土木工學 中卷

第四篇

材料力學

(Mechanics of Materials.)

第一章　應力及變形

(Stress and Deformation or Strain)

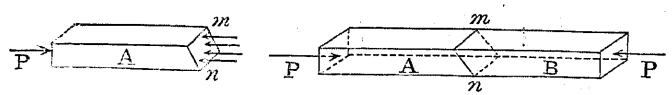
1. 材料力學ノ定義　材料力學トハ諸建築用材料及構造物ノ諸部分ニ起ル內力卽チ應力ノ性質ト其影響トニ就テ論ズルモノニシテ力學ノ一分科タリ. 第一篇靜力學ニ於テハ外力ハ剛體ニ働クモノト假定セリ. 然レドモ實際ニハ斯ノ如キ剛體ナク諸物體ハ外力ヲ受クルトキ多少變形スルモノナリ. 尤モ變形ノ際依然平衡狀態ニ在ル以上ハ彈體ニ對シテモ亦剛體ト等シク靜力學ノ法則ヲ適用シ得ベキヤ明カナリ.

一ツノ構造物ニ於ケル外力ノ影響ハ構造物ノ部分ニヨリテ異ナルモノナレバ諸部分ガ夫々應力ニ

對シテ充分ナル**强サ**(Strength)ヲ有セザルベカラザルハ勿論ニシテ加之變形ニ對シ充分ナル抵抗力卽チ**剛性**(Stiffness)ヲ有セザルベカラズ．然ラズンバ其構造物ハ安定ヲ失ヒ若クハ破壞スルニ至ルベシ．依テ或構造物ガ安全ニ支持シ得ベキ荷重ヲ定メ又ハ一定量ノ荷重ヲ安全ニ支持スベキ構造物ヲ設計スルニ當リテハ構造物ノ諸部分ニ起ル應力及其材料ノ强度ト剛性トヲ知ルヲ要ス．此等ノ事柄ヲ知ルトキハ構造物各部分ノ大サヲ適當ニ定メ且其構造物ガ全體トシテ過度ノ變形ヲナサヾル樣ニ設計シ得ベキナリ．要スルニ材料力學ハ工業用諸材料ノ强度及彈性ニ就テ半バ實驗的ニ半バ理論的ニ研究スルト同時ニ諸構造物ニ於ケル應力ト其變形トニ就テ論ズルモノナリ．

2. 應力(Stress)　應力トハ靜力學第五章第30節ニ於テ說明セシ如クーツノ物體ノ二部分間ノ相互ノ作用ニシテ其一部分ガ他ノ部分ニ作用スル內力

第1圖



ナリ．例ヘバ第1圖ニ於テ一ツノ棒狀體ヲ mn ナル斷面ニテ切リタリト想像セバ外力ニ對シテ二部

分A, Bヲ平衡ニ保ツモノハAトBトノ間ニ働ク應力ナリ．

物體ノ面ニ垂直ニ外方ニ働ク力卽チ**張力**(Pull)ニ依リテ誘起セラルヽ內力ヲ**應張力**(Tensile Stress or Tension)ト謂ヒ，外方ヨリ其面ニ向ヒテ働ク力卽チ**壓力**(Thrust)ニ依リテ誘起セラルヽ內力ヲ應壓力(Compressive Stress or Compression)ト謂フ．又其面ニ沿ヒテ働ク力卽チ**剪斷力**(Shear)ニ依リテ誘起セラルヽ內力ヲ**應剪力**(Shearing Stress)ト謂フ．

若シ應力ガ斷面ニ傾斜シテ働クトキハ之ヲ其面ニ垂直ナル**分應力**(Component of Stress)ト並行ナル分應力トニ分チテ考フルヲ便トス．然ラバ垂直分應力ハ應張力若クハ應壓力ニシテ接觸分應力ハ斷面ニ沿ヒテ物體ヲ剪斷セントスル力ニ抵抗スル應剪力タリ．

第1圖ノ如ク外力Pガ棒狀體ノ軸ニ沿ヒテ働クトキハ其軸ニ垂直ナル横斷面ニ於ケル應張力若クハ應壓力ハ其斷面ニ均等ニ配布セラルヽモノトス．然ラバ

$$S.A=P,\quad S=\frac{P}{A},\quad A=\frac{P}{S}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式ニ於テ　P=棒狀體ノ軸ニ沿ヒテ働ク外力，

S=横斷面ノ單位面積ニ於ケル應力卽チ**單位應力** (Unit-Stress),

A=横斷面積.

若シ外力ガ軸ニ沿ヒテ働カザルトキハ斷面ニ於ケル應力ノ配布均等ナラズ. 此場合ニハ細微面積 dA ニ働ク應力ヲ dP トスレバ

$$S=\frac{dP}{dA}$$

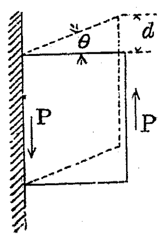
力ノ單位ガ听ニシテ長サノ單位ガ吋ナルトキハ應力單位ハ**一平方吋ニ付キ听** (lbs. per square inch) ニシテ噸及呎ヲ單位トセバ**一平方呎ニ付キ噸**,又瓩及糎ヲ單位トセバ**一平方糎ニ付キ瓩**ナリ. 之ヲ略記スルニハ**听每平方吋**,听/**平方吋**ノ如キ記號ヲ用フ. 其他之ニ準ズ.

軸力 (Axial Force or Axial Load) ガ棒狀體ニ働クトキハ其影響トシテ先ヅ其長サニ變化ヲ來タスベク,此變形ハ應力ノ大サガ外力ト平衡ヲ保ツニ至リテ止ムベシ. 而シテ外力ノ增加ト共ニ應力モ亦增加スレドモ抵抗力ト外力ト平衡シ得ザルニ至レバ遂ニ破壞スベシ. (1)式ハ此破壞ノ場合ニモ適用セラル.

3. **變形** (Deformation or Strain) 變形トハ應力ニ依テ生ズル形狀又ハ大サノ變化ヲ謂フ. 一ツノ物體

ニ張力ヲ加フレバ其物體ハ伸長シ壓力ヲ加フレバ短縮スベシ. 今原ノ長サ l ガ Δl ダケ伸縮セルモノトスレバ $\frac{\Delta l}{l}$ ハ**單位縱變形** (Longitudinal Unit-Strain) ヲ表ハス.

第2圖

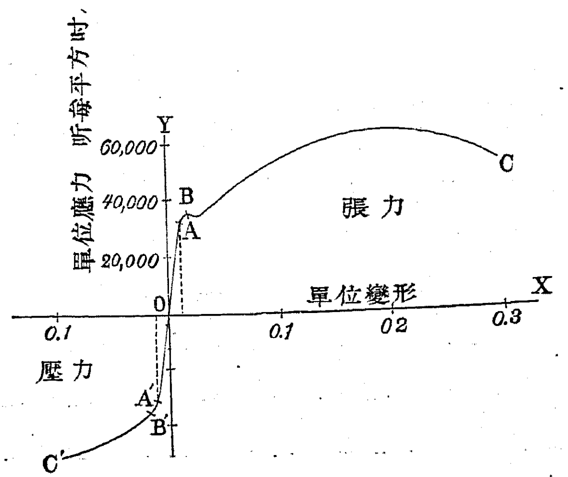


第2圖ノ如クニ一ツノ物體ニ剪斷力ヲ加フルトキハ點線ニテ示ス如クニ變形スベシ. 此 θ 角(弧度)ハ其物體ノ**單位應剪變形** (Shearing Unit-Strain) ヲ表ハス.

4. 應力ト變形トノ關係表圖

(Stress-Deformation Diagram) 材料ノ供試材ニ外力ヲ加フレバ外力ノ增加スルニ從ッテ變形ヲ增スベシ. 今横座標軸ニ沿ヒテ單位變形ヲ取

第3圖



リ,縱座標軸ニ沿ヒテ單位應力ヲ取ルトキハ其關係ヲ表示スル線ヲ得ベシ. 之ヲ**應力ト變形トノ關係表圖**ト謂フ. 第3圖ハ**建築用鋼**(Structural Steel)ノ供試材ヨリ得タル表圖ニシテ原點Oヨリ上方ニ測リタルハ應張力,下方ニ測リタルハ應壓力ナリ. 又原點Oヨリ左方ニ測リタル變形ハ**應壓變形**(Compressive Strain)ニシテ右方ニ測リタルハ**應張變形**(Tensile Strain)ナリ.

5. **彈性限度**(Elastic Limit)及**屈讓點**(Yield Point)

第3圖ニ於テOA, OA′ハ直線ニシテABC, A′B′C′ハ曲線ナリ. A又ハA′點ニ達スル迄ハ變形ハ應力ニ正比例スレドモ此等ノ點ヲ通リ越セバ兩者ハ正比例セズ. 此限界ニ於ケル單位應力ヲ**彈性限度**ト謂フ.

單位應力ガA點若クハA′點ニ相當スル應力以下ナレバ應力ヲ除去スルト共ニ變形ハ全ク消失シ供試材ハ原ノ長サニ復スベシ. 然レドモ應力ガ彈性限度以上ニ達スルトキハ應力ヲ除去スルトモ完全ニ原ノ長サニ復セズ. 此ノ如ク舊態ニ復セズシテ殘留スル變形ヲ名付ケテ**恒久變形**(Permanent Set)ト謂フ. A又ハA′點ニ近キB又ハB′點ニ達セバ其以上僅少ノ應力增加ニ對シテ變形ハ急ニ增加スルヲ見ル. 此點ヲ**屈讓點**ト稱ス.

單位應力ガ彈性限度ヲ超過シテ恒久變形ヲ生ズルニ至レバ材料ノ彈性ガ害セラルヽユヱ構造物ヲ設計スルニ當リ各部分ニ於ケル單位應力ハ材料ノ彈性限度以下タルヲ要ス. 錬鐵又ハ鋼ノ如キ材料ニ於テハ張力ニ對スル彈性限度モ壓力ニ對スル彈性限度モ同一ナリ而シテ鑄鐵,木材,石材,煉瓦等ノ如キ脆キ物體ニアリテハ應力ト變形トノ關係ヲ表ハス線ハ總テ曲線トナリ單位應力ノ值如何ニ拘ハラズ應力ヲ除去スルトモ全ク原形ニ復セズ,從ツテ此等ノ材料ノ彈性限度ヲ定ムル能ハズ. 然レドモ單位應力小ナルトキハ彈體ト假定スルコトヲ得ベク,材料力學ニ於テ論ズル材料ノ多クハ彈性限度以內ニ於テハ實用上完全ナル彈體ト見做スヲ得.

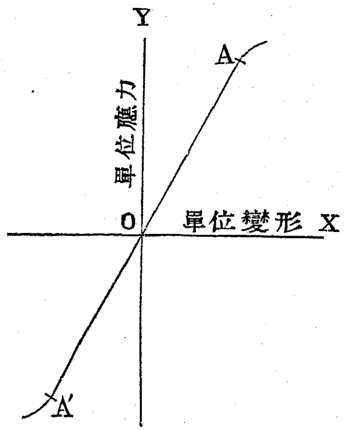
6. **彈性係數**(Modulus of Elasticity or Stretch Modulus)

彈性限度以下ノ應力ニ對シテハ單位應力ト單位變形トノ比ハ常數ナリ即チ單位變形ハ單位應力ニ正比例ス(第4圖). 此關係ヲ**ふつくノ法則**(Hooke's Law)ト謂フ. 應力ガ應張力又ハ應壓力ニシテ之ニ對スル變形ガ縱變形ナルトキハ此法則ニ於ケル常數ヲ**彈性係數**又ハ**やんぐノ係數**(Young's Modulus)ト稱ス, 通常Eヲ以テ之ヲ表ハス,卽チ

$$E=\frac{\frac{P}{A}}{\frac{\Delta l}{l}}=\frac{P.l}{A.\Delta l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\Delta l=\frac{P.l}{A.E}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2_a)$$

第 4 圖



(2)式ニ於テ單位變形ハ不名數ナルヲ以テEノ單位ハ應力單位ニ同ジキヤ明カナリ. 而シテ單位應力$S=\frac{P}{A}$ト彈性係數Eトノ比ガ單位變形$\epsilon=\frac{\Delta l}{l}$ナルユヱEガ大ナレバ大ナル程$\epsilon$ガ小ナリ,然ラバEノ大小ハ材料ノ剛性ヲ計ルベキ準度(Measure)トナル卽チ物體ニ於ケル單位應力ガ彈性限度以下ナルトキ變形ニ抵抗スル材料ノ能力ヲ計ルベキ準度トナル.

應力ガ應剪力ニシテ變形ガ應剪變形ナルトキハ上記ノ常數ヲ應剪力ニ對スル彈性係數又ハ歪係數(Modulus of Rigidity)ト謂フ. 之ヲGニテ表ハセバ單位應剪力S_sトθ(第2圖參照)トノ比ガGナルニヨリ

$$G=\frac{S_s}{\theta},\quad \theta=\frac{S_s}{G}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此式ニ於テθハ弧度ニテ表ハセル角度ナリ.

應剪力ニ對スル彈性限度ハ通常應張力ニ對スル彈性限度ノ百分ノ七十五乃至百分ノ八十ナリトス.

例題 1. 橫斷面積4平方吋,長サ4呎ノ鋼鈩ガ60,000听ノ張力ヲ受クルトキ其單位應張力,全伸張及單位伸張ヲ求ム.

但シE=29,000,000听/平方吋トス.

(1)式ヨリ　$60,000=4\times S_t,\quad \therefore\ S_t=\frac{60,000}{4}=15,500\#/\square''$

(2)式ヨリ　$29,000,000=\frac{60,000\times4\times12}{4\times\Delta l},$

$$\therefore\ \Delta l=\frac{60,000\times4\times12}{4\times29,000,000}=0,024\text{ 吋},$$

$$\epsilon=\frac{\Delta l}{l}=\frac{S_t}{E}=0.0005.$$

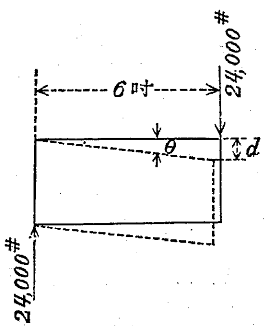
例題 2. 直徑$1\frac{1}{4}$吋,長サ16呎ナル鈩ガ21,000听ノ張力ヲ受ケテ0.125吋伸長セリ,其彈性係數幾何ナリヤ.

橫斷面積=1.227平方吋

(2)式ヨリ　$E=\frac{21,000\times16\times12}{1.227\times0.125}=26,300,000$ 听/平方吋.

例題 3. 橫斷面3吋×4吋,長サ6吋ナル短キ木片ガ24,000听ノ剪斷力ヲ纖維ト直角ノ方向ニ受クルトキ單位應剪力及單位應剪變形ハ幾何ナリヤ. 但木材ノ纖維ト直角ナル方向ノ歪係數ヲ400,000听/平方吋トス.

第 5 圖



$$S_s=\frac{24,000}{3\times4}=2,000\text{ 听/平方吋}.$$

(3)式ヨリ

$$\theta=\frac{S_s}{G}=\frac{2,000}{400,000}=0.005\text{ 弧度}$$

$$d=6\times0.005=0.03\text{ 吋}$$

長サガ橫ノ寸法ニ比シテ大ナルトキハ

斷形後ノ變形ノ邊ハ直線ナラズ從ツテ長サト d トノ比ハ常數ナラザルニヨ(3)式ガ與フル値ハ正確ナラズ.

7. 破壞强度 (Ultimate Strength); 作用又ハ實用强度 (Working or Allowable Strength); 安全率(Factor of Safety)

材料ノ破壞强度トハ其材料ガ耐ヘ得ル最大單位應力ヲ謂フ. 通常供試材ガ支持シタル最大荷重ヲ原ノ橫斷面積ニテ除シタル商即チ原ノ橫斷面ノ單位面積ニ於ケル最大單位應力ヲ破壞强度トナス. 供試材ノ橫斷面積ハ漸次增減スルモノナレバ如斯ニシテ得タル單位應力ノ値ハ眞正ナラザルヤ勿論ナリ,諸材料ノ破壞强度ハ多クハ其彈性限度ノ二倍乃至四倍ニシテ鑄鐵ノ如ク破壞抗壓强度ガ破壞抗張强度ニ比シ著シク大ナルモノアリ.

一ツノ物體ガ外力ヲ受クルトキ其物體ガ破壞セザルタメニハ其最大單位應力ハ該物體ノ破壞强度以下ナルハ勿論,彈性限度ヨリ小ナルヲ要ス. 而シテ別表ニ與フル破壞强度ハ材料ノ性質齊等ニシテ瑕瑾ナキ良材ニ對スルモノナレドモ實際使用セラルヽ材料ニハ如斯キ良材ナク多少ノ瑕瑾アリ. 之ガ爲メニ外力ニ抵抗スルニ有效ナル橫斷面積ヲ減少セントスル傾向アリ. 且普通ノ材料試驗ニ於テ供試材ガ受クル荷重ハ急激ニ加ハルモノ所謂**急加**

材料	重量 听/立方呎	彈性限度 听/平方吋	彈性係數 听/平方吋	歪係數 听/平方吋	破壞抗張强度 听/平方吋	破壞抗壓强度 听/平方吋	破壞抗剪强度 听/平方吋
杉	25		900,000		6,500	4,500	750
檜	30		1,100,000		12,500	6,000	900
松	35		1,200,000		15,000	7,000	1,200
樅	30		1,100,000		12,000	6,500	900
栗	45		1,200,000		15,000	8,000	1,200
鑄鐵	450	6,000	12,000,000	6,000,000	20,000	80,000	20,000
錬鐵	480	25,000	28,000,000	10,000,000	55,000	55,000	45,000
建築用鋼	490	30,000	29,000,000	12,000,000	60,000	60,000	50,000
花崗石	170					12,000	
石灰石	160					7,000	
砂石	1[illegible]0					4,500	
煉瓦	125				200	2,500	
煉瓦工	115					1,500	
混凝土 1:2:4	140				250	2,500	450

注意:表中木材强度ハ我國產ノ材ニ就キ試驗セル結果ニシテ破壞抗剪强度ハ木理ニ沿ヒタルモノナリト知ルベシ.

荷重 (Suddenly Applied Load) ニアラズシテ極メテ靜ニ加ハル**漸加荷重** (Gradually Applied Load) ナリ. 今或外力ヲ急激ニ一ツノ物體ニ加フレバ漸加荷重ニ比シテ二倍ノ影響ヲ與フ. 又現ニ P ナル外力ヲ受クル物體ニ更ニ同大ノ外力 P ヲ急激ニ加フレバ最初ヨリ P ガ靜ニ加ハレル場合ニ比シ三倍ノ影響ヲ與フベシ. 橋梁上ニ疾走シ來ル動荷重ノ如キハ此種ノ急加荷重ニアラザレドモ同大ノ漸加荷重ニ比スレ

バ夫レ以上ノ影響ヲ與フルヤ明カナリ. 又一定ノ外力ヲ一度靜ニ加フルドキト繰返シテ加フルトキ卽チ**反覆荷重**(Repeated Load)ヲ加フルトキトハ其物體ノ破壞强度ニ及ボス影響ニ大差アリ. 然レバ此等ノ場合ニ於テハ物體ノ保全上別表ノ破壞强度ニ相當ノ輕減ヲ要ス. 之ガ爲メニハ1ヨリ大ナル或數ニテ材料ノ破壞强度ヲ除シタル商ヲ以テ其材料ガ安全ニ受ケ得ル强度ト定ム. 尤モ此强度ハ常ニ彈性限度以下ナラザルベカラズ. 此强度ヲ稱シテ其材料ノ**作用又ハ實用强度**ト謂ヒ,其除數ヲ**安全率**ト謂フ.

安全率ハ材質,外力ノ加ハル狀態及構造物ノ種類ニヨリテ異ニスベキモノナレバ一ツノ構造物ヲ設計スルニ當リテハ各部分ニ向ツテ夫々相當ノ安全率ヲ使用セザルベカラズ而シテ各部分ニ於ケル最大單位應力ヲシテ材料ノ實用强度ヨリ超過セシメザルヲ要ス. 現今用キラルヽ標準安全率ヲ示セバ次ノ如シ.

安全率ノ表

材料	靜荷重ヲ受クルトキ	動荷重ヲ受クルトキ	激衝ヲ受クルトキ
木材	8	10	15
鑄鐵	6	15	20

錬鐵	4	6	10
建築用鋼	4	6	10
煉瓦及石材	15	25	40
混凝土	15	25	40

例題 或正方形橫斷面ヲ有スル木材アリ,之ガ81,000听ノ壓力ヲ受クルトキ彈性限度ノ三分ノ一ヲ作用强度トセバ其大サ如何.但木材ノ彈性限度ヲ3,000听/平方吋トス.

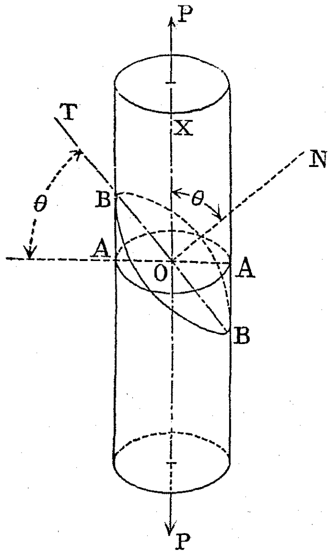
(1)式ヨリ $$81{,}000 = A \times 3{,}000 \times \frac{1}{3},$$

$$\therefore\ A = \frac{81{,}000}{1{,}000} = 81\ \text{平方吋}\ (9\text{吋} \times 9\text{吋}).$$

8. 單純ナル張力又ハ壓力(Simple Pull or Thrust)ニ對スル應力ノ狀態

第2節ニ於テ述ベシ如ク外力ヲ受クル一ツノ物體ヲ或斷面ニテ二ツノ部分ニ分チタリトセバ其斷面ニ於テ二部分間ニ働ク所ノ內力ガ其斷面ニ於ケル應力ナリ. 此應力ヲ知ルニハ該斷面中ノ各點ニ於ケル應力ノ方向ト配布トヲ知ラザルベカラズ. 玆ニ應力配布ノ均等ナル場合ノミニ就キ述ベントス.

第6圖



第6圖ノ如ク棒狀體ノ軸OXニ沿ヒテ張力Pヲ加フレバ軸ニ直角ナル橫斷

面 AA ニ於ケル應力ハ總テ之ニ垂直ニシテ其單位應力ハ

$$S_x=\frac{P}{A}$$

但 A ハ横斷面積ナリトス.

次ニ横斷面 AA ト θ ナル角ヲナセル斜面 BB ヲ考フルニ外力 P ハ矢張軸 OX ノ方向ニ働クヲ以テ面 BB ニ對シテ傾斜ス,從ツテ該面上ニハ垂直應力並ニ應剪力ガ働クベキナリ. 今斜面 BB ノ面積ヲ A′ トスレバ

$$A'=A.\sec\theta$$

此面ニ於テ OX ナル方向ノ單位應力ヲ S_r トスレバ

$$S_r=\frac{P}{A.\sec\theta}=\frac{P}{A}.\cos\theta=S_x.\cos\theta \quad\text{.....................(4)}$$

此 S_r ヲ斜面 BB ニ於ケル垂直單位分應力 S_n ト接觸單位分應力 S_s トニ分テバ

$$\left.\begin{aligned}S_n&=S_r.\cos\theta=S_x.\cos^2\theta\\ S_s&=S_r.\sin\theta=S_x.\cos\theta.\sin\theta\end{aligned}\right\}\text{.........................(5)}$$

又 BB ナル面ト直角ナル他ノ斜面ヲ考フルトキハ此面ト AA 面トナス角ハ $\theta'=90°-\theta$ ナルユヱ該面ニ於ケル垂直單位分應力 S'_n 及接觸單位分應力 S_s' ハ次ノ如シ.

$$\left.\begin{aligned}S_n'&=S_x.\cos^2\theta'=S_x.\sin^2\theta\\ S_s'&=S_x.\cos\theta'.\sin\theta'=S_r.\sin\theta.\cos\theta\end{aligned}\right\}$$

然ラバ

$$\left.\begin{aligned}S_n+S_n'&=S_x(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=S_x\\ S_s&=S_s'\end{aligned}\right\}$$

外力ノ働線ニ直角ナル横斷面ト或角度ヲナセル二ツノ斜面間ノ角度ガ 90° ナルナキハ夫等二斜面ニ於ケル垂直單位分應力ノ和ハ該横斷面ニ於ケル單位應力ニ等シク又二斜面ニ於ケル接觸單位分應力ハ互ニ相等シ.

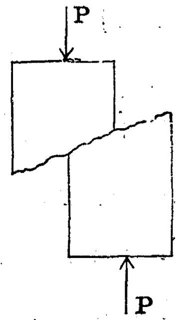
(5)式ニ於テ S_s ハ斜面 BB ト外力 P ノ方向トガ 45° ノ角度ヲナストキ最大ナリ,是レ $\sin\theta=\cos\theta$ ナルトキ $\sin\theta.\cos\theta$ ノ値ガ最大ナレバナリ. 即チ

$$\text{最大}\ S_s=[S_x.\cos\theta.\sin\theta]_{\theta=45°}=\frac{1}{2}.S_x \quad\text{..............(6)}$$

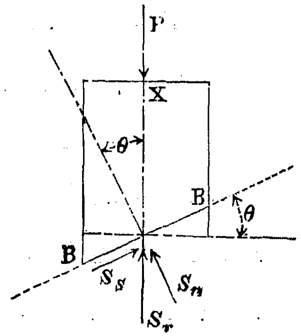
單純ナル壓力ニ因リテ斜面上ニ應剪力ヲ生ズル實例ハ材料試驗ノ際供試材ニ顯ハレ其破面ハ屢々外力ノ働線ト 45° ノ傾斜ヲナス(第 7 圖 (a))尤モ壓力ノ場合ニアリテハ 45° ヨリ小ナリ,是レ分子間ノ摩擦抵抗ニ基因ス.

若シ破面ニ於ケル摩擦抵抗ヲ加算スレバ,破面ガ棒狀體ノ軸トナス角ハ 45° ヨリ小ナルコト息角ノ二分ノ一ナリ. 其理由次ノ如シ.

第7圖(a)



第7圖(b)



今μヲ摩擦係數,ϕヲ息角トスレバ破面間ニ摺動ヲ起サントスル單位應剪力ハ(第7圖(b))

$$S'_s=S_s-\mu.S_n=S_x.\cos\theta.\sin\theta-\mu.S_x.\cos^2\theta$$

$$=S_x(\cos\theta.\sin\theta-\mu.\cos^2\theta)$$

然レバ單位應剪力S_s'ガ最大ナルベキ傾斜面ニ沿ヒテ破壞ヲ生ズベシ. 而シテ之ガ最大ナルハ次ノ關係ノ成立スルトキナリ.

$$\frac{d(\cos\theta.\sin\theta-\mu.\cos^2\theta)}{d\theta}=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\mu.\cos\theta.\sin\theta$$

$$=\cos2\theta+\mu\sin2\theta=0,$$

$$\mu=\tan\phi=-\cot(90^\circ+\phi)=-\cot2\theta,$$

$$\therefore\ 2\theta=90^\circ+\phi,\ \text{即チ}\ \theta=45^\circ+\frac{\phi}{2}.$$

鑄鐵ニアリテハϕハ約20°ナリ. 鑄鐵,石材,混凝土ノ如ク脆キ質ノ材料ニテ供試材ヲツクリ其長サヲ横幅以上ニナシ之ニ壓力ヲ加フレバ上記ノ如キ破

面ヲ供試材中ニ顯ハスベシ.

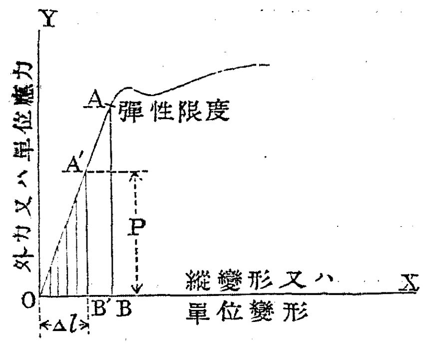
例題 直徑1吋ノ壓穿器ヲ用キテ厚サ$\frac{1}{2}$吋ノ鋼鈑ニ鋲釘孔ヲ壓穿セントス. 之ニ要スル壓力ヲ求ム,但鋼ノ破壞抗剪强度ヲ50,000听/平方吋トス.

此場合ニ於テハ壓穿孔ノ壖面ニ等シキ面積ニ於ケル剪斷力ガ鈑ノ破壞抗剪强度ニ等シカラザルベカラズ

$$\therefore\ P=A\times S_s=\pi\times1\times\frac{1}{2}\times50{,}000=79{,}000\ \text{听}.$$

9. 彈復働(Elastic Resilience) 第4節ニ於テ述ベシ如ク彈性棒狀體ニ軸張力又ハ軸壓力ヲ加フルトキ其物體ノ彈性限度以內ニ於テハ**伸張** (Elongation) 又ハ**短縮** (Shortening) ハ外力ニ正比例シ其關係ハ直線ニテ表ハサル(第8圖). 今外力ハOヨリPナル値迄增加シ之ニ對シテ棒狀體ハΔlナル長サ丈變形シタリトセヨ. 然ラバ此棒狀體ノ**伸張又ハ短縮ニヨリテ爲セル働**ハ平均外力$\frac{1}{2}$PトΔlトノ相乘積$\frac{1}{2}$P.Δlニテ表ハサル. コレハ第8圖ニ於テ陰ヲ附シタル三角形OA'B'ノ面積ニ相當ス.

第8圖



次ニ棒狀體ノ横斷面積ヲA,其長サヲl,單位應力

ヲS,單位縱變形ヲϵトスレバ

$$P=S.A,\quad \Delta l=\epsilon.l$$

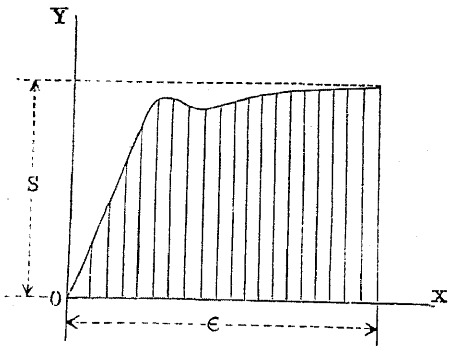
ナルユヱ棒狀體ノ單位應力ヲOヨリS迄高メルニ爲セル働ヲKトスレバ

$$K=\frac{1}{2}S\epsilon.A l \qquad (7)$$

此式ニ於テ$A.l$ハ棒狀體ノ容積ニシテ$\frac{1}{2}S.\epsilon$ハ單位容積ノ棒狀體ノ單位應力ヲOヨリS迄高メルニ爲セル働ヲ表ハス. 而シテ此働ハ**能勢**(Potential Energy)トシテ棒狀體ニ貯ヘラルヽモノニシテ外力ヲ除去スルトキ之ヲシテ其原形ニ復セシムル働ヲナスモノナレバ之ヲ**彈復働**ト稱ス.

單位應力ガ材料ノ彈性限度ヨリ大ナルトキハ(7)式ヲ適用スル能ハズ. 此場合ニ於テハ第9圖ニ示ス如ク表圖上ニテ陰ヲ附シタル部分ノ面積ヲ測リ,コレヨリ單位容積ニ對スル働ヲ算出スベシ.

第9圖



以上ノ所論ハ應剪變形ノ場合ニモ適用スルヲ得.

例題　直徑4吋,長サ$4\frac{1}{2}$呎ナル錬鐵釬ニ於ケル單位應力ヲ6,000听/平方吋ヨリ12,000听/平方吋迄高ムルニ爲セル彈復働ヲ求ム. 但Eヲ28,000,000听/平方吋トス.

横斷面積=12.57平方吋, 長サ=54吋.

(7)式ヨリ

$$K=(S_2^2-S_1^2)\frac{A.l}{2E}=\frac{(\overline{12,000}^2-\overline{6,000}^2)\times 12.57\times 54}{2\times 28,000,000}$$

$$=110 \text{ 呎听.}$$

10.　横ノ伸縮率(Factor of Lateral Deformation); **横斷面ノ變化**(Change in Cross-Section)　單純ナル張力又ハ壓力ノ場合ニ於テ變形ハ外力ノ方向ノミナラズ之ト直角ナル方向ニモ起ルベシ. 而シテ材料ノ彈性限度以下ノ單位應力ニ對シテハ**横單位變形**(Lateral Unit-Deformation)ト**縱單位變形**トノ比ハ常數ニシテ之ヲ**横伸縮率**又ハ**ぽあそんノ比**(Poisson's Ratio)ト謂フ. 例ヘバ茲ニ長サl,直徑dナル釬アリ此縱單位伸張ヲϵ,横伸縮率ヲλトスレバ其長サノ伸張ハ$\epsilon.l$ニシテ直徑ノ短縮ハ$\lambda.\epsilon d$ナリ. 此λハ實驗ニヨリテ定メラルヽモノニシテ鑄鐵ナレバ約$\frac{1}{4}$,鋼ナレバ約$\frac{1}{3}$,概シテ金屬ニアリテハ$\frac{1}{3}$乃至$\frac{1}{4}$ナリ.

長方形横斷面ヲ有スル棒狀體ニ於テ其斷面ノ**幅**及厚サヲ夫々b及dトスレバ彈性限度以内ノ張力ノ場合ニハ斷面積ハ

$$(1-\lambda.\epsilon)b\times(1-\lambda.\epsilon)d \doteqdot (1-2\lambda.\epsilon)bd$$

トナル．卽チ斷面積ノ減少ハ ($2\lambda\epsilon bd$) ニシテ單位面積ノ減少ハ ($2\lambda\epsilon bd\div bd=2\lambda\epsilon$) ナリ．反之壓力ノ場合ニハ變形後ノ單位面積ノ增加ハ $2\lambda\epsilon$ ナリ．

凡テ材料ノ**終極單位變形**(Ultimate Unit-Deformation)ハ計算上知ルコト能ハザルユヱ材料試驗ノ結果ヨリ打算スル外ナシ．供試材ノ原ノ長サト破壞後ノ長サトノ差ヲ原ノ長サニテ除シタル商ガ終極單位變形ナリ．而シテ此單位變形ガ大ナル程原ノ斷面積ト破壞斷面積トノ差ガ大ナルヤ勿論ナリ．材料ノ伸張試驗ニ於テハ原ノ斷面積ト破壞斷面積トノ差ニ對スル原ノ斷面積ノ比ヲ**斷面積ノ減少率** (Reduction of Area) ト謂フ．而シテコレハ材料ノ**延性** (Ductility) ヲ定ムルニ當リ伸張變形ヨリモ一層信賴スルニ足ル準度タルベシ．是レ供試材ノ長サト其斷面トノ割合ニヨリテ終極單位伸張ニ差アレバナリ．

第二章　直應力 (Direct Stresses)—應用

11.　自己重量ヨリ生ズル應力 (Stresses due to Own Weight)　第一章ニ於テハ棒狀體ノ斷面ハ其全長ヲ通ジテ均一ナルモノトシ且其自己重量ヲ省略セリ．

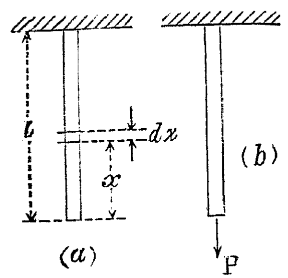
短キ棒狀體ナレバ其自己重量ハ外力ニ比シ省略シテ可ナルベキモ其長サ大ナルトキハ自己重量ヨリ生ズル應力ヲ算入セザルベカラズ．

今深キ**竪坑** (Shaft) ニ於テ鍊條 (Wire-Rope) ヲ以テ或重量ヲ引上グル場合ヲ考フルニ其重量ニヨリテ生ズル單位應力ハ $S=\frac{P}{A}$ ナリ．但 P ハ重量, A ハ鍊條横斷面積ナリ．而シテ任意ノ點ニ於ケル鍊條斷面積ハ P ノ外ニ其點以下ノ自己重量ヲ支持セザルベカラズ．然ラバ鍊條ノ上端ニ於ケル斷面ノ單位應力ハ次ノ如シ．

$$S_1=\frac{P+W}{A}$$

此式ニ於テ W ハ鍊條ノ自己重量ナリトス．一般ニ W ヨリ生ズル應力ガ P ヨリ生ズル應力ノ一割以內ナルトキハ自己重量ヲ省略スルモノトス．

第10圖



第10圖(a)ノ如ク棒狀體ノ上端ヲ固定シテ鉛直ニ吊ストキ自己重量 W ヨリ生ズル伸長ヲ求メンニ,下端ヨリ測リテ x ナル部分ノ重量ハ $\frac{W.x}{l}$ ナルヲ以テ此重量ヨリ生ズル細微ナル長サ dx ノ伸張ハ

$$\frac{\left(\frac{W.x}{l}\right)dx}{AE}$$

ナリ. 但Aハ棒狀體ノ横斷面積ナリ. 然ラバ

$$\Delta l=\int_0^l\left(\frac{W.x}{A.l.E}\right)dx=\frac{W}{A.l\,E}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^l=\frac{1}{2}.\frac{Wl}{AE}.$$

コレハWナル荷重ヲ棒狀體ノ下端ニ加フルトキ其荷重ヨリ生ズル伸張ノ二分ノ一ナリ. 乃チ

自己重量ヨリ生ズル伸張ハ其重量ト同大ノ荷重ヲ下端ニ加フルトキ其荷重ヨリ生ズル伸張ノ二分ノ一ナリ.

又第10圖(b)ノ如ク下端ニPナル荷重ヲ加フルトキハ

$$\Delta l=\frac{(\frac{1}{2}W+P)l}{A.E}$$

ナリ.

壓力ノ場合ニ於テモ亦上記同樣ノ關係ガ成立スベキヤ勿論ナリ.

例題 6吋角ノ木材棒チ鉛直ニ吊シ其下端ニ21,600听ノ荷重チ加フルトキ此荷重並ニ自己重量ニヨリテ上端ノ横斷面ニ誘起セラルヽ單位應力ガ650听/平方吋ナリシト云フ. 其棒ノ長サ及伸張チ求ム. 但木材ノ重量チ40听/立方呎, Eチ1,500,000听每平方吋トス.

$W=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times l\times 40=10.l$ 听, 650听/平方吋$=650\times 144=93,600$ 听/平方呎.

$$\therefore\ 93,600=\frac{21,600+10.l}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}},\quad \text{即チ}\ l=180\ \text{呎}.$$

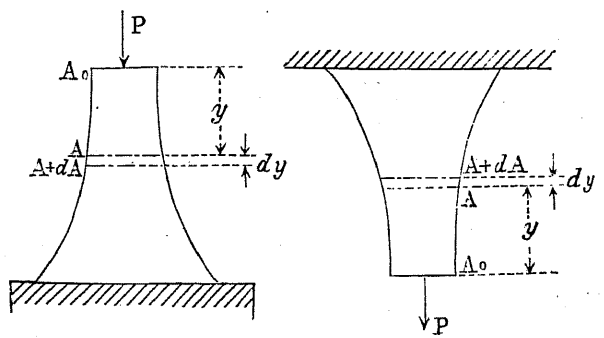
又 $W=10\times 180=1,800$ 听,

$$\therefore\ \Delta l=\frac{\left(\frac{1}{2}\times 1,800+21,600\right)\times 180\times 12}{6\times 6\times 1,500,000}=0.9\ \text{吋}.$$

12. 等强ノ棒狀體 (Bars of Uniform Strength) 第10圖ノ如ク均等ナル横斷面ヲ有スル長キ鉛直棒狀體ガ軸力ヲ受クルトキハ上端ノ横斷面ヲ除ク外何レノ斷面モ所要ノ大サ以上ナルベキヲ以テ各斷面ニ於ケル單位應力ガ同ジクナル如クニ斷面ヲ變ズレバ其棒狀體ノ重量ハ減ゼラルベシ. 此ノ如キ棒狀體ハ等强ナリト謂フ. 此意義ハ何レノ斷面ニ於テモ强サガ同一ナリトイフニアラズ單位應力ガ同一ナリトイフニアリ. 此點ヨリイヘバ寧ロ**均等應力ノ棒狀體** (Bars of Uniform Stress) ナル名稱ガ適當ナルベシ.

第11圖ニ於テPヲ軸力トシテSヲ作用强度トス

第11圖



レバ最小斷面積卽チPガ加ヘラルヽ末端ノ斷面積ハ

$$A_0=\frac{P}{S}$$

ナリ．斷面A_0ヨリyナル隔リニ於ケル斷面積ヲAトスレバ$(y+dy)$ナル隔リニ於ケル斷面積ハ$(A+dA)$ナルベキナリ．而シテ此斷面積ノ增加dAハdyナル長サニ相當スル重量ヨリ生ズル應力ニ耐ヘザルベカラズ．材料ノ單位容積ノ重量ヲwトスレバdyナル長サニ相當スル重量ハ$(A.w.dy)$ナルユヱ

$$dA=\frac{A.w.dy}{S},\quad \text{卽チ}\quad dy=\frac{S}{w}.\frac{dA}{A}.$$

之ヲ積分スレバ

$$y=\frac{S}{w}.\log_e A+C.$$

此式ニ於テCハ積分常數ナリ．而シテ$y=0$ナルトキハ$A=A_0$ナルヲ以テ

$$C=-\frac{S}{w}.\log_e A_0,$$

$$\therefore\ \log_e A=\frac{w}{S}.y+\log_e A_0,$$

又ハ

$$\log_{10}A=0.434\left(\frac{w}{S}\right)y+\log_{10}A_0\cdots\cdots\cdots(8)$$

コレハ最小橫斷面積ト共斷面ヨリ任意ノ隔リyニ

於ケル橫斷面積トノ關係ヲ表示スル式ナリ．先ヅA_0ヲ定メyニ種々ノ値ヲ與ヘテ(8)式ヲ解ケバ縱斷面形(Profile)ガ得ラルベシ．

例題 高サ50呎ノ石造橋脚ガ其頂面ニ於テ480,000听ノ軸壓力ヲ受クルトキ此橋脚ヲシテ等强ナラシムルニハ頂面積及底面積ヲ幾何ニナスベキヤ．但石材ノ重量ハ160听/立方呎，石材ノ作用强度ハ100听/平方吋卽チ14,400听/平方呎ナリトス．

頂面積 $A_0=\frac{480,000}{14,400}=33.3$ 平方呎,

$$\frac{w}{S}=\frac{160}{14,400}=0.0111.$$

(8)式ヨリ

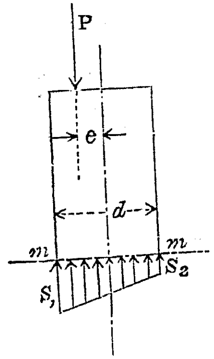
$$\log_{10}A=0.00482y+1.5224,$$

∴ 底面積 $A=58.0$ 平方呎.

13. 偏心荷重ヨリ生ズル應力(Stresses due to Eccentric Loads)

第12圖ノ如ク棒狀體ガ偏心荷重Pヲ受クルトキハ任意ノ橫斷面mm上ノ應力配布ハ均等ナラズシテ荷重ノ偏セル側ニ於ケル單位應力S_1ハ該斷面ノ平均單位應力$\frac{P}{A}$ヨリ大ニシテ他側ニ於ケル單位應力S_2ハ之ヨリ小ナリ．但Aハ棒狀體ノ橫斷面積ナリ．外力ト內力トノ平衡條件ニヨリ斷面mmニ於ケル單位應力ノ合成力ハPト同大ニシテ且働線ヲ同ジクスベ

第12圖



キヤ明カナリ．又材料ノ彈性限度以內ナラバ此等ノ單位應力ノ變化ハ直線ニテ表ハサルヽニヨリ

$$P=\frac{1}{2}(S_1+S_2)A.$$

單位應力ノ配布ヲ表ハセル梯形ノ重心ハ上卷第132頁例題1ニヨリ

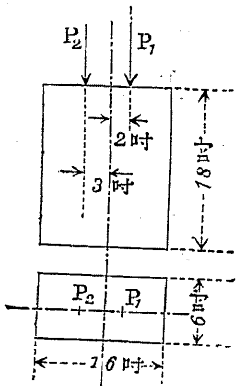
$$e=\frac{\frac{1}{6}d(S_1-S_2)}{(S_1+S_2)}.$$

此等二式ヲ解ケバ

$$S_1=\frac{P}{A}\left(1+\frac{6.e}{d}\right),\quad S_2=\frac{P}{A}\left(1-\frac{6.e}{d}\right)\dots\dots(9)$$

(9)式ニ於テ $e=0$ ナルトキハ S_1 及 S_2 ハ $\frac{P}{A}$ ニシテ單位應力ノ配布均等ナリ．$e=\frac{d}{6}$ ナレバ S_1 ハ $2\frac{P}{A}$, S_2 ハ 0, $e>\frac{d}{6}$ ナレバ S_1 ハ $\frac{2P}{A}$ ヨリ大ニシテ S_2 ハ負數卽チ應張力トナル．

第13圖



如斯ニ橫斷面上ノ單位應力ノ配布均等ナラザルトキハ棒狀體ノ部分ニヨリテ變形ヲ異ニスルヤ明カナリ．

例題　橫斷面6吋×16吋,高サ18吋ノ木片ガ其頂面ニ於テ第13圖ノ如ク二個ノ荷重 P_1, P_2 ヲ受クルトキ其底面ニ於ケル單位應力ヲシテ均等ナラシムベキ P_1 ト P_2 トノ比如何.

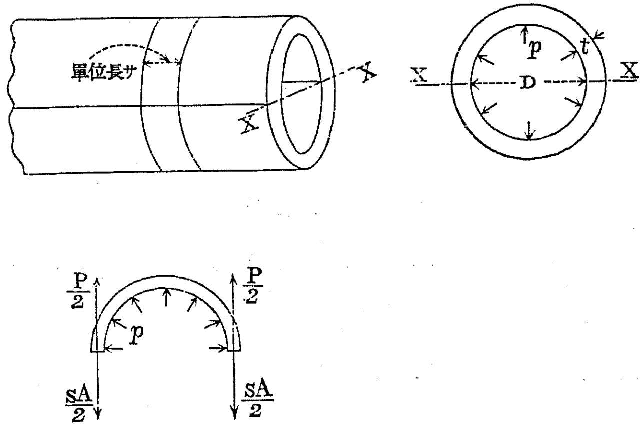
(9)式ヨリ

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{P_1}{A}-\frac{1}{8}\cdot\frac{P_2}{A}=\frac{1}{4}\cdot\frac{P_1}{A}+\frac{17}{8}\cdot\frac{P_2}{A}$$

$$\therefore\ \frac{P_1}{P_2}=\frac{3}{2}$$

14. 薄キ管;薄キ圓壔;薄キ球 (Thin Pipes, Cylinders, Spheres) 管內ニ働ク水壓又ハ汽壓ハ其管ヲ縱ニ引裂カントス．之ニ抵抗スルハ材料ノ應張力ナリ．今內徑D,厚サ t ナル管ガ p 听/平方吋ナル水壓ヲ受クルトキ管壁ニ於ケル單位應力ヲ求メントス．管ノ各單位長サノ部分ハ同一壓力ヲ受クルヲ以テ此問

第14圖



題ヲ解クニハ單位長サニ就テ考フレバ可ナリ．第14圖ノ如ク直徑ヲ含メル面XXニテ單位長サノ管ヲ縱ニ切リタリト想像スレバ其斷面ノ應力ハ管ヲ

縱ニ引裂カントスル水壓ニ抵抗セザルベカラズ．而シテ t ガ小ナルトキハ斷面ニ於ケル應力配布均等ナリト考フルヲ得．然ラバ管ヲ縱ニ引裂カントスル力Pト求ムル單位應力Sトノ關係ハ次式ニテ表ハサル．

$$P=S.A.$$

此式ニ於テ A ハ斷面XXニ於ケル管壁ノ斷面積ナリ．

上卷水力學第117節ニヨリ直徑ヲ含メルXX斷面ニ垂直ナル力ハ $p.D$ ニシテ之ヲ $P=S.A$ ニ代入スレバ

$$p.D=S.A=2.S.t\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

之ハ薄キ管ノ縱斷面ニ誘起セラルヽ單位應力ヲ與フル一般公式ナリ．

若シ管端ヲ閉塞スレバ兩管端ニ働ク水壓又ハ汽壓ハ軸ニ直角ナル斷面ニ於テ横ニ管ヲ破壞セントス．此場合ニ管端ニ働ク力ハ $\frac{\pi D^2}{4}p$ ニシテ之ニ抵抗スル面積ハ $\pi D.t$ ナリ．此等ノ値ヲ $P=S.A$ ニ代入スレバ

$$p.D=4.S.t\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10_a)$$

乃チ管ノ軸ニ垂直ナル斷面ニ於ケル單位應力ハ管軸ヲ含ム斷面ニ於ケル單位應力ノ二分ノ一ナリ．

次ニ薄壁ヨリ成レル球ニ於テハ水壓又ハ氣壓ハ**大圓**(Great Circle)ヲ含ム斷面ニ於テ之ヲ破壞セントス．而シテ壓力及之ニ抵抗スル面積ハ上記圓壔ノ場合ニ於テ其軸ニ垂直ナル斷面ニ於ケルト同一ナルヤ明カナリ．從而(10_a)式ヲ適用スルヲ得．

上述ノ單位應力ハ總テ內部壓力 p ヨリ生ズルモノニシテ應張力ナリ．反之外部壓力 p' ニ對シテハ應壓力ガ誘起セラル．然ラバ p,p' ナル兩壓力ガ同時ニ働クトキハ(10)式及(10_a)式ヨリ

$$p.D-p'.D'=2.S.t,\quad p.D-p'.D'=4.S.t.$$

兩式中 D′ ハ外徑ニシテ $p.D$ ガ $p'.D'$ ヨリ大ナルカ小ナルカニ依テ應張力又ハ應壓力ガ誘起セラル．t ガ小ナレバ

$$(p-p')D=2.S.t,\quad (p-p')D=4.S.t.$$

此外壓力ヲ受クルトキノ關係式ハ場合ニヨリテハ適用スル能ハズ．

例題 1. 徑18吋ノ鑄鐵製水管ガ水頭300呎ニ相當スル壓力ヲ受クルトキハ其厚サヲ幾何ニナスベキカ．但鑄鐵ノ破壞抗張强度ヲ20,000听/平方吋,安全率ヲ15トス．

$$p=\frac{62.5}{144}\times 300=130.2\ \text{听/平方吋}.$$

(10)式ヨリ

$$t=\frac{130.2\times 18}{\frac{20,000}{15}\times 2}=0.88\ \text{吋}.$$

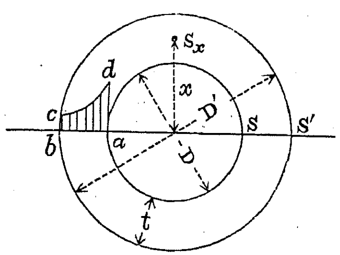
例題 2. 徑24吋,厚サ$\frac{3}{4}$吋ナル鑄鐵製ノ球アリ. 之ヲ破裂セシムベキ壓力度如何.

(10_a)式ヨリ

$$p=\frac{4\times 20{,}000\times\frac{3}{4}}{24}=2{,}500 \text{ 听/平方吋.}$$

15. **厚キ管** (Thick Pipes)　管ノ厚サガ大ナルトキハ其軸ヲ含メル縱斷面ニ於ケル應力ノ配布均等ナラズシテ$S>S'$ナリ(第15圖).精確ナル解法ハ後章ニ讓リ玆ニ**ばあろう**公式(Barlow's Formula)ニ就テ述ベントス.

第15圖



コレハ近似ノモノナレドモ此式ガ與フル最大單位應力ハ眞値ヨリ大ナルユヱ實用上寧ロ安全ナリ. 此公式ニ於テハ水壓又ハ汽壓ガ管ノ內面ニ働キ其徑ガ增大スルトモ管壁ノ容積ハ不變ナリト假定ス.

壓力ガ加ハル前ノ單位長サノ容積ハ $\frac{\pi}{4}(D'^2-D^2)$ ニシテ內外徑ガ夫々 ΔD, $\Delta D'$ 丈伸張セシトキノ容積ハ

$$\frac{\pi}{4}\Big[(D'+\Delta D')^2-(D+\Delta D)^2\Big]\doteqdot\frac{\pi}{4}\Big[(D'^2+2D'.\Delta D')-(D^2+2D.\Delta D)\Big]$$

トナル. 然ルニ假定ニヨリ兩容積ハ等値ナルユヱ $D'.\Delta D'=D.\Delta D$ ヲ得. 原ノ圓周ハ夫々 $\pi D, \pi D'$ ニシテ此等圓周ノ變形ハ夫々 $\pi.\Delta D$, $\pi.\Delta D'$ ナルニヨリ單位伸張ハ夫々 $\frac{\Delta D}{D}$, $\frac{\Delta D'}{D'}$ ナリ. 而シテ彈性限度以內ナレバ S, S' ハ單位變形ニ正比例スルヲ以テ

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{\Delta D}{D}}{\frac{\Delta D'}{D'}}=\frac{D'.\Delta D}{D.\Delta D'}=\frac{D'^2}{D^2}=\frac{r'^2}{r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

卽チ單位應力ハ直徑又ハ半徑ノ自乘ニ反比例ス.

中心ヨリxナル距離ニ於ケル單位應力 S_x ハ(11)式ヨリ

$$S_x=\frac{S.r^2}{x^2}$$

ニシテ$(dx\times 1)$ナル面積ニ於ケル應力ハ

$$S_x.dx=S.r^2.\frac{dx}{x^2}$$

$$\therefore\quad p.D=2S.r^2\int_r^{r'}\frac{dx}{x^2}=2Sr^2\Big[-\frac{1}{x}\Big]_r^{r+t}=\frac{2S.r.t}{r+t}$$

$$=\frac{2S.D.t}{D+2t}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

此式ヲ薄キ管ニ適用スレバ $p.D=2S.t$ ヲ得. **ばぁろぅ**公式ノ誤差ハ內徑ノ減少スルニ從ヒ增加スルユヱ內徑ノ小ナル厚キ管ニ對シテハ之レヨリモ精確ナル他ノ公式ヲ使用スルヲ要ス.

