dots (145)$$

今  $W/P$  の種々の値に對して兩式の與ふる週期を比較するに

$W/P =$	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2
$\frac{C_2}{1.787}$	2.00	2.10	2.28	2.48	2.85	3.41	4.65
$\sqrt{1 + \frac{4P}{W}}$	1.96	2.08	2.24	2.45	2.77	3.32	4.58

(2) 實測週期との比較

1. 山陰線高屋川橋脚

橋脚は基礎岩盤上高さ約 24 m にして上路構桁及鈹桁を支持す。

橋脚下端斷面積 ( $A_0$ ) = 48.31 m<sup>2</sup>

" 上端 " = 15.61 m<sup>2</sup>

橋梁の方向に於ける厚さ (下端) = 2 × 2.68 m

" (上端) = 2 × 1.07 m

$L_1/L \doteq 0.40$  , 下端斷面の環動半徑 = 1.53 m

$\sqrt{\frac{\rho}{E}}$  は上等の煉瓦工と、1:3:6 の混凝土の中間  $4.91 \times 10^{-4}$

$W \doteq 1,778,000 \text{ kg}$        $P = 92,734 \text{ kg}$

∴ (145) 式より

$$T = 1.66 \sqrt{1 + 0.208 \cdot 24^2} \times \frac{4.91 \times 10^{-4}}{1.53} = 0.33 \text{ sec}$$

試験に採用せる列車は機關車 1 臺、車輛 2 よりなるもの及機關車 2 臺、車輛 2 よりなるもの、二種にして、上記の  $P$  に相當する値を  $P_1, P_2$ 、振動週期を  $T_1, T_2$  とすれば

$P_1 = 212,480 \text{ kg}$        $P_2 = 291,860 \text{ kg}$

従つて、(145) 式より

$$T_1 = 0.37 \text{ sec} \quad T_2 = 0.40 \text{ sec}$$

實測の結果、荷重なき場合に近き状態にては  $T = 0.25 \sim 0.32 \text{ sec}$ 、列車の重心が構桁の中心附近に存する時は  $0.4 \text{ sec}$  以上を示して居る。

2. 質美川橋脚

基礎上の高さ  $24.1 \text{ m}$  にして大體は煉瓦積なるも、下部はその内部に  $1:3:6$  の混凝土を填充して居る。

上端の斷面積 =  $18.95 \text{ m}^2$       下端の斷面積 =  $51.93 \text{ m}^2$

橋脚の重量 =  $1,755,400 \text{ kg}$       橋桁の重量 =  $157,580 \text{ kg}$

$$\frac{L_1}{L} = \frac{2.59}{5.61} = 0.46$$

煉瓦の弾性係数を  $2.81 \times 10^5 \text{ t/m}^2$ 、混凝土を  $1.76 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  と採れば

$$\sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}} = 3.10 \times 10^{-4}$$

従つて (145) 式より列車荷重のなき場合の橋脚の振動週期を求めれば

$$T = 1.69 \sqrt{1 + 0.359} \times \frac{3.10 \times 24.1^2}{10^4} = 0.36 \text{ sec}$$

試験に使用せし列車は機關車 2 臺、制動車 1 輛、貨車 1 輛、 $20 \text{ ton}$  積載の貨車 7 輛にして其の總重量  $376,490 \text{ kg}$  なるを以て、 $P = 534,070 \text{ kg}$  となり (145)

式より列車の全荷重が橋脚に載るものとして振動週期を算定すれば  $T = 0.47 \text{ sec}$  となる。

實測の結果によれば荷重微小なる時は振動週期は  $0.29 \sim 0.33 \text{ sec}$  にて、荷重の影響大なる場合は  $0.3 \sim 0.41 \text{ sec}$  にて最大なるものは  $0.62 \text{ sec}$  に及ぶ。

[40] 錐體及中空截頭錐體の主振動週期

完全錐體の振動週期は夙に Kirchhoff 教授の解あるも、實際の構造物は截頭錐

▷ Kirchhoff: Abhandlungen S. 339

體又は截頭中空錐體にして、基本微分方程式は前者と同一なるも、限界條件の爲め問題は頗る複雑となる。

(1) 完全錐體の振動週期

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

今  $x$  に於て 半径 =  $R$ 、斷面積 =  $A$ 、慣性モーメント =  $I$

$$x = 0, \quad " = R_0, \quad " = A_0, \quad " = I_0$$

$$\text{然るに } R = R_0 \frac{x}{L}, \quad A = A_0 \frac{x^2}{L^2}, \quad I = I_0 \frac{x^4}{L^4}$$

中空錐體の場合に於ても上記の関係は同一にして只壁厚の中心迄の半径を以て  $R$  とする。

上式に  $y = u \cos pt$  と置けば

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( x^4 \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \frac{\rho A_0}{EI_0} p^2 L^2 x^2 u = \mu^2 x^2 u \dots \dots \dots (146)$$

$$\text{茲に } \mu^2 = \frac{\rho A_0}{EI_0} p^2 L^2$$

今、 $\mu x = v$  と置けば (146) 式は次の二微分方程式と等値にして、兩式の解は何れも (146) 式の解である。

$$v \frac{d^2 u}{dv^2} + 3 \frac{du}{dv} = +u \dots \dots \dots (147)$$

$$v \frac{d^2 u}{dv^2} + 3 \frac{du}{dv} = -u \dots \dots \dots (148)$$

(147) 式の解は  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2}$ 、(148) 式の解は  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}$  にして何れも