第15圖ノ表圖 $abcd$ ハ厚キ管ノ横斷面ニ於ケル應力ノ配布ヲ表ハシ ad ハ內側, bc ハ外側ニ於ケル應力ヲ表ハスモノナリ.

16. 溫度ノ變化ニ基因スル應力 (Stresses due to Change in Temperature) 凡テ材料ハ溫度ノ變化ニ伴ヒテ伸縮セントス. 若シ此變化ガ妨ゲラルヽトキハ材料ニ應力ヲ生ズベシ. 今溫度ノ變化ヲ t°, 伸縮係數即チ溫度1°ノ上昇又ハ降下ニ對スル單位長サノ伸縮ヲ α トスレバ單位長サノ伸縮ハ

$$\epsilon=\alpha.t^\circ$$

之ニ外力ヲ加ヘテ原ノ長サニ復セシムルトキニ誘起セラルヽ單位應力ハ

$$S_t=\epsilon.E=\alpha.t^\circ.E \quad \text{(13)}$$

ナリ. 又ハ材片ノ兩端ヲ堅固ニ支持シ溫度ノ變化ガ起ルトキ自由ニ長サノ伸縮ヲナサシメザル場合ニ起ル應力モ亦 $S_t=\alpha.t.^\circ E$ ナリ.

伸縮係數表

材　　料	伸縮係數每華氏一度
混凝土 1:2:4	0.0000061
鑄　　鐵	0.0000062
錬　　鐵	0.0000067
鋼	0.0000065

次ニ箍鐵 (Hoop-Iron) ヲ熱シテ圓壔ニ嵌メ收縮セシムルトキ之ニ誘起セラルヽ單位應力ハ第一章第6節(2)式ヲ適用シテ見出スヲ得. 即チ

$$E=\frac{P.l}{A.\Delta l}$$

此式ヲ用キテ單位應力ヲ見出スニハ箍鐵ヲ熱スル前ノ直徑 D′ ト圓壔ニ嵌メテ收縮セシムルトキノ直徑 D トノ差ヲ知ラザルベカラズ. 而シテ此場合ノ影響ハ直徑ガ D′ ヨリ D ニナル迄箍鐵ヲ引伸シタルト同樣ナリ. 箍鐵ノ長サノ差ハ $\pi(D-D')$ ニシテ單位伸張ハ

$$\frac{\pi(D-D')}{\pi.D}=\frac{D-D'}{D}\fallingdotseq\frac{D-D'}{D}$$

鋼箍鐵ナレバ $\dfrac{D-D'}{D}$ ヲ約 $\dfrac{1}{1{,}500}$ ニ取ルヲ常トス. 圓壔材ハ箍鐵ヨリ壓力ヲ受ケテ變形スルユヱ實際ニハ箍鐵及圓壔ノ終局ノ直徑ハ圓壔ノ原ノ直徑ヨリ少シク小ナルベキナリ. 而シテ此變形ハ圓壔及箍鐵ノ彈性係數ノ比並ニ此等ノ厚サニ因リテ異ナルモノナリ.

又圓壔ト箍鐵トノ接觸面ニ働ク半徑ノ方向ノ單位應力ハ(10)式ヨリ求ムルヲ得. 即チ

$$P=\frac{2S.t}{D'}$$

例題 1. 長サ30呎ノ鋼軌條ガ60° F ノ溫度變化ヲ受ケタルトキ自由ニ伸縮シ得ザリセバ之ニ誘起セラル單位應力如何.
但 E=29,000,000 听/平方吋トス.

$$單位伸張=0.0000065\times60=0.00039$$

(13)式ヨリ

$$S_t=29,000,000\times0.00039=11,310\ 听/平方吋.$$

例題 2. 直徑18吋ノ圓壔ニ厚サ2吋ノ鍊鐵箍輪ヲ俠ムルトキ其內徑ヲ17.98吋ニ削上ゲ之ヲ熱シテ圓壔ニ俠メ然ル後ニ之ヲ冷シテ收縮セシメントス. 然ラバ箍鐵ニ誘起セラルヽ單位應張力如何. 但 E=28,000,000 听/平方吋トス.

$$S_t=\frac{18.000-17.98}{17.98}\times28,000,000$$

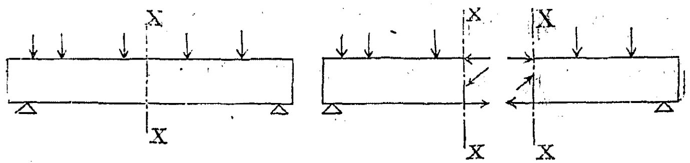
$$\doteqdot\frac{1}{900}\times28,000,000=31,000\ 听/平方吋.$$

第三章　桁ニ關スル一般理論
(General Theory of Beams)

17. 內力ト外力 (Internal Stresses and External Forces)

桁ニ働ク外力ノ作用及外力相互ノ關係ニ就テハ第一篇靜力學ニ於テ論ジタレバ材料力學ノ篇ニ於テハ外力ノ作用ニ抵抗スル內力卽チ應力ト其影響トニ就テ考究セントス.

第16圖(a)



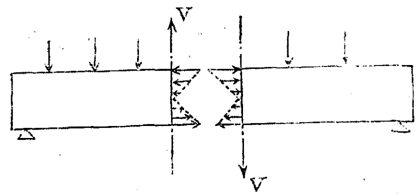
第16圖(*a*)ノ如ク外力ヲ受ケタル一ツノ桁ヲ任意ノ鉛直斷面XXニテ切リテ考フレバ此斷面ニハ大サト方向トヲ異ニセル種々ノ未知應力ガ働クベシ. 而シテ桁ガ平衡ニアル以上ハ次ノ關係ガ成立セザルベカラズ. (上卷第20節公理參照)

桁ノ任意横斷面ニ於ケル內力卽チ應力ハ其横斷面ノ各側ニ働ク外力ト平衡狀態ニ在リ.

コレハ桁ノ理論ニ關シ最モ重要ナル原理ニシテ如何ナル桁ニモ適用セラルヽモノナリ.

斷面XXニ於ケル應力ヲ夫々水平分應力ト鉛直分應力トニ分チテ考フルニ水平分應力ノ若干ハ應張力ニシテ他ハ應壓力ナルベシ. 然ラバ平衡原則ニヨリ此等水平分應力ノ代數和ハ零ナリ. 又鉛直分應力ハ合シテ鉛直應剪力トナリ(第16圖(*b*))之ハ該斷面ノ左側或ハ右側ニ働ク外力ノ代數和ニ等シ. 如斯ニシテ力ノ三平衡條件ヨリ桁ノ任意横斷面ニ於ケル應力ニ關シテ次ノ法則ヲ得.

第16圖(*b*)



(1)水平應力ノ代數和ハ零卽チ水平應張力ノ和ハ

水平應壓力ノ和ニ等シ.

(2)鉛直應剪力ハ横斷面ノ各側ニ働ク外力ノ代數和ニ等シ.

(3)横斷面ニ於ケル應力ノ力率代數和ハ其斷面ノ各側ニ働ク外力ノ力率代數和ニ等シ.

以上三ツノ理論的法則ハ桁ニ關スル理論ノ基礎タリ. 或斷面ニ於ケル鉛直分應力ノ代數和ヲ**抵抗應剪力**(Resisting Shear) ト名付ケ,其斷面中ノ或一定線ニ對スル水平分應力ノ力率代數和ヲ**抵抗力率**(Resisting Moment) ト名付ク. 然ラバ

應張力ノ和=應壓力ノ和,

抵抗應剪力=鉛直剪斷力,

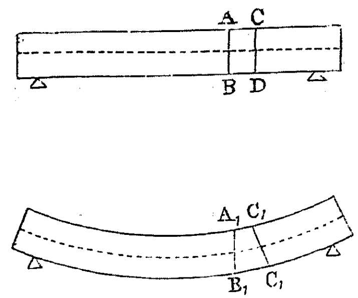
抵抗力率=彎曲率.

此等三方程式中第二ト第三ハ桁ニ關スル諸研究ヲナスニ當リ基本法則タルモノニシテ此等ハ任意横斷面ニ於ケル應力ト其斷面ノ各側ニ働ク外力トノ關係ヲ表示スルモノナリ.

18. **中立面ト中立軸** (Neutral Surface and Axis) 桁ノ横斷面ニ於ケル應力ノ配布ガ未知ナル以上ハ單位應力ト外力トノ關係ハ力學法則ノミニ因リテ定ムルコト能ハズシテ實驗的法則ニ依ラザルベカラズ. 桁ガ外力ノ作用ヲ受ケテ撓ムトキハ一面ハ凹面ヲ

呈シ他面ハ凸面ヲ呈スルヲ見ルベシ. 然ラバ應張力ハ凸面ニ應壓力ハ凹面ニ誘起セラルヽヤ明カナリ. 此等ノ事柄ハ桁ニ關スル實驗ニ於テ認メラルヽノミナラズ又桁ガ撓ム前ニ桁ノ側面ニ引キタル二ツノ鉛直並行線ハ撓ミタル後モ亦直線ナレドモ其隔リハ凸面ニ於テ廣ク凹面ニ於テ狹キヲ認ムベシ(第17圖). 如斯ニシテ次ノ實驗法則ヲ得.

第 17 圖



(4)凸面ノ側ニ於ケル水平纖維(Horizontal Fiber)**ハ伸張シ凹面ノ側ニ於テハ短縮ス. 從ツテ其間ニ纖維ノ長サ不變ナル面アルベシ. 此面ヲ中立面ト謂フ.**

(5)任意ノ纖維ノ伸長又ハ短縮ハ中立面ヨリ其纖維ニ至ル距離ニ正比例ス

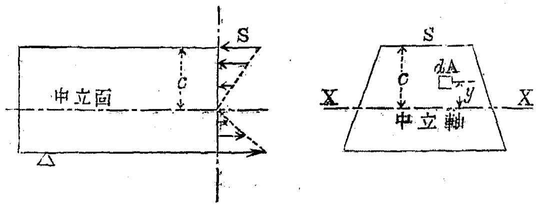
法則(5)ハ單位應力ガ材料ノ彈性限度以內ナルトキニ於テノミ眞ニシテ又此ノ限度以內ニテハ纖維應力ハ單位縱變形ニ正比例スルヲ以テ

(6)水平應力ハ中立面ヨリノ距離ニ正比例ス.

以上ノ法則ニヨリ中立面ノ位置ヲ定ムルヲ得.

第18圖ニ於テdAハ或纖維ノ横斷面積, yハ中立面ヨリdA迄ノ隔リ, Sハcナル隔リニアル最モ遠キ纖

第18圖



維ノ單位應力ナリ. 然ラバ第六法則ニヨリyナル隔リニ於ケル單位應力ハ$\frac{S.y}{c}$ニシテdAニ働ク水平應力ハ$\frac{S}{c}y.dA$ナルヲ以テ

$$\frac{S}{c}\int y.dA=\text{全横斷面ニ働ク水平應力ノ代數和.}$$

第17節第一法則ニ由リ此代數和ハ零ナラザルベカラズ卽チ

$$\int y.dA=0$$

桁ノ材質ガ齊等ナラバ此條件ハ面率軸ガ横斷面ノ中心ヲ通過スルトキニ於テ滿足サルベシ. 卽チ桁ノ中立面ハ横斷面ノ中心ヲ通過スベキナリ. 而シテ横斷面ト中立面トノ交線ヲ**横斷面ノ中立軸**ト謂フ.

纖維ノ水平單位應力ガ材料ノ彈性限度ヲ超過スルニ至レバ第五實驗法則ヲ適用スル能ハズ. 從ッテ中立面ハ最早横斷面ノ中心ヲ通過セズ. 然ラバ普通ノ彎曲理論ハ單位應力ガ彈性限度以內ナル場合ニ限リ適用セラルヽモノト知ルベシ.

實驗法則第五ニヨリ

$$\frac{S_1}{S}=\frac{c_1}{c},\ \text{卽チ}\ \frac{S_1}{c_1}=\frac{S}{c}\ \dots\dots\dots\dots(14)$$

此式ニ於テS=中立面ヨリ最モ遠キ距離cニ於ケル單位應力,

S_1=中立面ヨリc_1ナル距離ニ於ケル單位應力.

19. 抵抗應剪力公式ト抵抗力率公式 (Shear and Flexure Formulae) 桁ノ横斷面積ヲA, 單位應剪力ヲS_sトシ此S_sガ横斷面全部ニ於テ均等ナリトセバ

抵抗應剪力$=S_s.A$.

コレト同一横斷面ニ於ケル鉛直剪斷力ヲVトスレバ

$$S_sA=V,\ \text{卽チ}\ S_s=\frac{V}{A}\ \dots\dots\dots\dots(15)$$

是レ桁ニ於ケル應剪力ニ關スル基本公式ニシテ之ヲ**抵抗應剪力公式**ト稱ス.

次ニ前節ニ於テ與ヘタル如ク中立軸ヨリyナル距離ニ於テdAナル斷面積ヲ有スル纖維ノ水平應力

ハ $\frac{S}{c}.y.dA$ ニシテ中立軸ニ對スル此應力ノ力率ハ $\frac{S}{c}.y^2.dA$ ナリ.

$$\therefore \frac{S}{c}\int y^2.dA=$$ 横斷面ノ中立軸ニ對スル全水平應力ノ力率代數和.

之ハ第17節ノ定義ニヨリ抵抗力率ニシテ $\int y^2.dA$ ハ中立軸ニ對スル横斷面ノ慣性能率ナリ. 之ヲIニテ表ハセバ

$$M=\frac{S.I}{c},\quad 又ハ\quad S=\frac{M.c}{I}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

此式ニ於テ M=任意横斷面ノ左(又ハ右)側ニ働ク外力ノ力率,

I=中立軸ニ對スル該斷面ノ慣性能率,

c=中立軸ヨリ最モ遠キ纖維ニ至ル距離,

S=斷面中ノ最大單位應力.

(16)式ハ一ツノ横斷面ニ於ケル彎曲率ト單位應力トノ關係ヲ表ハスモノニシテ桁ノ水平應張力及水平應壓力ニ關スル基本公式タリ. 之ヲ**抵抗力率公式**ト稱ス.

20. 公式適用上ノ注意 横斷面ノ均等ナル單桁ノ破壞ハ其中央又ハ中央ニ近キ所ニ於ケル水平應力ニ基因スルモノニシテ支端ニ於ケル剪斷力ニ原因スルコト稀ナルハ實驗上知ラルヽ所ナリ. 從ヲテ桁ニ關スル實地問題ヲ解クニ當リテ普通ニ使用セラルヽハ抵抗力率公式ニシテ只短徑間ノ桁ニ向ツテノミ抵抗應剪力ヲ考フ. 横斷面ノ不等ナル桁ニ向ツテハ(15),(16)兩式ハ共ニ重要ナリトス.

(15)式ニヨリ鉛直剪斷力ト作用抗剪強度トヲ知リテ横斷面ヲ定メ若クハ鉛直剪斷力ト斷面積トヲ知リテ單位應剪力ヲ定ムルコト容易ナリ.

(16)式ハ前述ノ如ク之ヲ求ムルニ當リ次ノ條件ヲ假定セリ.

(第一) 材質ハ齊等且彈性ニシテ應力ト變形トハ正比例スルモノト假定セシ故彈性係數ハ常數ナルベキナリ.

(第二) 單位應力ハ中立軸ヨリノ距離ニ正比例ス.

(第三) 凡テ單位應力ハ彈性限度ヨリ小ナルモノトス.

此等ノ條件ヲ滿タサヾルトキハ(16)式ガ與フル單位應力ノ値ハ眞ナラザルヤ明カナリ. 若シ(16)式ガ破壞ノ場合ニモ正シク適用セラルヽモノナラバ此式ヨリ求メタルSノ値ハ材料ノ破壞抗張強度若クハ破壞抗壓強度ノ中孰レガ小ナル強度ノ値ト一致ス

ベキ筈ナルニ其値ハ常ニ兩者ノ中間ニ在リ. 然ラバ(16)式ヨリ得タル此Sノ値ハ近似的ノモノナレドモ大略ノ比較考究ヲナス場合又ハ石材ノ如キ材料ニ向ツテハ現今尙使用セラル. 此ノ如ク破壞ノ際ニ於ケルSノ値ヲ**彎折係數**(Modulus of Rupture)又ハ**破壞抗曲強度**(Ultimate Flexural Strength)ト謂フ. 鍊鐵及建築用鋼ノ如キ延性材料ヨリ成レル桁ガ荷重ヲ受クルトキハ他ノ材料ノ如クニ折裂ニヨリテ破壞セザルユヱ直ニ破壞抗曲強度ヲ定ムル能ハズ.

材料	破壞抗曲強度
杉	8,000 听每平方吋
檜	10,000
松	11,000
樅	11,000
栗	11,000
鑄鐵	35,000
鍊鐵	55,000
中鋼	75,000
花崗石	1,600
石灰石	1,500
砂石	1,200
混凝土 (1:2:4)	400

(16)式ハ桁ニ於ケル彎曲率ト單位應力トノ關係ヲ表ハシ桁ノ强サ,安全ノ度並ニ設計ニ關スル總テノ計算ニ用キラル. Mヲ知レバS又ハ$\frac{I}{c}$ノ値ヲ見出スヲ得. 而シテ$\frac{I}{c}$ノ値ハ桁ノ材料ト荷重トニハ無關係ニシテ單ニ横斷面ノ形ト面積ノ大小トニヨル. 依テ之ヲ**斷面係數**(Section Modulus or Section Factor)ト稱ス. 一ツノ横斷面ニ於ケル最大單位應張力又ハ最大單位應壓力ヲ求メントセバM,I及cヲ算出シテ之ヲ(16)式ニ代入スベシ. 若シ桁ニ於ケル絕對最大單位應力ヲ知ラントセバ絕對最大彎曲率ヲ求メ之ヲ(16)式ニ代入スベシ. (16)式適用ニ際シ注意スベキハ各項ノ單位ニシテ例ヘバSガ听每平方吋ニテ與ヘラルヽトキハMノ單位ハ听吋(*lb.—ins.*), c及Iノ單位ハ吋ナリトス.

21. 經濟的横斷面(Economic Sections)　一般ニ構造物ノ設計ニ關シ二ツノ根本目的アリ. 卽チ安全ト經濟トニ關スル事是レナリ. 桁ノ場合ニ於テ安全ノ度ヲ適當ナラシムルニハ最大單位水平應力ヲシテ適度ノ作用强度ヨリ超過セシムベカラズ. 又經濟上最大單位水平應力ガ作用強度ヨリモ餘リ小ナラザル樣斷面ノ割合ヲ定ムルヲ要ス. 然ラバ最モ危險ナル横斷面卽チ絕對最大彎曲率ノ起ル斷面ニ於テ

水平單位應力ヲシテ適度ノ作用强度ニ等シカラシムレバ通常二ツノ根本目的ヲ達スルヲ得ベシ. 又以上ノ條件ノ下ニ横斷面ノ形狀ハ桁ノ重量ヲシテ出來得ル限リ小ナラシムル如キモノナルヲ要ス.

或斷面中ノ一點ニ於ケル水平單位應力ハ中立軸ヨリ其點迄ノ距離ニ正比例スルヲ以テ與ヘラレタルMトSトノ値ニ對シAヲ小ナラシムルニハ一般ニ桁ノ深サヲ大キクスベキナリ. 例ヘバ幅b,高サdナル矩形横斷面ヲ考フルニb邊ニ並行ナル中立軸ニ對スルIハ$\frac{1}{12}bd^3$ニシテcハ$\frac{d}{2}$ナルユヱ

$$\frac{1}{6}bd^2=\frac{M}{S},\quad 卽チ\quad A=\frac{6M}{S.d}.$$

此式ガ示ス如クMトSトノ與ヘラレタル値ニ對シテdヲ增セバ增ス程Aハ小ニナルベキモbトdトノ比ガ適度ナラザレバ幅狹キ斷面トナリ安定上桁トシテ不適當ナル形トナル.從ツテ$b:d$ナル比ニ制限アリテ木材桁ニ於テ最小限度ハ約$\frac{1}{6}$ナルガ實用上$\frac{1}{2}$乃至$\frac{2}{3}$位ガ適當ナルベシ.

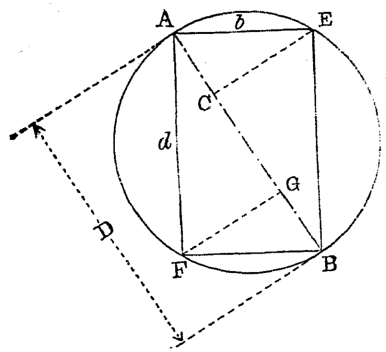
$M=\frac{S.I}{c}$ニ於テ與ヘラレタルSノ値ニ對シテ桁ノ耐ヘ得ルMノ値ヲ大ナラシムルニハ$\frac{I}{c}$卽チ斷面係數ヲ大ナラシメザルベカラズ. 而シテ$\frac{I}{c}$ヲ大ナラシムニハ中立軸ヨリ遠キ部分ノ面積ヲ大ナラシム

ベキナリ. I字形鋼桁ノ如キハ此適例ナリ.

桁ガ彎曲率ニ對シテ安全ナレバ剪斷力ニ對シテモ亦安全ナルヲ通例トス. 然レドモ桁ノ大サニ關シテ最終ノ決定ヲナスニハ選擇シタル斷面ガ剪斷力ニ對シ安全ナルヤ否ヤ檢算ヲナスベキナリ.

丸太ヨリ最モ强キ矩形横斷面ノ桁ヲ切取ルニハ如何ニナスベキカ. 第19圖ニ於テDナル直徑ノ圓ヲ丸太ノ斷面トシAEBFナル矩形ヲ此丸太ヨリ切取リタリトスレバ

第19圖



$$b^2+d^2=D^2,$$

$$\frac{I}{c}=\frac{1}{6}bd^2=\frac{1}{6}b(D^2-b^2).$$

最モ强キ桁ハ最モ大ナル斷面係數ヲ有スルモノナルヲ以テbトdトノ値ハ$b.d^2$卽チ$b(D^2-b^2)$ヲ最大ナラシムルモノナラザルベカラズ. $b(D^2-b^2)$ヲbニ就テ微分シ第一次微分係數ヲ零ト置キテ得タル値ハ所要ノモノナリ.

$$D^2-3b^2=0,\quad 卽チ\quad b=\frac{1}{\sqrt{3}}.D,\quad 從ツテ\quad d=\sqrt{\frac{2}{3}}.D$$

第19圖ニ於テΔABEトΔACEトハ相似ナルヲ以テ

$$\overline{AE}^2=\overline{AB}.\overline{AC},\quad 卽チ\quad b^2=D.\overline{AC}$$

$$\therefore\quad \frac{D^2}{3}=D.\overline{AC},\quad \overline{AC}=\frac{1}{3}.D$$

同樣ニシテ $$\overline{BG}=\frac{1}{3}.D$$

故ニ直徑ABヲ三等分シテ其分割點C及GヨリABニ直角ニCE, GFヲ引キ此等ガ圓ト交ル點E, FトA, B點トヲ連結シテ得ラル

ヽ矩形AEBFハ上叙ノ關係ヲ滿タスモノナリ.

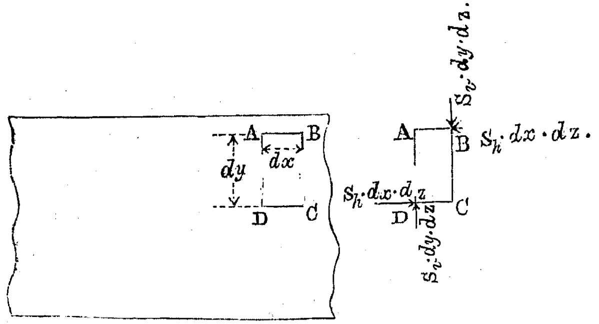
$$\frac{\text{角材ノ强サ}}{\text{丸太ノ强サ}}=\frac{\frac{1}{6}bd^2}{\frac{\pi}{32}\left(\sqrt{b^2+d^2}\right)^3}=\frac{\frac{1}{6}bd^2}{\frac{\pi}{32}(1.23)^3d^3}\fallingdotseq 0,65$$

斯ク最モ强キ矩形横斷面ノ桁ノ强サハ丸太ノ强サノ約六割五分ナリ.

22. 應剪力ノ配布 (Distribution of Shearing Stress)

(15)式ニ於テハ應剪力ハ横斷面ニ均等ニ配布セラルヽモノト假定セシモ實際ハ然ラズシテ斷面中ノ各部分ニ於テ其値ヲ異ニス. 而シテ互ニ直角ヲナ

第20圖



セル二斷面ニ於ケル單位應剪力ガ相等シキコトハ第一章第8節ニ於テ證明セシガ桁ニ於テモ亦是レト同様ノ關係アリ.

第20圖ニ於テABCDヲ桁ヨリ切取リタル微小ナル直並行六面體トシ其三邊ノ長サヲ dx, dy, dz トス. dx 間ノ荷重ハ極少ナレバ之ガ應剪力ニ及ボス影響

ハ省略スルヲ得ルヲ以テ此並行六面體ノ兩側鉛直面ニ於ケル鉛直單位應剪力 S_v ハ相等シク且頂面及底面ニ於ケル水平單位應剪力 S_h モ亦相等シカルベキナリ. 然ラバ兩側鉛直面ニ於ケル全應剪力ハ $S_v.dy.dz$, 頂面及底面ニ於ケル全應剪力ハ $S_h.dx.dz$ ニシテ此並行六面體ガ平衡ヲ保ツ爲メニハ任意ノ點Aニ對スル力率ノ代數和ガ零ナラザルベカラズ. 即チ

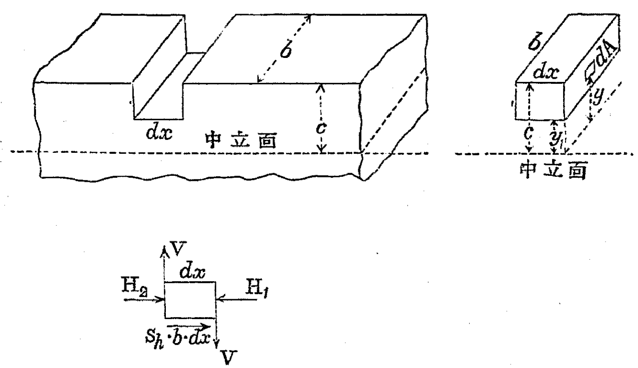
$$\Sigma M_A = S_V.dy.dz.dx - S_h.dx.dz.dy = 0,$$

$$\therefore\ S_v = S_h.$$

如斯ニ應剪力ハ一ツノ面ニ沿ヒテノミ存在スル能ハズシテ必ズ其面ト直角ヲナセル面ニ於テ等大ノ應剪力ガ伴フモノナリ.

第21圖ノ如ク桁ノ上半部ヨリ桁ノ軸ニ並行ナル面ト垂直ナル面トヨリ成レル直並行六面體ヲ切取

第21圖



リ dx ヲ其長サ, b ヲ其幅,中立軸ヨリ下面迄ノ距離ヲ y_1 及桁ノ頂面迄ノ距離ヲ c トス. 此直並行六面體ノ各ノ側面ニ於ケル單位應力ハ中立軸ヨリノ距離ニ正比例スルヲ以テ其頂面ニ於ケル單位應力ヲ S トシ中立軸ヨリ y ナル距離ニ於ケル細微面積ヲ dA トセバ

$\frac{S}{c}.y.dA$＝中立軸ヨリ y ナル距離ニ於ケル

dA ニ働ク力.

直並行六面體ノ各ノ側面ニ働ク水平應力ノ和ヲ H ニテ表ハセバ

$$H=\frac{S}{c}\int_{y_1}^{c}y.dA=\frac{M}{I}\int_{y_1}^{c}y.dA.$$

長サ dx ナル並行六面體ノ兩側ニ於ケル彎曲率ヲ夫々 M_1, M_2 トシ各側ニ於ケル應力ノ和ヲ H_1, H_2 トスレバ

$$M_1-M_2=dM,\quad H_1-H_2=\frac{dM}{I}\int_{y_1}^{c}y.dA.$$

平衡ヲ保ツ爲メニハ (H_1-H_2) ニ等シキ力ガ加ヘラレザルベカラズ. 而シテ此力ハ $(dx\times b)$ ナル面積ニ於ケル應剪力ノ和ニ等シカルベシ. 此和ガ水平應剪力ニシテ

$\frac{H_1-H_2}{b.dx}$＝中立軸ヨリ y_1 ナル距離ニ於ケル

水平單位應剪力 S_h.

卽チ

$$S_h=\frac{dM}{dx}.\frac{1}{I\,b}\int_{y_1}^{c}y.dA=\frac{V}{I.b}\int_{y_1}^{c}y.dA\dots\dots\dots\dots(17)$$

桁ノ中立面以下ニ於テ並行六面體ヲ切取ルトモ以上ノ理論ハ等シク眞ニシテ上式ハ或横斷面ニ於テ中立軸ヨリ y_1 ナル距離ニ於ケル單位應剪力ヲ與フルモノナリ. b ハ中立軸ヨリ y_1 ナル距離ニ於ケル桁ノ幅, I ハ全横斷面ノ慣性能率, $\int_{y_1}^{c}y.dA$ ハ中立軸ヨリ y_1 ナル距離ヨリ上ノ部分ノ横斷面ノ面率ナリ. 而シテ中立軸ヨリ此部分ノ面積ノ中心迄ノ距離ヲ $\bar{y}'$ トシ其面積ヲ A' トスレバ $\int_{y_1}^{c}y.dA=A'.\bar{y}'$ ナルユヱ

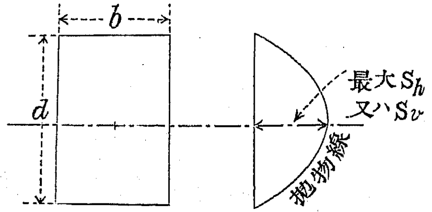
$$S_h=\frac{V}{I.b}.A'.\bar{y}'\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(18)$$

$y_1=c$ ナル縁維(中立軸ヨリ最モ遠キ纖維)ニテハ $A'.\bar{y}'=0$ 卽チ $S_h=0$ ナリ. $y_1=0$ 卽チ中立軸ニ於テハ A' ハ中立軸ヨリ上ノ部分ノ全面積トナリテ S_h ノ値ハ最大ナリ. 又 S_h ハ V ニ正比例スルユヱ鉛直剪斷力ガ絕對最大ナル如キ横斷面ノ中立面ニ於テ S_h ノ値ハ絕對最大ナリ. (18)式ニ於テ S_h ハ桁ノ横斷面ノ各點ニ於テ其値ヲ異ニス從テ S_v モ亦同樣ニ變化

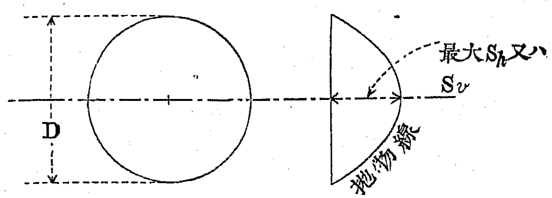
スルモノナリ.

第22圖ノ如ク横断面矩形ナレバ(18)式ヨリ

第22圖



矩形横断面.



圓形横断面.

$$\text{最大}S_h\text{又ハ}S_v=\frac{V}{\frac{1}{12}b.d^3\times b}\times\frac{b.d}{2}\times\frac{d}{4}$$

$$=\frac{3V}{2b.d}=\frac{3}{2}.\frac{V}{A}.$$

即チ最大鉛直又ハ水平單位應剪力ハ平均ノ値ヨリ大ナルコト其二分ノ一ナリ. 又横断面圓形ナレバ

$$\text{最大}S_h\text{又ハ}S_v=\frac{V}{\frac{1}{64}\pi D^4\times D}\times\frac{\pi D^2}{8}\times\frac{2D}{3\pi}=\frac{4}{3}.\frac{V}{A}.$$

即チ最大鉛直又ハ水平單位應剪力ハ平均ノ値ヨリ

其三分ノ一丈ケ大ナリ. 而シテ此等應剪力ノ變化ハ抛物線ニテ表ハサル. 何トナレバ(17)式ヨリ

$$S_h=\frac{V}{I.b}\int_{y_1}^{c}y.b.dy=\frac{V}{2I}\Big[y^2\Big]_{y_1}^{c}=\frac{V}{2I}(c^2-y_1^2)$$

トナリ之ハ一ツノ抛物線ヲ表ハス.

抵抗力率公式ヨリ求メタル單位應力ガ安全ナル値ナラバ其桁ハ與ヘラレタル荷重ニ對シテ安全ナルヲ常トス. 尤モ桁ノ徑間短ク且桁ノ高サ大ナルトキハ中立面ニ沿ヒテ働ク水平單位應剪力ガ作用抗剪强度ヲ超過スルコトアリ. 而シテ木材ノ木理ニ沿ヒタル破壊抗剪强度ハ小ナルユヱ木桁ニ於テハ殊ニ如斯キ場合ニ就キ考フル必要アルベシ.

23. **等强桁** (Beams of Uniform Strength) 一般ニ彎曲率ハ桁ノ諸断面ニ於テ其値ヲ異ニスルユヱ桁ノ横断面ガ均等ナラバ桁中ノ或一部分ノミ作用强度ニ等シキ應力ヲ受ケ他ノ部分ハ之レヨリモ小ナル應力ヲ受クベシ. 即チ桁ノ一部分ノミ適當ノ横断面ヲ有シ他ノ部分ハ必要以上ノ强サヲ有スベク材料使用上不經濟ナリ. 桁ノ横断面ヲ適當ニ變ズレバ各断面ノ最大應力ヲシテ同値ナラシムルヲ得ベク如斯キ桁ヲ名付ケテ**等强桁**ト謂フ. 尤モ彎曲率ニ應ジテ容易ニ横断面ヲ變ジ得ルカ若クハ特殊ノ場

合ノ外材料ノ節約ト等强ニナスガ爲メニ要スル費用ノ増加ト相償ハザルコト多シ.

横斷面均等ナル桁ニアリテハ何レノ横斷面ニ於テモ$\frac{I}{c}$ナル値ハ同一ナリ然レドモ彎曲率Mハ變ズルユエSガ常數ナルタメニハ(16)式ガ示ス如ク$\frac{I}{c}$ハMニ正比例シテ變ズベキナリ.

矩形横斷面ノ桁ニアリテハ$\frac{I}{c}=\frac{1}{6}bd^2$, $M=\frac{Sbd^2}{6}$ニシテb又ハd孰レカヲ變ジテbd^2トMトガ正比例スル様ニナセバ等强桁ガ得ラルベシ. bヲ常數トスレバ$d=\left(\frac{6}{Sb}M\right)^{\frac{1}{2}}$ニシテ桁ノ高サハ彎曲率ノ平方根ニ正比例ス. 又$d$ヲ常數トスレバ$b=\frac{6}{Sd^2}M$ニシテ桁ノ幅ノ變化ハ彎曲率表圖ト同様ノ曲線ニテ表ハサル.

例ヘバ突桁ガ單位長サニ付キwナル等布荷重ヲ受クルトキハ$\frac{1}{6}Sbd^2=\frac{1}{2}wx^2$ニシテ$b$ヲ常數トスレバ$d=\sqrt{\frac{3w}{Sb}}x$卽チ$d$ハ$x$ニ正比例シ側面形ハ三角形トナル.

彎曲率ノミ考フレバ$M=0$ナル斷面ニ於ケル面積ハ零ナリ. 然レドモ$M=0$ナル斷面ニ於テ$V=0$ナラザルトキハ鉛直剪斷力ヨリ生ズル應剪力アルユエ其斷面積ハ(15)式ヨリ定ムベキナリ.

24. 桁ニ關スル三問題

問題I. 一ツノ桁ガ或荷重ニ對シテ安全ナルヤ否ヤヲ知ルコト 先ヅ絶對最大彎曲率,斷面積A及$\frac{I}{c}$ヲ見出シ(16)式ヨリ單位應張力及單位應壓力ヲ求ムベシ. 又必要ニ應ジテ絶對最大鉛直剪斷力ヲ見出シ(15)式又ハ(17)式ヨリ單位應剪力ヲ求ムベシ. 而シテ此等ヲ作用强度ト比較スレバ其桁ガ安全ナルヤ否ヤヲ判定スルヲ得ベシ.

桁ノ自已重量ヨリ生ズル彎曲率ガ荷重ヨリ生ズル彎曲率ノ一割以内ナレバ自已重量ヲ考ヘズシテ可ナリ. 例ヘバ桁ノ中央ニ一ツノ集中荷重Wヲ加フル・トキ之ヨリ生ズル最大彎曲率ハ$\frac{1}{4}Wl$ニシテ自已重量ヨリ生ズル最大彎曲率ハ$\frac{1}{8}W'l$ナリ. 但シlハ徑間, W'ハ桁ノ自已重量ナリトス. 然ラバ$\frac{1}{8}W'l<\left(\frac{1}{4}Wl\times\frac{1}{10}=\frac{1}{40}Wl\right)$卽チ$5W'<W$ナルトキハ自已重量ヲ考ヘズシテ可ナリ.

例題 幅8吋,高サ10吋,徑間20呎ナル木材單桁ガ延長一呎ニ付キ80听ノ等布荷重ヲ受クルトキ此桁ハ安全ナリヤ. 但作用抗張又ハ抗壓强度ヲ1,000听毎平方吋及作用抗剪强度ヲ80听毎平方吋トス.

$$\text{最大}M=\frac{wl^2}{8}=\frac{80\times\overline{20}^2\times12}{8}=48{,}000\text{听吋,}$$

$$\frac{I}{c}=\frac{1}{6}bd^2=\frac{8\times\overline{10}^2}{6}=\frac{400}{3}\text{吋}^3,$$

$$\therefore \text{最大單位應力}\,S=\frac{M.c}{I}=\frac{48,000\times 3}{400}=360\ \text{听/平方吋}.$$

又 $$\text{反力}=800\ \text{听},$$

$$\therefore S_s\ \text{ノ平均值}=\frac{800}{80}=10\ \text{听/平方吋}.$$

$$\text{斷面ニ於ケル最大單位應剪力}=\frac{3}{2}\times 10=15\ \text{听/平方吋}.$$

故ニ此桁ハ與ヘラレタル荷重ニ對シテ安全ナリ

問題II. 桁ガ支ヘ得ル安全荷重 (16)式ニ於テSヲ作用强度ニ取リテ得タルMノ値ハ桁ガ耐ヘ得ル最大彎曲率ニシテ此値ヨリ桁ガ安全ニ支ヘ得ル荷重ヲ定ムルヲ得.

例題 玆ニ高サ10吋,長サ一呎ニ付キ重量25听ノI字形鋼桁アリ. 之ヲ支間16呎ノ單桁トシテ使用セントス. 此桁ガ支ヘ得ル安全等布荷重ハ幾何ナリヤ. 但作用强度ハ16.000听/平方吋

製造所製品目錄ニ依リ

$$\frac{I}{c}=24.4\ \text{吋}^3,\quad \text{最大抵抗力率}=16,000\times 24.4=390,400\ \text{听吋},$$

$$\therefore \frac{W\times 16\times 12}{8}=390,400,$$

即チ $$\text{全等布荷重}=16,270\ \text{听}.\ \text{(自己重量ヲ含ム)}$$

又 $$\text{鋼桁腹ノ横斷面積}=0.31\times 10=3.1\ \text{平方吋}$$

鋼桁腹ハ斷面ノ剪斷力ニ抵抗スルモノナルヲ以テ

$$S_s\ \text{ノ平均值}=\frac{V}{A}=\left(\frac{16,270}{2}\right)\div 3.1=2,630\ \text{听/平方吋}.$$

凡テ鋼桁ノ腹材ニ於ケル作用抗剪强度ハ10,000听/平方吋ナルヲ以テ此例題ノ鋼桁ハ剪斷力ニ對シテモ亦安全ナリ.

問題III. 桁ノ設計 桁ノ設計ハ其長サ,荷重及作用强度ガ與ヘラレテ斷面係數ヲ求メ之ニヨリテ斷

面ヲ定ムルニ在リ. 然ラバ其解法一ナラズシテ斷面ノ形狀ト大サトヲ決定スルニハ設計者ノ判斷ヲ要ス.

例題 1. 玆ニ長サ8呎ノ矩形横斷面ノ木材突桁アリ. コレガ其放端ニ於テ500听ノ集中荷重ヲ安全ニ支フルニハ斷面ノ大サヲ幾何ニナスベキカ. 但木材ノ作用强度ヲ1,000听每平方吋トス.

$$\text{最大}\,M=500\times 8\times 12=48,000\ \text{听吋},$$

$$\therefore 1,000\times\frac{bd^2}{6}=48,000,\quad bd^2=288\ \text{吋}^3.$$

即チ $$b=5\ \text{吋トスレバ}\ d=8\ \text{吋}.$$

此荷重ニ對スル最大單位應剪力ハ

$$S_s=\frac{3}{2}\cdot\frac{V}{A}=\frac{3\times 500}{2\times 40}=18.8\ \text{听/平方吋}.$$

之ハ作用抗剪强度ニ比シ遙ニ小ナルユヱ剪斷力ニ對シテモ亦安全ナリ.

例題 2. 支間24呎ノ鋼I字形單桁アリ. 之ヲシテ延長一呎ニ付キ1,100听ノ等布荷重ヲ安全ニ支ヘシメントス. 其寸法如何. 但鋼ノ作用强度ヲ16,000听/平方吋トス.

$$\text{最大}\,M=\frac{1,100\times\overline{24}^2\times 12}{8}\ \text{听吋},$$

$$\therefore \frac{M}{S}=\frac{I}{c}=\frac{1,100\times\overline{24}^2\times 12}{8\times 16,000}=59.4\ \text{吋}^3.$$

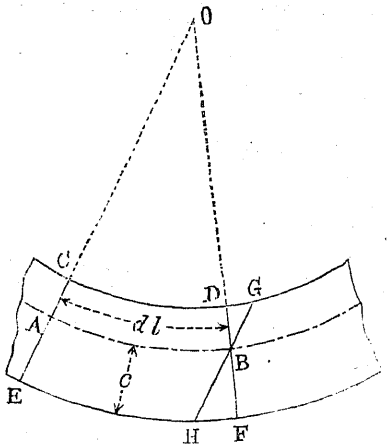
高サ15吋,延長一呎ノ重量45听ナルI字形ノ斷面係數ハ60.8吋^3(製造所製品目錄ヲ見ヨ)ナルユヱ此寸法ノモノヲ用フレバ可ナリ.

第四章 桁ノ撓度

(Deflection of Beams)

25. **彈曲線ノ方程式** (Equation of Elastic Curve) 桁ガ彎曲スレバ其中立面ハ曲面トナル. 此曲面ヲ桁ノ軸ニ並行ナル鉛直面上ニ投射シタル曲線ヲ名付ケテ**彈曲線**ト謂フ. 此曲線ガ $y=f(x)$ ナル方程式ニテ表ハサルヽナラバ桁ノ一點ニ於ケル撓度ハ容易ニ見出サルベシ. 但 y ハ桁ノ左支端ヨリ x ナル距離ニ於ケル點ノ撓度ナリ.

第23圖



第23圖ハ撓ミタル桁ノ一部分ヲ表ハスモノニシテ dl ハ彈曲線ノ細微部分ナリ. 而シテOハ彎曲ノ中心ニシテOA, OBハ半徑ナリ. 彎曲ガ起ル前ハOA, OBハ並行ナリシユヱDFハCEニ並行ナル位置GHニ在リシト考フルヲ得. 又 c ハ中立面ヨリ最モ遠キ線面迄ノ距離ナリ. 然

ラバ線維ノ變形ハHFニシテ單位變形ハ $\frac{HF}{dl}$ ナリ. 彈性係數ヲEトシ線維ノ單位應力ヲSトスレバ $HF=\frac{S.dl}{E}$ ナリ. 而シテ△BHFト△OABトハ相似ナルユヱ

$$\frac{HF}{AB}=\frac{BF}{OB},\quad \frac{S.dl}{E.dl}=\frac{c}{r}\quad \text{即チ}\quad \frac{S}{E}=\frac{c}{r}.$$

然ラバ(16)式ニヨリ

$$\frac{M}{I}=\frac{E}{r},\quad \text{即チ}\quad r=\frac{E.I}{M}\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

之ハ彈曲線ノ方程式ニシテ任意ノ點ニ於ケル彈曲線ノ曲度半徑 (Radius of Curvature) ヲ彈性係數,其點ニ於ケル彎曲率及慣性能率ニテ表ハセルモノナリ.

r ヲ正座標ニテ表ハセバ豫備數學第六章第40節ニヨリ

$$r=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

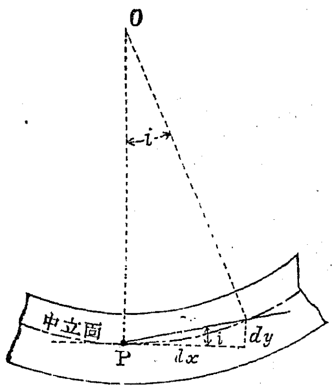
普通ノ構造物ニ於テハ一般ニ桁ノ撓度小ナルユヱ曲線上ノ一點ニ於ケル切線ガX軸トナス角度ノ正切ノ値ハ至ツテ小ナリ. 從テ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ハ1ニ比シテ省略スルヲ得. 然ラバ

$$r=\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{E.I}{M},\quad \text{即チ}\quad E.I\frac{d^2y}{dx^2}=M\ldots\ldots\ldots(20)$$

是レ桁ノ彈曲線ノ一般微分方程式ナリ．此式ニ於テyハxヲ橫距トセル點ニ於ケル彈曲線ノ縱距卽チ其點ノ撓度ニシテMヲxノ函數ニテ表ハシ二度積分スレバxトyトノ關係ヲ得．

(20)式ハEヲ含ムユヱ單位應力ハ彈性限度以內ナラザルベカラズ．又(16)式ヲ用ヰシユヱ(20)式ヲ適用スル際ニハ(16)式ノ條件ニ注意スベシ．又(20)式ハ$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ヲ省略セルモノナレドモ普通ノ場合ニハ撓度小ナルユヱ此式ニヨリテ算出シタル値ハ實驗ノ結果ト能ク一致スルモノナリ．

第 24 圖



第24圖ノ如ク一點Pニ於ケル中立面ノ傾斜ハ或一定線(通常水平線)ニ對スル傾斜角ニテ測ル．之ヲi(角度ガ小ナルトキハ$\tan i=i$)トスレバ

$$i \text{ 卽チ } \frac{dy}{dx}=\int\frac{d^2y}{dx^2}.dx=\int\frac{M}{EI}.dx \qquad (21)$$

又撓度ハ

$$y=\int\frac{dy}{dx}.dx=\int i.dx=\iint\frac{M}{E.I}.dx.dx \qquad (22)$$

以上(21), (22)兩式ノ積分ハ夫々適當ノ積分界限ニ

就テ之ヲ行フベシ．

第一篇靜力學第八章第67節ニヨリ

$$\frac{dM}{dx}=V \quad \text{又} \quad \frac{dV}{dx}=w=\frac{d^2M}{dx^2}$$

此式中Vハ鉛直剪斷力ニシテwハ原點ヨリxナル距離ニ於ケル單位延長ニ付キテノ荷重ナリ．然レバ

$$V=\frac{d}{dx}\left(EI.\frac{d^2y}{dx^2}\right),\quad w=\frac{d}{dx}\left(EI.\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

若シE, Iガ常數ナラバ

$$V=EI.\frac{d^3y}{dx^3},\quad w=EI.\frac{d^4y}{dx^4}$$

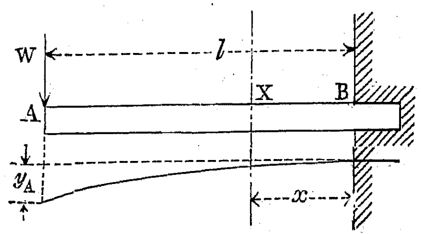
$r.M=E.I$ナル式ガ示ス如クE及Iハ代數的符號ヲ有セザルモノナレバrトMトハ常ニ同一符號タルベキナリ．Mノ正負ハ下方ニ凸面ヲ呈スル如キ彎曲率ヲ正トシ上方ニ凸面ヲ呈スル如キ彎曲率ヲ負ト定ム．而シテ前者ノ場合ニ於テハrハ中立面ヨリ上方ニ位シ後者ノ場合ニ於テハ下方ニ位ス．故ニ中立面ヨリ上方ニ位スルrヲ正トシ下方ニ位スルrヲ負ト定ム．尤モ(20)式ノ積分ヲナスニ當リ積分界限內ニ於テMガ符號ヲ變ズルコトナケレバ別ニ之ニ符號ヲ付セズシテ可ナリ．

26. 均等又ハ不等橫斷面ノ突桁 (Cantilevers of Uniform or Variable Cross-Section)

(A) **均等橫斷面ノ突桁**

(1) **放端ニWナル集中荷重ヲ加フル場合** 固定點Bヲ原點トスレバ此點ニ於テハ$\frac{dy}{dx}=0,\ y=0$ナリ. 任意ノ斷面Xニ於テハ

第25圖



$$\mathrm{EI}.\frac{d^2y}{dx^2}=-\mathrm{W}(l-x),$$

$$\mathrm{EI}\int\frac{d^2y}{dx^2}.dx=\mathrm{EI}.\frac{dy}{dx}=-\mathrm{W}lx+\frac{1}{2}\mathrm{W}x^2+0,$$

$$\mathrm{EI}\int\frac{dy}{dx}.dx=\mathrm{EI}.y=-\frac{1}{2}\mathrm{W}lx^2+\frac{1}{6}\mathrm{W}x^3+0.$$

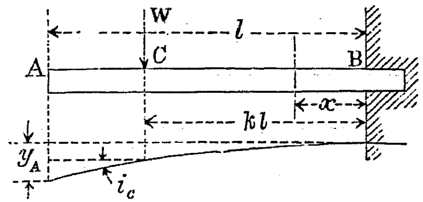
放端Aニ於テハ

傾斜 $i_A=\left(\frac{dy}{dx}\right)_A=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{EI}}\left[\frac{x^2}{2}-lx\right]_{x=l}=-\frac{\mathrm{W}l^2}{2\mathrm{EI}}$ ....(23)

撓度 $y_A=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{EI}}\left[\frac{x^3}{6}-\frac{lx^2}{2}\right]_{x=l}=-\frac{\mathrm{W}l^3}{3\mathrm{EI}}$ ....(24)

(2) **任意ノ點ニ集中荷重Wヲ加フル場合** BヨリC迄ノ間ハ

第26圖



$$\mathrm{EI}.\frac{d^2y}{dx^2}=-\mathrm{W}(kl-x),$$

$$\mathrm{EI}\int\frac{d^2y}{dx^2}.dx=\mathrm{EI}.\frac{dy}{dx}=-\mathrm{W}\left(klx-\frac{1}{2}x^2\right)+0,$$

$$\mathrm{EI}\int\frac{dy}{dx}.dx=\mathrm{EI}.y=-\mathrm{W}\left(\frac{1}{2}klx^2-\frac{1}{6}x^3\right)+0.$$

上式中kハ1ヨリ小ナル任意ノ數ナリトス. Wノ働點Cニ於テハ

$i_C=\left(\frac{dy}{dx}\right)_C=-\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{EI}}\left[klx-\frac{1}{2}x^2\right]_{x=kl}=-\frac{\mathrm{W}k^2l^2}{2\mathrm{EI}}$ ....(25)

$y_C=-\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{EI}}\left[\frac{1}{2}klx^2-\frac{1}{6}x^3\right]_{x=kl}=-\frac{\mathrm{W}k^3l^3}{3\mathrm{EI}}$ ....(26)

之ハklナル長サノ突桁ノ放端ニWナル集中荷重ヲ加フルトキ其放端ニ於ケル傾斜角及撓度ト同一ナリ.

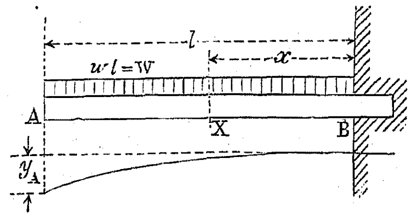
AC間ハM=0ナルヲ以テ(19)式ヨリ知ル如ク彈曲線ノ半徑ハ無窮大卽チ彈曲線ハ直線ナリ. 然ラバ

$y_A=-\left[\frac{\mathrm{W}k^3l^3}{3\mathrm{EI}}+l(1-k)\frac{\mathrm{W}k^2l^2}{2\mathrm{EI}}\right]$ ....(27)

以上ノ公式ハ突桁ガ數個ノ集中荷重ヲ受クル場合ニモ之ヲ適用スルヲ得. 卽チ各荷重ヨリ生ズル撓度ヲ求メ夫等ヲ加フレバ可ナリ.

(3) 單位延長ニ付 w ナル等布荷重ヲ加フル場合

第 27 圖



$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{M}=-\frac{w}{2}(l-x)^2,$$

$$\mathrm{EI}\int\frac{d^2y}{dx^2}.dx=\mathrm{EI}.\frac{dy}{dx}=-\frac{w}{2}\left(l^2x-lx^2+\frac{1}{3}x^3\right)+0,$$

$$\mathrm{EI}\int\frac{dy}{dx}.dx=\mathrm{EI}.y=-\frac{w}{2}\left(\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{1}{3}lx^3+\frac{1}{12}x^4\right)+0,$$

放端Aニ於テハ

$$i_{\mathrm{A}}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathrm{A}}=-\frac{w}{2\mathrm{EI}}\left[l^2x-lx^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{x=l}=$$

$$-\frac{wl^3}{6\mathrm{EI}}=-\frac{\mathrm{W}l^2}{6\mathrm{EI}}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$y_{\mathrm{A}}=-\frac{w}{2\mathrm{EI}}\left[\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{1}{3}lx^3+\frac{1}{12}x^4\right]_{x=l}=$$

$$-\frac{wl^4}{8\mathrm{EI}}=-\frac{\mathrm{W}l^3}{8\mathrm{EI}}\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

上式ニ於テWハ全荷重 wl ヲ表ハスモノトス.

此場合ニ放端ガ固定點Bト同ジ高サニナル迄支柱(Prop)ニテ押上ゲタリトセバ其支柱ハ全荷重ノ $\frac{3}{8}$ ヲ受クベシ. 何トナレバ

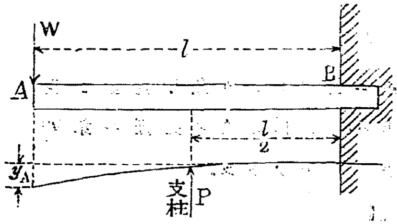
$\frac{\mathrm{P}l^3}{3\mathrm{EI}}$＝支柱ニ加ハル壓力Pノ爲メニ放端ニ起ル上向キ撓度[(24)式ヲ見ヨ],

$\frac{\mathrm{W}l^3}{8\mathrm{EI}}$＝全配布荷重Wヨリ生ズル下向キ放端撓度,

$$\therefore\ \frac{\mathrm{P}l^3}{3\mathrm{EI}}=\frac{\mathrm{W}l^3}{8\mathrm{EI}},\quad 卽チ\quad \mathrm{P}=\frac{3}{8}\mathrm{W}.$$

例題 1. 突桁ガ其放端ニ於テWナル集中荷重ヲ受クルトキ其中央點ヲ支柱ニテ支ヘテ固定端ト同一高サニナラシメントス. 支柱ニ加ハル壓力及放端ノ撓度ヲ求ム.

第 28 圖



突桁中央點ノ撓度ハ(24)式ヨリ

$$y_{\frac{l}{2}}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{EI}}\left[\frac{x^3}{6}-\frac{lx^2}{2}\right]_{x=\frac{l}{2}}=-\frac{5\mathrm{W}l^3}{48\mathrm{EI}}$$

支柱ニ加ハル壓力Pヨリ生ズル中央點ノ上向キ撓度ハ(26)式ヨリ

$$y_{\frac{l}{2}}=\frac{\mathrm{P}}{3\mathrm{EI}}\left[k^3l^3\right]_{k=\frac{1}{2}}=\frac{\mathrm{P}l^3}{24\mathrm{EI}}.$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{P}l^3}{24\mathrm{EI}}=\frac{5\mathrm{W}l^3}{48\mathrm{EI}},\quad 卽チ\quad \mathrm{P}=\frac{5}{2}\mathrm{W}.$$

又Pヨリ生ズル放端ノ上向キ撓度ハ(27)式ヨリ

$$\frac{\frac{5}{2}\mathrm{W}\left(\frac{1}{2}\right)^3.l^3}{3\mathrm{EI}}+\frac{l}{2}.\frac{\frac{5}{2}\mathrm{W}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.l^2}{2\mathrm{EI}}=\frac{5\mathrm{W}l^3}{48\mathrm{EI}}+\frac{5\mathrm{W}l^3}{32\mathrm{EI}}=\frac{25\mathrm{W}l^3}{96\mathrm{EI}}.$$

然ラバ結局放端ノ下向キ撓度ハ

$$y'_A = -\frac{Wl^3}{3EI} + \frac{25Wl^3}{96EI} = -\frac{7Wl^3}{96EI}$$

例題 2. 幅2吋，高サ4吋，長サ6呎ノ鑄鐵角棒ヲ其中央點ニテ支ヘテ兩放端ニ 4,000 听ノ荷重ヲ加ヘタルトキ放端ノ撓度ハ 0.401 吋ナリシトイフ．鑄鐵ノ彈性係數ヲ求ム．

(24)式ヨリ

$$0.401 = \frac{4,000 \times (3 \times 12)^3}{3 \times E \times \frac{32}{3}},$$

即チ

$$E = \frac{4,000 \times (3 \times 12)^3 \times 3}{3 \times 0.401 \times 32} = 14,500,000 \text{ 听/平方吋.}$$

(B) 不等横斷面ノ突桁

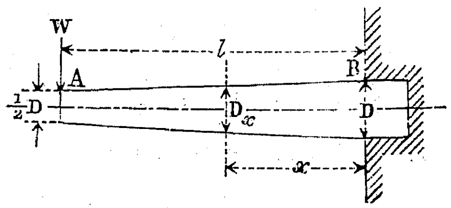
E ヲ不變ナリトセバ(21)，(22)兩式ヨリ

$$i = \frac{1}{E}\int \frac{M}{I}.dx, \qquad y = \frac{1}{E}\iint \frac{M}{I}.dx.dx.$$

I 及 M ヲ x ノ函數トシテ表ハスコトヲ得バ容易ニ i 及 y ヲ見出スヲ得ベキナリ．

例題 圓形横斷面ノ突桁ガ放端ニ於テ W ナル集中荷重ヲ受クルトキ放端ノ傾斜角及撓度ヲ求ム．但横斷面ノ直徑ハ第29圖ノ如ク D ヨリ $\frac{1}{2}$D 迄均等ニ減少スルモノトス．

第29圖



$$D_x = D\left(1 - \frac{x}{2l}\right) = \frac{D}{2l}(2l - x).$$

固定端 B 及 B ヨリ x ナル距離ニ於ケル斷面ノ中立軸ニ對スル慣性能率ヲ夫々 I_0 及 I_x トスレバ

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{64}, \quad I_x = \frac{\pi D^4}{64}\left(1 - \frac{x}{2l}\right)^4 = \frac{I_0}{16l^4}(2l - x)^4.$$

$$\therefore \quad i_x = \frac{1}{E}\int \frac{M}{I}.dx = \frac{1}{E}\int \frac{-W(l-x)}{\frac{I_0}{16l^4}(2l-x)^4}.dx = -\frac{16Wl^4}{EI_0}\int \frac{l-x}{(2l-x)^4}.dx$$

$$= -\frac{16Wl^4}{EI_0}\int\left[\frac{-l}{(2l-x)^4} + \frac{1}{(2l-x)^3}\right]dx$$

$$= -\frac{16Wl^4}{EI_0}\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{(2l-x)^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2l-x)^2} + C\right].$$

C ハ積分常數ニシテ B 點 $(x=0)$ ニ於テハ $i=0$ ナルニヨ

$$0 = -\frac{16Wl^4}{EI_0}\left[-\frac{1}{24l^2} + \frac{1}{8l^2} + C\right], \quad \text{即チ} \quad C = -\frac{1}{12l^4}.$$

$$i_x = -\frac{16Wl^4}{EI_0}\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{(2l-x)^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2l-x)^2} - \frac{1}{12l^2}\right].$$

$$\therefore \quad i_A = -\frac{16Wl^4}{EI_0}\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{(2l-x)^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2l-x)^2} - \frac{1}{12l^2}\right]_{x=l},$$

即チ　$i_A = -\frac{4}{3}\cdot\frac{Wl^2}{EI_0}.$

$$y_x = \int i_x.dx = -\frac{16Wl^4}{EI_0}\int\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{(2l-x)^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2l-x)^2} - \frac{1}{12l^2}\right]dx$$

$$= -\frac{16Wl^4}{EI_0}\left[-\frac{1}{6}\cdot\frac{l}{(2l-x)^2} + \frac{1}{2(2l-x)} - \frac{x}{12l^2} + C\right].$$

$x=0$ ニ對シテ $y=0$ ナルニヨ積分常數ハ $C = -\frac{5}{24l}$ ナリ．

$$\therefore \quad y_x = -\frac{16Wl^4}{EI_0}\left[-\frac{1}{6}\cdot\frac{l}{(2l-x)^2} + \frac{1}{2(2l-x)} - \frac{x}{12l^2} - \frac{5}{24l}\right].$$

$$y_A = -\frac{16Wl^4}{EI_0}\left[-\frac{1}{6}\cdot\frac{l}{(2l-x)^2} + \frac{1}{2(2l-x)} - \frac{x}{12l^2} - \frac{5}{24l}\right]_{x=l},$$

即チ　$y_A = -\frac{2}{3}\cdot\frac{Wl^3}{EI_0}.$

27. 均等又ハ不等横斷面ノ單桁 (Beams of Uniform or Variable Cross-Section)

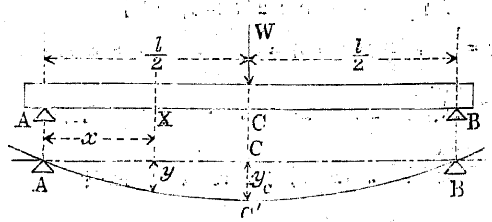
(A) 均等横斷面ノ單桁

(1) **集中荷重Wヲ桁ノ中央點ニ加フル場合**　第30圖ニ於テ左支端Aヲ原點トスレバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_x}{EI}=\frac{W}{2EI}x,$$

$$i_x=\int\frac{d^2y}{dx^2}.dx=\frac{W}{2EI}\left[\frac{1}{2}x^2+C\right].$$

第30圖



中央點 $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ ニ於テハ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルユヱ積分常數ハ $C=-\frac{1}{8}l^2$ ナリ. 故ニAトCトノ間ニ於テハ

$$i_x=\frac{W}{2EI}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}l^2\right].$$

兩支端ニ於テハ

$$i_A=-i_B=\frac{W}{2EI}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}l^2\right]_{x=0}=-\frac{Wl^2}{16EI}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

又

$$y_x=\int i_x.dx=\frac{W}{2EI}\left[\frac{x^3}{6}-\frac{l^2x}{8}+C\right].$$

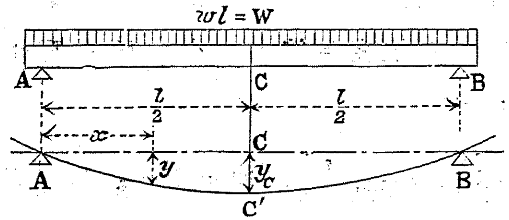
原點ニ於テハ $x=y=0$ ナルユヱ常數ハ零ナリ.

$$\therefore\quad y_x=\frac{W}{2EI}\left[\frac{x^3}{6}-\frac{l^2x}{8}\right].$$

$$y_c=\frac{W}{2EI}\left[\frac{x^3}{6}-\frac{l^2x}{8}\right]_{x=\frac{l}{2}}=-\frac{Wl^3}{48EI}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

(2) **單位延長ニ付wナル等布荷重ヲ加フル場合**

第31圖



$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_x}{EI}=\frac{w}{2EI}(lx-x^2),$$

$$i_x=\int\frac{d^2y}{dx^2}.dx=\frac{w}{2EI}\left[\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C\right].$$

中央點 $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ ニ於テハ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルユヱ積分常數ハ $C=-\frac{l^3}{12}$ ナリ.

$$\therefore\quad i_x=\frac{w}{2EI}\left[\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{l^3}{12}\right].$$

$$i_A=-i_B=\frac{w}{2EI}\left[\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{l^3}{12}\right]_{x=0}=-\frac{wl^3}{24EI}=-\frac{Wl^2}{24EI}\quad\cdots(32)$$

又　$$y_x=\int i_x.dx=\frac{w}{2EI}\left[\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{l^3x}{12}+C\right].$$

$x=0$ ニ對シテ $y=0$ ナルヲ以テ常數ハ零ナリ.

$$\therefore\quad y_x=\frac{w}{2EI}\left[\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{l^3x}{12}\right].$$

$$y_c=\frac{w}{2EI}\left[\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{l^3x}{12}\right]_{x=\frac{l}{2}}=-\frac{5wl^4}{384EI}=-\frac{5Wl^3}{384EI}\quad\ldots\ldots(33)$$

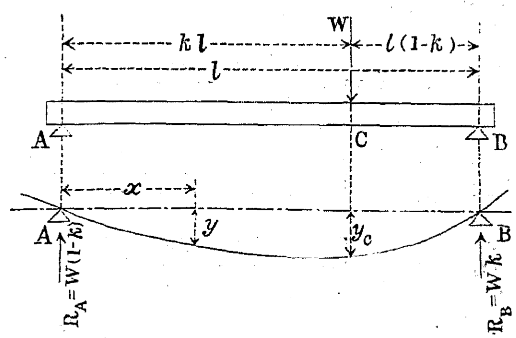
若シ桁ノ中央點ヲ支柱ニテ支ヘテ兩支端ト同一高サニアラシメバ中央點ノ撓度ハ零トナル．換言スレバ支柱ノ反力ヨリ生ズル上向キ撓度ハ荷重ヨリ生ズル下向キ撓度ニ等シ．今支柱ノ上向キ反力ヲPトスレバ

$$\frac{Pl^3}{48EI}=\frac{5}{384}\cdot\frac{wl^4}{EI},\quad \text{即チ}\quad P=\frac{5}{8}wl=\frac{5}{8}W$$

トナリ支柱ハ全荷重ノ$\frac{5}{8}$ヲ受ケ各支端ハ全荷重ノ$\frac{3}{16}$ヲ受クベシ．

(3) **任意ノ一點ニ集中荷重Wヲ加フル場合**　支端Aヲ原點トスレバAC間ハ

第32圖



$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{EI}.R_A.x\quad\ldots\ldots(a)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}R_A.x^2+C_1\right)\quad\ldots\ldots(b)$$

$$y=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}.R_A.x^3+C_1x+C_2\right)\quad\ldots\ldots(c)$$

CB間ハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{EI}\left[R_A.x-W(x-kl)\right]\quad\ldots\ldots(a')$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}R_A.x^2-\frac{1}{2}.W.x^2+W.kl.x+C_3\right)\quad\ldots\ldots(b')$$

$$y=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}.R_A.x^3-\frac{1}{6}.W.x^3+\frac{1}{2}.W.kl.x^2+C_3.x+C_4\right)\quad\ldots\ldots(c')$$

上式ニ於テ積分常數C_1, C_2, C_3及C_4ヲ定メバ荷重ノ働點Cノ左右兩側ニ於ケル彈曲線ノ方程式ガ得ラルベシ．

(c)式ニ於テ $x=0$ ニ對シテハ $y=0$ ナルユエ $C_2=0$ ナリ．又(c')式ニ於テ $x=l$ ニ對シテハ $y=0$ ナルヲ以テ

$$0=\frac{1}{6}.R_A.l^3-\frac{1}{6}.Wl^3+\frac{1}{2}.W.kl^3+C_3l+C_4\quad\ldots\ldots(d)$$

彈曲線ハC點ニ於テ共通切線ヲ有スルユエ $x=kl$ ニ對シテハ $(b)=(b')$ ナリ．

$$\therefore\ \frac{1}{2}.\mathrm{R_A}.k^2l^2+\mathrm{C_1}=\frac{1}{2}.\mathrm{R_A}.k^2l^2+\frac{1}{2}.\mathrm{W}.k^2l^2+\mathrm{C_3},$$

即チ
$$\mathrm{C_1}=\frac{1}{2}.\mathrm{W}k^2l^2+\mathrm{C_3}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

又 $x=kl$ ニ對シテ $(c)=(c')$ ナルニヨリ

$$\frac{1}{6}.\mathrm{R_A}.k^3l^3+\mathrm{C_1}kl=\frac{1}{6}.\mathrm{R_A}.k^3l^3+\frac{1}{3}.\mathrm{W}.k^3l^3+\mathrm{C_3}.kl+\mathrm{C_4},$$

$$\therefore\ \mathrm{C_1}.kl=\frac{1}{3}.\mathrm{W}.k^3l^3+\mathrm{C_3}.kl+\mathrm{C_4}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(f)$$

(d), (e) 及 (f) 式ヨリ常數 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_3}$ 及 $\mathrm{C_4}$ ヲ定ムレバ

$$\mathrm{C_1}=-\frac{1}{6}\mathrm{W}l^2(2k-3k^2+k^3),$$

$$\mathrm{C_3}=-\frac{1}{6}\mathrm{W}l^2(k^3+2k),$$

$$\mathrm{C_4}=\frac{1}{6}\mathrm{W}k^3l^3.$$

(b) 式ヨリ

$$i_c=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left[\frac{1}{2}\mathrm{W}(1-k)x^2-\frac{1}{6}\mathrm{W}l^2(2k-3k^2+k^3)\right]_{x=kl}$$

$$=-\frac{\mathrm{W}l^2}{3\mathrm{EI}}(2k^3-3k^2+k)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

荷重ヨリ左側ニ於ケル彈曲線ノ方程式ハ (c) 式ヨリ

$$y=\frac{\mathrm{W}}{6\mathrm{EI}}\left[(1-k)x^3-(2k-3k^2+k^3)l^2x\right]\ \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

C 點ニ於ケル撓度ハ

$$y_c=\Big[(35)\ 式\Big]_{x=kl}=-\frac{\mathrm{W}k^2l^3(1-k)^2}{3\mathrm{EI}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

撓度ハ $\dfrac{dy}{dx}=0$ ナル點ニ於テ最大ニシテ此點ハ左支端 A ヨリ $\dfrac{l}{\sqrt{3}}.\sqrt{k(2-k)}$ ノ距離ニアリ. 何トナレバ (35) 式ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathrm{W}}{2\mathrm{EI}}\left[(1-k)x^2-\frac{l}{3}l^2(2k-3k^2+k^3)\right]=0,$$

$$x^2=\frac{l}{3}kl^2(2-k),\quad 即チ\quad x=\frac{l}{\sqrt{3}}.\sqrt{k(2-k)}\ \cdots\cdots(37)$$

$k>\dfrac{1}{2}$ ナルトキハ最大撓度ハ荷重ト左支端トノ間ノ點ニ起リ其値ハ (35), (37) 兩式ヨリ

$$最大\ y=-\frac{\mathrm{W}l^3}{9\sqrt{3}\,\mathrm{EI}}(1-k)(2k-k^2)^{\frac{3}{2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

若シ $k<\dfrac{1}{2}$ ナラバ最大撓度ハ荷重ト右支端トノ間ノ點ニ起ルユヱ荷重ト右支端トノ間ノ彈曲線方程式ヲ用ヰザルベカラズ.

一ツノ集中荷重ヨリ生ズル撓度ハ荷重ガ支間ノ中央ニアルトキ其點ニ於テ極大ニシテ (31) 式ハ此値ヲ與フルモノナリ.

徑間ニ數多ノ集中荷重ガ働クトキ或荷重ノ働點又ハ他ノ點ニ於ケル撓度ヲ知ラントセバ以上與ヘタル公式ヲ適當ニ使用シテ各荷重ヨリ生ズル撓度ヲ求メ夫等ヲ合計スレバ可ナリ.

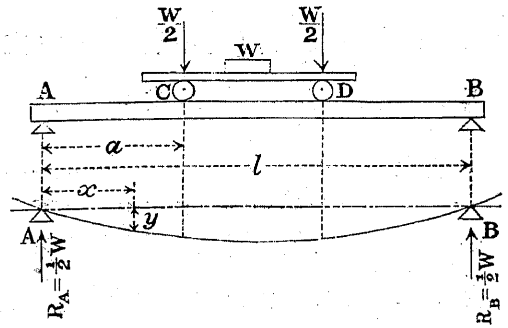
(4)　**ニツノ等大ノ集中荷重ヲ對稱位置ニ加ヘタル場合**　左支端 A ヲ原點トスレバ AC 間ハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot\frac{\mathrm{W}}{2}.x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\mathrm{W}}{4}.x^2+\mathrm{C}_1\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

$$y=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\mathrm{W}}{12}x^3+\mathrm{C}_1.x+\mathrm{C}_2\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

第 33 圖



CD 間ハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot\frac{\mathrm{W}}{2}.a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(a')$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\mathrm{W}ax}{2}+\mathrm{C}_3\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(b')$$

$$y=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\mathrm{W}ax^2}{4}+\mathrm{C}_3.x+\mathrm{C}_4\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(c')$$

働點 C ニ於テハ $(b)=(b')$ ナルユヱ

$$\frac{\mathrm{W}a^2}{4}+\mathrm{C}_1=\frac{\mathrm{W}a^2}{2}+\mathrm{C}_3,\quad 即チ\quad \mathrm{C}_1=\frac{\mathrm{W}a^2}{4}+\mathrm{C}_3.$$

而シテ中央點ニ於テ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルニヨリ (b') 式ヨリ

$\mathrm{C}_3=-\frac{\mathrm{W}al}{4}$，從テ $\mathrm{C}_1=\frac{\mathrm{W}a^2}{4}-\frac{\mathrm{W}al}{4}$ ヲ得．次ニ (c) 式ニ於テ $x=0$ ニ對シテ $y=0$ ナルユヱ $\mathrm{C}_2=0$ ナリ．又働點 C ニ於テハ $(c)=(c')$ ナルヲ以テ

$$\frac{\mathrm{W}a^3}{12}+\frac{\mathrm{W}a^3}{4}-\frac{\mathrm{W}a^2l}{4}=\frac{\mathrm{W}a^3}{4}-\frac{\mathrm{W}a^2l}{4}+\mathrm{C}_4,\quad 即チ\quad \mathrm{C}_4=\frac{\mathrm{W}a^3}{12}.$$

依テ AC 間ニ於テハ

$$y=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\mathrm{W}x^3}{12}+\frac{\mathrm{W}a^2x}{4}-\frac{\mathrm{W}alx}{4}\right),$$

即チ
$$y=\frac{\mathrm{W}}{12\mathrm{EI}}\left[x^3+3ax(a-l)\right] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

CD 間ニ於テハ

$$y=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\mathrm{W}ax^2}{4}-\frac{\mathrm{W}alx}{4}+\frac{\mathrm{W}a^3}{12}\right),$$

即チ
$$y=\frac{\mathrm{W}}{12\mathrm{EI}}\left[a^3+3ax(x-l)\right] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

中央點ニ於テハ

$$最大\ y=\frac{\mathrm{W}}{12\mathrm{EI}}\left[a^3+3ax(x-l)\right]_{x=\frac{l}{2}}=\frac{\mathrm{W}a}{\mathrm{EI}}\left(\frac{a^2}{12}-\frac{l^2}{16}\right)\cdots(41)$$

此式ハ二荷重間ノ距離ノ大小ニ拘ハラズ適用シ得ルユヱ二荷重ガ無限ニ接近シテ相合スル場合即チ二荷重ノ和ニ等シキ W ガ支間ノ中央ニアルトキハ (41) 式ノ a ヲ $\frac{l}{2}$ トスレバ可ナリ．

$$最大\ y=\Big[(41)\ 式\Big]_{a=\frac{l}{2}}=\frac{\mathrm{W}l}{\mathrm{EI}}\left(\frac{l^2}{96}-\frac{l^2}{32}\right)=-\frac{\mathrm{W}l^3}{48\mathrm{EI}}.$$

之ハ(31)式ト全ク同一ナリ.

例題 1. 幅3吋,高サ2吋,支間10呎ノ木桁ヲ兩端ニテ支ヘ左支端ヨリ6呎ノ距離ニ45听ノ集中荷重ヲ加フルトキハ其中央點及荷重ノ働點ニ於ケル撓度如何. 但 E=1,500,000 听/平方吋トス.

(35)式ニ於テ　$W=45$ 听, $I=\frac{3\times 2^3}{12}=2$ 吋^4, $k=\frac{3}{5}$.

$x=5\times 12=60$ 吋 又ハ $6\times 12=72$ 吋,

$l=10\times 12=120$ 吋.

桁ノ中央點ニ於テハ

$$y_{\frac{l}{2}}=\frac{45}{6\times 1{,}500{,}000\times 2}\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\overline{60}^3-\left\{2\times\frac{3}{5}-3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3\right\}\times\right.$$

$$\left.\overline{120}^2\times 60\right]=-\frac{50{,}976}{100{,}000}=-0.51 \text{ 吋}.$$

荷重ノ働點ニ於テハ

$$y_{\frac{3}{5}l}=\frac{45}{6\times 1{,}500{,}000\times 2}\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\overline{72}^3-\left\{2\times\frac{3}{5}-3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3\right\}\times\overline{120}^2\times 72\right]$$

$$=-\frac{49{,}766}{100{,}000}=-0.498 \text{ 吋}.$$

例題 2. 幅6吋,高サ8吋,支間12呎ノ木桁ヲ兩端ニテ支ヘ兩支端ヨリ夫々4呎隔リテ等大ノ二荷重800听ヲ加フルトキ其荷重ノ働點ニ於ケル撓度並ニ最大撓度ヲ求ム. 但 E=1,200,000 听/平方吋トス.

(39)式ニ於テ　$W=800\times 2=1{,}600$ 听, $I=\frac{6\times 8^3}{12}=256$ 吋^4,

$x=4\times 12=48$ 吋, $l=12\times 12=144$ 吋.

荷重下ノ點ニ於テハ

$$y_{\frac{1}{3}l}=\frac{1{,}600}{12\times 1{,}200{,}000\times 256}\left[\overline{48}^3+3\times\overline{48}^2(48-144)\right]$$

$$=-\frac{6}{25}=-0.24 \text{ 吋}.$$

(41)式ヨリ最大撓度ヲ求ムルコト次ノ如シ.

$$y_{\frac{1}{2}l}=\frac{1{,}600\times 48}{1{,}200{,}000\times 256}\left(\frac{\overline{48}^2}{12}-\frac{\overline{144}^2}{16}\right)=-\frac{276}{1{,}000}=-0.276 \text{ 吋}.$$

(B) **不等横斷面ノ單桁** 此場合ノ問題ハ(21),(22)兩式ヲ適用シテ解クヲ得. 今矩形横斷面ノ等强單桁ヲ考フルニ幅 b ヲ常數,高サ d ヲ變數,d ノ最大値ヲ D トシ此斷面ニ於ケル彎曲率ヲ M_0, 斷面係數ヲ Z_0, 任意斷面ニ於ケル斷面係數ヲ Z トスレバ

$$S=\frac{M}{Z}=\frac{M_0}{Z_0},\quad \frac{Z_0}{Z}=\frac{M_0}{M},\quad \frac{D^2}{d^2}=\frac{M_0}{M},$$

卽チ　$$\frac{1}{d}=\frac{1}{D}\sqrt{\frac{M_0}{M}}.$$

但　$$Z=\frac{1}{6}bd^2,\quad Z_0=\frac{1}{6}bD^2.$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{2S}{Ed}=\frac{2S}{ED}\sqrt{\frac{M_0}{M}}\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

$$i=\int\frac{d^2y}{dx^2}.dx=\frac{2S\sqrt{M_0}}{ED}\int\frac{1}{\sqrt{M}}.dx\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

例題 一定ノ幅ヲ有スル等强單桁ガ單位延長ニ付ｗナル等布荷重ヲ受クルトキ兩支端ニ於ケル傾斜角及中央點ノ撓度ヲ求ム.

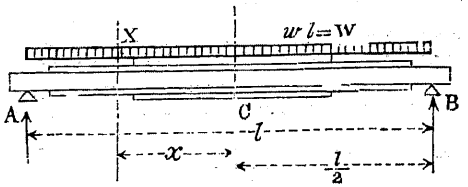
第34圖ニ於テ中央點 O ヲ原點トスレバ

$$M=\frac{wl}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)-\frac{w}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)^2=\frac{w}{2}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2-x^2\right]$$

$$M_0=\frac{1}{8}wl^2,\quad \frac{M}{M_0}=\frac{4\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)}{l^2}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2S\sqrt{M_0}}{ED}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{dx}{\sqrt{M}}=\frac{Sl}{ED}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\frac{l^2}{4}-x^2}}=\frac{Sl}{ED}\left[\sin^{-1}\frac{x}{\frac{l}{2}}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

第34圖



$$\therefore\quad i_A=i_B=\frac{Sl}{ED}\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(0)\right]=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{S}{E}\cdot\frac{l}{D}.$$

又ハ

$$i_A=i_B=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{M_0 l}{EI_0}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{wl^3}{EI_0}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{Wl^2}{EI_0}.$$

$$y_c=\int_0^{\frac{l}{2}}\int_0^{x}\frac{d^2y}{dx^2}.dx.dx=\frac{Sl}{ED}\int_0^{\frac{l}{2}}\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{l^2}{4}-x^2}}.dx$$

$$=\frac{Sl}{ED}\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\sin^{-1}\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right]_0^l dx=\frac{Sl}{ED}\int_0^{\frac{1}{2}l}\left[\sin^{-1}\frac{x}{\frac{1}{2}l}-\sin^{-1}(0)\right]dx$$

$$=\frac{Sl}{ED}\int_0^{\frac{1}{2}x}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)dx=\frac{Sl}{ED}\left[x.\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)-\int x.\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}l^2-x^2}}\right]_0^{\frac{1}{2}l}$$

$$=\frac{Sl}{ED}\left[x.\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)+\left(\frac{1}{4}l^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}l}$$

$$=\frac{Sl}{ED}\left[\left(\frac{1}{2}.\sin^{-1}(1)+0\right)-\left(0+\frac{l}{2}\right)\right]=\frac{Sl}{ED}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{Sl^2}{ED}.$$

又ハ

$$y_c=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{M_0 l^2}{EI_0}=\frac{1}{32}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{wl^4}{EI_0}=\frac{1}{32}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{Wl^3}{EI_0}.$$

以上ノ解法ニ於テ i 及 y ガ正トナリシハ桁ノ中央點ヲ原點トセシニヨル.

28. 剪斷力ヨリ生ズル撓度 (Deflection due to Shearing) 鉛直剪斷力ヨリ生ズル撓度ハ彎曲率ヨリ生ズル撓度ト同樣ニシテ近似的ニ之ヲ求ムルヲ得.

桁ノ單位延長ニ付キ應剪變形ヲ θ, 應剪力ヨリ生ズル撓度ヲ y', 歪係數ヲGトスレバ中立面ノ細微長サ dx ノ變形ハ

$$dy'=\theta.dx=\frac{S_s}{G}.dx.$$

第三章第22節ニヨリ矩形斷面桁ノ中立面ニ於ケル單位應剪力ハ $S_s=\frac{V}{2I}.c^2$ ナルユヱ

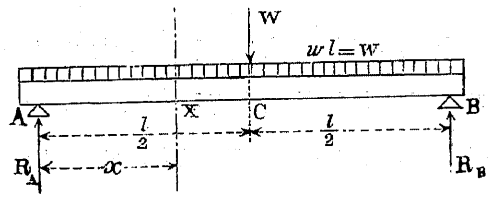
$$dy'=\frac{V.c^2}{2IG}.dx$$

但 c ハ中立面ヨリ縁維迄ノ距離ナリ.

$$\therefore\quad y'=\frac{c^2}{2IG}\int V.dx\text{..........................}(44)$$

例題　第35圖ノ如ク單桁ガ等布荷重 wl 及其中央點CニWナル集中荷重ヲ受クル場合

第35圖



$$y'=\frac{c^2}{2IG}\int_0^x(R_A-wx)dx=\frac{c^2}{2IG}\left[\frac{x}{2}(W'+wl)-\frac{wx^2}{2}\right]_0^x$$

$$y'=\frac{c^2}{2IG}\left[\frac{x}{2}(W'+wl)-\frac{wx^2}{2}\right]_0^{\frac{l}{2}}=\frac{c^2}{8IG}\left(W'l+\frac{wl^2}{2}\right).$$

鉛直剪斷力ガ桁ノ撓度ニ及ボス影響ハ彎曲率ノソレニ比シテ小ナルガ故ニ通常之ヲ省略ス. 尚剪

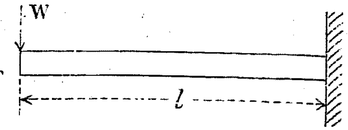
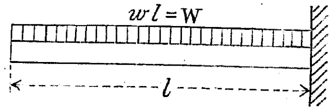
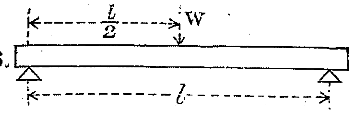
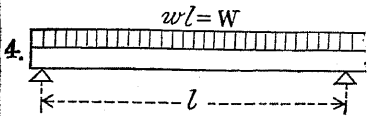
斷力ヨリ生ズル撓度ニ就テハ第九章第63節ニ於テ論ズベシ.

29. 比較强サ及剛性 (Comparative Strength and Stiffness) 張力又ハ壓力ヲ受クル棒狀體ノ强サハ單位應力ガ一定ノ値ヨリ超過スルコトナクシテ之ガ支ヘ得ル荷重ノ大小ニヨリテ計ルヲ得. 之ト同樣ニ桁ノ强サモ亦彎曲率ノ最大ナル横斷面ニ於ケル纖維應力ガ一定ノ値ヨリ超過スルコトナクシテ其桁ガ支ヘ得ル荷重ノ大小ニヨリテ計ルヲ得. 又棒狀體ノ單位縱變形ガ一定ノ値ヨリ超過スルコトナクシテ之ガ支ヘ得ル荷重ノ大小ニヨリテ其剛性ヲ計ルト同樣ニ桁ノ最大撓度ガ一定ノ値ヨリ超過スルコトナクシテ桁ガ支ヘ得ル荷重ノ大小ニヨリテ其剛性ヲ計ルヲ得.

表ニ記セル四種ノ桁ノ比較强サハ 1, 2, 4, 8 ナル數ニテ表ハサル. 即チ桁ノ材料ガ同一ニシテ等長且等大ナラバ第二種ノ桁ハ第一種ノ桁ニ比シ二倍ノ强サヲ有シ第三種ノ桁ハ四倍,第四種ノ桁ハ八倍ノ强サヲ有ス. 一般ニ云ヘバ

桁ノ强サハ S 及 I ニ正比例シ c 及 l ニ反比例ス.

矩形横斷面桁ノ强サハ高サノ自乘及幅ニ正比例シ長サニ反比例ス.

桁ノ種類	最大彎曲率 M.	單位應力 S ヲ生ズル荷重 W.	最大撓度 Δ.	最大撓度 Δ ヲ生ズル荷重 W.
1. 	$-Wl$	$1.\frac{SI}{cl}$	$-\frac{Wl^3}{3EI}$	$3.\frac{EI}{l^3}.\Delta$
2. 	$-\frac{Wl}{2}$	$2.\frac{SI}{cl}$	$-\frac{Wl^3}{8EI}$	$8.\frac{EI}{l^3}.\Delta$
3. 	$\frac{Wl}{4}$	$4.\frac{SI}{cl}$	$-\frac{Wl^3}{48EI}$	$48.\frac{EI}{l^3}.\Delta$
4. 	$\frac{Wl}{8}$	$8.\frac{SI}{cl}$	$-\frac{5Wl^3}{384EI}$	$76\frac{4}{5}.\frac{EI}{l^3}\Delta$
一般ノ式		$\alpha.\frac{SI}{cl}$		$\beta.\frac{EI}{l^3}\Delta$

是ニヨリテ見レバ矩形斷面ノ材片ヲ桁トシテ使用スルトキ何故ニ長キ邊ヲ鉛直ニ置クベキカ其理自ラ明カナルベシ.

又四種ノ桁ノ比較剛性ハ 3, 8, 48, $76\frac{4}{5}$ ナル數ニテ表ハサル. 即チ同一材料,等長且等大ナラバ第二種ノ桁ハ第一種ノ桁ニ比シ $2\frac{2}{3}$ 倍ノ剛性ヲ有シ,第三種ノ桁ハ16倍,第四種ノ桁ハ $25\frac{3}{5}$ 倍ノ剛性ヲ有ス. 一般ニ云ヘバ

桁ノ剛性ハ E 及 I ニ正比例シ l ノ三乘ニ反比例.

ス. 矩形斷面桁ノ剛性ハ高サノ三乘及幅ニ正比例シ長サノ三乘ニ反比例ス.

一定ノ荷重ヨリ生ズル單位應力 S ト最大撓度 Δ トノ關係ヲ知ラントセバ上表ノ最下列ニ與ヘタル W ノ二式ヲ等値ノモノトスベシ.

$$\alpha.\frac{\mathrm{SI}}{cl}=\beta.\frac{\mathrm{EI}}{l^3}\Delta,\quad \frac{\mathrm{S}}{\Delta}=\frac{\beta.\mathrm{E}.c}{\alpha.l^2}\dots\dots\dots\dots\dots(45)$$

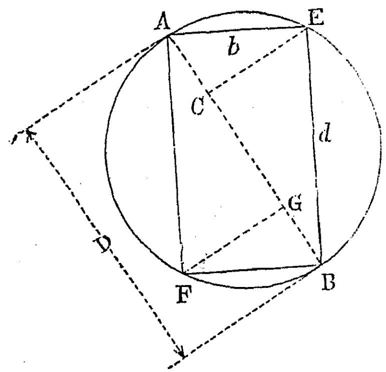
$\mathrm{W}=\dfrac{\beta.\mathrm{E.I}}{l^3}\Delta$ ナル式ヲ書換フレバ $\mathrm{W}=\dfrac{\beta.\mathrm{E.I}}{l^2}\left(\dfrac{\Delta}{l}\right)$ トナルユヱ $\dfrac{\Delta}{l}$ ハ與ヘラレタル荷重ニ對シ桁ノ剛性ヲ計ルベキ準度ナリ. 而シテ材料ニヨリテ Δ ノ値ニ限度アリテ鋼桁ノ許容撓度ハ約 $\dfrac{l}{600}$ 乃至 $\dfrac{l}{1{,}200}$ 即チ $\dfrac{\Delta}{l}=\dfrac{1}{600}$ 乃至 $\dfrac{1}{1{,}200}$, 木材桁ニアリテハ $\dfrac{\Delta}{l}=\dfrac{1}{400}$ 乃至 $\dfrac{1}{600}$ ナリ. 桁ノ高サヲ d トスレバ $c=k.d$ ナルユヱ (45) 式ヨリ

$$\frac{l}{d}=\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{S}}.k\left(\frac{\Delta}{l}\right)\dots\dots\dots\dots\dots(46)$$

k ハ 1 ヨリ小ナル數ニシテ之ハ橫斷面ノ形狀ニヨリテ定マルモノナリ. $\dfrac{\Delta}{l}$ ニ相當ノ値ヲ代入スレバ桁ノ支間ト高サトノ比ヲ適當ニ定ムルヲ得.

矩形斷面ノ桁ニアリテハ $\mathrm{W}=\dfrac{\beta.\mathrm{E}.bd^3.\Delta}{12l^3}$ ナルヲ以テ bd^3 ガ最大ナル如キ斷面ノ桁ニ於テ剛性ガ最大ナリ. 今此條件ヲ滿足スベキ桁ヲ丸太材ヨリ切取ル方法ヲ示サントス. 第36圖ニ於テ

第 36 圖



$$bd^3=\sqrt{\mathrm{D}^2-d^2}.d^3.$$

之ヲ d ニ就テ微分シテ第一次微分係數ヲ零ト置ケバ所要ノ D ト d トノ割合ヲ知ルヲ得.

$$3d^2\sqrt{\mathrm{D}^2-d^2}-\frac{d^4}{\sqrt{\mathrm{D}^2-d^2}}=0,$$

即チ

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{D},\quad b=\sqrt{\mathrm{D}^2-d^2}=\frac{1}{2}.\mathrm{D},$$

$$b:d=1:\sqrt{3}\fallingdotseq 4:7.$$

第 36 圖ニ於テ △ACE ト △BFA トハ相似ナルユヱ

$$\mathrm{AC}=\frac{b^2}{\mathrm{D}}=\frac{\mathrm{D}}{4}.$$

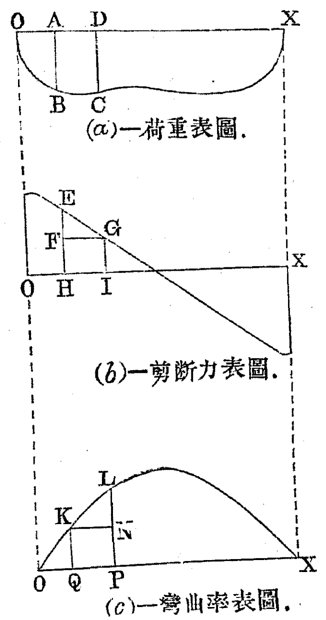
夫故ニ直徑 AB ヲ四等分シテ其分割點 C 及 G ヨリ AB ニ垂直ニ CE 及 GF ヲ引キ此等ガ圓周ヲ切ル點 E, F ト A, B トヲ連結シテ得タル矩形ハ即チ求ムル所ノ橫斷面形ナリ.

30. 圖式解法

(I) 圖式積分法 (Graphic Integration)

(1) **定義**　荷重,剪斷力及彎曲率表圖相互ノ關係ハ次ノ如ク表ハスヲ得. 即チ彎曲率表圖ノ任意二斷面ニ於ケル二ツノ縱距ノ差ハ剪斷力表圖ニ於テ夫等二斷面間ノ面積ヲ表ハス. 又剪斷力表圖ノ夫等二斷面ニ於ケル縱距ノ差ハ荷重表圖ニ於テ夫等二斷面間ノ面積ヲ表ハス. 例ヘバ第37圖ニ於テ彎曲率表圖 (c) ノ LN ハ剪斷力表圖 (b) ノ面積 EHIG ヲ表ハシ剪斷力表圖ノ EF ハ荷重表圖 (a) ノ面積 ABCD

第37圖

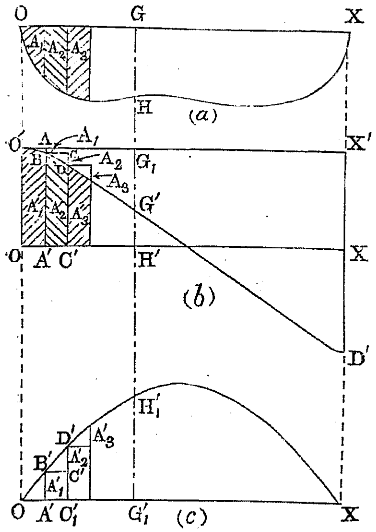


ヲ表ハス.

凡テ一ツノ曲線アリテ其縦距ガ他ノ與ヘラレタル曲線ト一定線トニテ界サレタル面積ノ或一部分ヲ表ハストキハ其曲線ヲ名付ケテ**第一次積分曲線**(First Integrated Curve)ト謂フ. 此定義ニヨレバ**彎曲率表線**(Moment Curve)ハ**剪斷力表線**(Shear Curve)ノ第一次積分曲線ニシテ剪斷力表線ハ**荷重表線**(Load Curve)ノ第一次積分曲線ナリ〔次ノ(2)參照〕彎曲率表線ハ荷重表線ノ第一次積分曲線ノ第一次積分曲線ナルヲ以テ之ヲ**第二次積分曲線**(Second Integrated Curve)ト謂フ. 即チ第二次積分曲線ノ縦距ハ第一次積分曲線ト一定線トニテ界サレタル面積ノ或一部分ヲ表ハス. 同様ニ第二次積分曲線ノ積分曲線ヲ**第三次積分曲線**(Third Integrated Curve)ト謂フ.

(2)　**積分曲線ヲ求ムル方法　第一方法**　第38圖(a)ニ與ヘタル曲線ノ第一次及第二次積分曲線ヲ求

第38圖



メントス.

第一次積分曲線ヲ求ムルニハ先ヅ(a)圖ノ面積ヲ適宜ニ分割シテ各面積ヲ測ルベシ. (b)圖ニ示ス如ク隨意ニ選ミタル軸O'X'ヨリ或縮尺ヲ以テ面積A_1ニ等シクABヲ取リ,次ニ面積A_2ニ等シクCDヲ取リ,此ノ如クシテ順次ニ得タル點B, D等ヲ連結セル連續曲線O'G'D'ハ第一次積分曲線ナリ. 而シテ任意ノ縦距G_1G'ハ(a)圖ニ於テ左端ヨリ斷面GH迄ノ間ノ面積ヲ表ハスモノナリ.

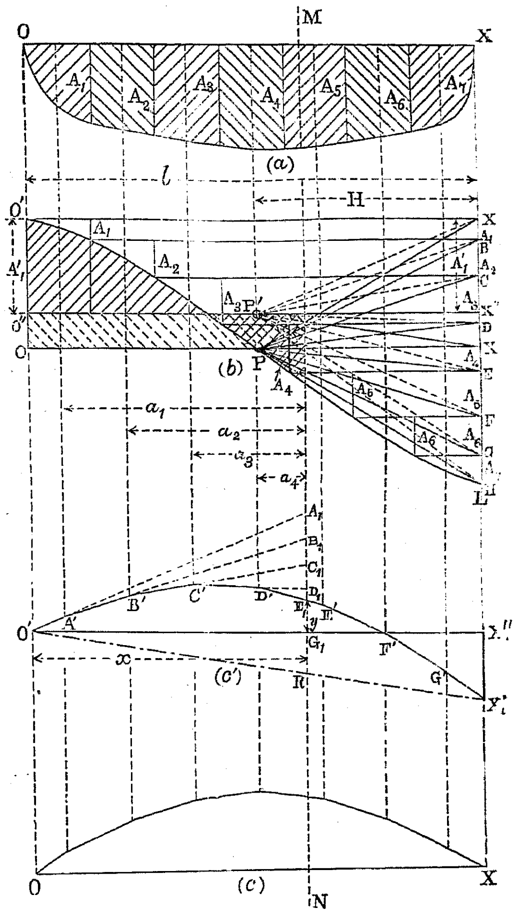
問題ヲ解クニ當リテハ(b)圖ノOO'ニテ示ス如ク常ニ面積ニ加ヘラルベキ常數アリ. 是レ積分常數ニシテ之ハ通常問題ノ條件ニ依リテ定ムルヲ得ベク之ガ零ナル場合アリ. 剪斷力表線ニアリテハ此常數ハ左支端ニ於ケル鉛直剪斷力ニシテ彎曲率表線ニアリテハ左支端ニ於ケル彎曲率ナリ. 常數ニ等シクOO'ヲ取リテOX軸ヲ引ケバ積分曲線ニ對スル眞ノ據線(True Reference Line)ハOX線ニシテ曲線

(*b*)ニテ表ハス函數ノ眞値ハ斷面 GH ニ於テハ H′G′ ナリ．然ラバ積分曲線圖ニ於テ測ルベキ面積ハ曲線ト OX 軸トニテ界サレタル面積ナリトス．

第二次積分曲線ヲ求ムルニハ(*b*)圖ニ示ス如ク曲線 O′G′D′ ト軸 OX トノ間ノ面積ヲ適宜ニ分割シ或縮尺ヲ以テ任意ニ選ミタル軸 OX ヨリ面積 A_1' ニ等シク縱距 A′B′ ヲ取リ面積 A_2' ニ等シク C′D′ ヲ取ルベシ．以下之ニ準ズ〔(*c*)圖〕然ラバ縱距 $G_1'H_1'$ ハ(*b*)圖ニ於テ原點ヨリ斷面 G′H′ 迄ノ間ノ面積ヲ表ハスベシ．(*c*)圖ニ於テハ積分常數ヲ零ト假定セリ．

第二方法　第一方法ニヨルトキハ積分常數ヲ求メザルベカラズ．從テ場合ニヨリテハ次ニ述ブルガ如キ方法ヲ使用スルヲ便トス．第一方法ト同樣ニ第39圖(*b*)ノ第一次積分曲線ヲ畫キ面積 A_1, A_2 等ヲ鉛直軸 X′L 上ニ投射スベシ．但 O′X′ ハ任意ニ選ミタル軸ナリ．若シ O″X″ ノ如キ他ノ軸ニ對スル積分曲線ヲ得ントセバ常數 O′O″ ヲ假定シ其軸上ニ極 P′ ヲ取ルベシ．此場合ニ極距 H ノ單位及縮尺ハ OX 軸ニ沿ヒテ測リタル距離ノソレト同一ナリトス．次ニ放射線 P′X′, P′B, P′C 等ヲ引キ(*c*′)圖ノ O′ 點ヨリ始メテ(*b*)圖ノ P′X′ ニ並行ニ O′A′ ヲ引クベシ．之ガ(*a*)圖ノ面積 A_1 ノ平均縱距(Mean Ordinate)ノ延長線ヲ

第39圖



切ル點ヲ A′ トシ此點ヲ通シテ(*b*)圖ノ P′B ニ並行ニ A′B′ ヲ引クベシ．索多邊形 O′A′B′−E′−X′ ハ順次此方法ヲ續ケテ得タルモノニシテ(*c*′)圖ノ水平軸 $O'X_1''$ ヨリ測リタル縱距ハ(*b*)圖ニ於ケル曲線ト軸 O′X″

トニテ圍マレタル面積ヲ表ハス．卽チ或斷面 MN ヲ考フレバ(c')圖ノ y ハ(b)圖ニ於テ原點ヨリ其斷面迄ノ面積ヲ表ハス．其證明次ノ如シ．

(b)圖ノ $\triangle P'X'X''$ ト(c')圖ノ $\triangle O'A_1G_1$ トハ相似ナルユエ(b)圖ノ積分常數$O'O''$ヲA_1'トスレバ$\dfrac{A_1'}{H}=\dfrac{A_1G_1}{x}$；相似三角形 $P'X'B$ 及 $A'A_1B_1$ ヨリ $\dfrac{A_1}{H}=\dfrac{A_1B_1}{a_1}$；相似三角形 $P'BC$ 及 $B'B_1C_1$ ヨリ $\dfrac{A_2}{H}=\dfrac{B_1C_1}{a_2}$；相似三角形 $P'CD$ 及 $C'C_1D_1$ ヨリ $\dfrac{A_3}{H}=\dfrac{C_1D_1}{a_3}$；相似三角形 $P'DE$ 及 $D'D_1E_1$ ヨリ $\dfrac{A_4}{H}=\dfrac{D_1E_1}{a_4}$ ヲ得．卽チ

$$A_1'.x=H(A_1G_1),\quad A_1.a_1=H(A_1B_1),\quad A_2.a_2=H(B_1C_1),$$

$$A_3.a_3=H(C_1D_1),\quad A_4.a_4=H(D_1E_1),$$

$$\therefore\quad A_1'.x-A_1.a_1-A_2.a_2-A_3.a_3-A_4.a_4=H(A_1G_1-A_1B_1-B_1C_1-C_1D_1-D_1E_1),$$

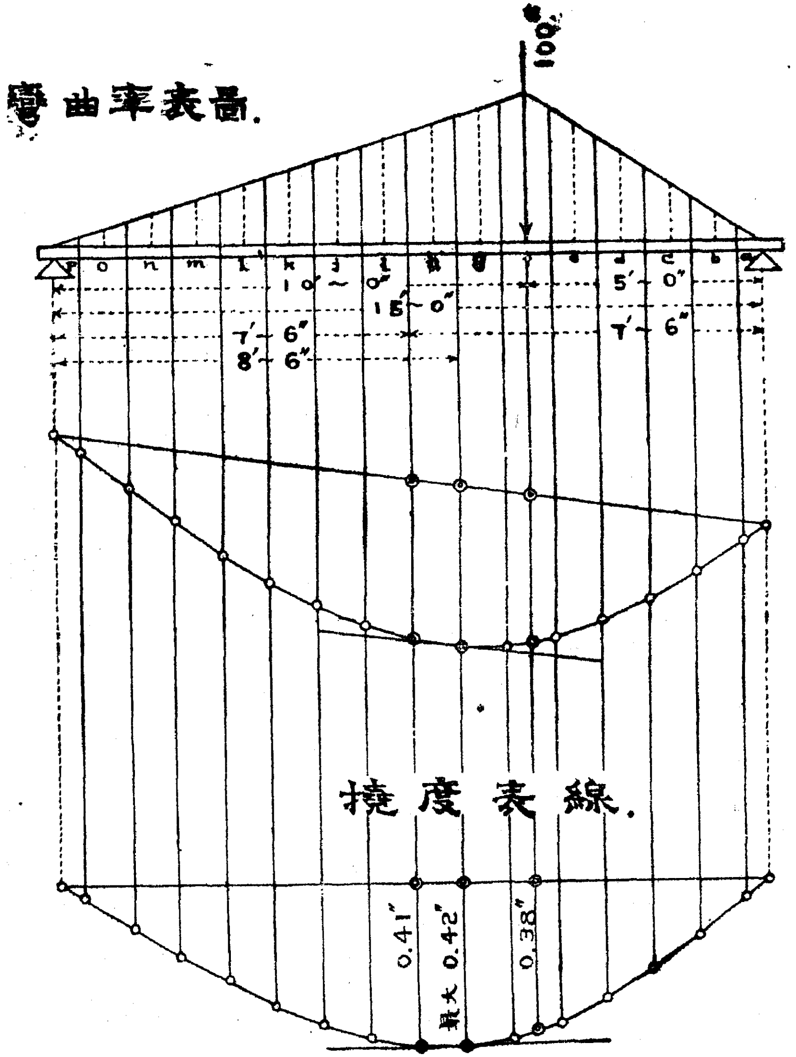
卽チ $$A_1'.x-\Sigma A.a=H.y.$$

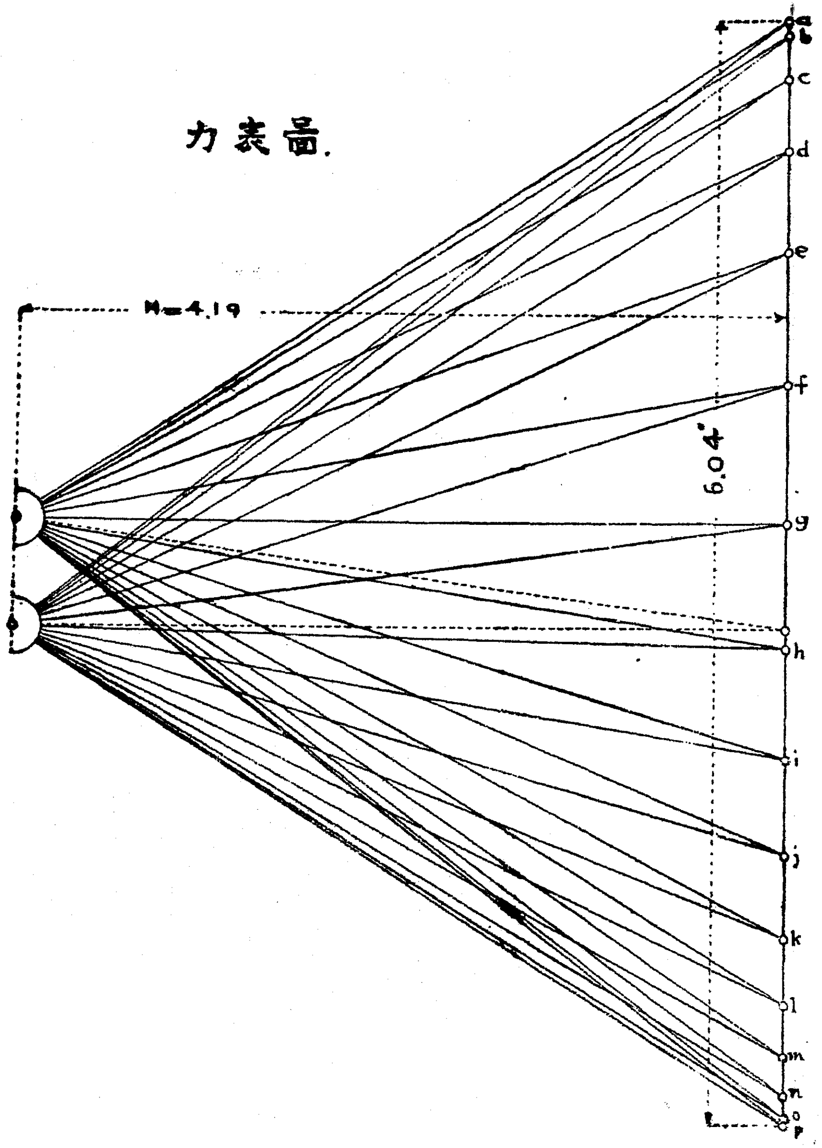
$(A_1'.x-\Sigma A.a)$ ハ(b)圖ニ於テ實線ニテ陰ヲ附シタル部分ノ面積ノ代數和ヲ表ハスヲ以テ $H.y$ ハ原點ヨリ斷面迄ノ間ニテ軸ト曲線トニテ圍マレタル面積ニ等シ．從テ(c')ハ(b)ノ第一次積分曲線ニシテ(a)ノ第二次積分曲線ナリ．

以上ノ解法ニ於テハ積分常數ヲ假定セシユエ眞ノ積分曲線ヲ得ルニハ(c')曲線ニ對シテ補正ヲ要ス．

撓度圖式解法

附圖 I.