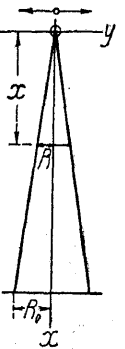
無限級数である。従て (146) 式の一一般解は

$$u = C_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + C_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + C_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2} + C_4 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial v^2} \dots \dots \dots (149)$$

茲に  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分常数

(149) 式に  $x = 0$  及  $x = L$  の限界條件を入れ、更に  $\varphi_1$  及  $\psi_1$  を  $\varphi$  及

第 190 圖





ψ にて表はし、次に φ 及 ψ の無限級数を代入し初三項を採れば、 $v_1 = \mu L$  に對して次の條件式を得る。

$$1 - \frac{v_1^2}{60} + \frac{v_1^4}{20,160} = 0 \quad \therefore v_1 = 8.8$$

第四項迄を採れば  $v_1 = 8.72$

$$\therefore v = \mu L = \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}} p L^2 = 8.72, \quad T = \frac{2\pi}{8.72} \frac{I^2}{r_0} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

$$\text{即ち} \quad T = 0.719 \frac{L^2}{r_0} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dots\dots\dots(150)$$

但し  $r_0 =$  底の環動半径

(2) 截頭中空錐體の振動週期

Kirchhoff 氏の解法は截頭の場合には適用困難なるを以て、次に圓錐函数を用ふる解法を述ぶる。

(147) 及 (148) 式の解は夫々次の如くなる。

$$(147) \text{ 式の解, } \frac{1}{v} [C_1 J_2(2v^{1/2}) + C_2 Y_2(2v^{1/2})]$$

$$(148) \text{ 式 } \therefore, \frac{1}{v} [C_3 I_2(2v^{1/2}) + C_4 K_2(2v^{1/2})]$$

$$\text{故に一般解は } u = \frac{1}{v} [C_1 J_2(2v^{1/2}) + C_2 Y_2(2v^{1/2}) + C_3 I_2(2v^{1/2}) + C_4 K_2(2v^{1/2})] \dots\dots\dots(151)$$

但し

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(n+s+1)}$$

$$Y_n(x) = \frac{1}{\sin n\pi} \{ \cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x) \}$$

D 著者: "Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichem Querschnitt" ZAMM. 1 (1921), S. 445

D 著者: "塔状構造物の振動並にその耐震性に就て" 土木學會誌 6 卷 4 號 p. 586

$$I_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{n+2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(n+s+1)}$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \cot n\pi \{ I_{-n}(x) - I_n(x) \}$$

にして、 $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分常數

計算の便宜上  $2v^{1/2} = x_1$  即ち  $x = \frac{x_1^2}{4\mu}$  と置き、 $4C_1, 4C_2, 4C_3$  及  $4C_4$

の代りに夫々  $C_1, C_2, C_3$  及  $C_4$  を用ふれば

$$u = \frac{1}{x_1^2} [C_1 J_2(x_1) + C_2 Y_2(x_1) + C_3 I_2(x_1) + C_4 K_2(x_1)]$$

固定端  $x = L$  に於て  $x_1 = \eta$  と置けば

$$\text{變位なきを以て} \quad u = 0 \quad \therefore u_{x_1=\eta} = 0 \dots\dots\dots(a)$$

$$\text{方向の變化なきを以て} \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad \therefore \left( \frac{du}{dx_1} \right)_{x_1=\eta} = 0 \dots\dots(b)$$

自由端  $x = L_1$  に於て  $x_1 = \xi$  と置けば

$$\text{彎曲力率零なるを以て} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

$$\therefore \left[ \frac{d^2 u}{dx_1^2} - \frac{1}{x_1} \frac{du}{dx_1} \right]_{x_1=\xi} = 0 \dots\dots\dots(c)$$

$$\text{弾性力 } \therefore \frac{d}{dx} \left( x^4 \frac{du}{dx} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{dx_1} \left[ x_1^6 \left( \frac{d^2 u}{dx_1^2} - \frac{1}{x_1} \frac{du}{dx_1} \right) \right]_{x_1=\xi} = 0 \dots\dots(d)$$

$$\text{條件 } a \text{ より } C_1 J_2(\eta) + C_2 Y_2(\eta) + C_3 I_2(\eta) + C_4 K_2(\eta) = 0$$

$$\text{" } b \text{ より } C_1 J_3(\eta) + C_2 Y_3(\eta) - C_3 I_3(\eta) - C_4 K_3(\eta) = 0$$

$$\text{" } c \text{ より } C_1 J_4(\xi) + C_2 Y_4(\xi) + C_3 I_4(\xi) + C_4 K_4(\xi) = 0$$

$$\text{" } d \text{ より } C_1 J_5(\xi) + C_2 Y_5(\xi) + C_3 I_5(\xi) + C_4 K_5(\xi) = 0$$

上記の條件式より積分常數  $C_1, C_2, C_3$  及  $C_4$  を消去すれば

$$\begin{vmatrix} J_2(\eta) & Y_2(\eta) & I_2(\eta) & K_2(\eta) \\ J_3(\eta) & Y_3(\eta) & -I_3(\eta) & -K_3(\eta) \\ J_4(\xi) & Y_4(\xi) & I_4(\xi) & K_4(\xi) \\ J_3(\xi) & Y_3(\xi) & I_3(\xi) & K_3(\xi) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots(152)$$

上式を満足する爲めには  $\eta$  と  $\xi$  との間に特殊の関係が成立せざるべからず、若し斯の如き一組の  $\eta, \xi$  を見出し得れば

$$\frac{1}{4}\eta^2 = \mu L, \quad \frac{1}{4}\xi^2 = \mu L_1, \quad \mu = pL \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}, \quad L - L_1 = l \text{ なるを}$$