條件:

木材丸桁 — 徑間15呎,直徑4吋.

彈性係數 E = 2,000,000 听每平方吋.

集中荷重 = 100 听.

尺度ノ定メ方:

最大彎曲率 = 4,000 听吋.

彎曲率表畫面積 $= \frac{4,000 \times 15 \times 12}{2} = 360,000$ 听吋^2.

∴ 彎曲率表畫面積尺度 1吋 $= \frac{360,000}{6.04} \doteqdot 60,000$ 听吋^2

$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{3.1416 \times 2^4}{4} = 12.5664$ 吋^4

$EI = 2,000,000 \times 12.5664 = 25,132,720$ 听吋^2

$n = 100.$

$H = \frac{25,132,720}{100 \times 60,000} = 4.19$

$\frac{m}{n} = \frac{48}{100} = 0.48.$

∴ 撓度尺度 1吋 = 0.48 吋.

尺度: { 線尺度 1吋 = 48 吋.
彎曲率表畫面積尺度 1吋 = 60,000 听吋^2
撓度尺度 1吋 = 0.48 吋.

上記ノ方法ニヨリテ彎曲率表圖ノ第一次積分曲線即チ荷重表圖ノ第三次積分曲線ヲ書クヲ得ベシ. 是レ彈曲線ニシテ其縱距ハ撓度ヲ與フベキナリ.

先ヅ彎曲率表圖ノ面積ニ等シキ大サノ荷重ガ表圖ノ如キ配布ニテ桁ニ加ハルモノト見做シ,表圖面積ヲ適宜ノ數ノ細長面ニ分割シ(多クノ數ニ分割スル程精密ナル結果ヲ得),各部分ノ面積ニ等シキ荷重ガ各細長面ノ中心ヲ通シテ引キタル線(通常中央鉛直線ヲ取ル)ヲ働線トシテ桁ニ働クモノト假定スベシ. 極距ヲ乘積 E.I ニ等シク取リ普通ノ方法ニ依リテ索多邊形ヲ書クベシ. 然ラバ此索多邊形ノ縱距ハ各點ノ撓度ヲ表ハスベキナリ. 何トナレバ其多邊形ノ縱距ハ y_x ト極距トノ乘積ヲ表ハシ之ヲ乘積 E.I ニテ除シタルモノガ撓度 y_x ナレバナリ. 桁ガ水平ノ位置ニアルトキハ撓度表線ノ閉線ガ水平ナルベク假令上述ノ如クニシテ得タル索多邊形ノ閉線ガ傾斜スルトモ其多邊形ヲ利用シテ眞ノ撓度表線ヲ書クコト容易ナリ(附圖 I).

實際ノ場合ニ於テハ眞ノ撓度ハ甚小ナルユヱ極距ヲ $\frac{E.I}{n}$ ニ取リテ撓度表線ノ縱距ヲ增大スルヲ便トス. 此ノ如クニシテ得タル縱距ハ眞ノ長サノ n 倍タルベキナリ. 又横距ガ實際ノ長サノ $\frac{1}{m}$ ノ縮尺

ニテ表ハサルヽナラバ縦距ノ眞ノ長サハ表圖上ニテ測リタル長サニ$\frac{m}{n}$ヲ乘ジタルモノナリ.

(3) **積分常數** 第39圖ニ於テ(b)曲線ト或一定線トノ間ノ面積又ハ(c′)曲線ノ縦距ニテ如何ナル量ガ表ハサルヽトモ(b)及(c′)兩圖ニ於テ軸上ノ或二點ニ於ケル縦距ノ値ハ問題ノ條件ヨリ既知ナルカ又ハ其値ヲ知リ得ベシ. 而シテ此ノ如キ二點ハ桁ノ場合ニハ放端,支端又ハ中央點ナリトス.

曲線(a),(b)ヨリ常數ヲ定ムル能ハザルトキハ曲線(c′)ヲ利用スルヲ得. (b)圖ノ假定常數A_1'ニ對シテ曲線(c′)ガ左端ニ於テ零,右端ニ於テ負値$X_1''X_1'$ヲ示セルハ(b)圖ニ於テ負ノ面積ガ正ノ面積ヨリ$X_1''X_1'$丈超過セルコトヲ表ハスモノナリ. 單桁ニ於ケル彎曲率表線ノ如ク各端ニ於ケル縦距ガ零ナルトキハ曲線ハX_1''點ニテ終ルベキナリ. 之ガ爲メニハ曲線(b)ニ於ケル負ノ面積ヲ減ジ正ノ面積ヲ增サヾルベカラズ. 卽チ據軸(Reference Axis)ヲ下方ニ移シテ常數A_1'ヲ增ザヾルベカラズ.

(b)圖ニ於ケル正負兩面積ヲシテ等シカラシムベキ常數ヲ見出スニハ(c′)圖ノ索多邊形ノ閉線$O'X_1'$ニ並行ニ$P'X$ヲ引キXヲ通シテ水平軸OXヲ引ケバ可ナリ. 斯クシテ得タル$XX'=OO'$ハ常數ノ眞値ナリ.

其證明次ノ如シ.

(b)圖ノ正負兩面積ヲ等シカラシムルニハ正ノ面積ガ增加スル量$O''X''XO=l(X''X)$ト(c′)圖ニ於ケル$X_1''X_1'$トHトノ乘積トガ等シカラザルベカラズ. 然ルニ(b)圖ノ$\triangle P'X''X$ト(c′)圖ノ$\triangle O'X_1''X_1'$トハ相似ナルユヱ

$$\frac{H}{X''X}=\frac{l}{X_1''X_1'},\quad \text{卽チ}\ H(X_1''X_1')=l(X''X).$$

眞ノ曲線ノ縦距ハ(c′)圖ニ於ケル二軸$O'X_1''$, $O'X_1'$間ノ縦距ヲ原ノ曲線ノ縦距ニ加減シタルモノナリ. 何トナレバ(b)圖ノ$\triangle P'X''X$ト(c′)圖ノ$\triangle O'G_1R$トハ相似ナルユヱ

$$\frac{H}{X''X}=\frac{x}{G_1R}\quad \text{卽チ}\quad H(G_1R)=x(X''X).$$

卽チ(c′)圖ノ縦距$(\overline{G_1R})$ニ極距ヲ乘ジタルモノハ(b)圖ニ於テ破線ニテ陰ヲ附シタル部分ノ面積ニ等シ.

眞ノ曲線ハ縦距ノ眞値ヲ水平軸ヨリ測リ若クハ(b)圖ノ軸OX上ニ新シキ極Pヲ取リテ之ヲ畫クヲ得. (c)圖ハ新シキ極Pヲ用ヰc′)圖ト同樣ニシテ畫キタルモノナリ.

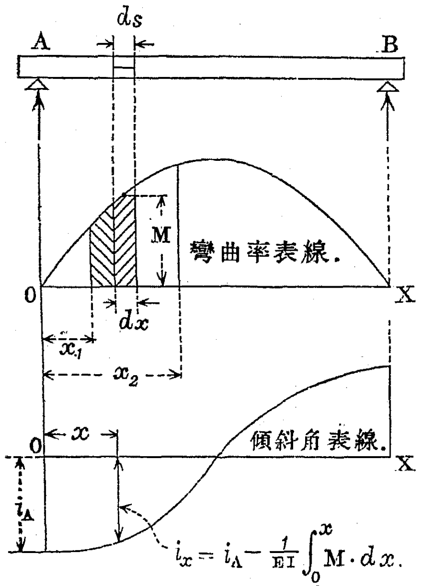
(II) **傾斜角表線**(Slope Curve) 傾斜角表線又ハi表線トハ其縦距ガ桁ノ各點ニ於ケル傾斜角ノ値ヲ表ハス曲線ノ名稱ナリ. 原點ヨリx_1, x_2ナル距離

ニ於テ中立面上ノ二點間ノ傾斜角ノ變化ハ

$$i_2-i_1=\frac{1}{\mathrm{EI}}\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{M}.dx$$

ニシテ此關係ヨリ圖式的ニ桁ノ i 表線ヲ定ムルヲ得.

第 40 圖



第40圖ニ示ス如ク M.dx ハ彎曲率表圖ニ於ケル細長面積ニ等シク任意ノ二斷面間ノ面積ハ

$$\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{M}.dx$$

ナリ. 依テ桁ノ任意二斷面間ノ彈曲線傾斜角ノ變化ヲ知ルニハ彎曲率表圖ニ於ケル其二斷面間ノ面積ヲ乘積 E.I ニテ除セバ可ナリ.

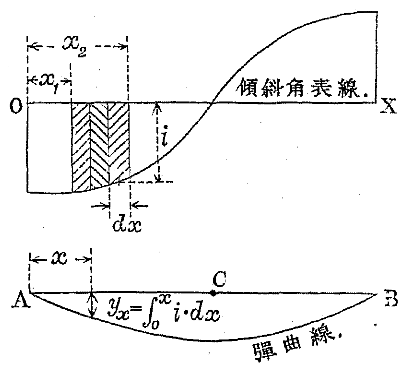
若シEガ常數ニシテIガ變數ナレバ彎曲率表圖ノ縱距ヲ I ニテ除シ之ヲ新ラシキ縱距トシテ $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}}$ 曲線ヲ畫クベシ. 但Iハ彎曲率表圖ニ於テ縱距ヲ測リタル斷面ノ慣性能率ナリトス.

(III) **撓度表線** (Deflection Curve) 之ハ彈曲線ニシテ任意ノ點ニ於ケル縱距ガ其點ノ撓度ヲ表ハスモノナリ. 第41圖ニ示セル細長面積ハ $i.dx$ ヲ表ハシ

$$\int_{x_1}^{x_2}i.dx$$

ハ原點ヨリ x_1, x_2 ナル距離ニ於ケル二斷面間ノ面積ナリ. 而シテ原點ヨリ x ナル距離ニアル點ノ撓度ハ

第 41 圖



$$y_x=\int_0^x i.dx$$

ナルヲ以テ撓度表線圖ニ於テ x_1, x_2 ナル距離ニ於ケル二點ノ撓度ヲ夫々 y_1, y_2 トスレバ

$$y_2-y_1=\int_{x_1}^{x_2}i.dx.$$

然レバ傾斜角表線圖ニ於テ二斷面間ノ面積ハ彈曲線表圖ニ於テ之ニ相當スル二點ノ縱距ノ差卽チ撓度ノ差ヲ表ハスベシ.

又彎曲率表圖面積ノ第一次率ト撓度トノ關係ハ次ノ如ク表ハスヲ得(第42圖).

第25節(20式ヨリ

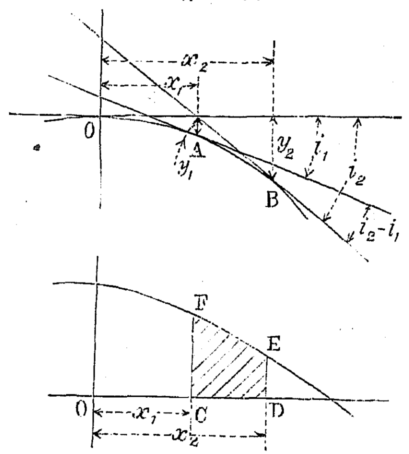
$$x.\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}.x$$

之ヲ部分積分法ニヨリ積分界限 $x=x_1$, $x=x_2$ ノ間ニ積分スレバ

$$\left[x.\frac{dy}{dx}-y\right]_{x=x_1}^{x=x_2}=\frac{1}{EI}\int_{x_1}^{x_2}M.x.dx,$$

$$(x_2.i_2-y_2)-(x_1.i_1-y_1)=\frac{1}{EI}\int_{x_1}^{x_2}M.x.dx.$$

第 42 圖



積分ノ各界限ニ於テ x 或ハ $\frac{dy}{dx}$ ガ零ナルガ爲メニ $x.\frac{dy}{dx}=0$ トナラバ

$$\left[x.\frac{dy}{dx}-y\right]_{x=x_1}^{x=x_2}\quad ハ\quad -(y_2-y_1)$$

トナル. 然ラバ

$$\frac{1}{EI}\int_{x_1}^{x_2}M.x.dx$$

ハ二點間ノ桁ノ撓度ノ變化ヲ與フ. 而シテ $\int_{x_1}^{x_2}M.x.dx$ ハ彎曲率表圖ニ於テ二點 $x=x_1$, $x=x_2$ 間ノ面積ノ原點ニ對スル第一次率ヲ表ハス. 此面積ヲAトシ原點ヨリ共中心迄ノ距離ヲ $\bar{x}$ トスレバ $\int_{x_1}^{x_2}M.x.dx$ ハ $A.\bar{x}$ ニテ表ハスヲ得. 故ニ積分ノ二界限ニ於テ $x.\frac{dy}{dx}$ ガ零ナルトキハ

$$-(y_2-y_1)=\frac{1}{EI}\int_{x_1}^{x_2}M.x.dx=\frac{A.\bar{x}}{EI}$$

ナリ. **若シ積分下界限ガ零ニシテ且原點ニ於テ y ガ零ナラバ**

$$\left[x.\frac{dy}{dx}-y\right]_0^x=x.i_x-y_x=\frac{1}{EI}\int_0^x M.x.dx.$$

之ハ x 點ニ於ケル切線ノ鉛直投射線ト共點ニ於ケル撓度トノ差ヲ表ハス. 此式ヲ書換フレバ

$$y_x=x.i_x-\frac{1}{EI}\int_0^x M.x.dx=x.i_x-\frac{A.\bar{x}}{EI}\text{……………}(47)$$

是レ原點ヨリ x ナル距離ニ於ケル點ノ撓度ヲ與フル式ニシテ彎曲率Mハ正又ハ負ナリ.

例題 1. 放端ニ於テ集中荷重Wヲ受ケタル突桁.

放端ヲ原點トスレバ $x=0$ ニ對シテ $x.\frac{dy}{dx}=0$, 又固定端ニ於テハ $x=l$, $\frac{dy}{dx}=0$ ナルユヱ $x.\frac{dy}{dx}=0$ ナリ. 然ルニ此場合ニMハ負ナルニヨリ(47)式ヨリ(放端ヲ原點トス)

$$y_l=\frac{A.\bar{x}}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{Wl^2}{2}\times\frac{2}{3}l\right)=\frac{Wl^3}{3EI}.$$

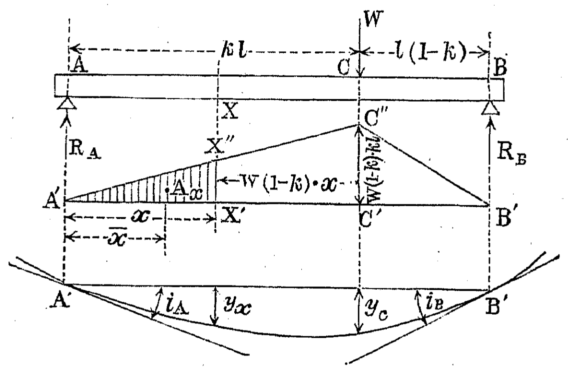
例題 2. 左支端ヨリ kl ナル距離ニ於テ集中荷重 W ヲ受ケタル單桁(第四章第27節參照).

左支端 A ヲ原點トスレバ

$$\left[x.\frac{dy}{dx}-y\right]_0^l=l.i_B=\frac{1}{EI}\int_0^l M.x.dx=\frac{A.\bar{x}}{EI},$$

$$\therefore\ i_B=\frac{A.\bar{x}}{EI.l}$$

第 43 圖



但 $A.\bar{x}$ ハ原點 A ニ對スル彎曲率表圖面積ノ第一次率ナリ. 同樣ニ右支端 B ヲ原點トスレバ左支端ニ於ケル傾斜角 i_A ノ値ハ $\frac{A(l-\bar{x})}{EI.l}$ ナリ. 而シテ i_A ト i_B トハ符號ヲ異ニス.

今原點ヨリ x ナル距離ニ於ケル點 X ト A トノ間ノ彎曲率表圖ノ面積ヲ A_x トスレバ

$$i_x=-i_A+\frac{A_x}{EI}.$$

此値ヲ (47) 式ニ代入スレバ

$$y_x=-x.i_A+\frac{x.A_x}{EI}-\frac{A_x.\bar{x}}{EI},$$

$$\therefore\ y_x=-x.i_A+\frac{A_x(x-\bar{x})}{EI}\cdots\cdots\cdots\cdots(47_a)$$

此式ニ於テ $A_x(x-\bar{x})$ ハ X 點ニ對スル A_x ノ第一次率ナリ.

第 43 圖ニ於テ i_A ノ値ハ第 27 節ノ公式ニヨリ

$$i_A=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}W(1-k)x^2-\frac{1}{6}Wl^2(2k-3k^2+k^3)\right]_{x=0}$$

$$=-\frac{Wl^2(2k-3k^2+k^3)}{6EI}=-\frac{Wl^2.k(1-k)(2-k)}{6EI}.$$

$$i_x=-i_A+\frac{1}{EI}(\text{面積 } A'X'X'')=-i_A+\frac{1}{EI}\left[W(1-k)x.\frac{x}{2}\right]$$

$$=-\frac{W(1-k)}{EI}\left[\frac{kl^2(2-k)}{6}-\frac{x^2}{2}\right].$$

AC 間ニ於テハ (47_a) 式ヨリ

$$y_x=-x.i_A+\frac{W(1-k)x}{EI}.\frac{x}{2}.\frac{x}{3}=-\frac{W(1-k)x}{EI}\left[\frac{kl^2(2-k)-x^2}{6}\right].$$

$x=kl$ ナルトキハ

$$y_c=-\frac{Wk^2l^3(1-k)^2}{3EI}.$$

此等ハ第 27 節ニ於テ與ヘタル公式ト一致ス.

若シ $k=\frac{1}{2}$ 即チ W ガ單桁ノ中央點ニアルトキハ

$$y_c=-\frac{Wl^3}{3EI}\left[k^2(1-k)^2\right]_{k=\frac{1}{2}}=-\frac{Wl^3}{48EI}.$$

此場合ニ左支端ヲ原點トシ桁ノ半長ト $\frac{W}{2}$ トヲ取リテ考フレバ積分下界限ガ零ニシテ且原點ニ於テ y ガ零ナリ, 又積分上界限 $x=\frac{l}{2}$ ニ對シテ $\frac{dy}{dx}$ ガ零ニシテ M ハ正ナルニヨ(47)式ヨリ

$$y_{\frac{l}{2}}=-\frac{A.\bar{x}}{EI}=-\frac{1}{EI}\left[\frac{Wl}{8}.\frac{l}{4}.\frac{2}{3}.\frac{l}{2}\right]=-\frac{Wl^3}{96EI}$$

$$\therefore\ \text{眞ノ中央點撓度}\ y_{\frac{l}{2}}=-\frac{Wl^3}{96EI}\times 2=-\frac{Wl^3}{48EI}.$$

(IV) 曲線相互ノ關係及曲線ニ用フベキ單位 (Relations between Curves and Units for Curves)

今桁ノ任意ニ

斷面ヲ取リテ曲線間ニ成立スル關係ヲ摘記スレバ

(第一)鉛直剪斷力ノ增加ハ荷重表圖ニ於ケル夫等二斷面間ノ面積ニ等シ.

(第二)彎曲率ノ增加ハ剪斷力表圖ニ於ケル夫等二斷面間ノ面積ニ等シ.

(第三)傾斜角ノ增加ハ彎曲率表圖ニ於ケル夫等二斷面間ノ面積ヲ乘積 EI ニテ除シタルモノニ等シ.

(第四)撓度ノ增加ハ傾斜角表線圖ニ於ケル夫等二斷面間ノ面積ニ等シ.

依テ積分常數ヲ定メテ曲線ト據軸トニテ圍マレタル面積ヲ測レバ桁ノ彈曲線ニ關スル問題ヲ解クコト容易ナリ.

次ニ E ヲ听每平方吋, I ヲ吋^4, X 軸卽チ支間ニ沿ヒテ測リタル長サノ m 吋ヲ 1 吋ニテ表ハストキハ曲線ノ縱距ニ用フベキ縮尺ハ次ノ如シ.

荷重表圖: 1 吋$=w$ 听每吋, 面積 1 平方吋$=w.m$ 听.

剪斷力表圖: 荷重表圖ノ面積 n 平方吋ヲ 1 吋ニテ表ハセバ

1 吋$=n.w.m$ 听, 面積 1 平方吋$=n.w.m^2$ 听吋.

彎曲率表圖: 剪斷力表圖ノ面積 p 平方吋ヲ 1 吋ニテ表ハセバ

1 吋$=p.n.w.m^2$ 听吋, 面積 1 平方吋$=p.n.w.m^3$ 听吋^2.

傾斜角表線圖: 彎曲率表圖ノ面積 q 平方吋ヲ EI ニテ除シタル商ヲ 1 吋ニテ表ハセバ

1 吋$=\dfrac{q.p.n.w\,m^3}{EI}$ 弧度, 面積 1 平方吋$=\dfrac{q.p.n.w.m^4}{EI}$ 吋.

撓度表線圖: 傾斜角表線圖ノ面積 r 平方吋ヲ 1 吋ニテ表ハセバ

1 吋$=\dfrac{r.p.q.n.w.m^4}{EI}$ 吋.

圖式積分法第二方法ニ就テ剪斷力表線圖ニ於ケル縱距縮尺(橫距單位ハ總テノ表圖ニ於テ同一ナリトス)ヲ 1 吋$=100$ 听トシ極距 H ヲ 24 吋トシテ彎曲率表圖ヲ畫ケバ此表圖ノ縱距縮尺ハ 1 吋$=24\times100=2{,}400$ 听吋ナリ. 次ニ極距ヲ 20 吋ニ取リテ傾斜角表線圖ヲ畫ケバ其縱距縮尺ハ 1 吋$=\dfrac{20\times2{,}400}{EI}$ 弧度トナル. 然レバ E$=1{,}500{,}000$ 听/平方吋, I$=1$ 吋^4 トスレバ 1 吋$=\dfrac{20\times2{,}400}{1{,}500{,}000\times1}=0.032$ 弧度ナリ. 又極距ヲ $31\frac{1}{4}$ 吋トシテ彈曲線圖ヲ畫ケバ其縱距縮尺ハ

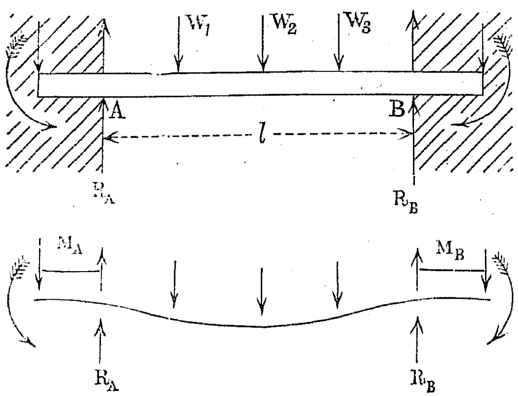
1 吋$=0.032\times31\frac{1}{4}=1$ 吋ナリ.

第五章 固定桁及連續桁

(Built-In and Continuous Beams)

31. **固定桁ノ一般解說** 固定桁トハ荷重ガ加ハルトキ兩端ニ於テ桁ノ傾斜ガ變ゼザル樣充分ニ控制セラレタルモノヲ謂フ. 固定端ノ高サハ通常同一ニシテ各端ガ充分ニ固定セラルヽトキハ桁端ノ傾斜角ハ零ナリ. 如斯ニ桁ヲ固定スレバ最大單位應力及撓度ハ減少シ從而桁ノ强サ及剛性ヲ增ス. 此種ノ桁ガ荷重ヲ受クルトキハ支端固定ノ爲メニ兩端ニ於テ**固定力率**(Fixing Moment)ガ起リ桁ノ中央部ハ下方ニ凸面ヲ呈シ兩端ハ上方ニ凸面ヲ呈スベシ. 然ラバ彎曲率ガ零ナル二點アルベキナリ. 此點ヲ**反曲點**(Point of Inflection)ト謂フ.

第44圖



固定桁ニ關スル問題ヲ解クニハ各端ニ於テ桁ト壁トノ間ニ働ク未知ノ外力ヲ第44圖ニ示ス如クR_A, R_Bナル鉛直反力ト各端ニ於テ彈曲線ヲ水平ニ保ツニ足ルベキ偶力トニ置換ヘテ考フベシ此偶力率M_A, M_Bハ所謂固定力率ニシテ鉛直反力ハ各端ノ剪斷力ニ等シ而シテR_A, R_Bノ和ハ平衡條件ニヨリテ桁上ノ全荷重ニ等シ. 配布荷重ノ場合ニハ上述ノ方法ヲ用ヒズトモ公式 $EI\frac{d^4y}{dx^4}=-w$ ヲ積分シテ問題ヲ解クヲ得. 今二種ノ解法ノ例ヲ示サン.

(1) **固定桁ガ等布荷重wヲ受クル場合.**

$$EI.\frac{d^4y}{dx^4}=-w,\quad EI.\frac{d^3y}{dx^3}=-w.x+C_1,$$

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}w.x^2+C_1.x+C_2,$$

$$EI.\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{6}w.x^3+\frac{1}{2}C_1.x^2+C_2.x+C_3.$$

桁ノ一端ヲ原點トセバ $x=0$, $x=l$ ノ點ニ於テ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルユヱ

$$C_3=0,\quad -\frac{1}{6}wl^2+\frac{1}{2}C_1l+C_2=0,\quad 卽チ\quad C_2=\frac{1}{6}wl^2-\frac{1}{2}C_1l.$$

$$\therefore\quad EI.\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{6}w.x^3+\frac{1}{2}C_1.x^2+\frac{1}{6}wl^2.x-\frac{1}{2}C_1l.x$$

$$EI.y=-\frac{1}{24}w\,x^4+\frac{1}{6}C_1.x^3+\frac{1}{12}wl^2.x^2-\frac{1}{4}C_1l.x^2+C_4.$$

$x=0$, $x=l$ ノ値ニ對シ $y=0$ ナルユヱ

$$C_4=0,\quad -\frac{1}{24}wl+\frac{1}{6}C_1+\frac{1}{12}wl-\frac{1}{4}C_1=0,$$

即チ　$C_1=\frac{1}{2}wl$,　又　$C_2=\frac{1}{6}wl^2-\frac{1}{4}wl^2=-\frac{1}{12}wl^2$.

常數 C_1, C_2 ノ値ヲ上式ニ代入セバ

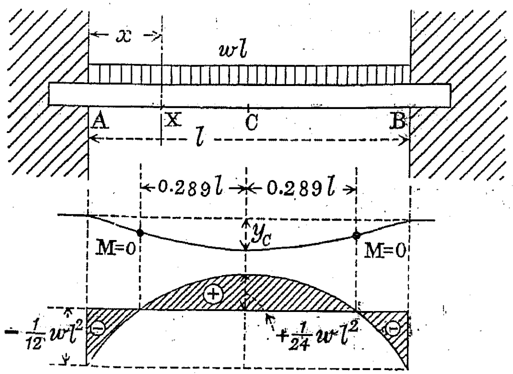
$$\text{剪斷力}\ V=EI.\frac{d^3y}{dx^3}=w\left(\frac{1}{2}l-x\right),$$

$$\text{彎曲率}\ M=EI.\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{12}w(6x^2-6lx+l^2).$$

反曲點ニ於テハ $M=0$ ナルヲ以テ　$6x^2-6lx+l^2=0$,

$$\therefore\ x=\frac{l}{2}\pm0.289l.$$

第 45 圖



又　$M_A=M_B=-\frac{1}{12}w\left[6x^2-6lx+l^2\right]_{x=0,\ x=l}=-\frac{1}{12}wl^2$.

$$\text{傾斜角}\ i=-\frac{w}{12EI}(2x^3-3lx^2+l^2x).$$

i ハ $x=0$,　$x=l$,　$x=\frac{l}{2}$ ナル點ニ於テ零ナリ.

$$\text{撓度}\ y=-\frac{w}{24EI}x^2(l-x)^2.$$

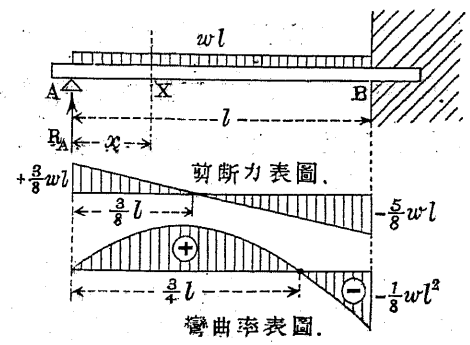
桁ノ中央點ニ於テハ

$$y_c=-\frac{w}{24EI}\left[x^2(l-x)^2\right]_{x=\frac{l}{2}}=-\frac{1}{384}\cdot\frac{wl^4}{EI}.$$

是ニ由テ見レバ撓度ハ同ジ桁ガ兩端ニテ支ヘラレテ同大ノ等布荷重ヲ受クルトキノ撓度ノ五分ノ一ナリ. 又最大彎曲率ノ比ハ $\frac{wl^2}{8}:\frac{1}{12}wl^2$ 即チ 3:2 ナルニヨリ横斷面ガ同ジナラバ最大單位彎曲應力モ亦 3:2 ノ比トナルベシ.

(2) 一固定端,一支端ヲ有スル水平桁ガ等布荷重 w ヲ受ケタル場合　左支端 A ヲ原點トセバ

第 46 圖



$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=R_A.x-\frac{1}{2}w.x^2.$$

$$EI.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}R_A.x^2-\frac{1}{6}w.x^3+C_1.$$

B點ニ於テハ $x=l,\ \frac{dy}{dx}=0$ ナルユヱ

$$C_1=\frac{1}{6}wl^3-\frac{1}{2}R_A.l^2.$$

$$EI.y=\frac{1}{6}R_A.x^3-\frac{1}{24}w.x^4+\frac{1}{6}wl^3.x-\frac{1}{2}R_A.l^2.x+C_2.$$

A點ニ於テハ $x=y=0$ ナルヲ以テ $C_2=0$ ナリ

$$\therefore\ 24EI.y=4R_A(x^3-3l^2x)-w(x^4-4l^3x).$$

此式ニ於テ $x=l$ ナレバ $y=0$ ナルユヱ

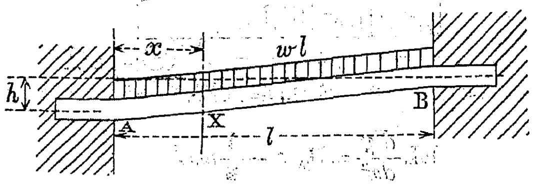
$$-8R_A.l^3+3wl^4=0,\quad \therefore\ R_A=\frac{3}{8}wl.$$ (第26節參照)

反曲點ニ於テハ $M=0$ ナルニヨリ

$$M=\frac{3}{8}wl.x-\frac{1}{2}w.x^2=0,\quad \therefore\ x=\frac{3}{4}l.$$

(3) 固定桁ガ等布荷重 w ヲ受ケテ一端ガ沈下スル場合　今固定桁ノ左端Aガ右端Bヨリ h 丈ケ下リタルトス(第47圖) A點ヲ原點トシ其點ニ於ケル固定力率及鉛直反力ヲ夫々 M_A 及 R_A トスレバ

第47圖



$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+R_A.x-\frac{1}{2}w.x^2,$$

$$EI.\frac{dy}{dx}=M_A.x+\frac{1}{2}R_A.x^2-\frac{1}{6}w.x^3+C_1,$$

$$EI.y=\frac{1}{2}M_A.x^2+\frac{1}{6}R_A.x^3-\frac{1}{24}w.x^4+C_1.x+C_2.$$

原點ニ於テハ $\frac{dy}{dx}=0,\ y=0$ ナルユヱ $C_1=0,\ C_2=0$ ヲ得.

又 $x=l$ ノ點ニ於テハ $\frac{dy}{dx}=0,\ y=h$ ナルニヨリ

$$EI.h=\frac{1}{2}M_A.l^2+\frac{1}{6}R_A.l^3-\frac{1}{24}wl^4,$$

$$0=M_A.l+\frac{1}{2}R_A.l^2-\frac{1}{6}w.l^3.$$

此二式ヲ解キテ

$$R_A=\frac{1}{2}wl-\frac{12EI}{l^3}.h,\quad M_A=-\frac{1}{12}wl^2+\frac{6EI}{l^2}.h.$$

$h=0$ ナレバ

$$R_A=\frac{1}{2}wl,\quad M_A=-\frac{1}{12}wl^2$$

是レ兩端ノ高サガ同ジキ場合ノ R_A, M_A ノ値ナリ.

$$R_B=wl-R_A=\frac{1}{2}wl+\frac{12EI}{l^3}.h,$$

$$M_B=\left[M_A+R_A.x-\frac{1}{2}w.x^2\right]_{x=l}=M_A+R_A.l-\frac{1}{2}w.l^2$$

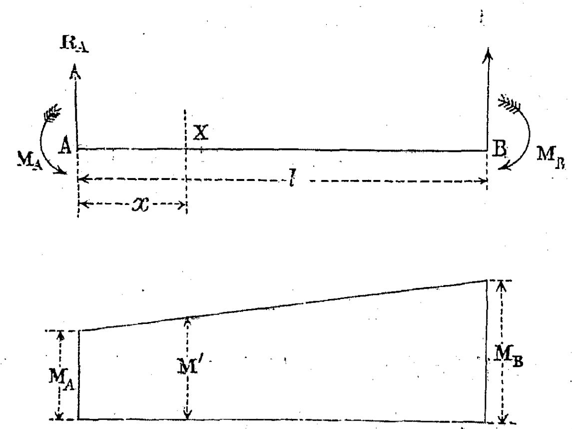
$$=-\frac{1}{12}wl^2-\frac{6EI}{l^2}.h.$$

是ニ由テ見レバB端ニ於ケル反力ハ常ニ正,固定

力率ハ常ニ負ナレドモA端ニ於テハhノ大小ニヨリテR_A, M_Aハ其符號ヲ變ズ.

32. 固定端ガ彎曲率表圖ニ及ボス影響 (Effect of Fixed Ends on Bending-Moment Diagram) 今固定力率ノミ働クモノトスレバ桁ハ彎曲シテ上方ニ凸面ヲ生ズベシ. 此場合ニ任意斷面ノ彎曲率ヲ求ムルニハ兩端ニ張出部ヲ有シ二點ニテ支ヘラレタル一ツノ桁ト見做シ且張出部ガ受クル荷重ハ固定力率ト等

第48圖



シキ彎曲率ヲ支點ニ生ズベキ大サノモノナリト見做セバ其解法容易ナリ. $M_A=M_B$ ナラバ之ガ為メニ生ズル彎曲率ハ徑間全長ニ亘リテ同大ナリ. 若シM_A, M_Bガ不等ナラバ第48圖ノ如ク其變化ハ直線ニテ表ハサルヽユヱAヨリxナル距離ニ於テ固定

力率ヨリ生ズル彎曲率ハ

$$M'=M_A+\frac{x}{l}(M_B-M_A)\text{......................}(48)$$

固定桁ノ任意斷面ニ於ケル實際ノ彎曲率ハ兩端ニテ支ヘラレタル單桁ト見做シタル場合ノ其斷面ノ彎曲率トM'トノ代數和ナリ.

以上ノ關係ハ又次ノ如クニシテ知ルヲ得. 第48圖ニ於テR_A, R_Bハ壁ノ面ニ働ク鉛直反力ナリ. 今單位延長ニ付キ荷重ヲwトシAヲ原點トスレバ

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-w,\quad V=\frac{dM}{dx}=-\int_0^x w.dx+R_A.$$

此式ニ於テR_Aハ$x=0$ノ點ニ於ケルVノ値ナリ. 之ヲ積分スレバ

$$M=-\int_0^x\int_0^x w.dx.dx+R_A.x+M_A.$$

式中M_Aハ$x=0$ノ點ニ於ケルMノ値ナリ. 而シテ$x=l$ノ點ニ於テハMハM_Bナルユヱ

$$M_B=-\int_0^l\int_0^l w.dx.dx+R_A.l+M_A,$$

$$V_A \text{ 又ハ } R_A=\frac{M_B-M_A}{l}+\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^l w.dx.dx\text{.............}(49)$$

$\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^l w.dx.dx$ ハ $M_A=M_B$ 又ハ $M_A=M_B=0$ ナル場合ノR_Aノ値ナリ. (49)式ノR_Aノ値ヲ上記Mノ式ニ代入スレバ

$$M=M_A+\frac{x}{l}(M_B-M_A)+\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^l w.dx.dx-\int_0^x\int_0^x w.dx.dx \ldots\ldots(50)$$

$M_A=M_B=0$ ナラバ,卽チ單桁ノ場合ニハ

$$M=\frac{x}{l}\int_0^l\int_0^l w.dx.dx-\int_0^x\int_0^x w.dx.dx \ldots\ldots\ldots\ldots(50_a)$$

固定桁ノ彈曲線ノ微分方程式ハ

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=M+M'=M+M_A+\frac{x}{l}(M_B-M_A)$$

$$=M+\frac{l-x}{l}.M_A+\frac{x}{l}.M_B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(50_b)$$

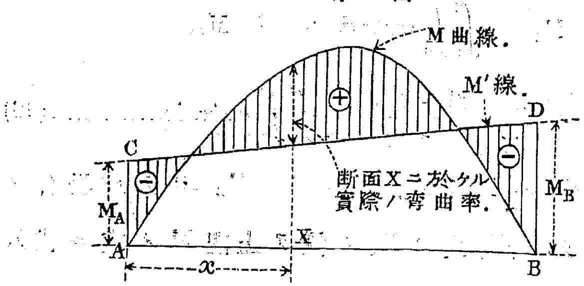
此式ニ於テ

M＝單桁ト見做シタル場合ノ或斷面ノ彎曲率〔(50_a)式〕

M′＝固定力率ノタメニ同一斷面ニ起ル彎曲率〔(48)式〕

MトM′トハ符號ヲ異ニスルモノナレバ一ツノ基線ノ同ジ側ニ此等ノ値ヲ取リテ表圖ヲ作レバM曲

第 49 圖



線ノ縱距トM′線ノ縱距トノ差ハ或斷面ニ於ケル實際ノ彎曲率ヲ表ハスベシ

33. 對稱的ニ荷重ヲ受ケタル固定桁 均等橫斷面ノ固定桁ガ對稱的ニ荷重ヲ受クルトキハ兩端ノ固定力率ハ明カニ相等シ. 從テ固定力率ノ爲メニ起ル彎曲率ハ何レノ斷面ニ於テモ同大ナリ. 然レバ第49圖ノ梯形ABDCハ矩形トナル.

桁端ガ水平ニ固定セラルヽトキハ兩支端間ノ傾斜角ノ全變化ハ零ナルベキヲ以テE及Iガ常數ナラバ

$$\int_0^l(M+M')dx=0,\quad -\int_0^l M'.dx=\int_0^l M.dx,$$

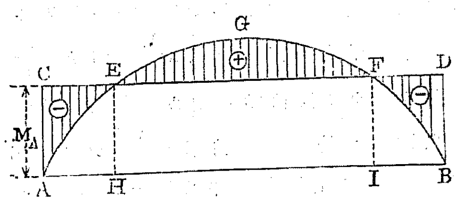
卽チ
$$-M'=\frac{1}{l}\int_0^l M.dx.$$

M曲線ノ面積ヲA, M′線ノ面積ヲA′トスレバ

$$A+A'=0,$$

$\int_0^l(M+M')dx$ ハ彎曲率表圖ノ面積ニシテ之ガ零ナル以上ハM_Aヲ高サトセル矩形ABDCノ面積ト單桁ニ對スル彎曲率表圖ノ面積トハ同一ニシテ

第 50 圖



Aナルベシ. 而シテM′ノ定値M_Aハ$-\frac{1}{l}\int_0^l M.dx$ニシテ之ヲ表ハス縱距ハ$-\frac{A}{l}$ナリ. 依テ對稱的荷重ヲ受ケタル固定桁ニ對シ彎曲率表圖ヲ作ラントセバ第50圖ノ如ク先ヅ單桁ト見做シタル場合ノ表圖AEGFBヲ畫キ此ノ表圖ノ縱距ヨリ總テ平均縱距$\frac{A}{l}$丈ケ減ジ基線ABヲM_A丈高ムベシ. H及Iハ反曲點ニシテ彎曲率ガ零ナル點ナリ. 而シテ面積AEC, BDFノ和ハ面積EGFニ等シクシテ符號相反ス. 下向キ鉛直荷重ニ向ツテハ下向キ傾斜角ハAH間ハ増加シH點ニ於テハ面積AECニ正比例ス. Hヨリ徑間ノ中央迄ハ傾斜角ハ減少シAヨリ測リテ彎曲率表圖ノ正負面積ガ相等シクシテ差引零トナルトキ卽チ徑間ノ中央點ニ於テ傾斜角ハ零トナル.

例題 1. 固定桁ガ等布荷重ヲ受クル場合. 抛物線ト基線トニテ圍マレタル面積Aハ矩形面積ノ三分ノ二ナリ. 卽チ

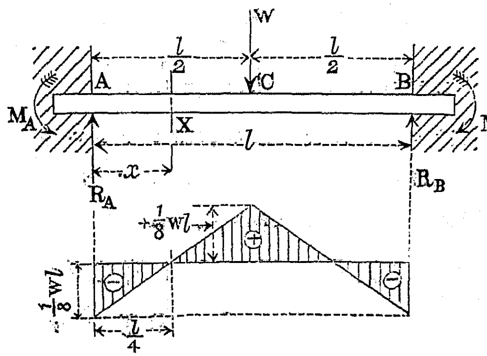
$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}wl^2\times l=\frac{1}{12}wl^3.$$

然ラバ平均彎曲率$\frac{1}{12}wl^2$丈ケ基線ヲ移動セシムレバ第45圖ト全ク同一ノ表圖ヲ得ベシ.

例題 2. 固定桁ガ其中央點ニ於テ一ツノ集中荷重ヲ受クル場合. 彎曲率表圖ニ就テM線ノ平均ノ高サハ$\frac{1}{2}\times\frac{Wl}{4}$卽チ$\frac{Wl}{8}$ナルユヱ表圖ハ第51圖ノ如クニナリ反曲點ハ明カニ各端ヨリ$\frac{l}{4}$ノ距離ニ在リテ兩端ト中央點トニ於ケル彎曲率ハ$\frac{Wl}{8}$ナリ. 第四章第30節例題2ニヨリテ荷重ノ働點卽チ中央點ニ於ケル撓

度ハ

第51圖



$$y_0=\frac{1}{EI}\left[-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Wl}{8}\cdot\frac{l}{4}\right)\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Wl}{8}\cdot\frac{l}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{4}\right)\right]=-\frac{Wl^3}{192EI}$$

又直接積分法ニ依リテ此問題ヲ解ケバ次ノ如シ

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+\frac{1}{2}W.x,\quad EI.\frac{dy}{dx}=M_A.x+\frac{1}{4}W.x^2$$

原點Aニ於テハ$x=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ナルユヱ積分常數ハ零ナリ. 而シテC點ニ於テハ$x=\frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx}=0$ナルヲ以テ

$$O=M_A.\frac{l}{2}+\frac{1}{4}W\left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad 卽チ \quad M_A=-\frac{1}{8}Wl,$$

$$\therefore\quad EI.\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{8}Wlx+\frac{1}{4}Wx^2.$$

$$EI.y=-\frac{1}{16}Wl.x^2+\frac{1}{12}Wx^3.$$

A點ニ於テハ$x=0$, $y=0$ナルヲ以テ此場合ノ積分常數ハ零ナリ.

$$M=EI.\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{8}Wl+\frac{1}{2}Wx.$$

然レバMハ

$$-\frac{1}{8}Wl+\frac{1}{2}W.x=0,\quad 卽チ\quad x=\frac{l}{4}$$

ナル點ニ於テ零ナリ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Wx}{8EI}(2x-l),\quad y=\frac{Wx^2}{48EI}(4x-3l).$$

最大撓度ハ $\frac{dy}{dx}=0$ ナル點即チ $x=\frac{l}{2}$ ナル點ニ起リ其値ハ

$$y_c=\frac{W}{48EI}\Big[x^2(4x-3l)\Big]_{x=\frac{l}{2}}=-\frac{Wl^3}{192EI}$$

單桁ガ其中央點ニ於テ同大ノ集中荷重ヲ受クルトキハ其最大撓度ハ此値ノ四倍ニシテ $-\frac{Wl^3}{48EI}$ ナリ. 然レバ此場合ノ固定桁ノ剛性ハ單桁ノ夫レノ四倍ナリ.

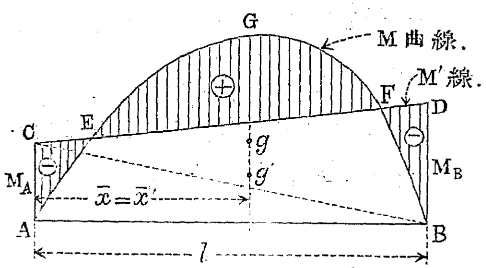
34. 不對稱的ニ荷重ヲ受ケタル固定桁. 兩支端ガ水平ニ固定セラレ且 E 及 I ガ常數ナルトキハ

$$\int_0^l (M+M')dx=\int_0^l\Big[M+\Big\{M_A+(M_B-M_A)\frac{x}{l}\Big\}\Big]dx=0,$$

$$A+A'=0.$$

荷重ガ不對稱的ニ加ハル以上ハ M_B, M_A ハ不等ナルヲ以テ M' 表圖ハ梯形トナル. 從テ $A+A'=0$ ナル關係ノミニテハ M_A, M_B ヲ定ムルコト難シ. 第52圖ニ於テ A ヲ原點トスレバ

第52圖



$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M+M'}{EI},\quad x.\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M+M'}{EI}.x,$$

$$\Big[x\frac{dy}{dx}-y\Big]_0^l=\frac{1}{EI}\int_0^l(M+M')x.dx$$
$$=\frac{1}{EI}\Big(\int_0^l M.x.dx+\int_0^l M'.x.dx\Big),$$

即チ

$$\Big[x.\frac{dy}{dx}-y\Big]_0^l=\frac{1}{EI}(A.\bar{x}+A'.\bar{x}').$$

此式ニ於テ $\bar{x}$ 及 $\bar{x}'$ ハ原點ヨリ夫々面積 A 及 A′ ノ中心ニ至ル距離ナリトス. 而シテ兩積分界限 $x=0$, $x=l$ ニ於テ $\frac{dy}{dx}$ ハ零且 $y=0$ ナルユエ $\Big[x.\frac{dy}{dx}-y\Big]_0^l$ ハ零トナル. 然ラバ

$$\int_0^l M.x.dx+\int_0^l M'.x.dx=A.\bar{x}+A'.\bar{x}'=0.$$

$A.\bar{x}=-A'.\bar{x}'$ ニシテ且 $A=-A'$ ナル以上ハ A ノ中心 g ト A′ ノ中心 g' トハ同一鉛直線上ニ在リ.

$$-A'=-\frac{M_A+M_B}{2}l=A,\quad \text{即チ}\quad M_A+M_B=-\frac{2A}{l}\ldots\ldots(a)$$

$$A'.\bar{x}'=\Big(\frac{1}{2}.M_A.l.\frac{1}{3}l\Big)+\Big(\frac{1}{2}.M_B.l.\frac{2}{3}l\Big)=-\frac{l^2}{6}(M_A+2M_B),$$

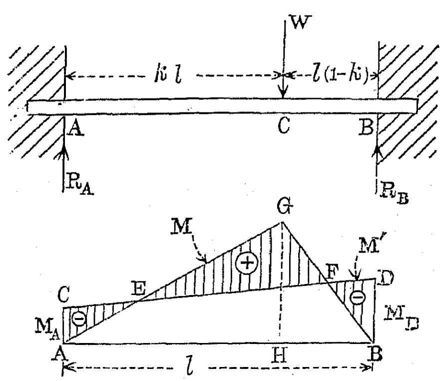
$$A.\bar{x}=-\frac{l^2}{6}(M_A+2M_B),\quad \text{即チ}\quad M_A+2M_B=-\frac{6A.\bar{x}}{l^2}\ldots\ldots(b)$$

(a), (b) 二式ヨリ

$$\left.\begin{aligned}M_A&=-\frac{4A}{l}+\frac{6A.\bar{x}}{l^2},\quad \text{又ハ}\quad -\frac{2A}{l}\Big(2-\frac{3\bar{x}}{l}\Big),\\ M_B&=+\frac{2A}{l}-\frac{6A.\bar{x}}{l^2},\quad \text{又ハ}\quad -\frac{2A}{l}\Big(\frac{3\bar{x}}{l}-1\Big).\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(51)$$

例題 左端ヨリ kl ナル距離ニ於テ一ツノ集中荷重Wヲ受ケタル固定桁. 但 $k<1$ トス.

第53圖



$$A\bar{x}=\left[\frac{1}{2}kl.W(1-k)k.l\frac{2}{3}kl\right]+\left[\left\{\frac{1}{2}.l(1-k)W(1-k)kl\right\}\times\left\{kl+\frac{1}{3}l(1-k)\right\}\right]=\frac{W}{6}kl^3(1-k^2),$$

$$A=\frac{1}{2}W(1-k)kl.l=\frac{1}{2}Wkl^2(1-k),$$

$$M_A=-\frac{4A}{l}+\frac{6A.\bar{x}}{l^2}=-Wkl(1-k)^2$$

$$M_B=+\frac{2A}{l}-\frac{6A.\bar{x}}{l^2}=-Wk^2l(1-k).$$

Bヲ力率原點トスレバ

$$-W.l(1-k)+R_A.l-Wkl(1-k)^2=-Wk^2l(1-k),$$

即チ

$$R_A=W(1-3k^2+2k^3),$$

$$R_B=W-R_A=Wk^2(3-2k).$$

AC間ニ於テハ

$$M=W(1-k)x,\quad M+M'=M+\left\{M_A+(M_B-M_A)\frac{x}{l}\right\}$$

$$=W(1-k)\left[(1+k-2k^2)x-kl(1-k)\right].$$

$(M+M')$ ハ $x=\frac{kl}{1+2k}$ ナル點ニ於テ零トナル. 是レ反曲點Eノ位置ナリ.

次ニCB間ニ於テハ

$$M=Wk(l-x),\quad M+M'=Wk\left[(l-x)+x(1-k)(1-2k)-l(1-k)^2\right].$$

此 $(M+M')$ ハ $x=\frac{(2-k)l}{3-2k}$ ナル點ニ於テ零トナル. 是レ反曲點Fノ位置ナリ.

AC間ノ傾斜角ハ

$$i_x=\frac{W}{EI}\int_0^x(M+M')dx=\frac{W(1-k)}{EI}\int_0^x\left[(1+k-2k^2)x-kl(1-k)\right]dx$$

$$=\frac{W(1-k)}{2EI}\left[(1+k-2k^2)x^2-2kl(1-k)x\right].$$

此傾斜角ハ $x=\frac{2kl}{1+2k}$ 即チAヨリ反曲點E迄ノ距離ノ二倍ノ點ニ於テ零トナル. 是レ最大撓度ノ起ル點ナリ. 而シテ $k=1$ ナレバ $x=\frac{2}{3}l$ ナルヲ以テ固定桁ノ最大撓度ハ常ニ徑間ヲ三分シタル中央ノ一區分ニ起ルヲ知ルベシ.