以て

$$T = \frac{2\pi}{p} = Cl^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}, \quad C = \frac{8\pi\eta^2}{(\eta^2 - \xi^2)^2} \dots\dots(153)$$

從て自由振動週期  $T$  を求め得る。然るに一組の  $\eta, \xi$  の値を得るには、 $\eta$  にある値を與へて (152) 式を  $\xi$  のみの函数と爲し、之より試算に依て  $\xi$  を算定する外なく、此の爲には圓壩函数の表を利用する必要あるを以て先づ式中の圓壩函数を總て 0 次及 1 次に變ずる。然るに圓壩函数の性質より

$$J_2(\eta)Y_3(\eta) - J_3(\eta)Y_2(\eta) = -\frac{2}{\pi\eta}$$

$$J_4(\xi)Y_3(\xi) - J_3(\xi)Y_4(\xi) = \frac{2}{\pi\xi}$$

$$I_4(\xi)K_3(\xi) - I_3(\xi)K_4(\xi) = -\frac{1}{\xi}$$

$$I_3(\eta)K_2(\eta) - I_2(\eta)K_3(\eta) = \frac{1}{\eta}$$

尙  $C_n(x)$  を以て  $J_n(x)$  又は  $Y_n(x)$  を代表し

$F_n(x)$  を以て  $I_n(x)$  又は  $K_n(x)$  を代表すれば次の関係が成立

つ。

$$C_2(x) = \frac{2}{x}C_1(x) - C_0(x) \quad F_2(x) = F_0(x) - \frac{2}{x}F_1(x)$$

$$C_2(x)F_3(x) + C_3(x)F_2(x) = -C_0(x)F_1(x) - F_0(x)C_1(x) + \frac{4}{x}C_1(x)F_1(x)$$

$$C_3(x)F_4(x) - C_4(x)F_3(x) = -\frac{192}{x^3}C_0(x)F_0(x) + \left[ \frac{48}{x^2} \left( 1 + \frac{8}{x^2} \right) - 1 \right]$$

$$\begin{aligned} & \times C_0(x)F_1(x) - \left[ \frac{48}{x^2} \left( 1 - \frac{8}{x^2} \right) + 1 \right] C_1(x)F_0(x) + \left[ \frac{12}{x} \left( 1 - \frac{64}{x^4} \right) + \frac{4}{x} \right] \\ & \times C_1(x)F_1(x) \end{aligned}$$

(152) 式を展開し上記の関係を代入し、且つ

$$-\frac{192}{\xi^3} = \alpha, \quad -\frac{48}{\xi^2} \left( 1 + \frac{8}{\xi^2} \right) - 1 = \beta$$

$$\frac{48}{\xi^2} \left( 1 - \frac{8}{\xi^2} \right) + 1 = \tau, \quad \frac{16}{\xi} \left( 1 - \frac{48}{\xi^4} \right) = \delta$$

と置けば、(152) 式は次の如く書換へ得る。

$$\begin{aligned} & \left[ J_1(\eta)I_0(\eta) + J_0(\eta)I_1(\eta) - \frac{4}{\eta}J_1(\eta)I_1(\eta) \right] \left[ \alpha Y_0(\xi)K_0(\xi) + \beta Y_0(\xi)K_1(\xi) \right. \\ & \left. - \tau Y_1(\xi)K_0(\xi) + \delta Y_1(\xi)K_1(\xi) \right] - \left[ J_1(\eta)K_0(\eta) + J_0(\eta)K_1(\eta) \right. \\ & \left. - \frac{4}{\eta}J_1(\eta)K_1(\eta) \right] \left[ \alpha Y_0(\xi)I_0(\xi) + \beta Y_0(\xi)I_1(\xi) - \tau Y_1(\xi)I_0(\xi) \right. \\ & \left. + \delta Y_1(\xi)I_1(\xi) \right] + \left[ Y_1(\eta)K_0(\eta) + Y_0(\eta)K_1(\eta) - \frac{4}{\eta}Y_1(\eta)K_1(\eta) \right] \\ & \left[ \alpha J_0(\xi)I_0(\xi) + \beta J_0(\xi)I_1(\xi) - \tau J_1(\xi)I_0(\xi) + \delta J_1(\xi)I_1(\xi) \right] \\ & - \left[ Y_1(\eta)I_0(\eta) + Y_0(\eta)I_1(\eta) - \frac{4}{\eta}Y_1(\eta)I_1(\eta) \right] \left[ \alpha J_0(\xi)K_0(\xi) \right. \\ & \left. + \beta J_0(\xi)K_1(\xi) - \tau J_1(\xi)K_0(\xi) + \delta J_1(\xi)K_1(\xi) \right] + \frac{4}{\pi\eta\xi} \\ & = F = 0 \dots\dots\dots(154) \end{aligned}$$

茲に  $F$  は左邊全部を示す。

與へられたる  $\eta$  に對して上式を満足する  $\xi$  を求むるには、先づ  $\xi$  を假定して試算法を用ふる。然るに截頭錐體の振動週期の係數  $C$  は (36) (2) に於て近似的に求めたるを以て、一の  $\eta$  に對する  $\xi$  の近似値は (153) 式より求めらるるを以て、その前後に接近したる二つの値  $\xi_1, \xi_2$  を假定すれば、求むる  $\xi$  は次式より得らる。

$$\xi = \xi_1 - \frac{F(\eta, \xi_1)}{F(\eta, \xi_2) - F(\eta, \xi_1)} (\xi_2 - \xi_1) \dots\dots(155)$$