Wノ働點Cニ於テハ

$$i_c=\frac{W(1-k)}{2EI}\left[(1+k-2k^2)x^2-2kl(1-k)x\right]_{x=kl}$$

$$=\frac{Wk^2l^2(1-k)^2(2k-1)}{2EI}.$$

AC間ノ撓度ハ

$$y=\int_0^x i.dx=\frac{W(1-k)}{2EI}\int_0^x\left[(1+k-2k^2)x^2-2kl(1-k)x\right]dx$$

$$=\frac{W(1-k)^2}{6EI}\left[(1+2k)x^3-3kl.x^2\right].$$

Wノ働點Cニ於テハ

$$y_c=\frac{W(1-k)^2}{6EI}\left[(1+2k)x^3-3kl.x^2\right]_{x=kl}=-\frac{Wk^3l^3(1-k)^3}{3EI}.$$

コレハ單桁ノ場合ノ y_c ノ $k(1-k)$ 倍ナリ.

$$最大\ y=\frac{W(1-k)^2}{6EI}\left[(1+2k)x^3-3klx^2\right]_{x=\frac{2kl}{1+2k}}=-\frac{2Wk^3l^3(1-k)^2}{3(1+2k)^2EI}.$$

此問題ヲ直接積分法ニヨリテ解ケバ次ノ如シ.

荷重Wノ左側AC間ニ於テハ

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+R_A.x, \quad\text{.........}(a)$$

$$EI.\frac{dy}{dx}=M_A.x+\frac{1}{2}R_A.x^2+C_1 \quad\text{.........}(b)$$

$$EI.y=\frac{1}{2}M_A.x^2+\frac{1}{6}R_A.x^3+C_1.x+C_3 \quad\text{.........}(c)$$

荷重ノ右側CB間ニ於テハ

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+R_A.x-W(x-kl), \quad\text{.........}(a')$$

$$EI.\frac{dy}{dx}=M_A.x+\frac{1}{2}R_A.x^2-\frac{1}{2}W.x^2+Wkl.x+C_2, \quad\text{.........}(b')$$

$$EI.y=\frac{1}{2}M_A.x^2+\frac{1}{6}R_A.x^3-\frac{1}{6}W.x^3+\frac{1}{2}Wkl\,x^2$$

$$+C_2.x+C_4. \quad\text{.........}(c')$$

(b)式ニ於テ $x=0$ ナレバ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルニヨ $C_1=0$ ヲ得. 又(c)式ニ於テ $x=0$ ニ對シ $y=0$ ナルヲ以テ $C_3=0$ ナリ. C點ニ於テハ $x=kl$ ニシテ $(b)=(b')$ 及 $(c)=(c')$ ナリ. 然ラバ

$$M_A.kl+\frac{1}{2}R_A.k^2l^2=M_A.kl+\frac{1}{2}R_A.k^2l^2-\frac{1}{2}W.k^2l^2+W.k^2l^2+C_2,$$

即チ
$$C_2=-\frac{1}{2}Wk^2l^2.$$

$$\frac{1}{2}M_A.k^2l^2+\frac{1}{6}R_A.k^3l^3=\frac{1}{2}M_A.k^2l^2+\frac{1}{6}R_A.k^3l^3-\frac{1}{6}W.k^3l^3$$

$$+\frac{1}{2}W.k^3l^3-\frac{1}{2}W.k^3l^3+C_4,$$

即チ
$$C_4=\frac{1}{6}W.k^3l^3.$$

(b')式ニ於テ $x=l$ ナレバ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルニヨ

$$O=M_A.l+\frac{1}{2}R_A.l^2-\frac{1}{2}W.l^2+W.kl^2-\frac{1}{2}W.k^2l^2,$$

即チ
$$M_A=\frac{1}{2}W.l+\frac{1}{2}W.k^2l-\frac{1}{2}R_A.l-W.kl \quad\text{.........}(d)$$

B點ニ於テハ $x=l$, $y=0$ ナルニヨ(c')式ヨリ

$$O=\frac{1}{2}M_A.l^2+\frac{1}{6}R_A.l^3-\frac{1}{6}W.l^3+\frac{1}{2}W.kl^3-\frac{1}{2}W.k^2l^3+\frac{1}{6}W.k^3l^3,$$

即チ
$$M_A=\frac{1}{3}W.l+W.k^2l-\frac{1}{3}R_A.l-W.kl-\frac{1}{3}W.k^3l \quad\text{.........}(e)$$

(d)及(e)二式ヨリ

$$R_A=W(1-3k^2+2k^3), \qquad R_B=W-R_A=Wk^2(3-2k),$$

$$M_A=-Wkl(1-k)^2.$$

$$-Wkl(1-k^2)-Wl(1-k)+W(1-3k^2+2k^3)l=M_B.$$

即チ
$$M_B=-Wk^2l(1-k).$$

若シ桁ノ兩端ガ水平ニ固定セラレ且其横斷面不均等ナルトキハ

$$\int_0^l\frac{d^2y}{dx^2}.dx=\frac{1}{E}\int_0^l\Big(\frac{M+M'}{I}\Big)dx$$

$$=\frac{1}{E}\int_0^l\Big[\frac{M}{I}+\frac{1}{I}\Big\{M_A+(M_B-M_A)\frac{x}{l}\Big\}\Big]dx=0,$$

即チ
$$\int_0^l\frac{M}{I}.dx+M_A\int_0^l\frac{dx}{I}+\frac{(M_B-M_A)}{l}\int_0^l\frac{x}{I}.dx=0.$$

又

$$\frac{1}{E}\int_0^l\Big(\frac{M+M'}{I}\Big)x.dx=$$

$$\frac{1}{E}\int_0^l\Big[\frac{M}{I}+\frac{1}{I}\Big\{M_A+(M_B-M_A)\frac{x}{l}\Big\}\Big]x.dx=0,$$

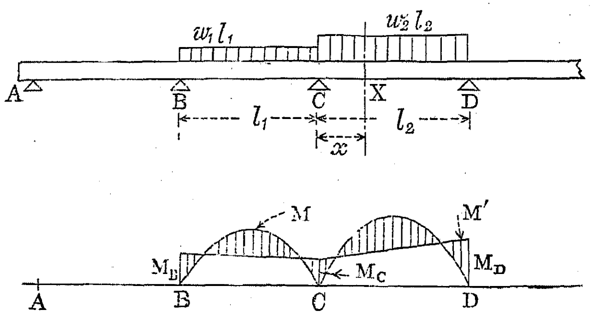
即チ
$$\int_0^l\frac{M.x}{I}.dx+M_A\int_0^l\frac{x}{I}.dx+\frac{(M_B-M_A)}{l}\int_0^l\frac{x^2}{I}.dx=0.$$

如斯ニ彎曲率表圖ニ於ケル $\frac{M}{I}$ 曲線及 $\frac{M'}{I}$ 線ト基線トニテ圍マレタル面積ハ等シクシテ其中心ハ同

一直線上ニアリ. 然レドモ $\frac{M'}{I}$ 線ハ一般ニ直線ニアラズ. M 及 I ガ x ノ既知函數ナレバ上記二式ノ積分ニヨリ二ツノ條件方程式ヲ得ベク從テ M_A 及 M_B ヲ定ムルヲ得ベシ.

35 **連續桁** (Continuous Beam)—**三力率ノ定理** (Theorem of Three Moments) 連續桁ハ三ッ以上ノ支點ヲ有スルモノニシテ固定桁ノ兩端ニ於ケルガ如ク中間ノ支點ニ於テ彎曲率ヲ生ズ.

第 54 圖



第54圖ニ於テ l_1, l_2 ヲ相隣レル二支間トシ等布荷重ヲ夫々 w_1, w_2 トスレバ第32節ノ理論ニヨリ各支間ニ對シテ次ノ關係ヲ得.

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=M+M'$$

C ヲ原點トセバ支間 CD ニ於テハ

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{w_2l_2}{2}.x-\frac{w_2x^2}{2}+M_C+(M_D-M_C)\frac{x}{l_2},$$

$$EI.\frac{dy}{dx}=\frac{w_2l_2}{4}.x^2-\frac{w_2}{6}.x^3+M_C.x+(M_D-M_C)\frac{x^2}{2l_1}+EIi_C.$$

但 i_C ハ $x=0$ 卽チ C 點ニ於ケル $\frac{dy}{dx}$ ノ値ナリ.

$$EI.y=\frac{w_2l_2}{12}.x^3-\frac{w_2}{24}.x^4+\frac{M_C}{2}.x^2+(M_D-M_C)\frac{x^3}{6l_2}+EIi_C.x.$$

$x=0$ ニ對シテ y ハ零ナルユヱ積分常數ハ零ナリ.

$x=l_2$ 卽チ D 點ニ於テモ亦 $y=0$ ナリ. 依テ

$$EIi_C=-\frac{w_2l_2^3}{24}-\frac{M_Cl_2}{2}-\frac{(M_D-M_C)l_2}{6},$$

$$\therefore\quad 6EIi_C=-\frac{w_2l_2^3}{4}-2M_Cl_2-M_Dl_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

又 C ヲ原點トシ之ヨリ左方ニ測リタル x ヲ正トセバ上記同樣ニ支間 BC ニ對シテ次ノ關係ヲ得.

$$-6EIi_C=-\frac{w_1l_1^3}{4}-2M_C.l_1-M_B.l_1\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

(a), (b) 二式ヲ加フレバ

$$M_B.l_1+2M_C(l_1+l_2)+M_Dl_2=-\frac{1}{4}(w_1l_1^3+w_2l_2^3)\ldots\ldots\ldots\ldots(52)$$

之ハ**くらぺいよん氏三力率ノ定理** (Clapeyron's Theorem of Three Moments) ニシテ連續三支點ノ彎曲率ト荷重トノ關係ヲ表ハスモノナリ. 支點ガ n 個アレバ支間ノ數ハ $(n-1)$ ニシテ $(n-2)$ 組ノ連續二支間ニ對シ (52) 式ノ如キ $(n-2)$ 丈ノ方程式ガ得ラル. 然ルニ n 個ノ支點ニ於ケル彎曲率ヲ求ムルニハ尙

ニツノ方程式ヲ要ス而シテ此等ハ桁ノ兩端ノ狀態ニ依リテ定ムルヲ得. 例ヘバ兩端ガ單ニ支ヘラルヽトキハ各支端ニ於ケル彎曲率ハ零ナルヲ以テ所要ノ二條件式ヲ得ルコト容易ナリ.

若シ第54圖ノ BC ガ末端ノ支間ニシテ B 端ガ水平ニ固定セラルヽトキハ $i_B=0$ ニシテ此支間ニ於テハ

$$2M_B+M_C=-\frac{1}{4}w_1l_1^2.$$

各支點ノ彎曲率ヲ知レバ諸支點ヲ原點トシテ外力ノ力率ヲ取リテ支點ノ反力ヲ見出スヲ得. 又ハ第32節(49)式ニヨリ B 點ニ極接近シテ其右側ノ剪斷力ハ

$$V_B=-\frac{M_B-M_C}{l}+\frac{wl}{2}.$$

此ノ如ク一支點ニ極接近シテ其左右兩側ニ於ケル斷面ノ剪斷力ヲ求ムレバ此等ノ代數的差ハ其支點ノ反力ナリ.

例題 1. 三ツノ等長支間ヲ有スル連續桁ガ等布荷重ヲ受クル場合.

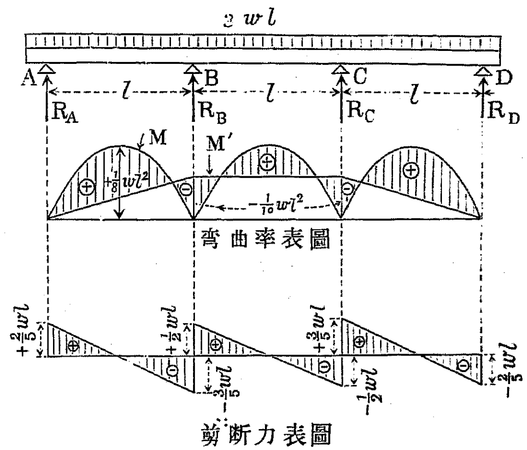
桁ガ兩端 A, D ニ於テ單ニ支ヘラルヽトキハ

$$M_A=0,\quad M_D=0.$$

又等布荷重ヲ受クルトキハ明カニ

$$M_B=M_C$$

第 55 圖



ナリ. 今 ABC, BCD ナル部分ニ(52)式ヲ適用スレバ

$$0+4M_B.l+M_C.l=-\frac{1}{2}wl^3,$$

$$M_B.l+4M_C.l+\quad 0=-\frac{1}{2}wl^3.$$

此二式ヲ解キテ

$$M_B=M_C=-\frac{wl^2}{10}.$$

B ヲ力率ノ原點トセバ

$$R_A.l-\frac{wl^2}{2}=-\frac{wl^2}{10},\qquad \therefore\ R_A=\frac{2}{5}wl.$$

又ハ　$V_A=R_A=-\frac{wl}{10}+\frac{wl}{2}=\frac{2}{5}wl.$

而シテ　$R_A=R_D,\qquad R_B=R_C.$

C ヲ力率ノ原點トスレバ

$$\frac{2}{5}wl.2l+R_B.l-2wl^2=-\frac{wl^2}{10},\quad 即チ\quad R_B=\frac{11}{10}wl.$$

$$V_B=-0+\frac{wl}{2}=\frac{1}{2}wl.$$

支點 B ニ極接近シテ其左側ノ剪斷力ヲ V_B' トスレバ

$$V_B' = \frac{2}{5}wl - wl = -\frac{3}{5}wl, \qquad \therefore \quad R_B = \frac{1}{2}wl + \frac{3}{5}wl = \frac{11}{10}wl.$$

支間AB＝於ケル一點ノ彎曲率ハ(原點A)

$$M_x = M + M' = \frac{wl}{2}.x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wl}{10}.x = -\frac{wx}{2}\left(x - \frac{4}{5}l\right).$$

支間BC＝於ケル一點ノ彎曲率ハ(原點B)

$$M_x = M + M' = \frac{wl}{2}.x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wl^2}{10} = -\frac{w}{2}\left(x^2 - l.x + \frac{1}{5}l^2\right).$$

例題 2. 中間支點ノ反力ヲ求ムル別法.

例題1＝於テハ $R_B = R_C$ ナルヲ以テADヲ一ツノ單桁ト見做シ之＝二ツノ等大鉛直荷重 R_B, R_C ヲ上向キ＝加ヘタリトスレバ第四章第27節(39)式ハB, C二點ノ上向キ撓度ヲ與フベシ. (39)式＝於テ $\frac{W}{2}$ ヲ R_B, a ヲ l, l ヲ $3l$ ＝テ置換フレバ

$$y_B = -\frac{5}{6}\frac{R_B l^3}{EI}$$

ヲ得. 而シテ之ハ上向キ撓度ナル＝ヨリ符號ヲ變ジテ

$$y_B = \frac{5}{6}.\frac{R_B l^3}{EI}.$$

次＝單桁ADガ等布荷重 $3wl$ ヲ受クルトキハ左支端Aヨリ l ナル距離＝アルB點ノ下向キ撓度ハ第四章第27節ノ公式＝ヨリ

$$y_B = \frac{w}{24EI}\left[x(6lx^2 - x^3 - 27l^3)\right]_{x=l} = -\frac{11}{12}.\frac{wl^4}{EI}.$$

然ル＝中間支點＝於テハ撓度ハ零ナルベキヲ以テ

$$\frac{5}{6}.\frac{R_B l^3}{EI} - \frac{11}{12}.\frac{wl^4}{EI} = 0, \qquad \therefore \quad R_B = \frac{11}{10}wl.$$

例題 3. 三支間30呎, 40呎及20呎ヨリ成レル連續桁ガ夫々2噸, 1噸及3噸每呎ナル等布荷重ヲ受クル場合.

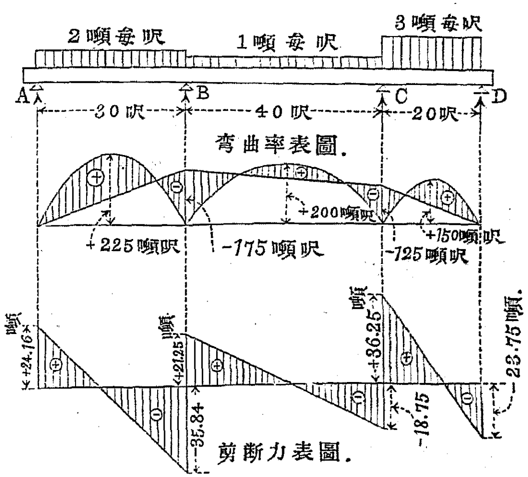
(52)式ヨリ

$$0 + 140M_B + 40M_C = -\frac{1}{4}\left(2 \times \overline{30}^3 + 1 \times \overline{40}^3\right),$$

$$\therefore \quad 140M_B + 40M_C = -29{,}500 \text{ 噸呎}.$$

又 $$40M_B + 120M_C + 0 = -\frac{1}{4}(1 \times \overline{40}^3 + 3 \times \overline{20}^3).$$

第56圖



$$\therefore \quad 40M_B + 120M_C = -22{,}000 \text{ 噸呎}.$$

此二式ヲ解キテ

$$M_B = -175 \text{ 噸呎}, \quad M_C = -125 \text{ 噸呎}.$$

Bヲ力率ノ原點トスレバ

$$R_A \times 30 - 60 \times \frac{30}{2} = -175, \qquad \therefore \quad R_A = 24.16 \text{ 噸}.$$

Cヲ力率ノ原點トスレバ

$$24.16 \times 70 + R_B \times 40 - 60 \times 55 - 40 \times 20 = -125, \quad \therefore \quad R_B = 57.09 \text{ 噸}.$$

$$-R_D \times 20 + 60 \times 10 = 125, \quad \therefore \quad R_D = 23.75 \text{ 噸}.$$

$$R_C = (2 \times 30 + 1 \times 40 + 3 \times 20) - (24.16 + 57.09 + 23.75) = 55 \text{ 噸}.$$

36. 不對稱的＝荷重ヲ受ケタル連續桁 第57圖＝於テ ADB 及 BEC ハ二ツノ連續支間 AB, BC ヲ夫々單桁ト見做シテ得タル彎曲率表圖ナリ. 面積ADB ヲ A_1 トシ支點Aヨリ其中心迄ノ距離ヲ $\bar{x}_1$ ト

スレバA點ニ對スル面率ハ $A_1.\bar{x}_1$ ナリ. 又面積BECヲ A_2 トシ支點Cヨリ其中心迄ノ距離ヲ $\bar{x}_2$ トスレバC點ニ對スル A_2 ノ面率ハ $A_2.\bar{x}_2$ ナリ. 梯形AFGB, BGHCハ固定力率ヨリ生ズル彎曲率表圖ニシテ此等ノ面積ヲ夫々 A'_1, A_2' トシA點及C點ヨリ A_1' 及 A_2' ノ中心迄ノ距離ヲ夫々 $\bar{x}_1'$, $\bar{x}_2'$ トス.

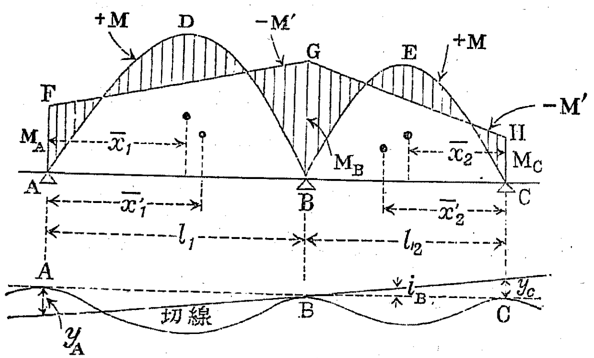
Aヲ原點トシBノ方ニ測リタル x ヲ正トスレバ支點A,Bガ同一高サニアルナラバ

$$\left(x.\frac{dy}{dx}-y\right)_{x=0}^{x=l_1}=l_1.i_B=\frac{1}{EI}\int_0^{l_1}(M+M')x.dx$$

$$=\frac{1}{EI}(A_1.\bar{x}_1+A_1'.\bar{x}'_1)\text{.......................}(a)$$

此式ニ於テ i_B ハB點ニ於ケル傾斜角 $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ヲ表ハス(第四章第30節參照)

第 57 圖



次ニCヲ原點トシBノ方ニ測リタル x ヲ正トス

レバ支點C,Bガ同一高サニアルナラバ

$$\left(x.\frac{dy}{dx}-y\right)_{x=0}^{x=l_2}=l_2.i_B=\frac{1}{EI}(A_2.\bar{x}_2+A_2'.\bar{x}_2')\text{............}(b)$$

第57圖ニ於テ

$$\frac{y_A}{l_1}=\frac{-y_C}{l_2},\qquad \therefore\ \frac{A_1.\bar{x}_1+A_1'.\bar{x}_1'}{l_1}=-\frac{A_2.\bar{x}_2+A_2'.\bar{x}_2'}{l_2}\text{......}(c)$$

而シテ(第34節ヨリ)

$$A_1'.\bar{x}_1'=\frac{l_1^2}{6}(M_A+2M_B),\qquad A_2'.\bar{x}_2'=\frac{l_2^2}{6}(M_C+2M_B).$$

之ヲ(c)式ニ代入スレバ

$$\frac{1}{6}M_A.l_1+\frac{1}{3}M_B(l_1+l_2)+\frac{1}{6}M_C.l_2=-\frac{A_1.\bar{x}_1}{l_1}-\frac{A_2.\bar{x}_2}{l_2},$$

$$\therefore\ M_A.l_1+2M_B(l_1+l_2)+M_C.l_2=-\frac{6A_1.\bar{x}_1}{l_1}-\frac{6A_2.\bar{x}_2}{l_2}\text{......}(53)$$

是レ三力率定理ノ一般公式ニシテ連續桁ガ任意ノ荷重ヲ受クル場合ニ適用セラル. 之ヲ前節ノ等布荷重ノ場合ニ適用スレバ

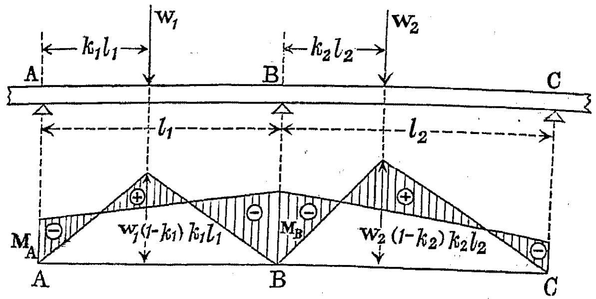
$$A_1=\frac{2}{3}.\frac{w_1l_1^2}{8}.l_1,\quad \bar{x}_1=\frac{1}{2}l_1,\quad \frac{6A_1.\bar{x}_1}{l_1}=\frac{1}{4}w_1l_1^3,$$

$$A_2=\frac{2}{3}.\frac{w_2l_2^2}{8}.l_2,\quad \bar{x}_2=\frac{1}{2}l_2,\quad \frac{6A_2.\bar{x}_2}{l_2}=\frac{1}{4}w_2l_2^3.$$

$$\therefore\ M_A.l_1+2M_B(l_1+l_2)+M_C.l_2=-\frac{1}{4}w_1l_1^3-\frac{1}{4}w_2l_2^3.$$

第58圖ノ如ク W_1, W_2 ナル集中荷重ヲ夫々支間 l_1, l_2 ニ加フレバ

第 58 圖



$$A_1.\bar{x}_1=\frac{1}{2}.W_1(1-k_1).k_1^2l_1^2\times\frac{2}{3}k_1l_1+\frac{1}{2}W_1(1-k_1).k_1l_1.l_1(1-k_1)\times$$

$$\left\{k_1l_1+\frac{1}{3}l_1(1-k_1)\right\}=\frac{1}{6}W_1(k_1-k_1^3)l_1^3,$$

$$\frac{6A_1.\bar{x}_1}{l_1}=W_1l_1^2(k_1-k_1^3).$$

同樣ニ　$A_2.\bar{x}_2=\frac{1}{6}W_2l_2^3(2k_2-3k_2^2+k_2^3),$

$$\frac{6A_2.\bar{x}_2}{l_2}=W_2l_2^2(2k_2-3k_2^2+k_2^3).$$

$$\therefore\quad M_A.l_1+2M_B(l_1+l_2)+M_C.l_2=-W_1l_1^2(k_1-k_1^3)$$
$$-W_2l_2^2(2k_2-3k_2^2+k_2^3).$$

數個ノ集中荷重ガ加ハレバ

$$M_A.l_1+2M_B(l_1+l_2)+M_C.l_2=-\Sigma W_1l_1^2(k_1-k_1^3)$$
$$-\Sigma W_2l_2^2(2k_2-3k_2^2+k_2^3)\ldots\ldots(54)$$

若シABガ末端ノ徑間ニシテA端ガ水平ニ固定セラルヽナラバ

$$\left[x\frac{dy}{dx}-y\right]_0^{l_1}=\frac{A_1(l_1-\bar{x}_1)+A_1'(l_1-\bar{x}_1')}{EI}=0.$$

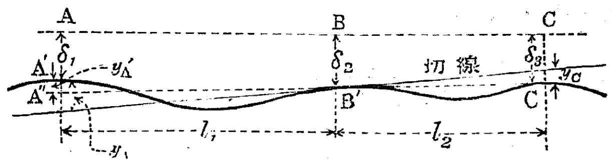
而シテ　$A_1'(l_1-\bar{x}_1')=\frac{l_1^2}{6}(M_B+2M_A),$

$$\therefore\quad A_1(l-\bar{x}_1)+\frac{1}{6}l_1^2(M_B+2M_A)=0,$$

$$2M_A+M_B=-\frac{6A_1(l_1-\bar{x}_1)}{l_1^2}.$$

次ニ支點ノ高サニ變動ヲ來タセシトキ之ガ桁ニ及ボス影響ニ就テ考ヘントス.

第 59 圖



支點ノ原位置A, B, Cヨリ夫々δ_1, δ_2, δ_3丈ケ沈下シテA', B', C'ナル位置ヲ取リタリトセバ(第59圖)B'トC'トヲ連ネタル直線A''B'C'ヨリA'迄ノ縱距y_A'ハ共影響ヲ表ハスベシ. 相似三角形ノ關係ヨリ

$$\frac{(y_A'+\delta_1)-\delta_2}{l_1}=\frac{\delta_2-\delta_3}{l_2},\quad 卽チ\quad y_A'=(\delta_2-\delta_3)\frac{l_1}{l_2}+\delta_2-\delta_1.$$

又　$\frac{y_A-y_A'}{l_1}=-\frac{y_C}{l_2}.$

$$\therefore\quad \frac{\dfrac{1}{EI}(A_1.\bar{x}_1+A_1'.\bar{x}_1')-\left[(\delta_2-\delta_3)\dfrac{l_1}{l_2}+\delta_2-\delta_1\right]}{l_1}=$$

$$-\frac{\dfrac{1}{EI}(A_2.\bar{x}_2+A_2'.\bar{x}_2')}{l_2},$$

$$M_A.l_1+2M_B(l_1+l_2)+M_C.l_2=-\frac{6A_1.\bar{x}_1}{l_1}-\frac{6A_2.\bar{x}_2}{l_2}$$

$$-6EI\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{l_1}+\frac{\delta_3-\delta_2}{l_2}\right)\ldots(55)$$

例ヘバ二支間ノ長サ等シクシテ其兩端ニ於テ支ヘラレタル連續桁ノ支點ノ高サガ變ジタリトシ $l_1=l_2\equiv l$, $(\delta_1-\delta_2)=(\delta_3-\delta_2)\equiv-\delta$, $w_1=w_2\equiv w$ トスレバ $M_A=M_C=0$ ナルガユヱニ

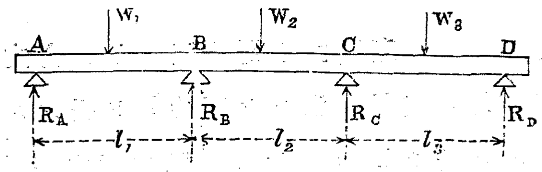
$$2M_B.2l=-2\times\frac{1}{4}wl^3+\frac{12EI\delta}{l},\quad\therefore\quad M_B=-\frac{1}{8}wl^2+\frac{3EI\delta}{l^2}.$$

然ラバ中央支點ニ於ケル負ノ彎曲率ハ支點沈下ノタメニ減少シ δ ガ $\frac{1}{24EI}wl^4$ ニ達スレバ M_B ハ零トナル. 若シ $\delta>\frac{1}{24EI}.wl^4$ ナレバ M_B ハ符號ヲ變ジテ正トナル. 斯ク支點ノ高サノ僅少ナル變動ガ支點ノ彎曲率從テ桁ノ應力ニ重大ナル影響ヲ及ボスコトハ連續桁ノ一大缺點ナリトス.

うゐるそん氏解法 (G.Wilson's Method) 之ハ連續桁ヲ一ツノ單桁ト見做シテ荷重ヨリ生ズル中間支點ニ相當スル點ノ下向キ撓度ヲ見出シ又中間支點ノ

反力ノミヨリ生ズル上向キ撓度ヲ求メ此等ノ撓度ヲ等値ノモノトシテ支點ノ反力ヲ見出ス方法ナリ. 尤モ兩支端反力ハ別ニ一支端ニ對スル總テノ外力ノ力率ヲ取リテ定メザルベカラズ.

第60圖



第60圖ノ三徑間連續桁ヲ AD ナル單桁ト見做シタル場合ニ荷重ヨリ生ズルB及C點ノ撓度ヲ夫々 y_B, y_C トス又 B 點ニ上向キニ單位荷重ヲ加ヘタル場合ニ B 及C點ニ起ル上向キ撓度ヲ ${}_b\delta_B$, ${}_b\delta_C$ トシ次ニ C 點ニ上向キニ單位荷重ヲ加ヘタルトキノB及C點ノ上向キ撓度ヲ ${}_c\delta_B$, ${}_c\delta_C$ トス. 然ルトキハ

$$y_B=(R_B\times{}_b\delta_B)+(R_C\times{}_c\delta_B)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

$$y_C=(R_B\times{}_b\delta_C)+(R_C\times{}_c\delta_C)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

單桁 AD ノ中間點 B ニ一ツノ集中荷重ヲ加フルトキ C ニ起ル撓度ト C ニ同一集中荷重ヲ加フルトキ B ニ起ル撓度トガ相等シキコトハ第四章第27節ニ與ヘタル公式ニヨリテ容易ニ知ルヲ得ベク從テ上式ニ於テ ${}_b\delta_C={}_c\delta_B$ ナルヲ知ルベシ.

(a), (b) 兩式ヲ解キテ R_B, R_C ヲ求メ得ベク R_A ハ D ニ對スル力率方程式ヨリ得ラルベキナリ.

第六章　合成應力

(Combined Stresses)

37. 應張力又ハ應壓力ト彎曲應力トノ合成　桁ガ彎曲率ノ外ニ其軸ニ沿ヒテ張力 P ヲ受クルトキハ斷面積 A ニ於テ P ヨリ生ズル單位應力ハ $\frac{P}{A}$ ナルヲ以テ抵抗力率公式ヨリ得ラルヽ單位應力ヲ S_b トスレバ

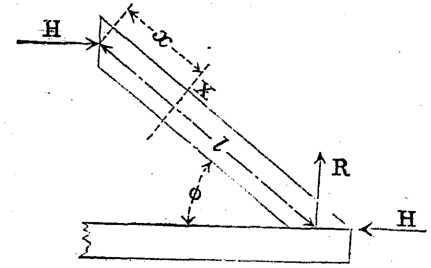
$$S_b+\frac{P}{A}=\text{彎曲率及張力ヨリ生ズル單位應張力}$$

$$S_b-\frac{P}{A}=\text{彎曲率及張力ヨリ生ズル單位應壓力}$$

若シ P ガ壓力ナレバ全ク之ト同樣ニシテ合成應力ヲ見出スヲ得. 尤モ桁ノ長サガ斷面ノ最小幅ノ約10倍以上ナルトキハ之ヲ長柱ト見做シテ單位應力 $\frac{P}{A}$ ヲ求ムベシ(次章參照)

屋根合掌ノ如キハ軸力ト彎曲率トノ作用ヲ受クル桁ノ一例ナリ. 今矩形斷面合掌ノ幅ヲ b, 高サヲ d, 長サヲ l, 單位延長ノ等布荷重ヲ w 及傾斜角ヲ ϕ トス(第61圖). 下端ヲ力率ノ原點トスレバ

第61圖



$$H.l\sin\phi-wl.\frac{1}{2}l\cos\phi=0,\quad \therefore\ \text{水平反力}\ H=\frac{1}{2}wl\cot\phi.$$

合掌ノ上端ヨリ x ナル距離ニ於ケル斷面ノ單位彎曲應力ヲ S_b トスレバ

$$S_b=\frac{6M}{bd^2}=\frac{6(H.x\sin\phi-\frac{1}{2}wx^2.\cos\phi)}{bd^2},$$

$$\frac{P}{A}=\frac{(H.\cos\phi+wx.\sin\phi)}{bd},$$

$$\text{合成單位應壓力}\ S=S_b+\frac{P}{A}=\frac{3w\cos\phi}{bd^2}(lx-x^2)$$
$$+\frac{wl.\cot\phi.\cos\phi}{2bd}+\frac{wx.\sin\phi}{bd},$$

$$\frac{dS}{dx}=\frac{3w\cos\phi}{bd^2}(l-2x)+\frac{w\sin\phi}{bd}=0.$$

之ヲ解キテ得ラルヽ x ヲ x_0 ニテ表ハセバ

$$x_0=\frac{1}{2}l+\frac{1}{6}d\tan\phi$$

然ラバ合掌ノ上端ヨリ x_0 ナル距離ニアル斷面ニ於

テSハ最大ナリ. 此x_0ノ値ヲ上式ニ代入スレバ

$$\text{最大 } S=\frac{3wl^2.\cos\phi}{4bd^2}+\frac{wl.\operatorname{cosec}\phi}{2bd}+\frac{w.\sin\phi.\tan\phi}{12b}\ldots\ldots(56)$$

等布荷重ヲ受クル合掌ノ大サハ(56)式ニヨリテ之ヲ定ムルヲ得.

第61圖ニ於テ長サxノ間ニ働ク全荷重ヲWトスレバ上述ノ理由ニヨリ斷面Xニ於ケル合成單位應力ハ一般ニ次ノ如シ.

$$S_x=\frac{M.c}{I}+\frac{W.\sin\phi}{A}+\frac{H.\cos\phi}{A}\ldots\ldots\ldots\ldots(56_a)$$

合掌ガ其中央點ニ於テ一ツノ集中荷重ヲ受クルトキハ最大應壓力及最大彎曲應力ハ中央ノ斷面ニ起ルベキヲ以テ最大合成應力ヲ求ムルコト容易ナリ.

以上ノ式ハ精確ナルモノニアラザレドモ普通ノ場合ニハ之ヲ適用シテ可ナリ.

例題 玆ニ一ツノ木材小屋組アリテ支間40呎, 高サ15呎, 二ツノ合掌ハ等大ニシテ其幅4吋ナリ. 合掌ガ中央點ニ於テ450听ノ荷重ヲ受クルトキ其高サヲ求ム. 但シ作用强度ヲ700听/平方吋トス.

$$H=\frac{1}{2}\times450\times\frac{20}{15}=300\text{听},\qquad \frac{H.\cos\phi}{A}=\frac{300\times\frac{4}{5}}{4d}=\frac{60}{d},$$

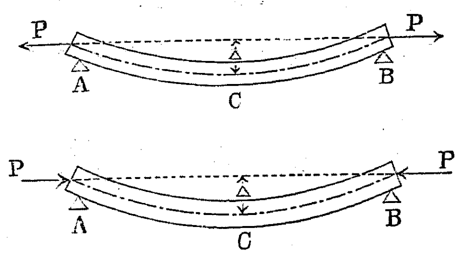
$$\frac{6M}{bd^2}=\frac{6\times300\times\frac{15}{2}\times12}{4d^2}=\frac{3,375\times12}{d^2},\qquad \frac{W\sin\phi}{A}=\frac{450\times\frac{3}{5}}{4d}=\frac{67.5}{d}$$

$$\therefore\quad 700=\frac{67.5}{d}+\frac{60}{d}+\frac{40,500}{d^2}$$

$$7d^2-1.275\,l-40,500=0\qquad\therefore\quad d=7.6''$$

若シPナル張力又ハ壓力ガ彎曲率ニ及ボス影響大ナレバ次ノ解法ニ依ルベシ.

第62圖



第62圖ノ如ク等布荷重ヲ受クル單桁ニ於テPヲ軸ニ沿ヒテ働ク張力又ハ壓力,Mヲ鉛直荷重ノミヨリ生ズル最大彎曲率,M_1ヲ其斷面ニ於ケル彎曲率,△ヲ其斷面ノ撓度トスレバPガ壓力ナルカ又ハ張力ナルカニヨリテ$M_1=M\pm P.\triangle$ナリ. 而シテM_1ヨリ生ズル最大單位彎曲應力ハ

$$S_b=\frac{M_1.c}{I}=\frac{(M\pm P.\triangle)c}{I}.$$

桁ガ單ニ鉛直荷重ヲ受ケテ彎曲スル場合ヨリ推論スレバ△ハ次式ニテ表ハサルベシ.

$$\triangle=\frac{\alpha}{\beta}.\frac{S_b.l^2}{Ec},$$

$$\therefore\quad S_b=\frac{M.c}{I}\pm\frac{\alpha}{\beta}.\frac{Pl^2}{EI}.S_b,$$

$$S_b=\frac{\frac{M.c}{I}}{1\mp\frac{\alpha}{\beta}.\frac{Pl^2}{EI}}=\frac{M.c}{I\mp\frac{\alpha}{\beta}.\frac{Pl^2}{E}}\ldots\ldots\ldots\ldots(57)$$

最大單位應壓力 $S=S_b+\frac{P}{A}$.

Pガ壓力ナルトキハ(57)式ニ於テ負ノ符號ヲ取リ，張力ナルトキハ正ノ符號ヲ取ルベシ．又 α,β ハ桁ノ兩端ノ狀態並ニ荷重ノ種類ニヨリテ異ナルモノニシテ(第四章第29節參照)

單桁ガ等布荷重ヲ受クルトキ… $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{8}{\frac{384}{5}}=\frac{1}{9.6}$,

單桁ガ中央點ニ於テ集中荷重ヲ受クルトキ……………… $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{48}=\frac{1}{12}$.

△ガ小ナレバ桁ガ單ニ鉛直荷重ノミ受クル場合ノ α,β ノ値ヲ用フルモ其誤差ハ小ナルユヱ實用上差支ナシ.

例題 厚サ1吋,高サ8吋,長サ18呎ノ建築用鋼眼鈑(Eyebar)ガ80,000听ノ軸張力ヲ受クルトキ自己重量ヨリ生ズル彎曲應力ト直應力トノ合成應力ヲ求ム．但 E=29,000,000听/平方吋トス.

眼鈑ノ重量 $=\frac{1\times8}{12^2}\times1\times490\times18=490$ 听.

最大彎曲率 $=\frac{1}{8}\times490\times18\times12=13,230$ 听吋,

$c=4$ 吋, $I=\frac{1}{12}\times1\times8^3=42.67$ 吋^4, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{9.6}$,

$P=80,000$ 听, $l=18\times12=216$ 吋,

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{Pl^2}{EI}=\frac{80,000\times\overline{216}^2}{9.6\times29,000,000\times42.67}=0.314,$$

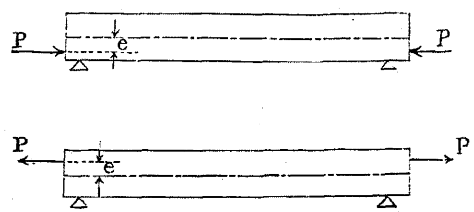
$$\frac{M.c}{I}=\frac{13,230\times4}{42.67}=1,240 \text{ 听/平方吋},$$

$S_b=\frac{1,240}{1.314}=944$ 听/平方吋, $\frac{P}{A}=\frac{80,000}{8}=10,000$ 听/平方吋.

∴ 合成單位應張力 $S=944+10,000=10,944$ 听/平方吋.

38. 兩端ニ於テ軸ノ方向ニ偏心外力ヲ受ケタル桁 第63圖ノ如クPガ偏心力ナルトキハ力率P.eノ爲メニ鉛直荷重ヨリ生ズル撓度ヲ減ズベシ．此場合ニ桁ノ中央斷面ノ中立軸ニ對スルPノ力率P.eト此斷面ニ於ケル鉛直荷重ノ彎曲率Mトガ等值ナル樣ニPノ働點ヲ定ムレバ中央斷面ニ於ケル彎曲應力ハ零ニシテ斷面ノ應壓力又ハ應張力ノ配布ハ均等ナリ.

第63圖



例題 1. 鋼構橋ノ上弦材ノ長サ30呎ニシテ斷面ハ二個ノ溝形鋼ト一枚ノ鋼鈑トヨリ成リ其全斷面積ハ20.5平方吋,慣性能率ハ742吋^{4}ナリ．之ガ末端ニ於テ168,000听ノ壓力ヲ受クルトキ中央斷面ニ於ケル應壓力ノ配布ヲシテ均等ナラシムベキ偏心距ヲ求ム.

弦材ノ重量 $=\frac{20.5}{12^2}\times490\times30=2,090$ 听.

此部材ヲ單桁ト見做セバ自己重量ヨリ生ズル最大彎曲率ハ

$$M=\frac{1}{8}Wl=\frac{1}{8}\times2,090\times30\times12=94,000 \text{ 听吋}.$$

$$\therefore\ e=\frac{94,000}{168,000}=0.56 \text{ 吋}.$$

中央斷面ニ於ケル單位應壓力$=\dfrac{168,000}{20.5}=8,200$ 听/平方吋.

此解法ハ重量ヲ同フセル桁ニ對シテハ同一結果ヲ與フルユヱ之ハ精確ナル方法ニアラザルコト勿論ナリ.

今偏心壓力ガ加ヘラルヽ前ニ桁ノ撓度ガ△ナリシト考フレバ壓力Pニ對シテハ$e>\triangle$ナルベキヲ以テ

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}(e-\triangle)=\mathrm{M}, \quad \therefore \quad e=\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}+\triangle. \\ \text{P ガ張力ナレバ} \\ \mathrm{P}(e+\triangle)=\mathrm{M}, \quad \therefore \quad e=\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}-\triangle. \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (58)$$

此式ガ與フルeノ値ハ$\mathrm{P}.e=\mathrm{M}$ヨリ得ラルヽ値ヨリモ信頼スルニ足ルモノナリ.

例題 2. (58)式ニヨル例題1ノ解法.

$$\triangle=\frac{5\mathrm{W}l^3}{384\mathrm{EI}}=\frac{5\times 2,090\times \overline{30\times 12}^3}{384\times 29,000,000\times 742}=0.06 \text{ 吋},$$

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}=0.56 \text{ 吋}.$$

$$\therefore \quad e=0.56+0.06=0.62 \text{ 吋}.$$

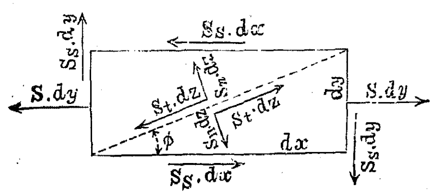
若シ P=168,000 听ガ張力ナレバ

$$e=0.56-0.06=0.50 \text{ 吋}.$$

39. 應剪力ト軸應力トノ合成 Aナル斷面積ヲ有スル棒狀體ガ其軸ニ沿ヒテPナル張力又ハ壓力ヲ受クルトキハ單位軸應力ハ$\mathrm{S}=\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}}$ナリ. 若シ剪斷力Vガ軸ニ直角ニ働ケバ單位應剪力ハ$\mathrm{S}_s=\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$ナ

リ. 但斷面ニ於ケル應剪力ノ配布ハ均等ナリトス. 今S及S_sガ同時ニ働クトキ共合成ニヨリテ生ズル最大單位應力ヲ求メントス. 次ノ所論ハSガ應張力ナルト應壓力ナルトヲ問ハズ等シク適用スルヲ得.

第64圖



第64圖ノ如ク棒狀體ヨリ細微ナル直並行六面體ヲ切取リ其長サヲdx,高サヲdy,對角線ヲdzトシ且紙面ニ垂直ナル幅ヲ單位トシ六面體ノ面ハ夫々棒狀體ノ軸ニ並行及垂直ナリトス. 張力$\mathrm{S}.dy$ハ六面體ヲ軸ノ方向ニ引裂ントシ剪斷力$\mathrm{S}_s.dy$ハ之ヲ廻轉セントス而シテ此廻轉ニ抵抗スルハdxノ方向ニ働ク剪斷力$\mathrm{S}_s.dx$ナリ. 此等ノ力ヲ對角線dzニ垂直ナル分力ト並行ナル分力トニ分テバ前者ハ對角線ニ垂直ナル應張力$\mathrm{S}_n.dz$トナリ後者ハ對角線ニ沿ヒテ働ク應剪力$\mathrm{S}_t.dz$トナル. 但S_nハ對角線ニ垂直ナル單位應張力ニシテS_tハ對角線ノ方向ノ單位應剪力ナリトス.

dzガdxトナス角ヲϕトスレバ

$$\mathrm{S}_n.dz=\mathrm{S}.dy.\sin\phi+\mathrm{S}_s.dx.\sin\phi+\mathrm{S}_s.dy.\cos\phi,$$

$$S_t.dz=S.dy.\cos\phi+S_s.dx.\cos\phi-S_s\,dy.\sin\phi,$$

$$dx=dz.\cos\phi,\quad dy=dz.\sin\phi.$$

$$\therefore\quad S_n=S.\sin^2\phi+S_s(\sin\phi.\cos\phi+\cos\phi.\sin\phi)$$

$$=\frac{1}{2}S(1-\cos2\phi)+S_s.\sin2\phi,$$

$$S_t=S.\sin\phi.\cos\phi+S_s(\cos^2\phi-\sin^2\phi)=\frac{1}{2}S.\sin2\phi+S_s.\cos2\phi.$$

$$\frac{dS_n}{d\phi}=0\ \text{ヨリ}\qquad \cot2\phi=-\frac{1}{2}S/S_s\dots\dots\dots(a)$$

$$\frac{dS_t}{d\phi}=0\ \text{ヨリ}\qquad \tan2\phi=+\frac{1}{2}S/S_s\dots\dots\dots(b)$$

然ラバS_nハ(a)式ノ値ニ對シテ最大又ハ最小ニシテS_tハ(b)式ノ値ニ對シテ最大ナリ.

(a)式ヨリ

$$\sin2\phi=\frac{S_s}{\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},\quad \cos2\phi=\frac{\frac{1}{2}S}{\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

然ルニ(a)式ノ右邊ノ符號ハ負ナルユヱ $\sin2\phi$ 又ハ $\cos2\phi$ ノ中孰レカ一ツハ正ニシテ他ハ負ナルベキナリ. 今$\cos2\phi$ヲ負トスレバ

$$S_n=\frac{1}{2}S+\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\sin2\phi$ ヲ負トスレバ

$$S_n=\frac{1}{2}S-\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

次ニ(b)式ヨリ

$$\sin2\phi=\frac{\frac{1}{2}S}{\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},\quad \cos2\phi=\frac{S_s}{\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$S_t=\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad \text{最大}\ S_n&=\frac{1}{2}S\pm\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\\ \text{最大}\ S_t&=\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(59)$$

若シSガ應張力ナレバ

$$\text{最大單位應張力}\ S_n=\frac{1}{2}S+\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{最大單位應壓力}\ S_n=\frac{1}{2}S-\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Sガ應壓力ナレバ

$$\text{最大單位應壓力}\ S_n=\frac{1}{2}S+\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{最大單位應張力}\ S_n=\frac{1}{2}S-\left[S_s^2+\left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$S_s=0$ 卽チ單純ナル張力又ハ壓力ノ場合ニハ

$$\text{最大}\ S_n=\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}S=S,\quad \cot2\phi=-\frac{1}{2}S/0=-\infty,$$

從テ $\phi=0$ ナリ. 然ラバ

$$S_n=\left[\frac{1}{2}S(1-\cos2\phi)+S_s.\sin2\phi\right]_{\phi=0}=0.$$

上式ヨリ$\phi=0$ナル面卽チ軸ノ方向ナル面ニ於ケル

應力ハ零卽チ最小S_nハ零ナリ．又最大S_tハ$\frac{1}{2}S$ニシテ$\tan 2\phi = +\infty$從テ$\phi = 45°$或ハ135°ナリ．是レ應剪力最大ナル面ガ張力又ハ壓力ノ方向トナス角ハ45°ナルコトヲ表ハス．

例題　直徑1吋ノ締鉦ガ其軸ノ方向ニ5,000听ノ張力及軸ニ直角ニ3,000听ノ剪斷力ヲ受クルトキ最大合成應力ヲ求ム．

$$S = \frac{5{,}000}{0.7854} = 6{,}366 \text{ 听/平方吋}, \quad S_s = \frac{3{,}000}{0.7854} = 3{,}820 \text{ 听/平方吋},$$

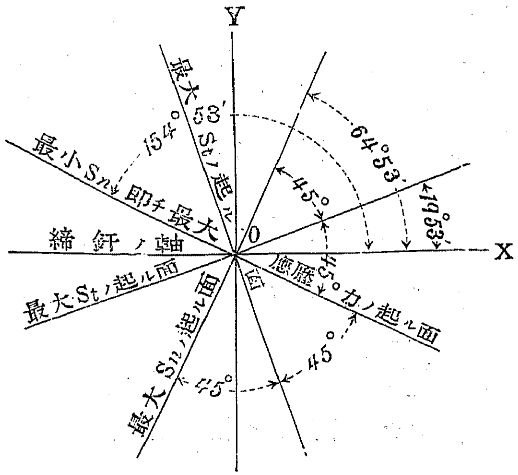
$$\left[S_s^2 + \left(\frac{1}{2}S\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\overline{3{,}820}^2 + \overline{3{,}183}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 4{,}972 \text{ 听/平方吋}.$$

∴　最大單位應張力 $S_n = 3{,}183 + 4{,}972 = +8{,}155$ 听/平方吋，
　　最大單位應壓力 $S_n = 3{,}183 - 4{,}972 = -1{,}789$ 听/平方吋．
　　最大單位應剪力 $S_t = 4{,}972$ 听/平方吋．

此等最大應力ガ締鉦ノ軸トナス角ハ次ノ如シ．

$$\cot 2\phi = -\frac{3{,}183}{3{,}820} = -0.833, \quad -\cos 2\phi = \cos(180° - 2\phi),$$

第65圖



$$+\sin 2\phi = \sin(180° - 2\phi), \quad \cot(180° - 2\phi) = 0.833.$$

$$\therefore \quad 180° - 2\phi = 50°14', \quad \phi = 64°53'.$$

又　$+\cos 2\phi = \cos(360° - 2\phi), \quad -\sin 2\phi = \sin(360° - 2\phi),$

$$\cot(360° - 2\phi) = 0.833.$$

$$\therefore \quad 360° - 2\phi = 50°14', \text{ 卽チ } \phi = 154°53'.$$

此ノ如ク最大S_nト最小S_nトノ面ハ互ニ直角ナリ

次ニ　$$\tan 2\phi = \frac{1}{2}S/S_s = +0.833,$$

$$\therefore \quad 2\phi = 39°46', \quad \phi = 19°53'.$$

然ルニ之ト直角ノ方向ニ同大ノ應剪力ガ起ルユヱ

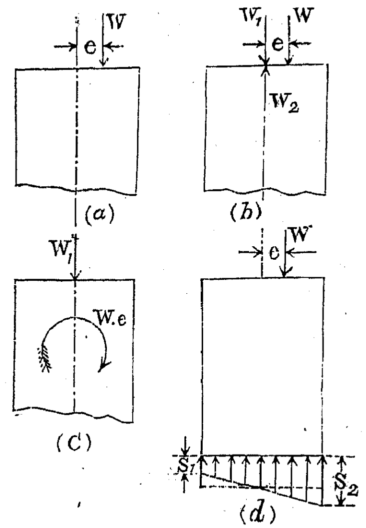
$$\phi = 19°53' \text{ 又ハ } \phi = 19°53' + 90° = 109°53'.$$

是ニ由テ見レバ**最大應張力及最大應壓力ガ働ク面ノ方向ハ最大應剪力ガ働ク面ノ方向ニテ二等分セラル．**

40．横斷面ノ核心(Core of Section)　第二章第13節ニ於テ述ベシ如ク偏心壓力ヲ受クル短キ棒狀體ノ横斷面ニアリテハ應壓力ノ配布均等ナラズシテ偏心距ガ增加スレバ遂ニハ壓力ノ働點ト反對ノ側ニ應張力ヲ生ズルニ至ルベシ．凡テ壓力ノ働線ガ斷面ノ或範圍內ニアレバ斷面ニ於ケル應力ハ總テ同性ナレドモ壓力ガ其範圍外ニ働クトキハ異性ノ應力ヲ生ジ斷面內ノ一部分ニハ應張力ヲ生ズベシ．此範圍ハ同性應力ニ對スル偏心距ノ限界ヲ示スモノナレバ之ヲ**横斷面ノ核心**ト謂フ．

第66圖ニ於テ壓力Wノ偏心距ヲeトシ棒狀體ノ軸ニ沿ヒテ大サWニ等シクシテ方向相反セル二力

第9圖



W_1, W_2ヲ加フレバ((b)圖)WトW_2トガ一ツノ偶力ヲ形ヅクル之ニWヲ偶力(W, W_2)ト軸ニ沿ヒテ働ク壓力$(W_1=W)$トニテ置換フルヲ得((c)圖)然ラバ軸力Wヨリ生ズル單位應力ハ$\frac{W}{A}$ニシテ偶力率$W.e$ヨリ生ズル單位應力ハ

$\frac{M.c}{I}=\frac{W.e.c}{I}=\frac{W.e.c}{A.k^2}$ナリ

但Aハ斷面積, cハ斷面ノ中立軸ヨリ緣維迄ノ距離, I及kハ夫々其軸ニ對スル斷面ノ慣性能率及環動半徑ナリトス. 夫故ニ(d)圖ノ如ク

$$\left.\begin{aligned}\text{最大單位應力}\ S_2&=\frac{W}{A}+\frac{W.e.c}{I}=\frac{W}{A}\left(1+\frac{e.c}{k^2}\right)\\ \text{最小單位應力}\ S_1&=\frac{W}{A}-\frac{W.e.c}{I}=\frac{W}{A}\left(1-\frac{e.c}{k^2}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(60)$$

eガ増セバS_2ハ増加シS_1ハ減少ス. 從テeガ或限界ヲ超過スレバS_1ハ符號ヲ變ズベシ. 而シテS_1ヲ零ニナスベキe_1ノ値ハ次ノ如シ,

$$S_1=\frac{W}{A}\left(1-\frac{e_1.c}{k^2}\right)=0,\quad \text{卽チ}\quad e_1=\frac{k^2}{c}.$$

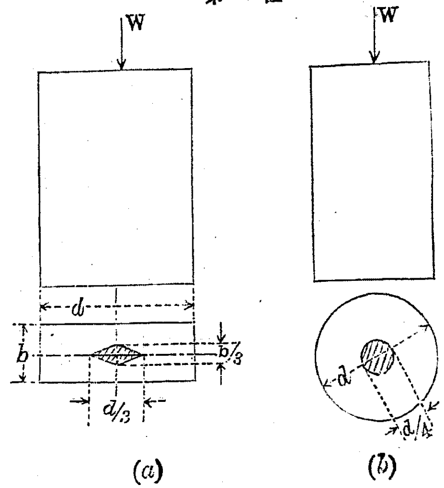
今矩形斷面ノ幅ヲb, 長サヲdトスレバbニ並行ナル中立軸ニ對シテハ

$$k^2=\frac{I}{A}=\frac{bd^3}{12bd}=\frac{d^2}{12},\quad c=\frac{d}{2},$$

$$\therefore\quad e_1=\frac{\frac{1}{12}d^2}{\frac{1}{2}d}=\frac{1}{6}d.$$

然ラバWノ働點ガ$\frac{1}{3}d$及$\frac{1}{3}b$ヲ對角線トセル菱形内ニアル以上ハ斷面ニ於ケル應力ハ總テ同性ナリ(第67圖(a))

第67圖



圓形斷面ノ場合ニハ

$$k^2=\frac{\pi d^4}{64}\div\frac{\pi d^2}{4}=\frac{d^2}{16},\quad c=\frac{d}{2}.$$

$$\therefore\ e_1=\frac{\frac{1}{16}d^2}{\frac{1}{2}d}=\frac{1}{8}d.$$

然ラバWノ働點ガ$\frac{d}{4}$ヲ直徑トセル同心圓內ニアル以上ハ斷面ニ生ズル應力ハ總テ同性ナリ(第67圖(b)). 此ノ如キ面積ハ所謂橫斷面ノ核心卽チ同性應力ノ範圍ナリ. (卷末補遺I參照)

第七章 長柱

(Columns or Struts)

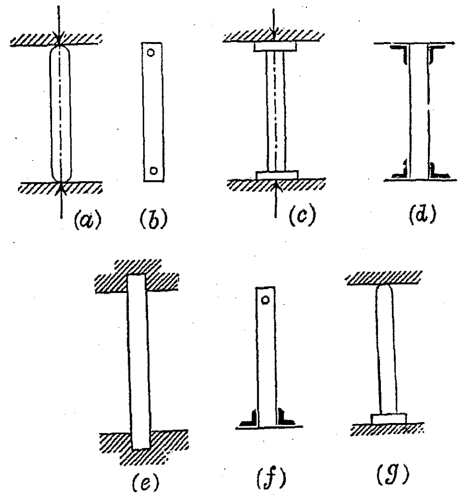
41. 定義 壓力ヲ受クル材ノ長サガ其斷面ノ最小幅ノ約10倍ヨリ大ナレバ之ヲ**長柱**ト稱ス. 之ヨリ短キモノハ壓力ヲ受ケテ單ニ收縮スルノミナレドモ長柱ハ之ガ爲メニ彎曲シ其作用複雜ナリ.