依て  $\eta, \xi$  の数組の値を求めれば

$\eta =$	5.91	6.50	8.60	15.8
$\xi =$	0	3.34	6.08	13.5

従て  $L_1/L$  の種々の値に対する  $C$  の値は (153) 式より

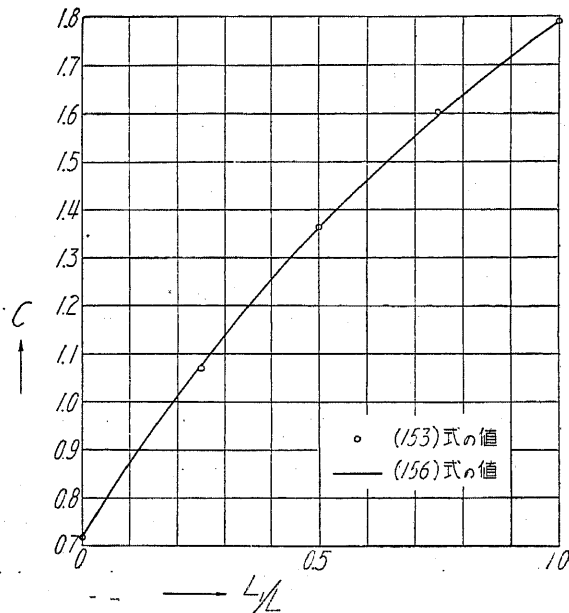
$L_1/L = 0$ (完全錐體)	0.254	0.500	0.750	1.00 (檣體)
$C = 0.719$	1.099	1.367	1.600	1.787

$C$  は次式に依て近似的に表はさる

$$C = 0.719 + 1.068 \frac{L_1}{L} + \left[ 0.113 - 0.452 \left( 0.5 - \frac{L_1}{L} \right)^2 \right] \dots\dots(156)$$

従つて自由振動週期  $T$  は次の如し。

第 191 圖



$$T = C \frac{l^2}{r_0} \sqrt{\frac{\rho}{E}} = Cl^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}$$

茲に  $l$  = 構造物の長さ  $r_0$  = 底部の環動半径  
 $\rho$  = 材料の単位体積の質量  $E$  = 材料の弾性係数

[41] 自由振動週期計算に対する注意

(1) 構造物材料の弾性係数

1. 鉄筋混凝土

鉄筋混凝土用混凝土の弾性係数は普通鋼材のそれの  $\frac{1}{8} \sim \frac{1}{12}$  即ち兩者弾性係数比  $n$  は  $8 \sim 12$  にして、構造物に罅裂の生ぜざる状態に於ては平均 10 位と看做して差支ない。

断面の中心に對して對稱的に  $\alpha\%$  の鐵筋を配置すれば、合成材の有効弾性係数比  $n_1$  は  $n_1 = n / (1 + \frac{\alpha}{10})$  である。

次に鉄筋混凝土の重量は  $2.4 t/m^3$  なるを以て  $\sqrt{\rho/E}$  は

$n =$	8	9	10	11	12
$\sqrt{\rho/E} =$	$3.02 \times 10^{-4}$	$3.20 \times 10^{-4}$	$3.38 \times 10^{-4}$	$3.54 \times 10^{-4}$	$3.70 \times 10^{-4}$ (m)

煙突の如き塔状構造物に於ては自重による壓應力に依て彎曲張應力は著しく軽減され、激震の場合を除けば混凝土自身の彎曲抗張強度以内なるを以て  $n_1 = 8 \sim 10$  とし、全断面を有効として  $I$  を求むるが、若し全長に亘り張應力側に罅裂を生じ、混凝土の抗張力が全く無効なる時は  $I$  は上記の  $\frac{1}{4}$  位に激減する、従て大地震に於て多くの損傷を受けたる場合週期は最大 50% 位迄増大し得る。

2. 煉瓦積

煉瓦積の弾性係数は煉瓦及目地材の性質に依て著しく異り、大森博士が小形燒

\*) F. Omori : Bull. Imp. Earthq. Invest. Comm. Vol. 2, No. 3

過煉瓦、セメントモルタル目地、高 495 cm、厚 22.5 cm、幅 45.5 cm、比重 1.85、材齢 100 日の各種柱體に付き自由振動週期を測定せる資料より  $\sqrt{E/\rho}$  及  $E$  を計算すれば

柱番號	モルタル	$T$ sec	全振幅 mm	$\sqrt{E/\rho}$ m	$E$ t/m <sup>2</sup>
	セメント 砂				
I	1 0	0.26	6.5	$0.241 \times 10^4$	$1.05 \times 10^6$
II	1 1	0.23	5.3	$0.274 \times 10^4$	$1.35 \times 10^6$
III	1 2	0.26	7.8	$0.241 \times 10^4$	$1.05 \times 10^6$
IV	1 3	0.24	8.5	$0.259 \times 10^4$	$1.21 \times 10^6$

尙大森博士が石灰モルタル積煉瓦煙突の頂に水平荷重を加へて測定せる水平變位  $\delta$  より構造物の  $E$  を計算すれば

水平荷重	kg	22	53	60
$\delta$	cm	0.23	0.37	0.405
$E$	t/m <sup>2</sup>	$1.48 \times 10^5$	$2.07 \times 10^5$	$2.16 \times 10^5$

即ち  $E$  は前の場合に比して著しく小なるが、之れモルタルの不良なると基礎地盤の變形とに歸すべきものである。

(2) 基礎沈下の週期に及ぼす影響

構造物の振動の際底面の壓力強度は不等となり、地盤が極めて堅剛なる場合の外底面に於て角變位を生じ振動週期は増大する。次に牆體構造物に就て其の影響を計算する。

- $D$  = 振動方向の幅  $B$  = 底面の幅
- $u$  = 底面完全固定の場合の  $x$  點の撓み
- $\delta$  = " " 上端の "
- $u'$  = 底面不等沈下を爲す場合の  $x$  點の撓み
- $\delta'$  = " " 上端 "
- $\alpha$  = 底面の水平に對する傾斜角

- $\beta$  = 底面固定の場合の上端の傾斜角
- $\beta'$  = 底面不等沈下の場合の上端の傾斜角
- $T$  = 底面完全固定の場合の主振動週期 ( $= \frac{2\pi}{p}$ )
- $T'$  = 底面不等沈下の " " ( $= \frac{2\pi}{p'}$ )

今上端に單位荷重を加へたる場合を考へ、

完全固定の場合  $u = \iint \frac{M}{EI} dx, M = l-x \dots (i)$

然るに  $x = 0$  に於て  $u = 0, \frac{du}{dx} = 0$

$\therefore u = \frac{x^2}{EI} \left( \frac{l}{2} - \frac{x}{6} \right) \dots \dots \dots (ii)$

$x = l$  に於て  $\frac{du}{dx} = \beta, u = \delta$

$\therefore \beta = \frac{l^2}{2EI}, \delta = \frac{l^3}{3EI} \dots \dots \dots (iii)$

不等沈下に因り底面に角變位ある場合、底面は水平に對し  $\alpha$  だけ傾斜するも滑動せざるものとすれば

$x = 0$  に於て  $\left( \frac{du'}{dx} \right) = \alpha, u' = 0$

(i) 式を積分して、此の條件を入れるれば

$\alpha = \frac{\delta}{l} - \frac{l^2}{3EI}, u' = \frac{1}{EI} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \alpha x \dots \dots \dots (iv)$

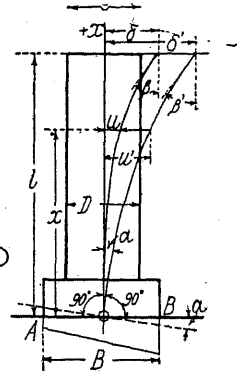
今地盤が弾性を有せざるものとすれば、構造物の位置の總勢力  $E_p$  は不等沈下に關せず不變にして、運動の勢力のみは  $E_k$  より  $E'_k$  に増大する。

而て (128) 式より  $T^2 \propto \rho A \int u'^2 dx / EI \int \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx$

然るに  $E_p$  は不變なるを以て不等沈下の有無に關せず  $\int \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx$  は同一にして、 $T^2$  は  $\rho A \int u'^2 dx$  に比例する。従て

$(T'/T)^2 = \int u'^2 dx / \int u^2 dx \dots \dots \dots (157)$

第 192 圖



断面一様ならざる場合は

$$(T'/T)^2 = (\sum \rho_s \Delta u^2 \Delta x) / (\sum EI u^2 \Delta x) \dots\dots(158)$$

(ii) 及 (iv) 式を (157) 式に代入して積分し簡単にすれば

$$(T'/T)^2 = \left( \frac{l^4}{EI} + 7.0 \alpha l^2 + 12.7 \alpha^2 EI \right) / \frac{l^4}{EI}$$

$$\therefore \frac{T'}{T} \div 1 + 3.50 \frac{\alpha}{l^2} EI = 1 + 1.75 \frac{\alpha}{\beta} \dots\dots(159)$$

然るに最大撓みに於ける縁維應力度の静止時に對する増減の全長に亘つての平均値を  $\sigma$  とすれば、縁維の全長の静止時に對する伸縮は  $\sigma l / E$  にして

$$\beta = \frac{\sigma l}{E} \frac{2}{D}$$

次に

$\sigma$  = 最大撓みに於ける縁維應力度の  $l$  間の平均値

$\sigma'$  = 底面兩外端の壓力度の差

$G$  = 地盤を單位長たけ沈下せしむるに要する壓力の強さ

とすれば構造物の縁維全長の伸縮は  $\sigma l / E$  にして上端角變位  $\beta$  及底面の傾斜  $\alpha$  は

$$\beta = \frac{\sigma l}{E} \frac{2}{D}, \quad \alpha = \frac{\sigma'}{G} \frac{1}{B} \dots\dots(160)$$

$\sigma'$  及  $G$  は地盤及基礎工事に依て定まり一般には  $G$  の大なる堅盤ほど大なる

$\sigma'$  を用ひ得るを以て、 $G$  及  $\sigma'$  は互に比例する傾向がある。

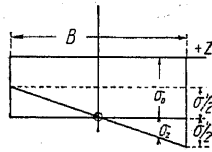
(160) 式を (159) 式に代入して

$$\frac{T'}{T} = 1 + 0.9 \frac{\sigma'}{G} \frac{E}{\sigma} \frac{D}{Bl} \dots\dots(161)$$

若し地盤が彈性的性質を有し荷重を取り去れば直ちに原位置に復し、即ち沈下量に比例して位置の勢力の増大ある時は底面の  $z$  點に於ける壓力度の増大は

$$\sigma_z = \sigma' \frac{z}{B}$$

第 193 圖



にして之に因る  $z$  點の沈下増大を  $\alpha z$  と置き、底面を方形なりとすれば底面が  $\alpha$  だけ傾斜せる爲めに生ずる

$$\text{位置の勢力} = 2 \int_0^{\frac{B}{2}} B \sigma' \frac{z}{B} \alpha z dz = \frac{\sigma' \alpha B^3}{12} \dots\dots(v)$$