長柱ノ長サト最小環動半徑トノ比ヲ**徑長比**(Slenderness Ratio)ト稱ス. 之ガ約25ヨリ小ナレバ短柱トシ之ヨリ大ナレバ長柱トス. 一般ニ諸構造物ニ使用セラルヽ長柱ノ徑長比ハ50乃至150ナリトス. 短キ柱ト長柱トノ區劃ハ判然セルモノニアラズシテ實驗ノ結果ヲ基トシテ定メタルモノニ過ギズ.

長柱ノ軸トハ橫斷面ノ中心ヲ連結セル線ヲ謂フ. 從テ長柱ガ眞直ナレバ軸ハ直線ナレドモ長柱ガ彎曲セルトキノ軸ハ彈曲線ナリ.

長柱兩端ノ構造ハ其强サニ大ナル影響ヲ及ボス. 第68圖(a),(b)ニ示セルハ**圓端**(Round Ends)及**鉸端**(Hinged Ends)ニシテ軸ノ方向ハ兩端ニ於テ自由ニ變ジ得ベク(d)及(e)圖ハ**固定端**(Fixed Ends)ヲ表ハシ軸ノ方向ハ兩端ニ於テ不變ナリ. 又(f)圖ハ**一鉸端一固定端**(One End Hinged and the Other Fixed), (g)圖ハ一圓端一平端(One End Round and the Other Flat)ノ場合ヲ表ハスモノナリ.

第68圖



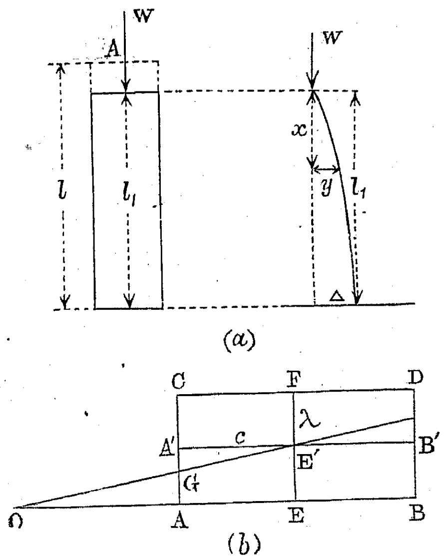
兩端固定ノ長柱强サハ兩圓端長柱ノ强サヨリモ大ニシテ一圓端一固定端長柱ノ强サハ兩者ノ中間

ニ位ス．又(c)圖ノ如キ平端長柱ノ强サハ其長サ短ケレバ固定端長柱ノ强サト略ボ同一ナレドモ長サガ增セバ鉸端長柱ノ强サト略ボ同一ナルコトハ實驗上認メラルヽ所ナリ．

42. 理想的長柱ニ關スル理論　**理想的長柱**(Ideal Columns)トハ完全ナル齊等質ニシテ各部分ノ彈性係數ガ同ジク,斷面ハ均等ニシテ完全ナル直線軸ヲ有シ,荷重ガ正サシク軸ニ沿ヒテ加ヘラルヽ柱ナリ．此ノ如キ長柱ハ荷重ヲ受クルモ彎曲スルコトナク單ニ荷重ニ依リテ壓縮セラルヽノミナリ．然レバ單位應力 $\frac{W}{A}$ ガ材料ノ彈性限度 S_e ニ達スル迄荷重ヲ加フルヲ得ベシ．實驗ノ結果ニヨルニ理想的長柱ニ軸壓力ヲ加ヘ更ニ之ニ橫ヨリ外力ヲ加ヘテ少シク彎曲セシメ其橫外力ヲ除去シテ軸力ノミトスルトキ其軸力ガ或限度以內ナレバ舊ニ復スルト雖モ若シ軸力ガ其限度ニ達スルトキハ柱ハ彎曲シタル儘平衡ヲ保ツモノナリ．今此ノ如キ限度荷重ノ大サヲ見出サントス．但長柱自己重量ノ影響ハ算入セザルモノトス．今軸力ノ爲メニ柱長 l ガ l_1 トナリタリトセバ

$$l_1=l\left(1-\frac{W}{A.E}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

第69圖



壓縮セラレタル長柱ニ水平力ヲ加ヘテ少シク彎曲セシメタル後其力ヲ除去セシトキ全ク舊位ニ復セズシテ第69圖(a)ノ如キ位置ヲ取リテ平衡ヲ保チタリト想像セヨ．軸ノ放端ヲ原點トシテ彈曲線中ノ一點ノ正座標ヲ x,y トスレバ其點ニ於ケル彎曲率ハ $M=W.y$ ナリ．

第69圖(b)ニ於テ AB, CD ヲ荷重 W ヲ加フル前ノ相隣レル二斷面トシ其距離 EF ヲ dx, W ヲ加ヘタルトキノ軸ノ壓縮 E'F ヲ λ トスレバ

$$\text{W ヨリ生ズル單位應力}=\frac{W}{A},\quad \lambda=\frac{W.dx}{AE}.$$

(a)圖ノ如ク長柱ガ左方ニ彎曲スレバ軸ヨリ c ナル距離ニアル內側ノ纖維ノ單位應力ハ $\left(\frac{W}{A}+\frac{M.c}{I}\right)$ ナルヲ以テ此纖維ノ壓縮ハ

$$CG=\lambda'=\frac{W.dx}{AE}+\frac{M.c.dx}{IE},\quad A'G=\lambda'-\lambda=\frac{M.c.dx}{IE}.$$

彈曲線ノ曲度半徑OEヲγトスレバ

$$\frac{\gamma}{dx-\lambda}=\frac{c}{A'G},\quad 即チ\quad \frac{\gamma}{dx\left(1-\frac{W}{AE}\right)}=\frac{c}{\frac{M.c.dx}{IE}}.$$

又ハ

$$\frac{\gamma}{dx.\frac{l_1}{l}}=\frac{c}{\frac{M.c.dx}{IE}},\qquad \therefore\ \frac{EI}{\gamma}=\frac{l}{l_1}.M.$$

此場合ニMハ負ニシテ $\frac{1}{\gamma}=\frac{d^2y}{dx^2}$ (第四章第25節參照)ナルユヱ

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{l}{l_1}.M,\quad 又ハ\quad -\frac{l}{l_1}W.y\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

此式ノ兩邊ニ$2dy$ヲ乘ジテ積分スレバ

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-\frac{lWy^2}{l_1}+C.$$

撓度ノ最大ナル點卽チ $y=\Delta$ ニ對シテ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルユヱ $C=\frac{lW\Delta^2}{l_1}$ ヲ得.

$$\therefore\ dx=\sqrt{\frac{l_1EI}{lW}}.\frac{dy}{\sqrt{\Delta^2-y^2}}.$$

尙一度積分スレバ

$$x=\sqrt{\frac{l_1EI}{lW}}.\sin^{-1}\frac{y}{\Delta}+C'.$$

$y=0$ ニ對シテ $x=0$ ナルユヱ $C'=0$ ナリ.

$$\therefore\ y=\Delta.\sin\left\{x\sqrt{\frac{lW}{l_1EI}}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

(i)一端ハ放端ニシテ他端ニ於テ固定サレタル長

柱　此場合ニハ(c)式ニ於テ $x=l_1$ ナルトキ $y=\Delta$ ナルユヱ

$$l_1\sqrt{\frac{lW}{l_1EI}}=\frac{\pi}{2}.$$

最小環動半徑卽チ彎曲ノ起ル面ニ於ケル環動半徑ヲkトスレバ

$$I=A.k^2,\quad \frac{W}{A}=\frac{\pi^2Ek^2}{4ll_1}.$$

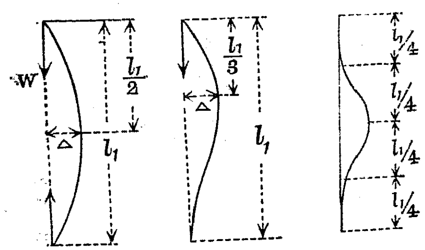
(ii)圓端ヲ有スル長柱(第70圖(a))　此場合ニハ $y=\Delta$ ニ對シテ $x=\frac{l_1}{2}$ ナルユヱ(c)式ヨリ

$$\frac{W}{A}=\frac{\pi^2Ek^2}{ll_1}.$$

(iii)一圓端一固定端ヲ有スル長柱(第70圖(b))　此場合ニハ $y=\Delta$ ニ對シテ(c)式中ノxハ$\frac{l_1}{3}$ナルベキナリ. 然ラバ

$$\frac{W}{A}=\frac{9\pi^2Ek^2}{4ll_1}.$$

第70圖



(a)　(b)　(c)

(iv)兩端固定ノ長柱(第70圖(c))　此場合ニハ(c)式ニ於テ$y=\Delta$ニ對シテ $x=\frac{1}{4}l_1$ ナルベキナリ. 然ラバ

$$\frac{W}{A}=\frac{4\pi^2Ek^2}{ll_1}.$$

以上四ツノ場合ハ次ノ式ニテ之ヲ表ハスヲ得.

$$\frac{W}{A}=\frac{n^2Ek^2}{ll_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

一端固定,他端放端.	二圓端.	一端固定,他端圓端.	二固定端.
$n=\frac{\pi}{2}$,	π,	$\frac{3}{2}\pi$,	2π.

43. **おいらあ氏公式**(Euler's Formula) 前節(a)式

$$l_1=l\left(1-\frac{W}{AE}\right)$$

ニ於テ $\frac{W}{A}$ ハ彈性限度 S_e ヨリ超過スル能ハザルユヱ $\frac{W}{AE}$ ハ1ニ比シテ省略シ得ル程ニ小ナル分數ナリ. 依テ l_1 ノ代リニ l ヲ用フルモ實用上差支ナシ. 然ラバ前節(d)式ヨリ次式ヲ得.

$$\frac{W}{A}=\frac{n^2Ek^2}{l^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

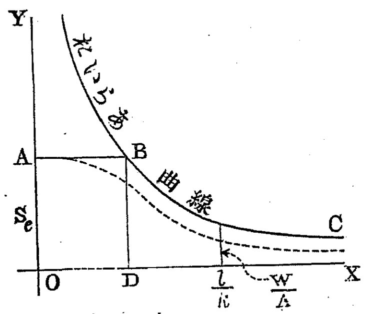
之ヲ**おいらあ氏ノ長柱公式**ト謂フ. 此公式ニ直壓力ノ影響$(l-l_1)$ヲ算入セザルハ理論上缺點タルヲ免レズ. 長柱ニ關スル理論ハ現今尚不滿足ニシテ諸公式ハ數多ノ學者ガ各自假定ニ基キテ案出シタルモノナルガおいらあ氏公式ノ如キハ一般ニ用キラルヽモノヽ一ナリ.

ふゐどらあ氏 (T. C. Fidler) ノ實驗ニ據ルニ $\frac{W}{A}$ ガ $\frac{n^2Ek^2}{l^2}$ ヨリ少シニテモ超過スレバ長柱ガ少量ノ障

害ヲ受クルトキ甚シク彎曲シ或ハ破壞スルコトアリ. 依テ(61)式ガ與フル W ノ値ヲ以テ理想的長柱ニ對スル限度ノ荷重ト見做スヲ得.

44. **理想的曲線ト實際曲線** X軸ニ沿ヒテ $\frac{l}{k}$ ノ値ヲ取リ (61) 式ガ與フル $\frac{W}{A}$ ノ値ヲ縱距ニ取レバ第71圖ノ如キおいらあ氏公式ノ曲線BCヲ得. 然ラバ $\frac{l}{k}$ ノ或値ニ對スル限度ノ單位應力ヲ知ラントセバ其 $\frac{l}{k}$ ニ相當スル點ニ於ケル曲線ノ縱距ヲ測レバ可ナリ.

第71圖



若シ單位應力 $\frac{W}{A}$ ガ彈性限度 S_e ニ等シクナレバ

$$\frac{l}{k}=\overline{OD}=\sqrt{\frac{n^2E}{S_e}}$$

ニシテ $\frac{l}{k}$ ガ此値ヨリモ小ナル間ハ彈性限度 S_e 迄荷重ヲ加フルヲ得. 然ラバ AB 間ハ直線ニシテ ABC 線ノ縱距ハ $\frac{l}{k}$ ノ或値ニ對シ理想的長柱ノ限度ノ單位應力ヲ與フルモノナリ,

實用長柱ニアリテハ理想的長柱ノ條件ガ實現セラレザルヲ以テ理想的長柱ニ關スル結論ガ直ニ實

用長柱ニ適用セラレザルコト勿論ナリ. 實用長柱ニハ完全ナル齊等質ノモノナク,完全ナル直線軸ヲ有スルモノナク又正シク軸外力ヲ受クルモノナク多少理想的條件ト相違ス. 此相違ハ長柱ガ荷重ヲ受クルトキ之ニ撓ミヲ生ズル原因トナルベシ. 然ラバ短キ實用柱ニ限リ彈性限度S_e迄荷重ヲ加フルヲ得ベク實用長柱ニ對シテハ單位應力ハ常ニ第71圖ノ表圖ガ與フル値ヨリモ小ナリ. 依テ實用長柱ニ對スル實際曲線ハ第71圖ノ點線ニテ表ハス如クA點ニ於テAB線ニ又無窮大距離ニ於テBC曲線ニ切觸スル一ツノ曲線ナルベシ. 而シテ實用長柱ト理想的長柱トノ相違ハ個々ノ長柱ニ就テ差等アルユヱ實際曲線ハ各々ノ長柱ニ對シテ異ナルベキナリ. 從テ總テノ長柱ニ對シテ實際ノ結果ヲ與フル如キ一ツノ曲線ヲ理論的ニ求ムルコト不可能ニシテ實驗ニヨリテ得タル結果ノ平均ヲ基トシテ之ヲ定ムルノ外ナシ.

先ニ與ヘシnノ理論的値ハ摩擦ヲ無視シテ得タルモノナリ. 又固定端ト雖モ完全ナル固定ニアラズ. 從テnノ實用的値ト理論的値トノ間ニ差異アルハ勿論ナリ.

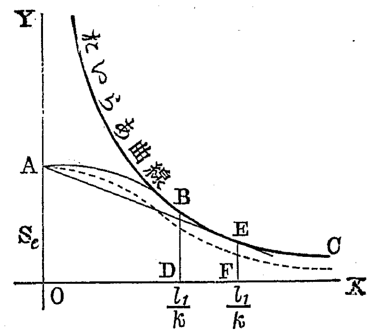
nノ實用的値.

二圓端.	一固定端一圓端.	二固定端.
$\pi\sqrt{\frac{5}{3}}=4.053$	$\frac{5\pi}{2\sqrt{3}}=4.524$	$\pi\sqrt{\frac{5}{2}}=4.964$

おいらあ氏公式ニ此實用的値ヲ使用シテ得ラルヽ平均單位限度應力ハ$\frac{l}{k}$ガ甚大ナル場合ニハ頗ル精確ナルモノナリ.

45. 實用長柱公式 實用長柱ニ於ケル$\frac{W}{A}$ノ値ハ第71圖ABCノ線ヨリモ寧ロ第72圖ニ示ス如クA點ヲ通リテおいらあ氏曲線BCニ切觸スル一ツノ曲線ガ與フル値ニ近キコトハ實驗上認メラルヽ事柄ニシテ實用公式ハ之ニヨリテ得タルモノナリ.

第72圖



(1) 直線公式 (Straight Line Formula) 之ハ實用公式中多ク用キラルヽモノヽ一ニシテじよんそん氏(T. H. Johnson)ノ公式ナリ. 今第72圖ノ如クA點ヲ通リテおいらあ氏曲線ニ切觸スル直線AEヲ引ケバ此方程式ハ

$$y = S_e + b.x \dots\dots\dots\dots(a)$$

おいらあ氏曲線ECノ方程式ハ

$$y = \frac{n^2E}{x^2} \dots\dots\dots\dots(b)$$

直線AEト曲線ECトノ切觸點Eニ於テハ(a), (b)二式ノ微分係數ハ相等シ. 即チ

$$b = -\frac{2n^2E}{x^3} = -\frac{2n^2Ek^3}{l_1^3} \dots\dots\dots\dots(c)$$

又E點ニ於テハ縱距ハ共通ナルニヨ

$$S_e + b.x = \frac{n^2E}{x^2}, \quad \text{即チ} \quad S_e + \frac{b.l_1}{k} = \frac{n^2Ek^2}{l_1^2} \dots\dots\dots\dots(d)$$

(c)式ノbノ値ヲ(d)式ニ代入スレバ

$$S_e - \frac{2n^2Ek^2}{l_1^2} = \frac{n^2Ek^2}{l_1^2}, \quad \text{即チ} \quad S_e = \frac{3n^2Ek^2}{l_1^2}.$$

夫故ニ$\frac{l}{k}$ノ制限ノ値ハ次ノ如シ

$$\frac{l_1}{k} = n\sqrt{\frac{3E}{S_e}}.$$

之ヲ(c)式ニ代入スレバ

$$b = -\frac{2S_e\sqrt{S_e}}{3n\sqrt{3E}}.$$

此値ヲ(a)式ニ代入スレバ

$$\left.\begin{array}{l} y = S_e - \dfrac{2S_e\sqrt{S_e}}{3n\sqrt{3E}}.x, \quad \text{又ハ} \quad \dfrac{W}{A} = S_e - \dfrac{2S_e\sqrt{S_e}}{3n\sqrt{3E}}.\dfrac{l}{k}, \\ \dfrac{W}{A} = S_e - C.\dfrac{l}{k}. \end{array}\right\} \dots(62)$$

但 $\frac{l}{k} < n\sqrt{\frac{3E}{S_e}}$, k=橫斷面ノ最小環動半徑,

$$C = \frac{2S_e\sqrt{S_e}}{3n\sqrt{3E}} \text{ 即チ常數}$$

(62)式ニ於テハyハxノ一次函數ナルガ故ニ之ヲ**直線公式**ト謂フ. 若シ$\frac{l}{k} > n\sqrt{\frac{3E}{S_e}}$ナレバおいらあ氏公式ヲ用フベシ.

長柱ノ種類.	S_e.	C.	$\frac{l}{k}$ノ制限値.
建築用鋼:			
兩固定端	52,500 听/平方吋	179 听/平方吋	195
一固定端,一圓端	52,500	220	159
兩圓端	52,500	284	123
錬鐵:			
兩固定端	42,000	128	218
一固定端,一圓端	42,000	157	178
兩圓端	42,000	203	138
鑄鐵:			
兩固定端	80,000	438	122
一固定端,一圓端	80,000	537	90
兩圓端	80,000	693	77
木材:			
兩固定端	5,400	28	128

注意 設計ノ際ニハ上記S_e及Cノ値ヲ適當ノ安

全率ニテ除スベシ. 又我國ノ木材ニ就テハ長柱實驗ヨリ得タルモノナキ故上記木材ニ對スル常數ハ精確ナルモノニアラズ.

(62)式中實驗的常數ハ S_e, E 及 n ニシテ此公式ハ使用甚便利ナリ. 尤モ直線 AE ハ A 點ニ於テ水平ナラザルユエ $\frac{l}{k}$ ノ小ナル値ニ對シテハ直線公式ガ與フル $\frac{W}{A}$ ノ値ハ實驗上得ラルヽ値ヨリモ餘程小ナリ.

(2) **抛物線公式** (Parabola Formula)　之ハじよんそん氏 (J. B. Johnson) ノ公式ニシテ第72圖ノ曲線ABハB點ニ於テおいらあ氏曲線ニ切觸スル一ツノ抛物線ナリト假定ス. 即チ曲線ABノ方程式ハ

$$y=S_e+b.x^2 \quad \cdots\cdots (a)$$

式中 b ハ二線切觸ノ條件ニヨリ定ムベキナリ. 又 $x=0$ ニ對シテハ y ハ S_e ニ等シクA點ニ於テ切線ハ水平ナリ. おいらあ氏公式ヨリ

$$y=\frac{n^2E}{x^2} \quad \cdots\cdots (b)$$

二曲線ノ切觸點 B ニ於テハ (a), (b) 二式ノ微分係數ハ相等シキユエ

$$2bx=-\frac{2n^2E}{x^3}. \quad 即チ \quad b=-\frac{n^2Ek^4}{l_1^4} \quad \cdots\cdots (c)$$

又 B 點ニ於テ二曲線ハ共通ノ縱距ヲ有スルユエ

$$\frac{n^2Ek^2}{l_1^2}=S_e+\frac{b.l_1^2}{k^2}=S_e-\frac{n^2Ek^2}{l_1^2},$$

$$\therefore \quad S_e=\frac{2n^2Ek^2}{l_1^2}.$$

依テ $\frac{l}{k}$ ノ制限ノ値ハ次ノ如シ.

$$\frac{l_1}{k}=n\sqrt{\frac{2E}{S_e}}.$$

之ヲ (c) 式ニ代入スレバ

$$b=-\frac{S_e^2}{4n^2E}.$$

此値ヲ (a) 式ノ b ニ代入スレバ

$$\left.\begin{aligned} &y=S_e-\frac{S_e^2}{4n^2E}.x^2, \quad 又ハ \quad \frac{W}{A}=S_e-\frac{S_e^2}{4n^2E}.\frac{l^2}{k^2}, \\ &\frac{W}{A}=S_e-C.\frac{l^2}{k^2}. \end{aligned}\right\} \cdots (63)$$

但 $\frac{l}{k}<n\sqrt{\frac{2E}{S_e}}$, k=横斷面ノ最小環動半徑,

$$C=\frac{S_e^2}{4n^2E} \text{ 即チ常數}$$

(63)式ニ於テ y ハ x ノ二次函數ナルガ故ニ之ヲ**抛物線公式**ト謂フ. 若シ $\frac{l}{k}$ ガ限度 $n\sqrt{\frac{2E}{S_e}}$ ヲ超過スレバおいらあ氏公式ヲ用フベシ.

(63)式ハ(62)式ト同樣ニ使用上便利ナリ. 尤モ切線ガA點ニ於テ水平ナルユエ(63)式ハ概シテ(62)式ヨリモ精確ナル結果ヲ與フ.

軟鋼:

兩圓端……$\frac{l}{k} \leqq 150$, $\frac{W}{A}=42{,}000-0.97\left(\frac{l}{k}\right)^2$ 听/平方吋,

$\frac{l}{k} \geqq 150$, $\frac{W}{A}=456{,}000{,}000/\left(\frac{l}{k}\right)^2$.

兩固定端…$\frac{l}{k} \leqq 190$, $\frac{W}{A}=42{,}000-0.62\left(\frac{l}{k}\right)^2$,

$\frac{l}{k} \geqq 190$, $\frac{W}{A}=712{,}000{,}000/\left(\frac{l}{k}\right)^2$.

錬鐵:

兩圓端……$\frac{l}{k} \leqq 170$, $\frac{W}{A}=34{,}000-0.67\left(\frac{l}{k}\right)^2$,

$\frac{l}{k} \geqq 170$, $\frac{W}{A}=432{,}000{,}000/\left(\frac{l}{k}\right)^2$.

兩固定端…$\frac{l}{k} \leqq 210$, $\frac{W}{A}=34{,}000-0.43\left(\frac{l}{k}\right)^2$,

$\frac{l}{k} \geqq 210$, $\frac{W}{A}=675{,}000{,}000/\left(\frac{l}{k}\right)^2$.

鑄鐵:

兩圓端……$\frac{l}{k} \leqq 70$, $\frac{W}{A}=60{,}000-6.25\left(\frac{l}{k}\right)^2$,

$\frac{l}{k} \geqq 70$, $\frac{W}{A}=144{,}000{,}000/\left(\frac{l}{k}\right)^2$.

兩固定端…$\frac{l}{k} \leqq 120$, $\frac{W}{A}=60{,}000-2.25\left(\frac{l}{k}\right)^2$,

$\frac{l}{k} \geqq 120$, $\frac{W}{A}=400{,}000{,}000/\left(\frac{l}{k}\right)^2$.

木材:

兩固定端…$\frac{l}{h} \leqq 60$, $\frac{W}{A}=3{,}500-0.8\left(\frac{l}{h}\right)^2$.

注意 木材長柱公式中 h ハ橫斷面ノ最小邊ナリ. 又設計ノ際ニハ適當ノ安全率ヲ使用スヘ.

(62) 及 (63) 二式ハ第72圖ニ示ス如クE又ハB點ニ於テおいらあ氏曲線ニ切觸スル線ヲ表ハシ夫々限度ノ長サ以上ノ長柱ハ理想的條件ヲ滿タスモノトセシモ此假定ハ正當ナラズ. 限度ノ長サ以上ノ長柱ニ對シテ兩式ガ與フル $\frac{W}{A}$ ノ値ハおいらあ氏公式ガ與フル $\frac{W}{A}$ ノ値ヨリモ小ナレドモ之ニ近キコトハ實驗上認メラルヽ所ナリ. 然ラバ該假定ハ實用上差支ナキモノト考フルヲ得ベシ.

上述ノ論議ヨリ推定スレバ第72圖ノ點線曲線ノ如クニA點ヲ通リ此點ニ於テ水平切線ヲ有シ且おいらあ氏曲線ヨリモ幾分下方ニ位シ無窮大距離ニ於テおいらあ氏曲線ニ切觸スル曲線ガ實際ノ $\frac{W}{A}$ ノ値ヲ與フベシ.

(3) **らんきん氏公式** (Rankine's Formula) 此公式ヲ表示スル曲線ハ第72圖ニ於テ點線ニテ表ハセル曲線ニ類似ノモノニシテ之ハ任意ノ斷面ニ於ケル最大單位應力ガ單位直應壓力ト彎曲率ヨリ生ズル單位

應壓力トノ合成ナリト假定シテ得タルモノナリ.

今最大撓度ヲΔトセバ最大彎曲率ハW.Δニシテ斷面ノ中立軸(彎曲ノ起ル面ニ垂直ナル軸)ヨリcナル距離ニアル纖維ノ單位彎曲應壓力ハ $\frac{W\Delta.c}{I}=\frac{W\Delta.c}{Ak^2}$ ナリ. 又單位直應壓力ハ $\frac{W}{A}$ ナリ. 然ラバ限度ノ單位應力ハ

$$\frac{W}{A}+\frac{W\Delta.c}{Ak^2}=S_e, \qquad \therefore \quad \frac{W}{A}=\frac{S_e}{1+\frac{\Delta.c}{k^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

長柱ノ彎曲ガ桁ノ彎曲ト同樣ナリト見做セバ(第四章第29節(45)式參照)

$$\Delta=\phi.\frac{l^2}{c}, \text{ 即チ } \frac{\Delta.c}{k^2}=\frac{\phi.l^2}{k^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

此値ヲ(a)式ニ代入スレバ

$$\frac{W}{A}=\frac{S_e}{1+\phi\left(\frac{l}{k}\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (64)$$

此ニ於テkハ斷面ノ**最小環動半徑**ニシテϕハ材質及兩端ノ構造ニ依テ定マル實驗的常數ナリ. (64)式ガらんきん氏公式ニシテ$\frac{l}{k}$ノ總テノ値ニ對シテ適用スルヲ得. 而シテ此公式ニハ理論上缺點アレドモ實用公式トシテ廣ク用キラルヽモノヽ一ナリ.(64)式中ノ$\frac{l}{k}$ヲ零トスレバ$\frac{W}{A}=S_e$, $\frac{l}{k}$ヲ無窮大トスレ

バ$\frac{W}{A}=0$トナリ此式ハ第72圖ニ於テ點線ニテ表ハセル曲線ノ條件ト一致スルヲ見ルベシ.

	鑄鐵	錬鐵	中鋼	木材
兩固定端	$\phi=\frac{1}{5,000}$,	$\phi=\frac{1}{36,000}$,	$\phi=\frac{1}{25,000}$,	$\phi=\frac{1}{3,000}$.
一固定端 一圓端	$\frac{1.78}{5,000}$,	$\frac{1.78}{36,000}$,	$\frac{1.78}{25,000}$,	$\frac{1.78}{3,000}$.
兩圓端	$\frac{4}{5,000}$,	$\frac{4}{36,000}$,	$\frac{4}{25,000}$,	$\frac{4}{3,000}$.

(64)式ヲ用キテ長柱ヲ設計スルニハS_eノ代リニ材料ノ作用抗壓强度ヲ取ルベキナリ之ヲS_cトスレバ

$$\frac{W}{A}=\frac{S_c}{1+\phi\left(\frac{l}{k}\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (64_a)$$

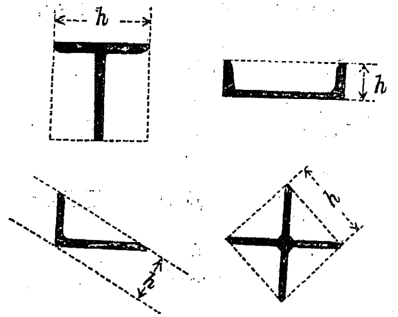
(4) **ごるどん氏公式** (Gordon's Formula) (64)式ノkハ斷面ノ最小邊ノ函數ナルユヱ次ノ如ク書スルヲ得.

$$\frac{W}{A}=\frac{S_e}{1+\psi\left(\frac{l}{h}\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (65)$$

此ニ於テψハ實驗的常數ニシテhハ斷面ヲ圍メル矩形ノ最小邊ナリ. 例ヘバ第73圖ノ如シ.

(65)式ガごるどん氏ノ長柱公式ニシテ(64)式ト同樣ニ$\frac{l}{h}$ノ總テノ値ニ對シテ之ヲ適用スルヲ得.

第73圖



	S_e 听/平方吋.	ψ.
鑄鐵：兩固定端		
矩形斷面	80,000	$\frac{1}{450}$
圓形斷面	80,000	$\frac{1}{400}$
中空矩形斷面	80,000	$\frac{1}{500}$
中空圓形斷面	80,000	$\frac{1}{600}$
鍊鐵：兩固定端		
矩形斷面	36,000	$\frac{1}{3,000}$
圓形斷面	36,000	$\frac{1}{2,250}$
厚キ中空圓形斷面	36,000	$\frac{1}{5,500}$
中鋼：兩固定端		
矩形斷面	67,200	$\frac{1}{2,000}$

圓形斷面	67,200	$\frac{1}{1,400}$
中空圓形斷面	67,200	$\frac{1}{2,500}$
木材：兩固定端	7,200	$\frac{1}{250}$

注意 兩圓端ノ場合ニハψヲ4ψトシ，一圓端一固定端ノ場合ニハ1.78ψトスベシ.

(65)式ヲ用キテ長柱ヲ設計スルニハ(64)式ニ於ケルト同樣ニS_eノ代リニ作用抗壓强度ヲ用フベシ. (64), (65)兩式ノ中現今普通ニ使用セラルヽハ(64)式ナリ.

(5) **りつたあ氏公式** (Ritter's Formula) 第72圖ノ曲線ABノ方程式ガらんきん氏公式ト同形ナリトセバ

$$y=\frac{S_e}{1+b.x^2}.$$

此式ニ於テbハ常數ニシテりつたあ氏ハ之ヲ全ク實驗的常數トセズシテ直線公式及拋物線公式ニ於ケルト同樣ニ二曲線切觸ノ條件ニヨリテ定メタリ.

前述ノ如ク長柱ノ長サノ如何ニ拘ハラズ適用シ得べキ曲線ハx即チ$\frac{l}{k}$ガ無窮大ナルトキおいらあ氏曲線ト一致シ$x=\frac{l}{k}=0$ナルトキ$y=\frac{W}{A}$ハS_eナルベキナリ. 然ラバ上記方程式ガ此條件ヲ滿足スル

爲ニハ常數 b ハ $\frac{l}{k}$ ノ値ガ大ナルトキらんきん氏公式ガ與フル $\frac{W}{A}$ トおいらあ氏公式ガ與フル $\frac{W}{A}$ トヲ同ジクナス如キ値ナルヲ要ス. 卽チ

$$\frac{W}{A}=n^2E\left(\frac{k}{l}\right)^2=\frac{S_e}{1+b\left(\frac{l}{k}\right)^2}.$$

$\frac{l}{k}$ ノ値ガ大ナルトキハ此式ノ分母ノ1ハ $b\left(\frac{l}{k}\right)^2$ ニ比較シテ省略シ得ルヲ以テ

$$\frac{n^2E}{\left(\frac{l}{k}\right)^2}=\frac{S_e}{b\left(\frac{l}{k}\right)^2}, \quad 卽チ \quad b=\frac{S_e}{n^2E}.$$

$$\therefore \quad \frac{W}{A}=\frac{S_e}{1+\frac{S_e}{n^2E}\left(\frac{l}{k}\right)^2} \cdots\cdots (66)$$

是レりつたあ氏公式ニシテ之ハらんきん氏公式ト同様ニ第72圖ニ於テ點線ニテ表ハシタル曲線ノ條件ト一致ス. 而シテ常數ヲ定ムル條件ヨリ見レバ(66)式ガ表示スル曲線ハ他ノ曲線ヨリモ眞値ニ近キモノヲ與フベシ.

(66)式中ノ n ノ値ハ他ノ公式ニ於ケルト同一ナリ. 又長柱設計ノ際ニハらんきん氏公式ニ於ケルト同様ニ S_e ノ代リニ作用抗壓强度ヲ使用スベシ.

鑄鐵:

兩圓端$\cdots\cdots$ $\frac{W}{A}=\frac{60,000}{1+\frac{1}{2,400}\left(\frac{l}{k}\right)^2}.$

兩固定端$\cdots\cdots$ $\frac{W}{A}=\frac{60,000}{1+\frac{1}{6,666}\left(\frac{l}{k}\right)^2}.$

錬鐵:

兩圓端$\cdots\cdots$ $\frac{W}{A}=\frac{34,000}{1+\frac{1}{12,700}\left(\frac{l}{k}\right)^2}.$

兩固定端$\cdots\cdots$ $\frac{W}{A}=\frac{34,000}{1+\frac{1}{20,000}\left(\frac{l}{k}\right)^2}.$

中鋼:

兩圓端$\cdots\cdots$ $\frac{W}{A}=\frac{42,000}{1+\frac{1}{10,825}\left(\frac{l}{k}\right)^2}.$

兩固定端$\cdots\cdots$ $\frac{W}{A}=\frac{42,000}{1+\frac{1}{17,000}\left(\frac{l}{k}\right)^2}.$

木材:

兩固定端$\cdots\cdots$ $\frac{W}{A}=\frac{3,500}{1+\frac{1}{1,090}\left(\frac{l}{h}\right)^2}.$

此ニ於テ k ハ斷面ノ最小環動半徑ニシテ h ハ斷面ノ最小邊ナリトス.

(6) **安全率** 靜荷重ニ對シテハ

錬鐵又ハ鋼長柱$\cdots\cdots$4.

鑄鐵長柱$\cdots\cdots$6.

木材長柱$\cdots\cdots$6乃至8.

動荷重ニ對シテハ

錬鐵又ハ鋼長柱……………………$4+\frac{l}{20h}$.

鑄鐵長柱……………………………$7+\frac{l}{20h}$.

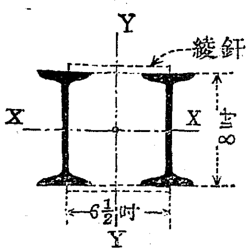
木材長柱…………………………(6乃至8)$+\frac{l}{20h}$.

但 l ハ長柱ノ長サ(吋)ニシテ h ハ斷面ノ周邊ヲ包圍スル矩形ノ最小邊(吋)ナリトス. 動荷重ニ對シテハ上式ヨリ得ラルヽ整數ヲ以テ安全率トナスベシ.

46. 長柱ニ關スル三問題

問題 I. 一ツノ長柱ガ或荷重ニ對シテ安全ナルヤ否ヤヲ知ルコト.

第74圖



例題 玆ニ第74圖ノ如ク高サ8吋,長サ20呎,長サ一呎ニ付キ重量18听ノI字形鋼ヲ綾鋲(Lattice Bars)ニテ連結シテ中心距離ヲ $6\frac{1}{2}$ 吋ニ保テル兩圓端長柱アリ.之ガ軸ニ沿ヒテ80,000听ノ荷重ヲ受クルトキ長柱ニ誘起セラルヽ單位應力ヲ求ム.

らんきん氏公式ヲ用フレバ

$$W=80,000\text{ 听},\quad A=2\times5.33=10.66\text{ 平方吋},$$

$$\phi=\frac{4}{25,000},\quad l=20\times12=240\text{ 吋}.$$

此場合ニハ $I_x<I_y$ ニシテ $I_x=2\times56.9=113.8$ 吋^4 ナルユエ

$$k=\sqrt{\frac{I_x}{A}}=\sqrt{\frac{113.8}{10.66}}=3.27\text{ 吋}.$$

$$\therefore\ \text{單位應壓力 } S=\frac{80,000}{10.66}\left[1+\frac{4}{25,000}\left(\frac{240}{3.27}\right)^2\right]=7,500\times1.86$$

$$=14,000\text{ 听/平方吋}.$$

之ハ安全限度以內ノ單位應力ナルヲ以テ長柱ハ與ヘラレタル荷重ヲ安全ニ支フルヲ得.

問題 II. 一ツノ長柱ガ支ヘ得ル安全荷重.

例題 玆ニ兩圓端木材長柱アリ.其長サ10呎,斷面6吋×8吋ナルトキ之ガ支ヘ得ル最大荷重及安全荷重ヲ求ム.

先ヅおいらあ氏公式ヲ用ヰ E=1,500,000听/平方吋, $\pi^2\fallingdotseq10$ トセバ

$$I=\frac{8\times6^3}{12}=144\text{ 吋}^4,\quad A=48\text{ 平方吋},\quad k^2=\frac{144}{48}=3\text{ 吋}^2,\quad l=120\text{ 吋}.$$

$$\therefore\ \text{最大荷重 } W=\frac{\pi^2EAk^2}{l^2}=\frac{10\times1,5000,000\times48\times3}{120\times120}=150,000\text{ 听}.$$

次ニらんきん氏公式ヲ用ヰ S=7,200 听/平方吋トスレバ

$$W=\frac{48\times7,200}{1+\frac{4}{3,000}\cdot\frac{\overline{120}^2}{3}}=46,700\text{ 听}.$$

安全率ヲ6ニ取レバ

$$\text{安全荷重}=\frac{46,700}{6}=7,780\text{ 听}.$$

是ニ由テ見レバおいらあ氏公式ガ與フル荷重ハらんきん氏公式ガ與フル荷重ノ約三倍ナルユエらんきん氏公式ノ安全率6ハおいらあ氏公式ノ安全率約18ニ相當ス.

問題 III. 長柱ノ設計

木材長柱ノ斷面ハ通例正方形又ハ圓形ニシテ斷面ガ大ナルトキハ材ヲ組合セテ中空斷面ニナスコトアリ. 鑄鐵長柱ノ斷面ハ中空圓形ナルヲ常トス. 1900年頃迄ハ種々ノ形

ノ錬鐵長柱ガ使用セラレシモ現今諸構造物ニ使用セラルヽ長柱ハ主トシテ建築用鋼溝形釬(Channels), 角釬(Angles)及鈑ノ類ヲ釘綴シテ作リ場合ニヨリテハI字形鋼ヲ用フルコトアリ. 正方形又ハ圓形斷面ノ長柱ニ於テハ之ガ彎曲セントスル傾向ハ斷面ノ中立軸ノ方向ニ依テ異ナルコトナケレドモ斷面ガ矩形ナレバ彎曲ノ起ル面ハ明カニ斷面ノ長邊ニ垂直ナリ. 一般ニ言ヘバ彎曲ノ起ル面ハ最小慣性能率ノ軸ニ垂直ナリ. 而シテ長柱ガ彎曲スレバ之ニ桁ニ於ケルト同様ナル彎曲應力ヲ生ズルヲ以テ長柱ノ斷面ニ於テモ亦桁ニ於ケルガ如ク最小慣性能率ノ軸ヨリ遠ザカレル部分ノ面積ヲ大ナラシムベキナリ. 依テ長柱ヲ設計スルニハ軸ヨリ遠ザカリタル部分ノ斷面積ヲ大ナラシメ且互ニ直角ヲナセル二ツノ中立軸ニ對スル慣性能率ガ殆ド等シク若クハ等シクナル樣ニ斷面形ヲ定ムルヲ可トス. 又長柱ガ軸ニ沿ヒテ荷重ヲ受クルトキハ所要斷面積ガ荷重ヲ作用强度ニテ除シテ得ラルヽ短柱ノ斷面積ヨリモ大ナルベキハ勿論ナリ.

以上ノ事柄ヲ勘考シテ先ヅ斷面形ヲ假定シ單位應壓力ヲ算出スベシ. 之ガ作用抗壓强度ト一致スルナラバ假定斷面ハ與ヘラレタル條件ニ適合スルモノナリ. 若シ兩者ノ差大ナルトキハ新ニ斷面ヲ假定シテ滿足ナル結果ヲ得ル迄計算ヲ繰返スベシ.

斷面ノ一邊ヲ未知量トシAトkヲ此未知量ニテ表ハスヲ得バ長柱公式ヨリ得タル方程式ヲ解キテ容易ニ斷面ヲ定ムルヲ得.

例題 1. 玆ニ兩端ニテ固定セラレタル長サ18呎ノ鑄鐵中空正方形斷面ノ長柱アリ. 之ガ60,000听ノ荷重ヲ安全ニ支フルニハ其斷面ノ大サ如何. 但作用抗壓强度ヲ15,000听/平方吋トス.

短柱ノ所要斷面積ハ$\frac{60,000}{15,000}=4$ 平方吋ナルニヨリ長柱ノ斷面積ヲ約6平方吋ト假定シ中空矩形斷面ノ外側ノ寸法ヲ6吋×6吋, 內側ノ寸法ヲ$5\frac{1}{2}$吋×$5\frac{1}{2}$吋トスレバ

$$A=36-30.25=5.75\text{ 平方吋},\quad l=18\times12=216\text{ 吋}$$

$$k^2=5.52\text{ 吋}^2.$$

らんきん氏公式ヲ用フレバ

$$\phi=\frac{1}{5,000},\quad \left(\frac{l}{k}\right)^2=8,452.$$

$$\therefore\ \text{單位應壓力}=\frac{60,000}{5.75}\left(1+\frac{8,452}{5,000}\right)=\frac{60,000\times2.69}{5.75}$$

$$=28,100\text{ 听/平方吋}.$$

之ハ與ヘラレタル作用抗壓强度ノ1.8倍ナルヲ以テ假定セル斷面ヲ增サヾルベカラズ. 今斷面ノ外側ノ寸法ヲ6吋×6吋, 內側ノ寸法ヲ5吋×5吋トスレバ

$$A=11\text{ 平方吋},\quad k^2=5.08\text{ 吋}^2,\quad \left(\frac{l}{k}\right)^2=9,184.$$

$$\therefore\ \text{單位應壓力}=\frac{60,000}{11}\left(1+\frac{9,184}{5,000}\right)=\frac{60,000\times2.84}{11}$$

$$=15,590\text{ 听/平方吋}.$$

之ハ與ヘラレタル作用抗壓强度ニ近キ値ナルユエ假定斷面ハ

殆ド所要條件ヲ滿足スルモノナリ.

一般ニ條件ヲ滿足スベキ斷面ハ多數アルベキヲ以テ其中ニテ使用上最モ有利ナル形ヲ選定スベキナリ.

例題 2. 玆ニ長サ10呎,一端ハ固定セラレ他端ハ圓端ナル正方形斷面ノ木材長柱アリ. 之ヲシテ5,000听ノ荷重ヲ安全ニ受ケシムルニハ一邊ノ長サヲ幾何ニナスベキカ. 但作用抗壓强度ヲ800/吋平方吋トス.

正方形ノ一邊ヲxトスレバ

$$A=x^2,\quad k=\sqrt{\frac{x^4}{12}\div x^2}=\frac{x}{\sqrt{12}}\text{吋},\quad l=120\text{吋},$$

らんきん氏公式ヲ用フレバ,

$$\frac{5{,}000}{x^2}=\frac{800}{1+\dfrac{1.78\times\overline{120}^2\times 12}{3{,}000\times x^2}}=\frac{800x^2}{x^2+102.5},$$

$$8x^4-50x^2-5{,}125=0,\quad x^2=28.6$$

$$\therefore\quad x=5.4\text{吋}.$$

次ニおいらあ氏公式ヲ用キテ安全率10トシ$n^2=\dfrac{9\pi^2}{4}$, E=1,500,000听/平方吋トスレバ

$$5{,}000\times 10=\frac{2.25\times 9.87\times 1{,}500{,}000\times x^2}{\dfrac{\overline{120}^2\times 12}{x^2}}=192x^4,$$

$$x^4=260,\quad\therefore\quad x\fallingdotseq 4\text{吋}.$$

此長柱ノ徑長比ハ約100ナルユヱおいらあ氏公式ガ與フル値ハ實用公式ガ與フル値程ニ信頼スル能ハズ.

47. 偏心荷重ヲ受クル長柱　らんきん氏公式

$$\frac{W}{A}=\frac{S}{1+\phi\left(\dfrac{l}{k}\right)^2}\quad\text{又ハ}\quad S=\frac{W}{A}\left[1+\phi\left(\frac{l}{k}\right)^2\right]$$

ニ於テ$\dfrac{W}{A}$ハ軸荷重Wヨリ生ズル單位應壓力ニシテ$\dfrac{W}{A}\cdot\phi\left(\dfrac{l}{k}\right)^2$ハ彎曲率ヨリ生ズル單位應壓力ナリ.

若シ荷重Wガeナル偏心距ヲ以テ働ケバ此偏心ノ爲ニ生ズル單位應壓力ハ$\dfrac{W}{A}\cdot\dfrac{e.c}{k^2}$ナリ(第六章第40節參照)然ラバ長柱ニ誘起セラルヽ全應力ノ近似値ハ次ノ如シ.

$$S=\frac{W}{A}+\frac{W}{A}\cdot\phi\cdot\left(\frac{l}{k}\right)^2+\frac{W}{A}\cdot\frac{e.c}{k^2}=\frac{W}{A}\left[1+\phi\left(\frac{l}{k}\right)^2+\frac{e.c}{k^2}\right]\ldots.(67)$$

數個ノ荷重ガe_1, e_2, e_3等ノ偏心距ヲ以テ長柱ニ働クトキハ總代荷重ヲ(67)式ノWトシ又長柱ノ軸ヨリ總代荷重迄ノ距離ヲeトスベシ.

例題　玆ニ長サ12呎6吋,直徑4吋,兩圓端ノ鑄鐵長柱アリ. 之ニ7,000听ノ荷重ガ$1\frac{1}{2}$吋ノ偏心距ヲ以テ働クトキ誘起セラルヽ最大單位應壓力ヲ求ム.

(67)式ニ於テ

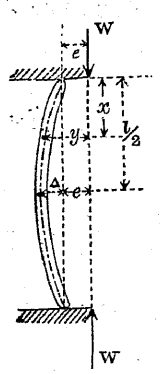
$$k=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\pi.4^4}{64\times\dfrac{\pi}{4}.4^2}}=1\text{吋},\quad l=150\text{吋},\quad A=12.57\text{平方吋}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{7{,}000}{12.57}\left[1+\frac{4}{5{,}000}\left(\frac{150}{1}\right)^2+\frac{1.5\times 2}{1}\right]$$

$$=\frac{7{,}000}{12.57}(1+18+3)=12{,}300\text{听/平方吋}.$$

徑長比ガ約100以上ナルトキハ(67)式ガ與フル單位應壓力ハ小ニ過グ是レ兩端ヲ除キ其他ノ斷面ニ於テハ總テ撓度ノ爲ニ荷重ノ偏心距ヲ增加スレバナリ. 夫故ニ徑長比ノ大ナル長柱ニ對シテハ次ノ方法ニヨルヲ可トス.

第75圖



第75圖ノ兩圓端長柱ニ於テ荷重Wノ偏心距ヲe,長柱ノ原位置ヨリ測リタル最大撓度ヲΔトスレバ

最大撓度ノ點ニ於ケル荷重ノ全偏心距$=e_1=e+\Delta$.

最大撓度ノ起ル點ニ於ケル斷面ノ最大單位應壓力ハ

$$S=\frac{W}{A}\left[1+\frac{e_1.c}{k^2}\right]=\frac{W}{A}\left[1+\frac{c(e+\Delta)}{k^2}\right]\ldots(68)$$

此式ヲ用キテSヲ求ムルニハe_1ノ値ヲ知ラザルベカラズ.

偖おいらあ氏公式ガ與フル軸荷重ヲW_eトシWノ代リニW_eヲ加フルトモ最大撓度Δノ値ニ變化ナシト想像セバ長柱ハ偏心荷重W又ハ軸荷重W_eノ下ニ平衡ニアルユヱ

$$W_e.\Delta=W(e+\Delta),\quad \text{卽チ}\quad \Delta=\frac{W.e}{W_e-W}$$

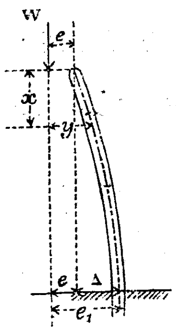
$$\left.\begin{aligned} e_1&=e+\Delta=e+\frac{W.e}{W_e-W}=\frac{W_e.e}{W_e-W},\\ S&=\frac{W}{A}\left[1+\frac{c.W_e.e}{(W_e-W)k^2}\right]. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(68_a)$$

此式ハおいらあ氏公式ヲ適用シ得ル程度ノ長サノ長柱ガ偏心荷重ヲ受クル場合ニ使用セラル. 尤モ

長柱ノ中央ニ於ケル彎曲率ノミ考ヘ他ノ斷面ニ於ケル彎曲率ヲ考ヘザリシ故此式ガ與フル撓度ハ小ニ過グ. 今之ヨリモ正確ナル解法ヲ示サントス.

第76圖ノ如ク上端ハ放端ニシテ下端ニ於テ鉛直ニ固定セラレタル長柱ヲ考フ.

第76圖



今上端ニ於テ荷重ノ働點ヲ座標原點トシテxヲ鉛直ニ,yヲ水平ニ測レバ

$-W.y=$彈曲線中ノ一點ニ對スル彎曲率.

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=-W.y.$$

之ヲ積分スレバ

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-W.y^2+C.$$

$y=e_1$ ニ對シテ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルユヱ

$$-W.e_1^2+C=0,\quad \therefore\ \text{積分常數}\ C=W\cdot e_1^2.$$

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=W(e_1^2-y^2),\quad \text{又ハ}\quad \frac{dx}{dy}=\left(\frac{EI}{W}\right)^{\frac{1}{2}}(e_1^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

之ヲ積分スレバ

$$x=\left(\frac{EI}{W}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^{-1}\frac{y}{e_1}+C'.$$

$x=0$ ニ對シテ $y=e$ ナルユヱ

$$0=\left(\frac{EI}{W}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^{-1}\frac{e}{e_1}+C',$$

∴ 積分常數 $C'=-\left(\frac{EI}{W}\right)^{\frac{1}{2}}.\sin^{-1}\frac{e}{e_1}.$

$$x=\left(\frac{EI}{W}\right)^{\frac{1}{2}}.\sin^{-1}\frac{y}{e_1}-\left(\frac{EI}{W}\right)^{\frac{1}{2}}.\sin^{-1}\frac{e}{e_1},$$

$$\therefore\quad \sin^{-1}\frac{y}{e_1}=\left(\frac{W}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}.x+\sin^{-1}\frac{e}{e_1}.$$

是レ彈曲線ノ方程式ナリ. 此式ヨリ全偏心距 e_1 ヲ求ムルニハ $y=e_1$, $x=l$ ト置クベシ. 然ラバ

$$\sin^{-1}\frac{e_1}{e_1}=\left(\frac{W}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}.l+\sin^{-1}\frac{e}{e_1},$$

卽チ

$$e=e_1.\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{W}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}.l\right],$$

$$e_1.\cos\left(\frac{W}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}.l=e,\quad e_1=e.\sec\left(\frac{W}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}.l.$$

$\left(\frac{W.l^2}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}$ ヲ θ (弧度法ニテ測リタル角)ニテ表ハセバ

$$\sec\theta=1+\frac{1}{2}.\theta^2+\frac{5}{24}.\theta^4+\frac{61}{720}.\theta^6+\frac{277}{8,064}.\theta^8+\ldots\ldots$$

$$\therefore\quad e_1=e.\sec\theta=e(1+0.5\theta^2+0.208\theta^4+0.0847\theta^6+\ldots\ldots)\ldots\ldots(68_b)$$

兩圓端長柱ナレバ θ 卽チ $\left(\frac{W.l^2}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}$ 中ノ l ヲ $\frac{1}{2}l$ ニ, 一固定端一圓端長柱ナレバ l ヲ $\frac{1}{3}l$ ニ又兩固定端長柱ナレバ l ヲ $\frac{1}{4}l$ トスベシ.

(68), (68_b) 兩式ヨリ

$$S=\frac{W}{A}\left[1+\frac{c.e_1}{k^2}\right]=\frac{W}{A}\left[1+\frac{c.e}{k^2}.\sec\theta\right]$$

$$=\frac{W}{A}+\frac{W}{A}.\frac{c.e}{k^2}(1+0.5\theta^2+0.208\theta^4+\ldots\ldots)\ldots.(68_c)$$

一固定端一放端……$\theta^2=\frac{W.l^2}{EI}=\frac{W.l^2}{EAk^2}=\frac{W}{AE}\left(\frac{l}{k}\right)^2.$

兩圓端……………………$\theta^2=\frac{\frac{1}{4}W}{AE}\left(\frac{l}{k}\right)^2.$

一固定端一圓端……$\theta^2=\frac{\frac{1}{9}W}{AE}\left(\frac{l}{k}\right)^2.$

兩固定端………………$\theta^2=\frac{\frac{1}{16}W}{AE}\left(\frac{l}{k}\right)^2.$

單位應力 S ヲ求ムルニ當リ $\sec\theta$ ヲ展開シタル級數ハ θ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ小ナルニアラザレバ之ヲ用フル能ハズ. 若シ $\theta=\frac{\pi}{2}$ ナレバ單位應力 $\frac{W}{A}$ ハおいらあ氏公式ガ與フル $\frac{W}{A}$ トナル. 例ヘバ $\theta^2=\frac{W}{AE}\left(\frac{l}{k}\right)^2$ ニ於テ θ^2 ヲ $\frac{\pi^2}{4}$ ト置ケバ

$$\frac{W}{A}=\frac{\frac{1}{4}\pi^2.E.k^2}{l^2}$$

ヲ得. 是レ一固定端一放端ノ場合ノおいらあ氏公式ナリ.

又 $\sec\theta$ ノ眞値ニ近キ値ハ次式ニヨリテ之ヲ求ムルヲ得.

$$\sec\theta\doteqdot\frac{12+\theta^2}{12-5\theta^2}.$$

例題 兩圓端鋼長柱ニ於テ $l=192$ 吋, $e=1.01$ 吋, $c=4,45$ 吋, $k=3$ 吋, $E=30,000,000$ 听/平方吋, $\frac{W}{A}=10,000$ 听/平方吋トス.

$$\theta^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{W}{AE}\left(\frac{l}{k}\right)^2=\frac{1}{4}\times\frac{10,000}{30,000,000}\times\left(\frac{192}{3}\right)^2=0,3413$$

(68_c) ヨリ

$$S=10,000+10,000\times\frac{4.45\times1.01}{9}(1+0.5\times0.3413+0.208\times\overline{0.3413}^2+\dots\dots)$$

$\doteqdot16,000$ 听/平方吋.

是ニ由テ見レバ平均單位應力 10,000 听/平方吋ガ偏心荷重ノ爲ニ增加スルコト約 6 割ナリ.

又ハ (68_b) 式ニ $\theta^2=0.3413$ 及 $e=1.01$ ヲ代入スレバ $e_1\doteqdot1.2$ 吋ヲ得. 然ラバ (68) 式ヨリ

$$S=10,000\left[1+\frac{4.45\times1.2}{9}\right]\doteqdot16,000\ \text{听/平方吋}.$$

若シ此長柱ノ長サガ二倍卽チ 384 吋ナレバ

$$\theta^2=\frac{1}{4}\times\frac{10,000}{30,000,000}\times\left(\frac{384}{3}\right)^2=1.3653,$$

卽チ

$$\theta=\sqrt{1.3653}=1.168,\quad \frac{180\times\theta}{\pi}=66.^\circ8945=66^\circ54',$$

$\sec\theta=2.549$

∴ 全偏心距 $e_1=2.549.e=2.574$ 吋.

$$S=10,000\left(1+\frac{c.e_1}{k^2}\right)=10,000(1+1.273)=22,700\ \text{听/平方吋}.$$

此ノ如ク長柱ノ長サノ增加ガ單位應力ニ及ボス影響大ナリ.

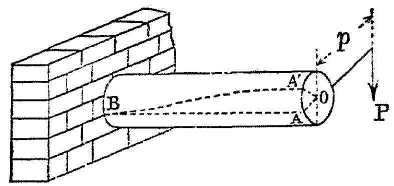
(68_c) 式ニ於テ單位應力 S ガ與ヘラレテ直接ニ $\frac{W}{A}$ ヲ算出スルハ不便ニシテ順次試算ヲナサヾルベカラズ. 卽チ與ヘラレタル S ノ値ト同一ノ値ガ得ラ

ルヽ迄 $\frac{W}{A}$ ノ値ヲ種々ニ變ジテ (68_c) 式ニ代入スルヲ要ス. 此場合ニ若シ長柱ノ長サ小ナレバ $\sec\theta$ ヲ 1, 長柱ノ長サ大ナレバ $\sec\theta$ ヲ $1\frac{1}{2}$ 又ハ 2 ト假定シテ最初ノ試算ヲナセバ多クノ場合ニ於テ便利ナリトス.

第八章 扭力 (Torsion)

48. 扭力ノ現象 一ツノ棒狀體ニ外力ヲ加ヘテ其軸ノ周リニ轉扭スルトキ之ニ生ズル應力ヲ**應扭力** (Torsional Stresses) ト謂フ. 矩形橫斷面ヲ有スル棒狀體ノ一端ヲ固定シ他端ニ外力ヲ加ヘテ扭レバ棒狀體ノ隅線 (Corner Lines) ハ螺旋狀ヲ呈ス. 此場合ニ扭力ガ小ナレバ**扭角** (Angle of Twist) ハ其力ノ大サニ正比例シ外力ヲ除去スルトキ原形ニ復スベシ. 然レドモ材料ノ彈性限度ヲ超過スルニ至レバ扭角ハ外力ノ增加スル割合ヨリモ一層急ニ增加シ外力ヲ除去スルトモ全ク原形ニ復セズシテ恒久變形ヲ呈ス. 此以上ニ扭力ヲ增加スレバ變形ハ急激ニ增大シ遂ニ破壞スベシ.

第 77 圖



第77圖ノ如ク**水平軸**(Horizontal Shaft)ノ一端ヲ固定シ其軸線(Axis of Shaft)ニ直角ナル挺子(Lever)ニ荷重Pヲ吊懸スレバP.pナル**扭力率**(Twisting Moment)ノ爲ニ軸ハ變形シ荷重ヲ加フル前ニ其面上ニ引キタル直線ABハ螺線A'Bトナル. 此場合ニ半徑OAハ∠AOA'丈移動シテOA'ナル位置ヲ取リタリトセバ扭角∠AOA'ハ明カニ軸ノ長サニ正比例スレドモ∠ABA'ハ軸ノ長サニ無關係ナリ.

數個ノ扭力ガ一ツノ軸ニ作用スルトキ其扭力率ハ常ニ單一ノ合成扭力率ニテ表ハスヲ得.

正座標軸ノ横軸ニ沿ヒテ扭角ヲ取リ,縦軸ニ沿ヒテ扭力率ヲ取レバ第一章第4節ニ於テ説明セシ應力ト變形トノ關係表圖ト同樣ノ表圖ヲ得. 而シテ此曲線ハ材料ノ彈性限度ニ達スル迄ハ直線ニシテ此限度ヲ超過セバ急ニ變化シ座標横軸ト殆ド並行スルニ至ル.

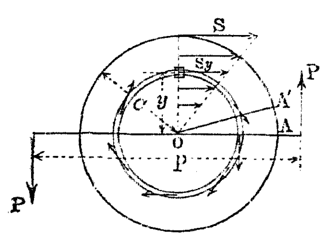
棒狀體ガ張力ヲ受クルトキ其全伸張ニヨリテ材料ノ延性ヲ比較スルヲ得ルト同樣ニ棒狀體ガ扭力ヲ受クルトキ扭角ノ大小ニヨリテ材料ノ延性ヲ比較スルヲ得.

扭力ニヨリテ軸ニ誘起セラルヽ應力ハ應剪力ナルヲ以テ各斷面ト之ニ相隣レル斷面トノ間ニ剪斷

作用ガ起ラントスル傾向アリ. 圓軸ニアリテハ斷面中ノ一點ニ於ケル應剪力ノ方向ハ斷面ノ中心ト其點トヲ連結スル半徑ニ垂直ニシテ此等總テノ應剪力ノ力率和ハ扭力率ニ等シカラザルベカラズ. 而シテ實驗ニ徴スルニ圓軸ニアリテハ單位應剪力ガ材料ノ彈性限度ヲ超過セザル限リハ半徑OAガOA'ナル位置ヲ取リタルトキ(第77圖)矢張直線ナレドモ正方形斷面又ハ矩形斷面軸ニアリテハ斷面ノ中心ト隅トヲ結付クル線ハ變形後ハ直線ナラズ.

49. 抵抗扭力率公式(Torsion Formula)　圓キ棒狀體ガ扭力ヲ受クルトキ其斷面ニ於ケル應力ガ彈性限度以內ナラバ桁ニ於ケルト同樣ノ法則ガ成立ス. 卽チ第78圖ニ於テ偶力P.pノ爲ニ半徑OAガOA'ナル位置ヲ取ルトキ之ガ矢張直線トシテ存スルナラバ纖維ノ變形ハ斷面ノ中心Oヨリ其纖維迄ノ距離ニ正比例ス. 從テ單位應剪力ハ斷面ノ中心ヨリノ距離ニ正比例スベキナリ. 而シテ靜力學平衡ノ條件ニヨリ此等應剪力ノ力率和ハ扭力率ニ等シカラザルベカラズ.

第78圖



今圓形斷面ノ半徑ヲcトシ斷面ノ周邊ニ生ズル

最大單位應剪力ヲSトスレバ

$S.\frac{y}{c}$ ＝棒狀體ノ軸ヨリ y ナル距離ニ於ケル單位應剪力.

$\frac{S}{c}.y.dA$ ＝細微面積 dA ニ作用スル全應剪力.

$\frac{S}{c}.y^2.dA$ ＝棒狀體ノ軸線ニ對スル應剪力 $\frac{S}{c}.y.dA$ ノ力率.

∴ $\frac{S}{c}\int y^2 dA$ ＝抵抗應剪力率.

$\int y^2 dA$ ハ斷面ノ極慣性能率ニシテ之ヲJニテ表ハセバ

$$\frac{S.J}{c}=P.p, \quad \text{又ハ} \quad S=\frac{P.p.c}{J} \quad \cdots\cdots(69)$$

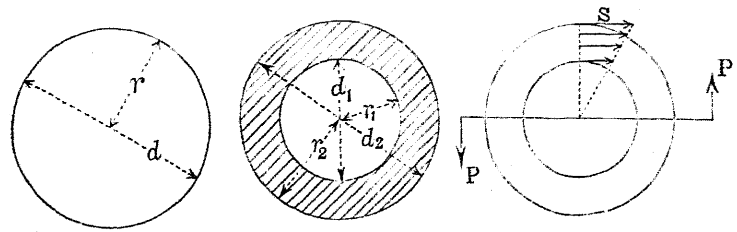
是レ單位應剪力ト扭力率トノ關係ヲ表ハス基本公式ニシテ之ヲ**抵抗扭力率公式**ト謂フ.

(69)式ト桁ノ抵抗力率公式 $M=\frac{S.I}{c}$ トヲ比較スルニ後者ニ於ケル c ハ斷面ノ中立軸ヨリ緣維迄ノ距離ニシテ(69)式ノ c ハ圓キ棒狀體ノ半徑ナリ. 後者ノSハ單位應張力又ハ單位應壓力ニシテ斷面ニ垂直ニ働キ, (69)式ノSハ單位應剪力ニシテ斷面ニ沿ヒテ働キ且ツ半徑ニ垂直ナリ. 又後者ノMハ外力ノ彎曲率ニシテ(69)式ノ $P.p$ ハ外力ノ扭力率ナリ.

圓軸ノ大サト作用抗剪强度トガ與ヘラルヽトキ

ハ(69)式ニヨリテ軸ガ安全ニ耐ヘ得ル扭力率ヲ求ムルヲ得. 又與ヘラレタル作用抗剪强度ト扭力率トニ對シテ軸ノ大サヲ定ムルヲ得.

第79圖



(a) (b)

圓軸ノ場合(第79圖(a))

$$J=\frac{\pi d^4}{32}=\frac{\pi r^4}{2}, \quad P.p=\frac{S.\pi r^4}{2.r}=\frac{S.\pi r^3}{2}=\frac{S.\pi d^3}{16},$$

$$S=\frac{16P.p}{\pi d^3} \quad \cdots\cdots(69_a)$$

中空圓軸ノ場合(第79圖(b)

$$J=\frac{\pi(r_2^4-r_1^4)}{2}, \quad P.p=\frac{S.\pi(r_2^4-r_1^4)}{2r_2}=\frac{S.\pi(d_2^4-d_1^4)}{16d_2},$$

$$S=\frac{16P.pd_2}{\pi(d_2^4-d_1^4)} \quad \cdots\cdots(69_b)$$

(69)式ハ圓軸ノ破壞スル場合ニハ正シク適用セラレザルユヱ此場合ニ(69)ガ與フルSノ値ハ材料ノ破壞抗剪强度ト一致セザルコト明カナリ.

凡テ金屬ノ剪斷力ニ對スル彈性限度ハ壓力又ハ

張力ニ對スル彈性限度ヨリモ小ニシテ一般ニ(69)式ガ與フル破壞單位應剪力ノ約三分ノ一ナリトス.

例題 圓軸ノ軸線ヨリ27吋隔テヽ90听ノ力ヲ加ヘテ此軸ヲ扭ルトキ之ニ誘起セラレシ最大單位應剪力ハ2,000听/平方吋ナリシト云フ. 今軸線ヨリ21吋及36吋ノ距離ニ於テ40听ナル二力ヲ加フルトキ軸ニ誘起セラルヽ單位應剪力ハ幾何ナリカ.

$$\frac{J}{c}=\frac{P.p}{S}=\frac{90\times27}{2{,}000}=1.215\ 吋^3,$$

$$1.215=\frac{40(21+36)}{S}=\frac{2{,}280}{S}.$$

$$\therefore\ S=\frac{2{,}280}{1.215}\doteq1{,}860\ 吋/平方吋.$$

50. 軸ニ依テ傳達サルヽ動力 (Power transmitted by Shaft) 發動機ヨリ動力ヲ他ニ傳フル一ツノ方法ハ調革(Belt)ヲ經テ動力ヲ軸ニ傳ヘ夫ニ依テ働ヲナスベキ場所迄動力ヲ傳達スルニアリ. **渦輪水車**(Turbine Wheel)ノ軸ノ如キハ水ニテ生ジタル動力ヲ直接ニ發電機或ハ他ノ機械ニ傳フ. 又汽船ニ於テハ軸ハ機關ノ動力ヲ直接ニ**螺旋推進機**(Screw Propeller)ニ傳フ.

今軸ニ依テH馬力ノ傳送ヲナストキ之ニ作用スル扭力率ヲ見出サントス. 軸ニ取付ケタル滑車ノ半徑ヲp吋,調革ニ依テ滑車ノ周邊ニ加ヘラルヽ接力(Tangential Force)ヲP听,軸並ニ滑車ノ一分間ノ回轉數ヲnトスレバ一回轉ニ對シテPナル力ハ$2\pi.p$

ナル長サノ間抵抗ニ打勝ツユエ軸ヲ經テ傳達サルヽ働ハ $P\times2\pi.p$ ニシテ n 回轉ニテ傳達サルヽ働ハ $2\pi.n.P.p$ 吋听毎分ナリ. 而シテ一馬力ハ $33{,}000\times12=396{,}000$ 吋听毎分ナルニヨリ

$$2\pi.n.Pp=396{,}000H,$$

即チ
$$P.p=\frac{396{,}000H}{2\pi.n}=\frac{63{,}030H}{n}\cdots\cdots\cdots(70)$$

斯ク扭力率 $P.p$ ハ傳送馬力ニ正比例シ回轉速度ニ反比例ス.

(69_a)式ニ(70)式ノ Pp ノ値ヲ代入スレバ

$$S=\frac{321{,}000H}{nd^3},\quad 又ハ\quad d=68.5\left(\frac{H}{n.S}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots\cdots(71)$$

此ニ於テ d ノ單位ハ吋, S ノ單位ハ听毎平方吋ナリ. 此式ヨリ見レバ圓軸ノ周邊ニ於ケル單位應剪力ハ傳送動力ニ正比例シ軸ノ回轉速度及直徑ノ三乘ニ反比例ス.

中空圓軸ノ內徑ヲ d_1, 外徑ヲ d_2 トスレバ(69)及(70)二式ヨリ

$$\frac{\pi(d_2^4-d_1^4)S}{16d_2}=\frac{63{,}030H}{n},$$

$$\therefore\ \frac{S(d_2^4-d_1^4)}{d_2}=\frac{321{,}00H}{n}\cdots\cdots\cdots(71_a)$$

中空軸ノ斷面積ハ扭力率ニ抵抗スルニ最モ有効ナ

ル部分ニ集中セルヲ以テ圓軸ヨリモ中空軸ヲ用フルヲ經濟的トス.

圓軸ト中空軸トノ斷面積ガ等シケレバ d^2 ハ $(d_2^2-d_1^2)$ ニ等シ. 然レバ(71)及(71_a)二式ヨリ

$$\frac{\text{中空軸ノ强サ}}{\text{同一斷面積ヲ有スル圓軸ノ强サ}}=\frac{\dfrac{d_2^4-d_1^4}{d_2}}{d^3}$$

$$=\frac{\dfrac{(d_2^2+d_1^2)d^2}{d_2}}{d^3}=\frac{d_2^2+d_1^2}{d_2.d}.$$

例ヘバ $d=12$ 吋, $d_2=20$ 吋トスレバ

$$d^2=d_2^2-d_1^2,\quad d_1=\sqrt{20^2-12^2}=16\text{ 吋}.$$

從テ兩軸强サノ比ハ $\frac{656}{240}=2.73$ 卽チ中空軸ノ强サハ同一斷面積ヲ有スル圓軸ノ强サノ2.73倍ナリ.

作用抗剪强度

鑄鐵	4,500	听/平方吋
錬鐵	9,000	"
鋼	13,500	"

例題 1. 玆ニ直徑3吋ノ鑄鐵軸アリ. 之ガ一分間10回轉ニテ傳送スル馬力ヲ求ム. 但最大單位應剪力ハ4,500听每平方吋ナリトス.

(71)式ヨリ

$$\frac{S.n.d^3}{321,000}=H,\quad \text{卽チ}\quad \frac{4,500\times10\times3^3}{321,000}=H.$$

$$\therefore\quad H=3.8$$

例題 2. 一分間80回轉ニテ500馬力ヲ傳フベキ錬鐵圓軸ノ直徑ヲ求ム. 但單位應剪力ハ9,000听每平方吋ヲ超過セザルモノトス.

(71)式ヨリ

$$d^3=\frac{321,000\times500}{80\times9,000},\quad d=6\text{ 吋}.$$

51. 軸ノ扭(Twist of Shaft) 扭力率ノ爲ニ圓軸ノ一端ニ於テ半徑ガ移動スル角卽チ扭角ハ單位應剪力ガ彈性限度以内ナレバ(69)式ニヨリテ之ヲ知ルヲ得.

今Jヲ斷面ノ極慣性能率, c ヲ軸線ヨリ緣維迄ノ距離, Sヲ軸線ヨリ c ナル距離ニ於ケル單位應剪力, Gヲ材料ノ歪係數, l ヲ軸ノ長サ及 ϕ ヲ軸ノ一端ガ他端ニ對シテ扭ラルヽ角ヲ弧度ニテ表ハセルモノ(第77圖, ∠AOA′)トスレバ

$$\text{弧 AA}'=c.\phi\ (\text{第 77 圖}),\quad \frac{c.\phi}{l}=\text{單位變形},$$

$$G=\frac{S}{\dfrac{c.\phi}{l}}=\frac{S.l}{c.\phi}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad G&=\frac{\dfrac{P.p.c}{J}.l}{c.\phi}=\frac{P.p.l}{J.\phi},\\ \text{又ハ}\quad \phi&=\frac{P.p.l}{G.J}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(72)$$

ϕ ヲ度數ニテ表ハセバ

$$\frac{\pi\phi^\circ}{180}=\frac{P.p.l}{G.J},\quad \phi^\circ=57.3\frac{P.p.l}{G.J},$$

又ハ $$G=57.3\frac{P.p.l}{J.\phi^\circ}.$$

次ニ軸ガ一分間ニ n 回轉ヲナシテ傳送スル馬力ヲHトスレバ(70), (72)二式ヨリ

$$\frac{\pi\phi^\circ}{180}=\frac{63,030\frac{H}{n}.l}{G.J}, \quad \phi^\circ=\frac{3,610,000H.l}{n.G.J}\cdots\cdots\cdots(72_a)$$

此ニ於テ l ハ吋ニテ, J ハ吋^{4}ニテ, G ハ听每平方吋ニテ表ハスモノトス.

例題 1. 長サ125呎, 外徑17吋, 內徑11吋ノ鋼軸ガ一分間50回轉ニテ16,000馬力ヲ傳フルトキ其扭角ヲ求ム.

(72_a) 式ニ於テ H=16,000, l=1,500吋, n=50, J=6,765吋^4, G=12,000,000听/平方吋ナルユヱ

$$\phi^\circ=\frac{3,610,000\times16,000\times1,500}{50\times12,000,000\times6,765}=21.4\text{度}$$

又軸ノ表面ニ於テ軸線ニ並行ニ引キタル直線ガ扭ラルヽ角ハ(第77圖, ∠ABA′)

$$\frac{c.\phi^\circ}{l}=\frac{\frac{17}{2}\times21.4}{1,500}=0.12\text{度}$$

例題 2. 玆ニ長サ5呎, 直徑2吋ノ錬鐵軸アリ. 軸線ヨリ6吋ノ距離ニ於テ5,000听ノ外力ヲ加フルトキ扭角ハ7度ニシテ外力ヲ除去スルトキ原形ニ復セリト云フ. 歪係數如何.

$$G=57.3\frac{P.p.l}{J.\phi^\circ}=\frac{57.3\times(5,000\times6)\times(5\times12)}{\frac{22\times2^4}{7\times32}\times7}$$

$\doteqdot$9,380,000听/平方吋.

52. 軸ノ強サ及剛性 軸ノ强サハ之ガ耐ヘ得ル扭力率ノ大小ニ依テ計ルモノナレバ諸軸ノ强サハ

$\frac{S.J}{c}$ ノ値ニ正比例ス. 例ヘバ二ツノ軸ノ材質ガ同ジクシテ一ツノ軸ノ直徑ガ他ノ軸ノ直徑ノ二倍ナレバ前者ノ斷面係數 $\frac{J}{c}$ ハ後者ノ $\frac{J}{c}$ ノ八倍ナルユヱ兩軸强サノ比ハ8:1ナリ.

今斷面積ノ等シキ中空圓軸ト圓軸トノ强サヲ比較セントス. 中空圓軸ノ外徑ヲ d_2, 內徑ヲ d_1, 圓軸ノ直徑ヲ d トスレバ斷面積 A ガ等シキ爲ニハ $d^2=d_2^2-d_1^2$ ナリ. 而シテ中空圓軸ニアリテハ

$$\frac{J}{c}=\frac{\pi(d_2^4-d_1^4)}{16d_2}=\frac{\frac{1}{4}A(d_2^2+d_1^2)}{d_2}$$

圓軸ニアリテハ

$$\frac{J}{c}=\frac{\pi d^4}{16d}=\frac{1}{4}A.d=\frac{1}{4}A(d_2^2-d_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{\text{中空圓軸ノ强サ}}{\text{圓軸ノ强サ}}=\frac{d_2^2+d_1^2}{d_2(d_2^2-d_1^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{m^2+1}{m(m^2-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

但 m ハ $\frac{d_2}{d_1}$ ヲ表ハスモノトス. 若シ $d_2=2d_1$ ナレバ兩軸强サノ比ハ 1.44 卽チ中空圓軸ハ圓軸ヨリ强キコト四割四分ナリ.

軸ノ剛性ハ扭角ガ一定ノ値ヨリ超過スルコトナクシテ之ガ耐ヘ得ル扭力率ノ大小ニ依テ計ル. 而シテ扭力率ハ J ノ値ニ正比例スルヲ以テ軸ノ剛性ハ共極慣性能率ニ正比例ス. 上記ノ條件ノ下ニ中

空圓軸ト圓軸トノ剛性ヲ比較スルニ

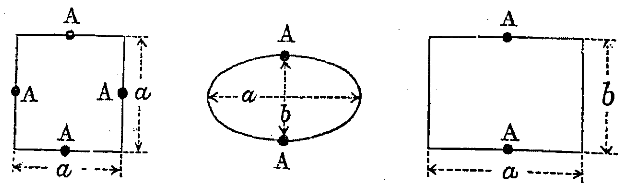
$$\frac{\text{中空圓軸ノ剛性}}{\text{圓軸ノ剛性}}=\frac{\frac{\pi}{32}(d_2^4-d_1^4)}{\frac{\pi}{32}.d^4}=\frac{\frac{1}{8}A(d_2^2+d_1^2)}{\frac{1}{8}Ad^2}$$

$$=\frac{d_2^2+d_1^2}{d_2^2-d_1^2}=\frac{m^2+1}{m^2-1}.$$

若シ $m=2$ ナレバ兩軸剛性ノ比ハ1.67即チ中空圓軸ノ剛性ハ圓軸剛性ヨリ大ナルコト六割七分ナリ.

53. **斷面圓形ナラザル軸** 此種ノ軸ガ扭力ヲ受タルトキノ一般現象ハ圓軸ニ於ケルト同樣ナレドモ斷面ノ應剪力配布ハ之ト異ナルヲ以テ前節ニ與ヘシ諸公式ヲ適用スル能ハズ. 實驗ニヨルニ二ツノ對稱軸ヲ有スル斷面ニアリテハ短キ方ノ軸ノ兩端ニ於テ纖維ノ扭歪(Distorsion)ハ最大ニシテ此等ノ點ニ於テ單位應力ハ最大ナリ. 又矩形斷面軸ノ隅線ニ沿ヒテハ應剪力ハ零ナリ.本書ニ於テハ此等ノ場合ノ論議ヲ省キ只其結果ノミ記スコトヽセリ.

第80圖



(a) (b) (c)

(i)正方形斷面ノ軸. $P.p=0.208a^3.S$

第80圖(a)ニ示セル邊ノ中央點ニ於テ單位應力Sハ最大ナリ.

(ii)楕圓斷面ノ軸. $P.p=\frac{\pi}{16}ab^2.S$

第80圖(b)ニ示セル短軸ノ兩端Aニ於テSノ値ハ最大ナリ.

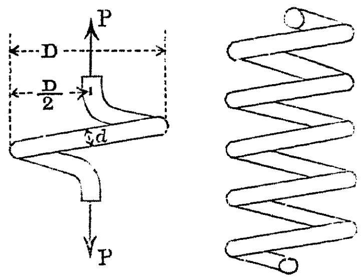
(iii)矩形斷面ノ軸. $P.p=\left(\frac{a^2b^2}{3a+1.8b}\right)S$

第80圖(c)ニ示セル長邊ノ中央點Aニ於テSノ値ハ最大ナリ. めりまん氏(Merriman)公式

$$P.p=\frac{2}{9}ab^2.S$$

54. **蔓卷彈機**(Helical Spring) 之ハ線軸ガ螺旋狀ヲナス樣ニ線ヲ圓壔ニ捲キテ得タルモノナリ. 第81圖ニ於テPナル張力又ハ壓力ノ働線ハ總テノ卷環ノ中心ヲ通ルモノトシ線ノ直徑ヲd,卷環ノ直徑ヲDトス. 今一個ノ卷環ヲ考フルニ彈機ノ卷環ガ密ニシテ且Dガdニ比シテ大ナルトキハ卷環ノ面ハ外力Pノ働線ニ殆ド垂直ナルベシ. 此場合ニ線ヲ扭ラントス

第81圖



スル扭力率ハ$P.\frac{D}{2}$ニシテ線ノ斷面係數ハ$\frac{\pi d^3}{16}$ナルニヨリ

$$\frac{P.D}{2}=\frac{\pi d^3}{16}.S, \quad \therefore \quad P=\frac{\pi d^3}{8D}.S$$

是レ外力Pト彈機ノ大サトノ關係ヲ表ハセル式ナリ.

一個ノ卷環ノ長サハ約πDニシテ此卷環ノ線ガ小ナル角ϕ丈扭ラルヽトキ扭力率ガOヨリ$\frac{P.D}{2}$迄均等ニ增スナラバ一個ノ卷環ヲ扭ルニ爲セル働ハ$\frac{1}{2}.\frac{P.D}{2}.\phi$卽チ$\frac{P.D}{4}.\phi$ナリ. 但$\phi$ハ弧度ニテ表ハセル角ナリトス. 又卷環一個ノ撓度ヲδトセバ外力ガOヨリP迄均等ニ增加スルトキδナル撓度ヲ生ズルニ爲セル働ハ$\frac{1}{2}P\delta$ナリ. 而シテ此等ノ働ハ同量ナルベキニヨリ

$$\frac{P.D}{4}.\phi=\frac{P}{2}.\delta, \quad 卽チ \quad \phi=\frac{2\delta}{D}.$$

(72)式ヨリ

$$\phi=\frac{P.p.l}{G.J}=\frac{\frac{P.D}{2}.\pi D}{G.\frac{\pi d^4}{32}}=\frac{16PD^2}{Gd^4}.$$

$$\therefore \quad \frac{2\delta}{D}=\frac{16PD^2}{Gd^4}, \quad 卽チ \quad \delta=\frac{8PD^3}{Gd^4}.$$

是レ外力Pト一個ノ卷環ノ撓度トノ關係ヲ表ハセル式ナリ.

又 $$\phi=\frac{S\,l}{c.G}=\frac{2\delta}{D}, \quad \frac{S.\pi D}{G.\frac{d}{2}}=\frac{2\delta}{D},$$

$$\therefore \quad \delta=\frac{S.\pi D^2}{Gd}.$$

此式ハ單位應力ト一ツノ卷環ノ撓度トノ關係ヲ表ハス.

扭力ヲ受クル棒狀體ノ强サガ其長サニ無關係ナルト同樣ニ彈機ノ强サハ卷環ノ數ニ無關係ナリ. 依テ卷環ノ數ヲnトスレバ全撓度Δハ一個ノ卷環ノ撓度ノn倍ナルベキニヨリ

$$\Delta=\frac{8PD^3.n}{Gd^4}, \quad 又ハ \quad \Delta=\frac{S\pi D^2.n}{Gd} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(73)$$

55. 彎曲率ト扭力率トノ合成 水平圓軸ニテ動力ノ傳送ヲナストキ軸ノ自己重量又ハ之ニ取付クル滑車等ノ重量ハ軸ニ彎曲率ヲ生ズ. 今S_bヲ抵抗力率公式ヨリ求メタル最大單位應力卽チ$S_b=\frac{32M}{\pi d^3}$, S_sヲ抵抗扭力率公式ヨリ得タル單位應剪力卽チ$S_s=\frac{16P.p}{\pi d^3}$トスレバ第六章第39節(59)式ニヨリ

$$\left.\begin{aligned} 最大\ S_n&=\frac{1}{2}S_b+\sqrt{S_s^2+(\tfrac{1}{2}S_b)^2}, \\ 最大\ S_t&=\sqrt{S_s^2+(\tfrac{1}{2}S_b)^2}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(74)$$

此ニ於テS_nハ最大單位應壓力又ハ單位應張力ニシテS_tハ最大單位應剪力ナリ. 彎曲率ト扭力トノ作用ヲ受クル軸ノ最大單位應力ハ抵抗力率公式又ハ抵抗扭力率公式ガ與フル値ヨリ餘程大ナルニヨリ

軸ノ直徑ヲ定ムルニ當テハS_nヲ作用抗張强度又ハ作用抗壓强度ニ,S_tヲ作用抗剪强度ニ等シク取ルベシ.

(74)式ニS_b及S_sノ値ヲ代入スレバ

$$\left.\begin{array}{l} S_n=\dfrac{16}{\pi d^3}\left[M+\sqrt{M^2+(P.p)^2}\right], \\ \text{又ハ} \\ S_n=\dfrac{32}{\pi d^3}\left[\dfrac{1}{2}(M+\sqrt{M^2+(P.p)^2}\right] \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(74_a)$$

此式中ノ$\frac{1}{2}(M+\sqrt{M^2+(P.p)^2})$ヲ$M_e$ト置ケバ

$$S_n=\frac{32M_e}{\pi d^3}.$$

然ラバM_eハ扭力ヲ加フルコトナクシテS_nニ等シキ彎曲應力ヲ生ズベキ彎曲率ニ等値ナルガユヱニ之ヲ**等値彎曲率**(Equivalent Bending Moment)ト謂フ.

又(74_a)式中ノ$(M+\sqrt{M^2+(P.p)^2})$ヲ$(P.p)_e$ト置ケバ

$$S_n=\frac{16(P.p)_e}{\pi d^3}.$$

此$(P.p)_e$ハ彎曲率ヲ生ズル如キ外力ヲ加フルコトナクシテS_nニ等シキ應剪力ヲ生ズベキ扭力率ニ等値ナルガユヱニ之ヲ**等値扭力率**(Equivalent Twisting Moment)ト謂フ.

若シ中空圓軸ナレバ

$$S_n=\frac{16d_2}{\pi(d_2^4-d_1^4)}\left[M+\sqrt{M^2+(P.p)^2}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(74_b)$$

例題 兹ニ直徑3吋ノ水平鋼軸アリテ軸承間ノ距離12呎,滑車及調革ニ依テ軸ノ中央點ニ加ヘラルヽ荷重800听ナリ. 之ガ一分間120回轉ニテ40馬力ヲ傳送スルトキ軸ニ誘起セラルヽ最大單位應力ヲ求ム.

軸ガ軸承ニテ固定セラルヽモノトセバ

$$S_b=\frac{M.c}{I}=\frac{\frac{1}{8}Wl\times\frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{64}}=\frac{4Wl}{\pi d^3}=\frac{4\times800\times12\times12}{\pi\times3^3}$$

$$=5{,}400\ \text{听/平方吋}.$$

$$S_s=\frac{321{,}000H}{nd^3}=\frac{321{,}000\times40}{120\times3^3}=4{,}000\ \text{听/平方吋}.$$

軸ノ中央斷面ニ於ケル最大應張力又ハ應壓力ハ

$$S_n=\frac{5{,}400}{2}+\sqrt{\left(4{,}000\right)^2+\left(\frac{5{,}400}{2}\right)^2}=7{,}600\ \text{听/平方吋}.$$

如斯ニS_nガS_bヨリ大ナルコト四割一分ナリ.

次ニ最大應剪力ハ

$$S_t=\sqrt{(4{,}000)^2+(2{,}700)^2}=4{,}900\ \text{听/平方吋}.$$

依テS_tハS_sヨリ大ナルコト二割二分ナリ.

若シ軸ガ彎曲率及扭力率ノ外ニ軸線ニ沿ヒテ壓力又ハ張力ヲ受クルトキハ上記S_nヲ求ムルニ先立チ彎曲率ヨリ生ズル單位應力S_bト軸線ニ沿ヒテ働ク外力ヨリ生ズル單位應力トノ代數和ヲ求メ其値ヲ(74)式中ノS_bノ値トナスベシ.

第九章　彈復働及働

(Resilience and Work)

56. 外働ト內勢 (External Work and Internal Energy)

棒狀體ガ漸加荷重Pヲ受ケテ其長サガΔl丈變シタリトセバ此變形ニ依テ爲セル働ハ平均外力$\frac{1}{2}$PトΔlトノ相乘積$\frac{1}{2}$P.Δlナリ(第一章第9節參照)同樣ニ桁ガ漸加荷重Wヲ受ケテΔ丈撓ムトキWノ爲セル働ハ$\frac{1}{2}$W.Δナリ．斯ク外力ノ爲セル働ヲ**外働**ト謂フ．

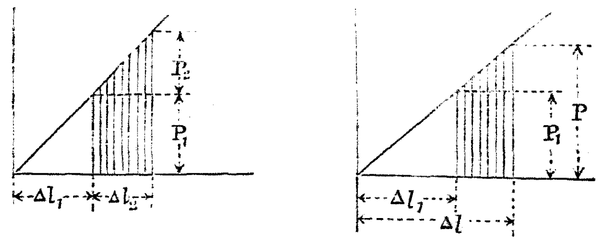
物體ガ外力ヲ受クルトキ其彈性ヲ害セラルヽコトナク且其働ガ熱ヲ生ズルニ費サルヽコトナケレバ外働ト等量ノ勢ガ物體內ニ貯ヘラルベシ．之ヲ**內勢**ト謂フ．而シテ此勢ハ外働ト等量ノ働ヲナシ得ルガユヱニ之ヲ**內能勢** (Internal Potential Energy) トモ謂フ．依テ材料ノ彈性限度以內ナラバ

$$棒狀體ニ貯ヘラルヽ內勢=\frac{1}{2}\mathrm{P}.\Delta l,$$

$$桁ニ貯ヘラルヽ內勢=\frac{1}{2}\mathrm{W}.\Delta.$$

第(82)圖(*a*)ノ如クP_1ノ爲ニΔl_1丈變形セル棒狀體ガ更ニP_2ノ爲ニΔl_2丈變形シタリトセバ棒狀體ニ貯ヘラレタル全內勢ハ

第82圖



(*a*)　　(*b*)

$$\frac{1}{2}(\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2)(\Delta l_1+\Delta l_2)$$

ナリ．次ニP_2ヲ除去スル際貯ヘラレタル內勢ニテ爲シ得ベキ働ハ

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}_2.\Delta l_2+\mathrm{P}_1.\Delta l_2=\frac{1}{2}(2\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2)\Delta l_2$$

ニシテ第82圖(*a*)ノ陰ヲ附シタル部分ノ面積ハ此働ヲ表ハス．

第82圖(*b*)ノ如ク外力ガP_1ヨリP迄增加スルトキP_1ニ對スル變形ヲΔl_1, Pニ對スル變形ヲΔlトスレバ此場合ニ棒狀體ニ貯ヘラルヽ內勢ノ增加ハ次ノ如シ．

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}\,\Delta l-\frac{1}{2}\mathrm{P}_1.\Delta l_1.$$

同樣ニ桁ノ受クル荷重ガW_1ヨリW迄增加シ之ニ對シテ撓度ハΔ_1ヨリΔ迄增加シタリトセバ荷重ノ增加ニ依テ桁ニ貯ヘラルヽ內勢ノ增加ハ次ノ如シ．

$$\frac{1}{2}W.\Delta-\frac{1}{2}W_1.\Delta_1.$$

單位ノ長サ及單位ノ斷面積ヲ有スル棒狀體ヲ考フレバ上記ノPハ單位應力Sニシテ變形Δlハ單位變形ϵナリ．然ラバ單位容積ノ棒狀體ノ單位應力ヲ零ヨリS迄高ムルトキノ內勢ハ$\frac{1}{2}S.\epsilon$ナリ．又單位容積ノ棒狀體ノ單位應力ヲS_1ヨリS迄高ムルトキノ內勢ハ$\left(\frac{1}{2}S.\epsilon-\frac{1}{2}S_1\epsilon_1\right)$ナリ．

單位應力ガ材料ノ彈性限度ヲ超過スレバ上記ノ式ヲ適用スル能ハズ．而シテ破壞ニ要スル外働ハ棒狀體ノ單位應力ヲ彈性限度迄高メルニ要スル外働ニ比較シテ甚大ナリ．錬鐵及鋼ニ於テ殊ニ然リトス．第一章第9節第9圖ニ示セル曲線ト座標橫軸トノ間ノ面積ハ此ノ如キ外働ヲ測ルベキ準度ニシテ錬鐵及鋼ニアリテハ彈性限度以內ノ部分ノ表圖面積ハ之ヲ加算セズトモ可ナル程ニ小ナリ．

57. 棒狀體ノ彈復働 前節ニ述ベタル外働$\frac{1}{2}P.\Delta l$ハ內勢トシテ棒狀體ニ貯ヘラレ，外力ヲ除去スルトキ之ヲシテ原狀ニ復セシムル働ヲナスモノニシテ是レ所謂**彈復働**ナリ．今棒狀體ノ斷面積ヲA，平均單位應力ヲSトスレバ$P=A.S$，又棒狀體ノ長サヲl，彈性係數ヲEトスレバ長サノ變化ハ$\Delta l=\left(\frac{S}{E}\right)l$ナリ．

然ラバ棒狀體ノ彈復働Kハ次ノ如シ．

$$K=\frac{1}{2}P.\Delta l=\frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{E}\right).Al\ldots\ldots(75)$$

Sガ彈性限度S_eナルトキハ$\frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{E}\right)$ヲ材料ノ**彈復働係數**(Modulus of Resilience)ト謂フ．

材料	彈復働係數 $\frac{1}{2}\cdot\frac{S_e^2}{E}$.
鑄鐵…………	$\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{6,000}^2}{12,000,000}=1.5$ 吋听/立方吋.
錬鐵…………	$\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{25,000}^2}{28,000,000}=11.2$ 〃 〃
建築用鋼…………	$\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{30,000}^2}{29,000,000}=15.5$ 〃 〃
木材…………	$\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{3,000}^2}{1,200,000}=3.8$ 〃 〃

棒狀體ノ全彈復働ヲ求ムルニハ彈復働係數ニ棒狀體ノ容積ヲ乘ズレバ可ナリ．例ヘバ斷面積6平方吋，長サ25呎ナル建築用鋼棒狀體ノ彈復働ハ27,900吋听又ハ2,330呎听ナルガ如シ．

彈復働ハ物體ノ內勢ノ大小ヲ度ル準度ニシテ彈復働係數ガ大ナル程內勢ヲ貯ヘ得ル能力大ナリ．

外力ガP_1ヨリP迄增加スルトキ之ニ對シテ單位應力ハS_1ヨリS迄增加スルモノトスレバ外力ガPヨリP_1ニ減ゼラルヽトキ棒狀體ノ彈復働ハ(75)

式ヨリ

$$K=\frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{E}\right).Al-\frac{1}{2}\left(\frac{S_1^2}{E}\right).Al=\frac{1}{2}.\frac{S^2-S_1^2}{E}.Al.$$

此式ノ單位應力Sハ材料ノ彈性限度以下ナルヲ要ス.

58. **桁ノ彈復働**　突桁ガ放端ニ於テ又ハ單桁ガ中央點ニ於テ一ツノ集中荷重Wヲ受ケテΔナル撓度ヲ生ジタリトセバ外働ハ$\frac{1}{2}$W.Δナリ.　但Wハ漸加荷重ナリトス. 然ラバ桁ノ彈復働ハ

$$K=\frac{1}{2}W.\Delta$$

而シテ第四章第29節ニ於テ與ヘシ如ク

$$W=\frac{\alpha.S.I}{c.l}=\frac{\alpha.S.A.k^2}{c.l},\quad \Delta=\frac{\alpha.S.l^2}{\beta.c.E}.$$

	α.	β.	$\frac{\alpha^2}{\beta}$.
突桁ガ放端ニ於テ一ツノ集中荷重ヲ受クル場合………	1	3	$\frac{1}{3}$
單桁ガ中央點ニ於テ一ツノ集中荷重ヲ受クル場合………	4	48	$\frac{1}{3}$

$$K=\frac{1}{2}W.\Delta=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{k}{c}\right)^2\frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{E}\right).Al\quad\text{.............}(76)$$

斷面ガ矩形ナレバ$\left(\frac{k}{c}\right)^2=\frac{1}{3}$ナルユヱ

$$K=\frac{1}{9}.\frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{E}\right).Al$$

卽チ矩形斷面桁ノ彈復働ハ軸力ヲ受クル棒狀體ノ彈復働ノ九分ノ一ナリ.

又斷面ガ圓形ナレバ$\left(\frac{k}{c}\right)^2=\frac{1}{4}$ナルユヱ

$$K=\frac{1}{12}.\frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{E}\right).Al$$

斯ク圓形斷面桁ノ彈復働ハ軸力ヲ受クル棒狀體ノ彈復働ノ十二分ノ一ナリ.

桁ガ單位延長ニ付wナル等布荷重ヲ受クル場合ヲ考フルニdxナル細微長サノ荷重ハ$w.dx$ナリ.　而シテxヲ横距トセル點ノ撓度ヲyトスレバ漸加荷重$w.dx$ガ細微ノ長サdxニ為セル外働ハ$\frac{1}{2}wdx.y$ナルニヨリ

$$\text{等布荷重ノ全外働}=\frac{1}{2}w\int_0^l y.dx$$

矩形斷面桁ノ强サハ高サノ自乘ニ,剛性ハ高サノ三乘ニ正比例スレドモ彈復働ハ斷面積ニ正比例スルヲ以テ斷面ノ短邊又ハ長邊孰レヲ鉛直ニ置クモ彈復働ハ同一ナリ.

單位應力ガS_1ヨリS迄變ズル場合ノ彈復働ヲ求ムルニハ(76)式中ノS^2ヲ$(S^2-S_1^2)$ニテ置換フベシ.

例題　單位延長ニ付wナル等布荷重ヲ受クル矩形斷面突桁ノ彈復働ヲ求ム.

第四章第26節ヨリ　$y=\frac{w}{2EI}\left(\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{1}{3}lx^3+\frac{1}{12}x^4\right).$

$$K=\frac{w^2}{4EI}\int_0^l\left(\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{1}{3}lx^3+\frac{1}{12}x^4\right)dx=\frac{w^2l^5}{40EI}=\frac{W^2l^3}{40EI}.$$

$$W=\frac{2.S.I}{c.l},\quad I=A.k^2,\quad \left(\frac{k}{c}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad K=\frac{1}{15}.\frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{E}\right).Al$$

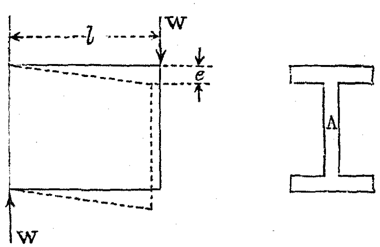
59. 剪斷力及扭力ニ因ル彈復働　第83圖ノ如クニ長サlニシテ斷面積AナルI字體ガ剪斷力ヲ受クルトキ應剪變形ヲeトセバ

$$\text{漸加荷重Wガ為セル外働}=\frac{1}{2}W.e,$$

$$W=A.S_s,\quad e=\left(\frac{S_s}{G}\right)l.$$

$$\therefore\quad K=\frac{1}{2}W.e=\frac{1}{2}\left(\frac{S_s^2}{G}\right).Al\text{.....................}(77)$$

第83圖



斯ク剪斷力ヲ受クル物體ノ彈復働モ亦單位應剪力S_sノ自乘及容積ニ正比例ス. 但S_sハ剪斷力ニ對スル彈性限度以下ナルヲ要ス.

例ヘバ斷面積A,支間lナル單桁ガ中央點ニ於テ一ツノ集中荷重Wヲ受クルトキハ(77)式ヨリ

$$K=\frac{1}{2}.\frac{\left(\frac{W}{2A}\right)^2}{G}.Al=\frac{W^2.l}{8AG}.$$

次ニ圓軸ガ扭力ヲ受クル場合ヲ考フルニ斷面ノ細微面積dAニ作用スル單位應剪力ヲS_sトシ長サlニ對スル應剪變形ヲeトスレバ長サlニシテ斷面dAナル細微部分ニ對スル彈復働ハ

$$\frac{1}{2}S_s.dA\times e,\quad \text{且}\quad e=\left(\frac{S_s}{G}\right)l$$

$$\therefore\quad dK=\frac{1}{2}S_s.dA.\left(\frac{S_s}{G}\right)l=\frac{1}{2}\left(\frac{S_s^2}{G}\right)l.dA$$

軸ノ半徑ヲcトシ斷面ノ周邊ニ生ズル最大單位應剪力ヲSトスレバ軸線ヨリyナル距離ニ於ケル單位應剪力S_sハ$S.\frac{y}{c}$ナリ.

$$\therefore\quad dK=\frac{1}{2}.\frac{S^2}{G}.\frac{dA.y^2}{c^2}.l$$

而シテ　$\int y^2.dA=J,\quad J=A.k^2.$

但kハ斷面ノ極環動半徑ナリ.

$$\therefore\quad K=\frac{1}{2}.\frac{S^2}{G}.\frac{J}{c^2}.l=\frac{1}{2}\left(\frac{S^2}{G}\right)\left(\frac{k}{c}\right)^2.Al\text{..........}(77_a)$$

60. 一ツノ集中荷重ノ働點ニ於ケル撓度　第三章第18節及第19節ニ於テ用キタルト同ジ記號ニヨレバ

$\frac{S.y}{c}$＝斷面ノ中立軸ヨリyナル距離ニ於ケル水平

單位應力,

$\left(\frac{S.y}{c.E}\right)dx$＝單位應力$\frac{S.y}{c}$ノ爲ニ生ズル長サ$dx$ノ

變化,

$\frac{1}{2}\left(\frac{S.y}{c}\right)dA.\left(\frac{S.y}{c.E}\right)dx$＝細微斷面積$dA$ヲ有スル纖維

ノ働.

然ラバ斷面ニ於ケル總テノ纖維ニ貯ヘラルヽ內勢ハ

$$dK=\int\frac{1}{2}\left(\frac{S.y}{c}\right)dA.\left(\frac{S.y}{c.E}\right)dx.$$

$\int y^2.dA$＝斷面ノ慣性能率, $\frac{S}{c}=\frac{M}{I}$.

$$\therefore\quad dK=\frac{M^2.dx}{2EI},\quad K=\frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}.dx\dots\dots\dots(78)$$

次ニ桁ガ一ツノ集中荷重Wヲ受クルトキ荷重下ノ撓度ヲΔトスレバ漸加荷重Wノ爲セル外働$\frac{1}{2}W.\Delta$ハ內勢Kニ等シカルベキヲ以テ

$$\frac{1}{2}W.\Delta=K,\quad W.\Delta=\int\frac{M^2}{EI}.dx\dots\dots\dots(78_a)$$

例題 支間lナル單桁ノ左支端ヨリ$\frac{l}{4}$ノ點ニ於テ一ツノ集中荷重Wヲ加フルトキ荷重ノ下ノ撓度ヲ求ム.

(78_a)式ヨリ

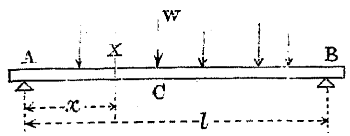
$$W.\Delta=\int_0^{\frac{1}{4}l}\frac{\left(\frac{3}{4}W.x\right)^2}{EI}.dx+\int_0^{\frac{3}{4}l}\frac{\left(\frac{1}{4}W.x\right)^2}{EI}.dx$$

$$=\frac{9W^2}{48EI}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{1}{4}l}+\frac{W^2}{48EI}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{3}{4}l}=\frac{3W^2l^3}{256EI},$$

$$\therefore\quad\Delta=\frac{3Wl^3}{256EI}.$$

61. 任意ノ點ニ於ケル桁ノ撓度 或荷重ヲ受ケタル桁ノ任意ノ點Cニ於ケル撓度ヲ求メントス.