然るに頂點に單位水平力が作用する場合構造物が安定を保つ爲めには、底の中心  $O$  の周りの力率は零なるを要するを以て

$$1 \cdot l = 2 \int_0^{\frac{B}{2}} B \sigma' \frac{z}{B} z dz = \frac{\sigma' B^3}{12} \therefore \sigma' = \frac{12l}{B^3} \dots\dots(vi)$$

$$\therefore \alpha = \frac{\sigma'}{G} \frac{1}{B} = \frac{12l}{GB^4} \dots\dots(vii)$$

構造物の全重量を  $W$  とすれば、底面平均壓力度は  $\sigma_0 = \frac{W}{B^2}$  にして、且

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{l-x}{EI}, \quad \int_0^l \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{l^3}{3E^2I^2} \text{ なるを以て全體の位置の}$$

勢力は

$$E_p = EI \int_0^l \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx + 2 \int_0^{\frac{B}{2}} B \sigma' \frac{z}{B} \alpha z dz = \frac{l^3}{3EI} + \frac{12l^2}{GB^4} \dots\dots(162)$$

(162) 式に依て (161) 式を補正すれば

$$\frac{T'}{T} = \left( 1 + 0.9 \frac{\sigma'}{G} \frac{E}{\sigma} \frac{D}{Bl} \right) / \left( 1 + \frac{36EI}{GLB^4} \right) \dots\dots(163)$$

圓形基礎面に對しても同様に計算し得るが同面積を有する方形として (163) 式を用ふるも大過はない。

計算例

$$l = 50 \text{ m}, \quad D = 3 \text{ m}, \quad B = 6 \text{ m}, \quad \text{壁厚 } t = 0.2 \text{ m}, \quad I = 0.958 \text{ m}^4$$

$$\sigma_0 = 200 \text{ t/m}^2, \quad \sigma' = 20 \text{ t/m}^2, \quad G = 10^4 \text{ t/m}^3, \quad E = 2 \times 10^9 \text{ t/m}^2$$

$$\text{(161) 式の場合 } \frac{T'}{T} = 1.18 \quad \therefore \text{ 週期は } 18\% \text{ 増大}$$

$$\text{(163) } \frac{T'}{T} = \frac{1.18}{1+0.106} = 1.07 \quad \therefore \text{ 7\% 増大}$$

週期は  $G$  の小なるに従て著しく増大するが、彈性的地盤に於ては不等沈下に

因る週期の變化は割合に小である。

[42] 塔状構造物の主振動週期の實測値と計算値<sup>1)</sup>

(1) 煙突の主振動週期

大森教授は多數の煙突につき振動週期を實測されたるを以て其の結果と(131)式又は(156)式に依て著者の計算せる値とを比較する。

但し大森教授の測定は水平荷重又は風力による小なる振動の場合なるを以て、地盤の變位の影響は考慮するに及ばない。

第 23 表 煙 突 の 性 状

番號	材 料	断面	礎版上高 ( <i>l</i> )	根本の徑 ( $2R_0$ )	上端の徑 ( $2R$ )	根本の $r_0$
I	煉瓦(石灰モルタル)	方形	7.58 m	0.545 m	0.409 m	0.282 m
II	"	"	15.45 "	0.848 "	0.480 "	0.345 "
III	鐵筋混凝土(1:2:4)	圓形	30.48 "	1.55 "	1.22 "	0.55 "
IV	" (1:2:3.5)	"	167.64 "	12.25 "	8.17 "	4.33 "
V	" (1:2:4)	"	30.48 "	1.91 "	1.86 "	0.68 "

第 24 表 煙 突 主 振 動 週 期

	$L_1/L$	$C(156)$ 式	$\sqrt{\rho/E}$	$D^2/r_0$	計算週期(sec)	實測週期(sec)
I	0.75	1.61	$9.9 \times 10^{-4}$	204.55	0.33	0.36
II	0.555	1.42	$9.9 \times 10^{-4}$	696.97	0.99	1.01
III	0.783	1.63	$3.28 \times 10^{-4}$	1694.69	0.90	0.82
IV	0.667	1.53	$2.99 \times 10^{-4}$	6492.24	2.54	2.53
V	0.977	1.77	$3.28 \times 10^{-4}$	1374.65	0.80	0.85

IV は佐賀關精煉所の大煙突にして  $R$  の變化は直線的ならざるを以て(128)式に依て補正したものである。

(2) 原ノ町無線電信塔

<sup>1)</sup> 著者 “塔状構造物の振動並にその耐震性に就て” 土木學會誌5卷3號 p.607  
<sup>2)</sup> F. Omori: “Note on the Vibration of Chimneys” Bull. Imp. Earthq. Invest. Comm. No. 12

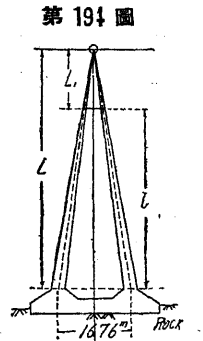
壁厚及半徑が共通の項點を有する截頭圓錐體にして

主體； 全高 200 m、基礎岩盤

	壁厚中心半徑	壁厚
上 端	1.22	0.152
下 端	16.76	0.762

使用材料；

	鋼 $t$	混凝土 (1:2:4) $m^3$	重量 $t$	鐵筋比 %
主 體	79	1352	2930	0.74
基礎版	290	3306	7160	1.15



柴田博士が工事竣功迄に四度の振動測定を爲したるが其の結果と(156)式に依る著者の計算値とを比較すれば次表の如し。

但し、有效彈性係數比  $n_1 = \frac{n}{1+0.1\alpha} = \frac{11}{1+0.1115} = 10$

底の  $r_0 = 5.88 m$

工程 (底よりの高) m	88	125.6	158	200	
$L_1/L$	0.59	0.42	0.26	0.073	
$O(156)$ 式	1.46	1.28	1.05	0.83	
週期 $T_{sec}$	計算	0.65	1.14	1.46	1.88
	實測	0.72	1.25	1.67	2.07

計算週期の稍小なるは主として  $n$  が假定より大、即ち混凝土の  $E$  が小なる爲めである。

(3) 米國 California 大學 Sather 塔の振動週期

此塔は高 87 m、地階断面 9.75 m 角、地上 47 m に於て 7.62 m 角の鐵骨混凝土造なるが、同大學教授 C. Derleth 氏が鐵骨組上りより工事竣功迄屢々振動週期を測定し、工事の進捗と週期の變化とを明かにした。

測定月日 (1914)	II-5	VI-18	VII-3	(1915) I-8	X-4	XI-28
工事	鐵骨組上り	←	壁體工事中	→	竣功	

南北方向週期(sec)	0.904	0.746	0.692	1.068	1.133	1.137
東西	1.02	0.874	0.863	1.045	1.137	1.136
使用鋼材	竣功総重量		底面圧力強度			
$W_0 = 455 t$	$W = 87 \times 23.6 t$		平均 $30 t/m^2 (20 \sim 40 t/m^2)$			

1. 鐵骨組上りの振動週期

上部は尖塔なるを以て有効高  $l = 82.3 m$  とす。

完全なる結構と假定すれば  $I_1 \doteq 89 m^4$  (東西及

南北),  $\frac{L_1}{L} = 0.78$ , (156) 式により  $C = 1.63$ ,

$w = 6.40 t/m$

$$T_1 = 1.63 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI_1}} = 0.69 sec$$

高層架構とし各层高  $h = 5.44 m$ , 虚點の位置を  $h_1$  とすれば

$$T_2 = 2\pi h_1^{1.5} \left[ W \left( 1 + \frac{9}{4} \frac{R^2}{h_1^2} \right) / 3gEI_2 \right]^{1/2}$$

南北方向  $I_2 = 0.0345 m^4$ ,  $T_2 = 1.22 sec$

東西方向  $I_2 = 0.0185 m^4$ ,  $T_2' = 1.67 sec$

即ち、南北方向の週期は 0.69 と 1.22 sec の中間、東西方向に於ては 0.69 と 1.67 sec との中間にして南北より多少長い。

2. 竣功後の振動週期

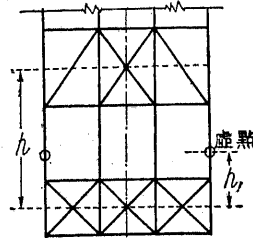
$I = 325 m^4, w = 77.4 t/m, E = 2.11 \times 10^6 t/m^2, L_1/L = 0.78, C = 1.68$

$$\therefore T = 1.63 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} = 1.13 sec$$

[43] 振動に依る構造物の性状試験

構造物の自由振動は理論上主振動と無数の副振動とを含み極めて複雑なる運動をなすも、實際測定せる運動は規則正しき主振動のみが明瞭に現はれ、副振動は

第 195 圖



殆んど検出し得ぬ程度に微小である。而して振動に際し種々の内部的及外部的の抵抗が作用し、地震の如き外部的作用の加はる場合の外週期は殆んど一定にして、單に抵抗に依て徐々に振幅を縮小するのみである (第 196 圖参照)。

(1) 抵抗を受くる振動

內的、外的の抵抗を受くる物體の弾性振動は極めて複雑なる問題なるが、今單位長に作用する抵抗  $q$  が運動の速度と直徑とに比例するものと假定し

$$q = \lambda D \frac{\partial y}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{茲に } c = \lambda D$$

とすれば運動の方程式は

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + c \frac{\partial y}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots \dots \dots (164)$$

此式を解き  $I/A = r^2$ ,  $E/\rho = b^2$  と置けば一般解は

$$y = \sum B_n \left[ \begin{matrix} (\sin ml + \sinh ml)(\cos mx - \cosh mx) \\ + (\cos ml + \cosh ml)(-\sin mx + \sinh mx) \end{matrix} \right] e^{-\frac{c}{2\rho A}t} \cos \sqrt{m^4 b^2 r^2 - \frac{c^2}{4\rho^2 A^2}t}$$

$$+ \sum A_n \left[ \begin{matrix} (\sin ml + \sinh ml)(\cos mx - \cosh mx) \\ + (\cos ml + \cosh ml)(-\sin mx + \sinh mx) \end{matrix} \right] e^{-\frac{c}{2\rho A}t} \sin \sqrt{m^4 b^2 r^2 - \frac{c^2}{4\rho^2 A^2}t}$$

\dots \dots \dots (165)

若し主振動のみを採れば  $ml = 0.593\pi$ ,  $c^2/4\rho^2 A^2$  は  $m^4 b^2 r^2$  に比して極めて小なるを以て抵抗の週期に及ぼす影響は微小である。

(2) 非弾性變形の影響

構造物の材料が全く非弾性的なる場合は外力を加へて屈撓せしめ、之を放つと其の儘の變形を保つ。之れ加力に依て與へたる仕事は全部内部の摩擦に抵抗して變位を生ぜしむる爲に消費され、位置の勢力として貯藏されぬ爲めである。若し材料が多少非弾性的性質 (Nonelastic) を有する時は大部分は位置の勢力として貯藏され、外力を去れば原位置に歸らんとして振動を起すが、內的抵抗に對し勢力

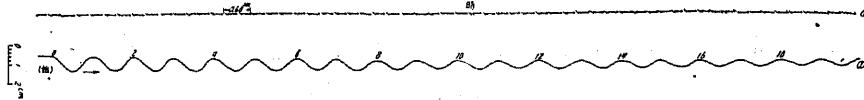
を消費するを以て一振動毎に勢力は減少し従て振幅は漸減する。此現象を振動の減衰と稱し、混凝土、モルタル、煉瓦等の材料は凡て此性質を有する。今、全變位を 1 して非弾性變形即ち恒久變形を  $\mu$  とすれば半振幅  $\delta$  は  $(1-\mu)\delta$  に減する、従て  $n$  回振動後の變位又は半振幅  $u_n$  は

$$u_n = u(1-\mu)^n, \quad \mu = \text{減衰係數} \dots\dots\dots(166)$$

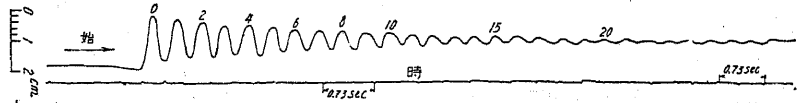
主要材料の  $\mu$  は相當研究され混凝土に對しては  $\mu = 0.05 \sim 0.15$  であるが、實際の構造物に對しては基礎地盤の影響をも含め、最初の振幅と  $n$  回振動後のそれとより容易に  $\mu$  を求め得る。

第 196 圖 煙突振動記象

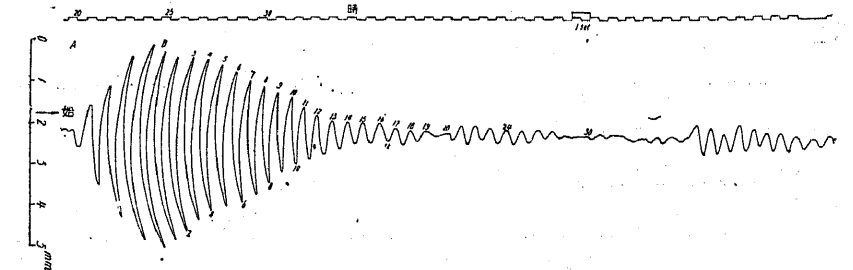
煙突(1)の振動 縮尺 1:2



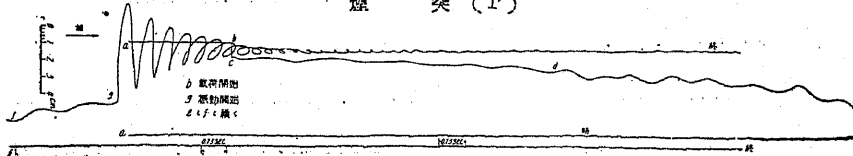
煙突(2)の振動 縮尺 1:2



煙突(3)の振動 實動の約 10 倍



煙突(1')



同種材料に於ては  $\mu$  の大なる程構造材料として劣質にして、且つ試験片の  $\mu$  に對し構造物の  $\mu$  の大なる程實際の材料及施工の劣れる事を示すものである。今二三の實例に就て  $\mu$  を求むれば

第 25 表 煙突の減衰係數  $\mu$

番 號		振 動 回 數						平 均 (1- $\mu$ )	平 均 $\mu$		
		2	4	6	8	10	20			30	
1	(煉 瓦 造)	1- $\mu$	0.872	0.886	0.885	—	0.891	0.898	—	0.888	0.112
2	(煉 瓦 造)	1- $\mu$	0.884	0.894	0.930	0.934	0.938	0.943	0.943	0.930	0.070
3	(鐵筋混凝土)	1- $\mu$	0.923	0.935	0.924	0.921	—	0.929	0.900	0.920	0.080
1'	(1 の破折後)	1- $\mu$	0.755	0.752	0.720	—	0.655	—	—	0.720	0.280

第 196 圖の 1, 2, 3, は夫々の上端の振動記象圖にして 1' は 1 の上部より 3.3m に於て折れたる後の振動である。

(3) 振動週期と構造物の状態

一般に構造物の主振動週期は材料及形状寸法に依て一定し理論上より之を計算し得る。然るに施工の缺點又は竣工後に重大な損傷缺陷を生ずれば直ちに振動週期の延長並に減衰係數の著しき増大を來たす。

1. 振動週期  $T$  に於て知り得る性状

塔状構造物の自由振動週期は

$$T = C \frac{l^2}{r_0} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

茲に  $C, l, r_0$  は形状寸法に依て定まり、 $\rho$  は硬化乾燥せる状態の試験片と大差なく、唯弾性係數  $E$  は實際の使用材料及施工の如何に依りて異なり、夫等の粗悪なる程  $T$  は大となる。又竣工直後より度々週期を檢測して、若し急に増大する事あれば、罅裂其の他の重大缺點の發生を意味する。

2. 振動の形態より知り得る性状

著しき缺點を有せざる構造物の主振動は規則正しき運動なるも、若し缺點を生



すれば複雑不整となり危険の迫れる事を示す。

### 3. 振動の減衰に依て知り得る性状

普通の構造材料は完全なる弾性體にあらずして、變形に伴ふて必ず多少の恒久變形を伴ひ従て勢力の消耗がある。鋼材は殆んど完全なる弾性を有するもそれを組合せたる構造は結合部に於て必ず若干の非弾性變形を爲す、而して構造物として非弾性變形の多き程材料及施工の劣れる事を意味する。此性質を明瞭に看取するには人爲的に振動せしむるか又は風力に依る振動に際し減衰の緩急を検測し其の急なる程、材料及工法の粗悪並に損傷退化の著しき事を示すものと考へて差支ない。