第84圖



今撓度ヲ求メントスル點CニWナル別ノ荷重ヲ加ヘタリト想像セヨ. 總テノ荷重(Wヲモ含ム)ヨリ生ズルC點ノ撓度ヲy_1トスレバWニヨリテ爲セル外働ハ$\frac{1}{2}W.y_1$ナリ. A點ヨリxナル距離ニアル斷面Xノ中立軸ヨリcナル距離ニ於ケル纖維ノ單位應力ヲS(總テノ荷重ヨリ生ズル單位應力)トセバ

$\left(\frac{S.y}{c}\right)dA$＝中立軸ヨリ$y$ナル距離ニ於テ細微斷面積$dA$ヲ有スル纖維ノ應力.

斷面Xニ於テ荷重Wノミヨリ生ズル纖維ノ單位應力ヲS'トスレバ

$\frac{S'.y}{c}$＝中立軸ヨリyナル距離ニ於テWノミヨリ生ズル纖維ノ單位應力.

此纖維ノ長サdxヲ考フルニ應力$\frac{S'.y}{c}$ニ基因スル長サノ變化ハ

$$\frac{\frac{S'.y}{c}}{E}.dx=\frac{S'.y}{c.E}.dx$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left(\frac{S.y}{c}.dA\right).\left(\frac{S'.y}{c.E}.dx\right)=$$荷重Wガ纖維ニ爲セル働.

依テWニ因ル内勢ハ

$$dK=\frac{1}{2}.\frac{S.S'}{c^2.E}.dx\int y^2.dA=\frac{1}{2}.\frac{S.S'.I}{c^2.E}.dx$$

總テノ荷重ヨリ生ズル斷面ノ彎曲率ヲM_1トシWノミヨリ生ズル彎曲率ヲM'トスレバ

$$\frac{S}{c}=\frac{M_1}{I},\quad \frac{S'}{c}=\frac{M'}{I},\quad dK=\frac{1}{2}.\frac{M_1.M'}{EI}.dx$$

$$\therefore\quad K=\int_0^l\frac{M_1.M'}{2EI}.dx=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{M_1.M'}{EI}.dx$$

之ハWノ外働ニ等シカルベキヲ以テ

$$\frac{1}{2}W.y_1=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{M_1.M'}{EI}.dx,$$

$$\therefore\quad W.y_1=\int_0^l\frac{M_1.M'}{EI}.dx\text{......................}(79)$$

此式中撓度y_1ハ與ヘラレタル荷重ノミヨリ生ズル撓度yトWノミヨリ生ズル撓度y'トノ和ナリト考フルヲ得. 又右邊ノM_1ハ與ヘラレタル荷重ノミヨリ生ズル彎曲率MトWノミヨリ生ズル彎曲率M'トノ和ナリト考フルヲ得. 然ラバ(79)式ハ次ノ如ク記スルヲ得.

$$W(y+y')=\int_0^l\frac{(M+M')M'}{EI}.dx,$$

$$W.y+W.y'=\int_0^l\frac{M.M'}{EI}.dx+\int_0^l\frac{M'^2}{EI}.dx.$$

然ルニ(78_a)式ヨリ　$W.y'=\int_0^l\frac{M'^2}{EI}.dx$

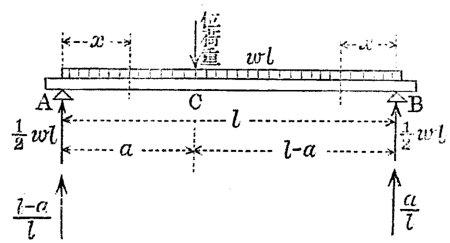
$$\therefore\quad W.y=\int_0^l\frac{M.M'}{EI}.dx\text{......................}(79_a)$$

此ニ於テM'ハWニ正比例スルユヱWガ單位荷重ナル場合ノ彎曲率ヲmトスレバ次ノ一般式ヲ得.

$$y=\int_0\frac{M.m}{EI}.dx\text{......................}(79_b)$$

例題 1. 第85圖ノ如ク均等横斷面ノ單桁ガ等布荷重wヲ受クルトキC點ノ撓度ヲ求ム.

第85圖



(79_b)式ヨリ

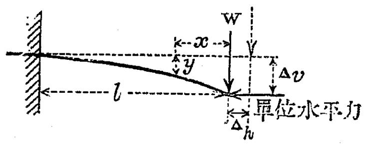
$$y_c=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a\frac{w}{2}\left(lx-x^2\right).\left(\frac{l-a}{l}.x\right)d+x\int_0^{l-a}\frac{w}{2}\left(lx-x^2\right).\left(\frac{a}{l}.x\right)dx\right.$$

$$=\frac{w}{2EIl}\left[(l-a)\int_0^a(lx^2-x^3).dx+a\int_0^{l-a}(lx^2-x^3)\,dx\right]$$

$$=\frac{wa(l-a)}{24EI}(l^2+l.a-a^2).$$

例題 2. 第86圖ノ如ク均等横斷面ノ突桁ノ放端ニWナル一ツノ集中荷重ヲ加フルトキ放端ノ水平變位ヲ求ム.

第86圖



$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=W.x.$$

$$EI.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}Wx^2+C.$$

$x=l$ナル點ニ於テハ$\frac{dy}{dx}=0$ナルユエ積分常數Cハ$-\frac{1}{2}Wl^2$ナリ.

$$EI.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}Wx^2-\frac{1}{2}Wl^2,\quad EI\,y=\frac{1}{6}Wx^3-\frac{1}{2}Wl^2x+C'.$$

$x=0$ナル點ニ於テハ$y=\Delta_v$ナルユエ積分常數C'ハ$EI.\Delta_v$ナリ.

$$\therefore\quad EI.y=EI.\Delta_v-\frac{1}{2}Wl^2x+\frac{1}{6}Wx^3.$$

而シテ$\Delta_v=\frac{Wl^3}{3EI}$ナルニヨリ

$$y=\frac{Wl^3}{3EI}-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Wl^2x-\frac{1}{6}Wx^3\right)=\Delta_v.\frac{2l^3-3l^2x+x^3}{2l^3}.$$

次ニ放端ノ水平變位ヲΔ_hトシ放端ニ單位水平力ヲ加フレバ

$$m=\Delta_v-y,\quad M=W.x$$

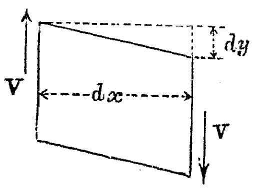
$$\therefore\quad EI.\Delta_h=W\int_0^l(\Delta_v-y)x.dx=\frac{W.\Delta_v}{2l^3}\int_0^l(3l^2x^2-x^4).dx,$$

$$\Delta_h=\frac{2W.\Delta_v l^2}{5EI}=\frac{6\Delta_v^2}{5l}.$$

斯ク放端ノ水平變位ハ鉛直變位卽チ撓度ニ比シテ甚小ナリ.

62. 鉛直剪斷力ヨリ生ズル桁ノ撓度　第87圖ノ如ク鉛直剪斷力Vノ爲ニ細微ノ長サdxガ鉛直ニdy丈歪ミタリトセバ內勢ハ長サdxニ付$\frac{1}{2}V.dy$ナリ.　而シテ斷面ニ於ケル應剪力ノ配布ガ均等ナラバ

第87圖



$$dy=\left(\frac{V}{A.G}\right)dx$$

$$\therefore\quad dK=\frac{1}{2}V\left(\frac{V}{A.G}.dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{A.G}\right)dx,$$

$$K=\frac{1}{2}\int\frac{V^2}{A.G}.dx\quad\text{……………}(80)$$

桁ガWナル一ツノ集中荷重ヲ受クルトキ其働點ノ撓度ヲyトスレバ外働ハ$\frac{1}{2}W.y$ナリ.

$$\therefore\quad\frac{1}{2}W.y=\frac{1}{2}\int\frac{V^2}{A.G}.dx$$

$$W.y=\int\frac{V^2}{A.G}.dx\quad\text{……………}(80_a)$$

實驗ノ結果ニ據レバ第四章第26節及第27節ニ於テ求メタル普通ノ撓度公式ガ與フル撓度ト實際ノ撓度トノ間ニ差異アリ.　是レ普通ノ撓度公式ヲ求ムルニ當リ單ニ彎曲率ノ影響ノミヲ考ヘ鉛直剪斷力ノ影響ヲ省略セシニ因ルモノニシテ此差異ハ桁ノ支間小ナル程增大ス.

次ニ鉛直剪斷力ヨリ生ズル任意ノ點ノ撓度ヲ求メントス.　今撓度ヲ求メントスル點ニ於テ與ヘラレタル荷重ノ外ニWナル別ノ荷重ヲ加ヘタリト想像セヨ.　總テノ荷重(Wヲモ含ム)ヨリ生ズル其點ノ撓度ヲy_1トスレバWニ依テ爲セル外働ハ$\frac{1}{2}W.y_1$ナリ.　又總テノ荷重ヨリ生ズル鉛直剪斷力ヲV_1トシ

Wノミヨリ生ズル鉛直剪斷力ヲV′トスレバV′ノ爲ニ長サdxニ生ズル應剪變形ハ$\left(\frac{V'}{A.G}\right)dx$ナルユエ荷重Wノミニ因ル內勢ハ

$$dK=\frac{1}{2}V_1.\left(\frac{V'}{A.G}\right)dx,\quad K=\frac{1}{2}\int\frac{V_1.V'}{A.G}.dx$$

之ハWノ外働ニ等シカルベキヲ以テ

$$\frac{1}{2}W.y_1=\frac{1}{2}\int\frac{V_1.V'}{A.G}.dx,\quad y_1=\frac{1}{W}\int\frac{V_1.V'}{A.G}.dx\ldots\ldots\ldots(81)$$

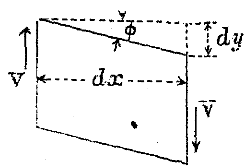
Wヲ單位荷重トセル場合ノ剪斷力ヲvトスレバ

$$y_1=\int\frac{V_1.v}{A.G}.dx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(81_a)$$

前節(79_b)式ヲ求メタルト同樣ニシテ與ヘラレタル荷重ヨリ生ズル鉛直剪斷力ヲV及撓度ヲyトスレバ次ノ一般式ヲ得

$$y=\int\frac{V.v}{A.G}.dx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(81_b)$$

第88圖



又第88圖ニ於テ

$$\frac{dy}{dx}=\tan\phi,\quad dy=\left(\frac{V}{A.G}\right)dx,$$

$$\tan\phi=\frac{V}{A.G},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{V}{A.G},$$

$$\therefore\quad A.G.\frac{dy}{dx}=V\ldots\ldots\ldots\ldots(82)$$

是レ鉛直剪斷力ニ對スル彈曲線ノ一般微分方程式ナリ.

例題 1. 均等橫斷面ノ單桁ガ中央點ニ於テ荷重Wヲ受クルトキ鉛直剪斷力ヨリ生ズル荷重下ノ撓度ヲ求ム

(80_a)式ヨリ

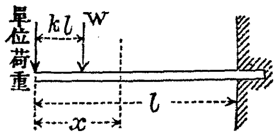
$$y_{\frac{1}{2}l}=\frac{1}{W}.2\int_0^{\frac{1}{2}l}\frac{\left(\frac{1}{2}W\right)^2}{A.G}.dx=\frac{W.l}{4A.G}$$

$$\frac{\text{鉛直剪斷力ヨリ生ズル撓度}}{\text{彎曲率ヨリ生ズル撓度}}=\frac{\frac{W.l}{4A.G}}{\frac{W.l^3}{48E.I}}=12\left(\frac{E}{G}\right)\left(\frac{k}{l}\right)^2.$$

是ニ由テ見レバ桁ノ支間ガ小ナルニアラザレバ鉛直剪斷力ヨリ生ズル撓度ハ彎曲率ヨリ生ズル撓度ニ比シテ小ナルユエ剪斷力ノ影響ハ之ヲ省略シテ可ナリ.

例題 2. 第89圖ノ如ク均等橫斷面ノ突桁ガ放端ヨリklナル距離ニ於テ荷重Wヲ受クルトキ鉛直剪斷力ヨリ生ズル放端ノ撓度ヲ求ム.

第89圖



$$V_{x<kl}=0,\quad V_{x>kl}=-W,\quad v=-1.$$

(81_b)式ヨリ

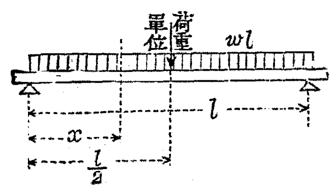
$$y_{x=0}=\frac{1}{A.G}\int_{kl}^{l}W.dx=\frac{Wl(1-k)}{A.G}.$$

此式ニ於テkヲ零トスレバ

$$y_{x=0}=\frac{W.l}{A.G}$$

是レ突桁ノ放端ニ荷重Wヲ加フル場合ノ放端ノ撓度ナリ.

第90圖



例題 3. 第90圖ニ示セル單桁ニ於テ鉛直剪斷力ニ對スル彈曲線及最大撓度ヲ求ム

$$V=\frac{1}{2}wl-wx,$$

$$A.G.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}wl-wx.$$

$$A.G.y=\frac{1}{2}wlx-\frac{1}{2}wx^2+C.$$

$x=0$ ナル點ニ於テハ $y=0$ ナルニヨリ積分常數 C ハ零ナリ.

$$\therefore\quad A.G.y=\frac{1}{2}wx(l-x).$$

次ニ y ノ値ガ最大ナルベキ點ヲ求メンニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{w}{2A.G}(l-2x)=0,\quad x=\frac{1}{2}l$$

$$\therefore\ \text{最大撓度}\ y_{\frac{1}{2}l}=\frac{w}{2A.G}\Big[x(l-x)\Big]_{x=\frac{1}{2}l}=\frac{wl^2}{8A.G}.$$

此値ハ又 (81_b) 式ヨリ求ムルヲ得. 即チ第90圖ニ示ス如ク支間ノ中央點ニ單位荷重ヲ加フレバ

$$\text{最大撓度}\ y_{\frac{1}{2}l}=2\int_0^{\frac{1}{2}l}\frac{\left(\frac{1}{2}wl-wx\right)\cdot\frac{1}{2}}{A.G}dx=\frac{1}{A.G}\left[\frac{1}{2}w(lx-x^2)\right]_0^{\frac{1}{2}l}=\frac{wl^2}{8A.G}.$$

63. 最小働ノ原理 或彈體ニ働ク外力ヲ P トシ其ノ方向ニ於ケル其働點ノ變位ヲ δ, 外働ヲ W, 彈體ニ於ケル內働卽チ內勢ヲ K トスレバ

$$W=K=\frac{1}{2}P.\delta$$

外力 P ヲ $P+dP$ ニ增加スルトキ之ニ因リテ生ズル外働 W ノ增加ハ

$$dW=\frac{P+(P+dP)}{2}.d\delta=P.d\delta$$

$$\therefore\quad \frac{dW}{dP}=P.\frac{d\delta}{dP}$$

又外力ガ P ナルトキト $P+dP$ ナルトキトノ外働ノ差ヲ dW' トスレバ

$$dW'=\frac{1}{2}(P+dP)(\delta+d\delta)-\frac{1}{2}P.\delta$$

$$=\frac{1}{2}\delta.dP+\frac{1}{2}P.d\delta$$

$$\therefore\quad \frac{dW'}{dP}=\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}P.\frac{d\delta}{dP}$$

然ルニ

$$dW=dW'=dK$$

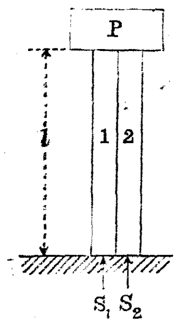
ナルベキヲ以テ

$$\frac{dW}{dP}=\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}.\frac{dW}{dP},\quad \text{即チ}\quad \frac{dW}{dP}=\frac{dK}{dP}=\delta.$$

斯ク彈體ガ外力 P ヲ受クルトキ其變形ニヨリテ生ズル P ノ働點ノ變位 δ ハ內働ヲ P ニ就テ微分シタル第一次微分係數ニ等シ.

之ヲ**かすちりあのう氏** (Castigliano) **定理**ト謂ヒ, 材料力學ニ於テ應用廣クシテ靜力學ノ平衡條件ノミニテ解クコト能ハザル問題ハ之ニ依テ解クヲ得.

第91圖



第91圖ノ如ク二個ノ同材短柱ニテ P ナル荷重ヲ支フルトキ反力ハ S_1 及 $S_2=(P-S_1)$ ナリ. 從テ短柱ニ於ケル應壓力ハ又 S_1 及 $S_2=(P-S_1)$ ナリ. 然ラバ短柱ニ於ケル內働ハ

$$K=\frac{S_1^2.l}{2A_1.E}+\frac{(P-S_1)^2l}{2A_2.E}.$$

此ニ於テ l ハ短柱ノ長サ, A_1 及 A_2 ハ斷面積, E ハ彈性係數ナリ.

今短柱ノ壓縮ニ因ル荷重 P ノ働點ノ變位ヲ δ トスレバ上述ノ定理ニヨリ

$$\frac{dK}{dP}=\frac{(P-S_1)l}{A_2.E}=\delta \qquad \cdots\cdots(a)$$

次ニ短柱ノ下端ガ不動ナラバ S_1 又ハ S_2 ガ爲ス働ハ零ナルニ因リ上述ノ定理ノ特別ノ場合トシテ S_1 ニ就テ內働ヲ微分シタル第一次微分係數ハ零ナルベキナリ.

$$\therefore\quad \frac{dK}{dS_1}=0=\frac{S_1.l}{A_1E}-\frac{(P-S_1)l}{A_2E},$$

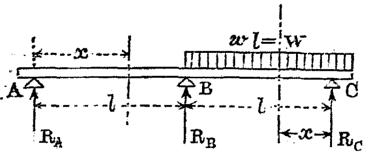
$$S_1=\frac{A_1}{A_1+A_2}.P \qquad \cdots\cdots(b)$$

斯クシテ得タル S_1 ノ値ハ內働ヲ最小又ハ最大ニナスベキモノナリ. 而シテ第二次微分係數 $\frac{d^2K}{dS_1^2}$ ハ正ナルユヱ (b) 式ガ與フル S_1 ノ値ハ內働ヲ最小ニナスモノナリ(上卷豫備數學參照).

上敍ノ論議ヨリ推定スルニ**彈體ニ於ケル內働ハ外力ト平衡ヲ保ツニ必要ナル丈ノ最小ノモノナリ.** 之ヲ**最小働ノ原理**ト謂フ.

例題 1. 第92圖ノ如キ均等横斷面ノ連續桁ニ於テ反力 R_A, R_B 及 R_c ヲ求ム.

第92圖



靜力學ノ平衡條件ニヨリ

$$R_A+R_B+R_c=W,$$

$$2R_A\,l+R_B\,l=\frac{1}{2}W.l.$$

最小働ノ原理ニヨリ彎曲應力ニ因ル內働ハ最小ナルベキナリ. 而シテ支間 AB ニ於テハ $M_x=R_A.x$, 支間 BC ニ於テハ $M_x=R_c.x-\frac{1}{2}w\,x^2$ ナルガユヱニ水平彎曲應力ニ因ル全內働ハ (78) 式ヨリ

$$K=\int_0^l\frac{(R_A.x)^2}{2EI}.dx+\int_0^l\frac{(R_c.x-\frac{1}{2}w.x^2)^2}{2EI}.dx$$

$$=\frac{R_A^2 l^3}{6EI}+\frac{1}{2EI}\left(\frac{R_c^2.l^3}{3}-\frac{R_c.w.l^4}{4}+\frac{w^2.l^5}{20}\right)$$

$$=\frac{l^3}{120EI}(20R_A^2+20R_c^2-15W.R_c+3W^2).$$

此式中ノ R_c =

$$W-R_A-R_B=\left[W-R_A-\left(\frac{1}{2}W-2R_A\right)\right]=\frac{W}{2}+R_A$$

ヲ代入スレバ

$$K=\frac{l^3}{120EI}\left(40R_A^2+5R_A.W+\frac{W^2}{2}\right).$$

K ヲ最小ニナスベキ R_A ノ値ハ

$$\frac{dK}{dR_A}=\frac{l^3}{120EI}(80R_A+5W)=0,\quad R_A=-\frac{1}{16}W.$$

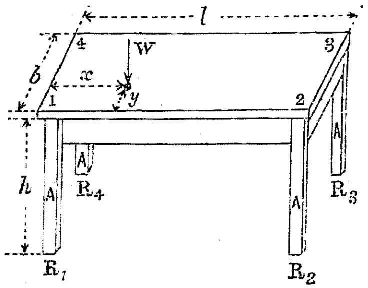
從テ

$$R_B=\frac{1}{2}W+2\times\frac{1}{16}W=+\frac{10}{16}W.$$

$$R_c=\frac{W}{2}-\frac{1}{16}W=+\frac{7}{16}W.$$

例題 2. 第93圖ノ如ク四脚ノ矩形卓子ガ荷重 W ヲ受タルトキ脚ノ高サ等シク且横斷面均等ナラバ脚ニ於ケル反力 R_1, R_2, R_3 及 R_4 ハ幾何ナルカ.

第 93 圖



靜力學ノ平衡條件ニヨリ

$$R_1+R_2+R_3+R_4=W.$$

1—2 線ヲ據軸トシテ力率ヲ取レバ

$$-R_3 b-R_4 b+W y=0.$$

1—4 線ヲ據軸トシテ力率ヲ取レバ

$$-R_3 l-R_2 l+W.x=0.$$

此等ノ條件式ヨリ

$$R_1=W-W.\frac{x}{l}-R_4,\quad R_2=W.\frac{x}{l}-W.\frac{y}{b}+R_4,\quad R_3=W.\frac{y}{b}-R_4$$

今卓子ノ上板及卓子ヲ支フル床ガ剛體ナリトスレバ四個ノ脚ヲ壓縮スルニ爲セル働ハ(75)式ヨリ

$$K=\frac{h}{2AE}\left[R_1^2+R_2^2+R_3^2+R_4^2\right]$$

$$=\frac{h}{2AE}\left[W^2\left(1-\frac{x}{l}\right)^2-2W\left(1-\frac{x}{l}\right)R_4+W^2\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{b}\right)^2\right.$$

$$\left.+2W\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{b}\right)R_4+W.^2\frac{y^2}{b^2}-2W.\frac{y}{b}.R_4+4R_4^2\right].$$

此式ニ於テ變量ハR_4ノミナルガ故ニKヲ最小ニナスベキR_4ノ値ハ $\frac{dK}{dR_4}=0$ ヲ解キテ之ヲ求ムルヲ得. 即チ

$$\frac{dK}{dR_4}=0=\frac{h}{2AE}\left[-2W\left(1-\frac{x}{l}\right)+2W\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{b}\right)-2W.\frac{y}{b}+8R_4\right],$$

$$\therefore\ R_4=\frac{W}{4}-\frac{W.x}{2l}+\frac{W.y}{2b}.$$

從テ

$$R_3=-\frac{W}{4}+\frac{W.x}{2l}+\frac{W.y}{2b},\quad R_2=\frac{W}{4}+\frac{W.x}{2l}-\frac{W.y}{2b},$$

$$R_1=\frac{3W}{4}-\frac{W.x}{2l}-\frac{W.y}{2b}.$$

若シWガ卓子ノ中央ニアレバ $x=\frac{l}{2}$, $y=\frac{b}{2}$ ナリ.

$$\therefore\ R_1=R_2=R_3=R_4=\frac{W}{4}$$

Wガl邊ノ中央ニアレバ $x=\frac{l}{2}$, $y=0$ ナルユエ

$$R_1=R_2=\frac{W}{2},\quad R_3=R_4=0.$$

Wヲ點 3 ニ置ケバ $x=l$, $y=b$ ナルユエ

$$R_1=-\frac{W}{4},\quad R_2=R_4=\frac{W}{4},\quad R_3=\frac{3W}{4}$$

トナリ一脚ノ反力ガ符號ヲ變ズ. 然ラバ卓子ハ三個ノ脚ニテ支ヘラレ一脚ハ床ヨリ離ルベシ.

第十章 彈性論

(Theory of Elasticity)

64. **總說** 凡テ固體ノ分子ハ多少相互間ニ移動スルモノニシテ之ニ對スル抵抗ハ移動ノ起ル狀態ト物體ノ性質トニ依テ異ナルモノナリ. 而シテ此抵抗ニ關スル物體ノ特性ガ所謂**彈性**ナリ.

物體中ノ一點ニ於ケル分子ノ變位ノ總和ガ其點ニ於ケル**變形**ニシテ,一點ニ於テ物體ノ分子ガ變形ニ抵抗スル力ハ即チ其點ニ於ケル**應力**ナリ. 一ツノ物體ノ外面ニ外力ヲ加フレバ變形ヲ生ジ從テ應力ガ誘起セラル. 此應力ト變形トハ外力ガ加ヘラルヽ方法ニ依テ性質ヲ異ニスルモノナリ. 而シテ各應力ニハ夫々自己特有ノ變形ガ伴フ. 例ヘバ應剪力ニハ應剪變形,應張力ニハ應張變形,應壓力ニハ應壓變形ガ伴フガ如シ.

實驗ニ據ルニ變形ト應力トハ常ニ相應シテ連續的ニ且同方向ニ變ズルモノナルユエ應力ハ變形ノ連續函數ニテ表ハスヲ得. 即チ應力ハ變形ノ上昇羃ヨリ成レル一ツノ級數ニテ表ハスヲ得. 普通ノ場合ノ如ク變形ガ甚小ナルトキハ指數ガ 1

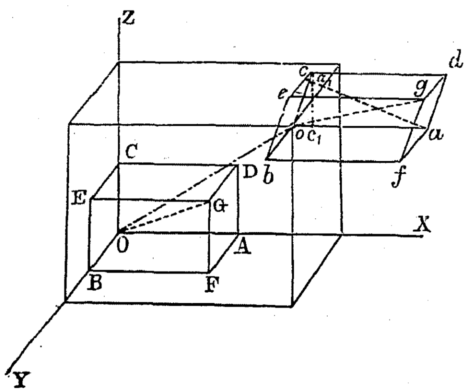
ヨリ大ナル級數ノ項ハ指數ノ1ナル第一項ニ比シテ頗小ナリ。夫故ニ此等ノ項ヲ省略スルモ實際上差支ナシ．然ラバ一ツノ材料ニ就テハ應力ト變形トノ比ハ常數ナルベキナリ．是レ所謂ふつく氏法則ナリ．

此法則ハ極メテ簡單ナル代數式ニテ之ヲ表ハスヲ得．即チSヲ單位應力，ϵヲ單位長サノ變形及Eヲ常數トスレバ$S=E.\epsilon$ナリ．若シSガ物體中ノ各點ニ於テ變ズルトキハ該法則ハ$\frac{dS}{d\epsilon}=E$ナル微分方程式ニテ表ハサルベキナリ．

物體内ニ想像シタル直線ハ其物體ガ外力ヲ受ケテ變形スレバ之ガ爲ニ長サ，位置又ハ兩者共ニ變ズベシ．而シテ此ノ如キ直線ノ變化ヲ總合シタルモノガ物體ノ形狀ノ全變化ナリ．

今物體内ノ二點A, Bヲ連結セル直線ノ變化ヲ$\Delta(AB)$トセバABガ細微ナルトキ即チ$\frac{\Delta(AB)}{AB}$ナル比ノ極限ハA點ニ於テABナル方向ノ變形ナリ．若シ$AB+\Delta(AB)$ガABヨリ大ナレバ變形ハ應張變形ニシテ$AB+\Delta(AB)$ガABヨリ小ナレバ變形ハ應壓變形ナリ．

第94圖



物體内ノ一點Oヲ通リテ正座標軸OX, OY, OZヲ想像シ且OA, OB, OC,ヲ三邊トセル微小ナル直並行六面體ヲ假定セヨ(第94圖) $oabc-gdef$ヲ變形後ノ微小六面體ノ形狀及大サトシOX, OY, OZノ方向ニ於ケル變形ヲ夫々$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$トスレバ

OA＝OX上ニ於ケルOGノ投射，

OB＝OY上ニ於ケルOGノ投射，

OC＝OZ上ニ於ケルOGノ投射，

$$\epsilon_x=\text{極限}\frac{(\text{OX 上ニ於ケル } og \text{ ノ投射})-OA}{OA}=\text{極限}\frac{\Delta(OA)}{OA},$$

$$\epsilon_y=\text{極限}\frac{(\text{OY 上ニ於ケル } og \text{ ノ投射})-OB}{OB}=\text{極限}\frac{\Delta(OB)}{OB},$$

$$\epsilon_z=\text{極限}\frac{(\text{OZ 上ニ於ケル } og \text{ ノ投射})-OC}{OC}=\text{極限}\frac{\Delta(OC)}{OC}.$$

第94圖ニアリテハϵ_x, ϵ_zハ應張變形ニシテϵ_yハ應壓變形ナリトス．併シナガラ$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ハ微小並行六面體ノ變形ヲ充分ニ表ハスモノニアラズ．何者CEGD面トOABF面トノ變形後ノ比較位置ハ$cegd$及$oabf$ニシテCEGD面ハOABF面ニ對シテoc_1ナル距離丈摺動セリ．而シテ此等二面間ノ距離ハOCニシテ二面ノ中央ニ位スル面ハ$\frac{oc_1}{2}$丈摺動ス．即チ摺動ノ量ハO點ヨリノ距離ニ正比例スルコト明カナリ．依テOXナル方向ニ於テXOY面ニ並行ナル面ノ應剪變形ハ$\frac{oc_1}{OC}$ナル比ニテ表ハスヲ得．然ルニ

$$\frac{oc_1}{OC}\doteqdot\frac{oc_1}{cc_1}=\tan oc c_1$$

ナルニヨリ應剪變形ハ全變形ヲ二面間ノ距離ニテ除シタル商又ハ$\angle aoc$ト直角トノ差角即チ$\angle occ_1$ノ正切ニテ表ハスヲ得．

今γ_{zx}＝OZニ垂直ナル平面ニ於テOXノ方向ノ應剪變形，

γ_{zy}＝OZニ垂直ナル平面ニ於テOYノ方向ノ應剪變形，

γ_{yx}＝OYニ垂直ナル平面ニ於テOXノ方向ノ應剪變形，

γ_{yz}＝OYニ垂直ナル平面ニ於テOZノ方向ノ應剪變形，

γ_{xz}＝OXニ垂直ナル平面ニ於テOZノ方向ノ應剪變形，

γ_{xy}＝OXニ垂直ナル平面ニ於テOYノ方向ノ應剪變形，

$$\angle boc=\frac{\pi}{2}-\phi,\quad \angle aoc=\frac{\pi}{2}-\psi,\quad \angle aob=\frac{\pi}{2}-\chi$$

トスレバ

$$\gamma_{zx}=\frac{oc_1}{cc_1}=\tan\psi,\quad \gamma_{zy}=\tan\phi,\quad \gamma_{yx}=\tan\chi,\quad \gamma_{yz}=\tan\phi,\quad \gamma_{xz}=\tan\psi,\quad \gamma_{xy}=\tan\chi.$$

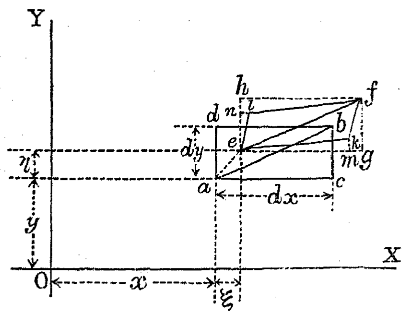
$$\therefore\quad \gamma_{zx}=\gamma_{xz},\quad \gamma_{zy}=\gamma_{yz},\quad \gamma_{yx}=\gamma_{xy}.$$

是ニ由テ見レバ物體内ノ一點ニ於ケル變形ノ狀態ヲ充分ニ

定ムルニハ $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ナル三ツノ正變形 (Normal Strains) ト $\gamma_{zx}=\gamma_{xz}$, $\gamma_{zy}=\gamma_{yz}$, $\gamma_{yx}=\gamma_{xy}$ ナル三ツノ應剪變形トヲ知レバ可ナリ.

65. 扭歪ノ項ニテ表ハセル變形 (Strains in Terms of Distortions) 今說明ヲ簡明ニナス爲Z軸ニ垂直ナル平面卽チZ面ニ並行ナル變形ノミヲ考フルモノトス. 第95圖ノ如ク細微ナル矩形 $abcd$ ヲ想像シ一隅 a ノ座標ヲ (x, y), 他隅 b ノ座標ヲ $(x+dx, y+dy)$ トス. 之ガ外力ヲ受ケテ a 點ハ e 點ニ, b 點ハ f 點迄移動シ從テ矩形 $abcd$ ハ變形 $efkl$ トナリ (x, y) ハ $(x+\xi, y+\eta)$ ニ, $(x+dx, y+dy)$ ハ $(x+\xi+dx+d\xi, y+\eta+dy+d\eta)$ ニナリタリトセバ前節ノ所論ニヨリ

第95圖



$$\epsilon_x=\frac{d\xi}{dx}, \quad \epsilon_y=\frac{d\eta}{dy}$$

又
$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\tan(90^\circ-kel)=\tan(kem+len)$$
$$\fallingdotseq \tan kem+\tan len=\frac{km}{em}+\frac{ln}{en}\fallingdotseq\frac{d\eta}{dx}+\frac{d\xi}{dy}.$$

次ニ細微ナル直並行六面體ヲ取リ其一隅ノ座標ヲ (x, y, z), 他隅ノ座標ヲ $(x+dx, y+dy, z+dz)$ トシ之ガ外力ヲ受ケテ (x, y, z) ハ $(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$ ニ, $(x+dx, y+dy, z+dz)$ ハ $(x+\xi+dx+d\xi, y+\eta+dy+d\eta, z+\zeta+dz+d\zeta)$ ニナリタリトセバ上叙ノ所論ニヨリ

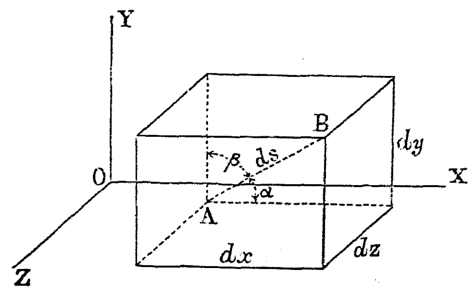
$$\epsilon_x=\frac{d\xi}{dx}, \quad \epsilon_y=\frac{d\eta}{dy}, \quad \epsilon_z=\frac{d\zeta}{dz}, \quad \gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}$$

$$\gamma_{xz}=\gamma_{zx}=\frac{d\xi}{dz}+\frac{d\zeta}{dx}, \quad \gamma_{yz}=\gamma_{zy}=\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}.$$

66. 任意ノ方向ニ於ケル變形 玆ニ $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ナル變形ガ與ヘラルヽトキ OX, OY, OZ ナル軸ト夫々 α, β, γ ナル角ヲナ

セル方向ノ變形ヲ求メントス. 第96圖ノ如ク細微ナル直並行六面體ヲ想像シ一隅 $A(x, y, z)$ ト他偶 $B(x+dx, y+dy, z+dz)$ トヲ連結スル對角線 AB ヲ求ムル方向トシ此長サヲ ds トスレバ立體幾何學ニヨリ

第96圖



$$\overline{ds}^2=\overline{dx}^2+\overline{dy}^2+\overline{dz}^2 \quad \cdots\cdots(a)$$

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

求ムル方向ノ變形ヲ ϵ トスレバ變形後ノ對角線ノ長サハ $ds(1+\epsilon)$ ナリ. 而シテ扭歪ハ小ナルユヱ變形後ニ於テモ亦(a)式ト同樣ノ關係ガ成立ツト見做スヲ得ベシ. 然ラバ

$$\overline{ds}^2(1+\epsilon)^2=(dx+d\xi)^2+(dy+d\eta)^2+(dz+d\zeta)^2,$$

$$\overline{ds}^2+2\epsilon.\overline{ds}^2+\epsilon^2.\overline{ds}^2=\overline{dx}^2+\overline{dy}^2+\overline{dz}^2+2(dx.d\xi+dy.d\eta$$
$$+dz.d\zeta)+\overline{d\xi}^2+\overline{d\eta}^2+\overline{d\zeta}^2 \quad \cdots\cdots(b)$$

(b)式ヨリ(a)式ヲ引ケバ

$$2\epsilon.\overline{ds}^2+\epsilon^2.\overline{ds}^2=2(dx.d\xi+dy.d\eta+dz.d\zeta)+\overline{d\xi}^2+\overline{d\eta}^2+\overline{d\zeta}^2.$$

$\epsilon^2.\overline{ds}^2$, $\overline{d\xi}^2$, $\overline{d\zeta}^2$, $\overline{d\eta}^2$ ハ他ノ項ニ比シテ甚小ナルユヱ此等ノ項ヲ省略スレバ

$$2\epsilon.\overline{ds}^2=2(dx.d\xi+dy.d\eta+dz.d\zeta).$$

$$\therefore \quad \epsilon\, ds=\frac{dx}{ds}.d\xi+\frac{dy}{ds}.d\eta+\frac{dz}{ds}.d\zeta=d\xi.\cos\alpha+d\eta.\cos\beta+d\zeta.\cos\gamma \quad \cdots\cdots(c)$$

ξ, η, ζ ハ x, y, z ノ函數ニシテ x ガ dx, y ガ dy, z ガ dz 丈變化スルトキ ξ ノ變化 $d\xi$ ハ偏微分係數 (Partial Differential Coefficients) $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \frac{d\xi}{dz}$ ノ各々ニ夫々 dx, dy, dz ヲ乘ジタルモノヽ和ニ等シ. 他ハ之ニ準ズ. 卽チ

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= \frac{d\xi}{dx}.dx+\frac{d\xi}{dy}.dy+\frac{d\xi}{dz}.dz,\\ d\eta &= \frac{d\eta}{dx}.dx+\frac{d\eta}{dy}.dy+\frac{d\eta}{dz}.dz,\\ d\zeta &= \frac{d\zeta}{dx}.dx+\frac{d\zeta}{dy}.dy+\frac{d\zeta}{dz}.dz. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

此値ヲ(c)式ニ代入スレバ

$$\epsilon=\cos\alpha\left[\frac{d\xi}{dx}.\cos\alpha+\frac{d\xi}{dy}.\cos\beta+\frac{d\xi}{dz}.\cos\gamma\right]+\cos\beta\left[\frac{d\eta}{dx}.\cos\alpha+\frac{d\eta}{dy}.\cos\beta+\frac{d\eta}{dz}.\cos\gamma\right]+\cos\gamma\left[\frac{d\zeta}{dx}.\cos\alpha+\frac{d\zeta}{dy}.\cos\beta+\frac{d\zeta}{dz}.\cos\gamma\right].$$

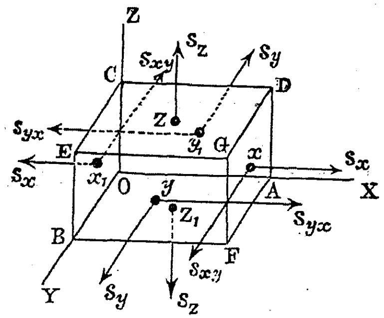
$$\therefore\quad \epsilon=\frac{d\xi}{dx}.\cos^2\alpha+\frac{d\eta}{dy}.\cos^2\beta+\frac{d\zeta}{dz}.\cos^2\gamma+\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)\cos\beta.\cos\gamma+\left(\frac{d\xi}{dz}+\frac{d\zeta}{dx}\right)\cos\alpha.\cos\gamma+\left(\frac{d\eta}{dx}+\frac{d\xi}{dy}\right)\cos\alpha.\cos\beta\cdots\cdots(83)$$

又ハ

$$\epsilon=\epsilon_x.\cos^2\alpha+\epsilon_y.\cos^2\beta+\epsilon_z.\cos^2\gamma+\gamma_{yz}.\cos\beta.\cos\gamma+\gamma_{xz}.\cos\alpha.\cos\gamma+\gamma_{xy}.\cos\alpha.\cos\beta\cdots\cdots(83_a)$$

67. 應力 凡テ外力ヲ受ケタル物體内ノ一點ヲ含ミテ一ツノ斷面ヲ考フレバ其點ニ於テ此斷面ニ作用スル應力ノ大サト方向トヲ知ルヲ得. 假令物體ニ作用スル應力ガ複雜ナリトモ單純ナル應力ノ群ニ分ツヲ得ベク從テ物體内ノ一點ニ於ケル應力ノ狀態ヲ知ルコト難カラズ.

第97圖



第97圖ノ如ク物體内ノ一點Oヲ原點トシテ三ツノ正座標軸ヲ假定シ且細微ナル直並行六面體ヲ想像スルニ此一ツノ面及之ト相對向セル面ニ作用スル應力ハ同ジト見做スヲ得. 今各面ニ作

用スル應力ヲ夫々軸ニ並行ナル分力ニ分解スレバ次ノ如シ.

S_x=X面ニ作用スル單位正應力 (Normal Unit-Stress),

S_y=Y面ニ作用スル單位正應力,

S_z=Z面ニ作用スル單位正應力,

S_{xy}=X面ニ於テOYノ方向ノ單位應剪力,

S_{xz}=X面ニ於テOZノ方向ノ單位應剪力,

S_{yx}=Y面ニ於テOXノ方向ノ單位應剪力,

S_{yz}=Y面ニ於テOZノ方向ノ單位應剪力,

S_{zx}=Z面ニ於テOXノ方向ノ單位應剪力,

S_{zy}=Z面ニ於テOYノ方向ノ單位應剪力.

第97圖ニ於テハ S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yx} ナル五ツノ應力ノミ記シ他ハ之ヲ省略セリ.

AFGD面ニ作用スル全正應力トOBEC面ニ作用スル全正應力トハ他ニ關係ナク相平均ス. 他ノ正應力ニ於テモ亦然リトス. 然ラバOZ軸ノ周リニ並行六面體ヲ回轉セントスルハAFGD面トOBEC面トニ働ク並行力ナリ. 而シテ此並行力ノ大サハ等シクシテ方向相反ス此偶力率ヲM_1トスレバ

$$M_1=S_{xy}\times(\text{面積 AFGD})\times xx_1$$

ナリ. 又FBEG面トCOAD面トニ作用スル並行力ハ等大ニシテ方向相反ス此偶力率ヲM_2トスレバ

$$M_2=S_{yx}\times(\text{面積 FBEG})\times yy_1$$

ナリ. 然ルニ

$$M_1=S_{xy}(FA)(zz_1)(xx_1),\quad M_2=S_{yx}(FB)(zz_1)(yy_1).$$

並行六面體ガ平衡ニアルナラバ

$$M_1=M_2,\quad\therefore\quad S_{xy}(FA)(xx_1)=S_{yx}(FB)(yy_1).$$

此ニ於テ $FB=xx_1$, $FA=yy_1$ ナルニヨ

$$S_{xy}=S_{yx}$$

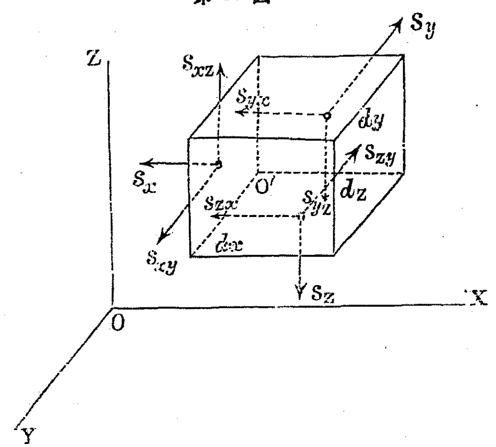
ヲ得. 同樣ニシテ

$$S_{xz}=S_{zx},\quad S_{yz}=S_{zy}$$

是ニ由テ見レバ物體內ノ一點ニ作用スル應力ノ狀態ヲ充分ニ定ムルニハ S_x, S_y, S_z ナル三ツノ正應力ト S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} ナル三ツノ應剪力トヲ知レバ可ナリ.

68. 物體內部ノ平衡ニ關スル一般方程式 玆ニ dx, dy, dz ヲ三邊トセル細微ナル直並行六面體ヲ想像シ之ニ作用スル力ニ對シテ平衡條件ヲ適用シ以テ一般方程式ヲ求メントス. 第98圖ニ記セル記號ハ前節ニ於ケルト同一ナリ.

第 98 圖



原點ニ最モ近キ面ニ働ク應力ヲ負トシ他ノ面ニ働ク應力ヲ正トスレバX軸ノ方向ノ應力ハ次ノ如シ.

原點Oニ最モ近キX面ニ於テハ……$-S_x.dy.dz,$

原點Oヨリ最モ遠ザカレルX面ニ於テハ……$\left(S_x+\frac{dS_x}{dx}.dx\right)dy.dz,$

原點Oニ最モ近キZ面ニ於テハ……$-S_{zx}\,dy\,dx,$

原點Oヨリ最モ遠ザカレルZ面ニ於テハ……$\left(S_{zx}+\frac{dS_{zx}}{dz}.dz\right)dy.dx,$

原點Oニ最モ近キY面ニ於テハ……$-S_{yx}.dz.dx,$

原點Oヨリ最モ遠ザカレルY面ニ於テハ……$\left(S_{yx}+\frac{dS_{yx}}{dy}.dy\right)dz.dx.$

並行六面體ガ平衡ニアルナラバ

$$(S_x+dS_x-S_x)dy.dz+(S_{yx}+dS_{yx}-S_{yx})dz.dx+(S_{zx}+dS_{zx}-S_{zx})dy.dx=0.$$

此方程式ノ各項ヲ $dx.dy.dz$ ニテ除セバ

$$\frac{dS_x}{dx}+\frac{dS_{yx}}{dy}+\frac{dS_{zx}}{dz}=0 \quad\cdots\cdots(84)$$

同樣ニシテY及Z軸ノ方向ニ對シテ次ノ式ヲ得.

$$(S_y+dS_y-S_y)dx.dz+(S_{xy}+dS_{xy}-S_{xy})dy.dz+(S_{zy}+dS_{zy}-S_{xy})dy.dx=0,$$

$$\frac{dS_{xy}}{dx}+\frac{dS_y}{dy}+\frac{dS_{zy}}{dz}=0 \quad\cdots\cdots(84_a)$$

$$(S_z+dS_z-S_z)dx.dy+(S_{yz}+dS_{yz}-S_{yz})dx.dz+(S_{xz}+dS_{xz}-S_{xz})dz.dy=0,$$

$$\frac{dS_{xz}}{dx}+\frac{dS_{yz}}{dy}+\frac{dS_z}{dz}=0 \quad\cdots\cdots(84_b)$$

69. 應力ト變形トノ關係 材質齊等ニシテ且眞直ナル棒狀體ノ軸ニ沿ヒテ外力ヲ加フレバ

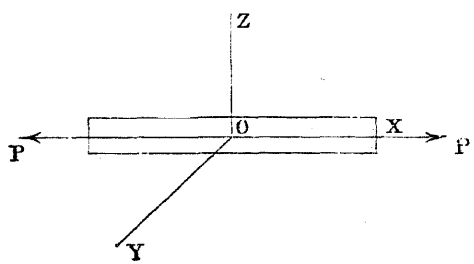
$$縱變形\ \epsilon=\frac{S}{E}$$

ニシテ外力ノ働線ニ直角ナル方向ノ變形ハ

$$\epsilon_1=-\frac{\epsilon}{m}, \quad 又ハ \quad m=-\frac{\epsilon}{\epsilon_1}$$

ナリ. 此ニ於テ m ハ實驗的常數ニシテ是レ所謂ぽあそんノ比ナリ. 此式ノ負ハ ϵ ト ϵ_1 トハ反對ノモノナルコトヲ表ハス即チ ϵ ガ伸張ナルトキハ ϵ_1 ハ壓縮ナリトス.

第 99 圖



第99圖ノ如ク棒狀體中ノ一點Oニ於テ三ツノ正座標軸ヲ假定シOXヲ張力ノ方向トスレバ

$$S_x=\frac{P}{A}, \quad S_y=S_z=S_{xy}=S_{xz}=S_{yz}=0.$$

但Aハ棒狀體ノ斷面積ナリトス.

$$\epsilon_x=\frac{S_x}{E}, \quad \epsilon_y=\epsilon_z=-\frac{1}{m}\cdot\frac{S_x}{E}=-\frac{\epsilon_x}{m}, \quad \gamma_{xy}=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0,$$

$$\frac{S_{xy}}{\gamma_{xy}}=\frac{S_{xz}}{\gamma_{xz}}=\frac{S_{yz}}{\gamma_{yz}}=G(歪係數).$$

一般ニ二ツ又ハ二ツ以上ノ應力ガ物體ニ作用スルトキハ

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_x&=\frac{S_x}{E}-\frac{1}{m}\cdot\frac{S_y}{E}-\frac{1}{m}\cdot\frac{S_z}{E},\quad \gamma_{xy}=\frac{S_{xy}}{G},\\ \epsilon_y&=\frac{S_y}{E}-\frac{1}{m}\cdot\frac{S_x}{E}-\frac{1}{m}\cdot\frac{S_z}{E},\quad \gamma_{xz}=\frac{S_{xz}}{G},\\ \epsilon_z&=\frac{S_z}{E}-\frac{1}{m}\cdot\frac{S_x}{E}-\frac{1}{m}\cdot\frac{S_y}{E},\quad \gamma_{yz}=\frac{S_{yz}}{G}.\end{aligned}\right\}\dots\dots(85)$$

E, G, m ノ値ガ既知ナレバ此式ニヨリテ變形ヲ應力ノ項ニテ知ルヲ得. 又(85)式ヨリ

$$E.\epsilon_x=S_x-\frac{S_y+S_z}{m}\dots\dots(a)$$

$$E.\epsilon_y=S_y-\frac{S_x+S_z}{m}\dots\dots(b)$$

$$E.\epsilon_z=S_z-\frac{S_x+S_y}{m}\dots\dots(c)$$

(a)式ヨリ(b)式ヲ引ケバ

$$E(\epsilon_x-\epsilon_y)=S_x\left(1+\frac{1}{m}\right)-S_y\left(1+\frac{1}{m}\right)=(S_x-S_y)\left(1+\frac{1}{m}\right)\dots\dots(a')$$

(c)式ヲ書換フレバ

$$\frac{E.\epsilon_z}{m}=\frac{S_z}{m}-\frac{S_x}{m^2}-\frac{S_y}{m^2}\dots\dots(c')$$

(b)及(c′)兩式ヨリ式ヨリ

$$E\left(\frac{\epsilon_z}{m}+\epsilon_y\right)=-\frac{S_x}{m^2}-\frac{S_y}{m^2}-\frac{S_x}{m}+S_y\dots\dots(b')$$

(a′)式ヨリ　$S_y=S_x-\dfrac{E.m(\epsilon_x-\epsilon_y)}{m+1}.$

此値ヲ(b′)ニ代入スレバ

$$E\left(\frac{\epsilon_z}{m}+\epsilon_y\right)=-\frac{S_x}{m^2}-\frac{S_x}{m}+S_x-\frac{E.m(\epsilon_x-\epsilon_y)}{m+1}-\frac{1}{m^2}\left[S_x-\frac{E.m(\epsilon_x-\epsilon_y)}{m+1}\right],$$

$$\frac{E}{m}(\epsilon_z+m.\epsilon_y)=S_x\left(1-\frac{2}{m^2}-\frac{1}{m}\right)-\frac{E.m(\epsilon_x-\epsilon_y)}{m+1}+\frac{E(\epsilon_x-\epsilon_y)}{m(m+1)},$$

$$S_x\left(\frac{m^2-2-m}{m^2}\right)=\frac{E(m+1)(\epsilon_z+m.\epsilon_y)}{m(m+1)}+\frac{m^2E(\epsilon_x-\epsilon_y)}{m(m+1)}-\frac{E(\epsilon_x-\epsilon_y)}{m(m+1)},$$

$$\frac{(m+1)(m-2)}{m}.S_x=E.\frac{(m+1)\epsilon_z+(m+1)\epsilon_y+(m^2-1)\epsilon_x}{m+1},$$

$$\frac{(m+1)(m-2)}{m}.S_x=E\Big[\epsilon_z+\epsilon_y+(m-1)\epsilon_x\Big]=E\Big[\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z+(m-2)\epsilon_x\Big],$$

$$\therefore\quad S_x=\frac{m}{m+1}.E\left[\epsilon_x+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z}{m-2}\right],$$

同様ニ

$$\left.\begin{aligned}S_y&=\frac{m}{m+1}.E\left[\epsilon_y+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z}{m-2}\right],\\ S_z&=\frac{m}{m+1}.E\left[\epsilon_z+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z}{m-2}\right],\\ S_{xy}=G.\gamma_{xy},\quad &S_{xz}=G.\gamma_{xz},\quad S_{yz}=G.\gamma_{yz}\end{aligned}\right\}\dots\dots(86)$$

第65節ヨリ

$$\left.\begin{aligned}S_{xy}&=G\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right),\quad S_{xz}=G\left(\frac{d\xi}{dz}+\frac{d\zeta}{dx}\right),\\ S_{yz}&=G\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right).\end{aligned}\right\}\dots\dots(86_a)$$

若シ應力ガ總テ一平面例ヘバZ面ニ並行ナレバ此面ニ垂直ナル分應力S_zハ零ナルユヱ(86)式ニ於テ

$$\epsilon_z+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z}{m-2}=0,\quad 即チ\quad \epsilon_z=-\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{m-1}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad S_x&=\frac{m}{m+1}.E\left[\epsilon_x+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{m-2}+\frac{1}{m-2}\cdot\frac{-(\epsilon_x+\epsilon_y)}{m-1}\right]\\ &=\frac{m}{m+1}.E\left[\epsilon_x+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{m-1}\right],\\ 又\quad S_y&=\frac{m}{m+1}.E\left[\epsilon_y+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{m-1}\right],\\ S_{xy}&=G.\gamma_{xy}.\end{aligned}\right\}\dots\dots(86_b)$$

鑄鐵,錬鐵及鋼ノ彈性係數Eハニ加ハル荷重ガ過大ナラザル以上ハ張力及壓力ニ對シテ殆ド同値ナリ.

うえあとはいむ氏(Wertheim)ノ實驗ニ據ルニ眞鍮ニ對シテハ$m=2.94$,錬鐵ニ對シテハ$m=3.64$ナリ. 現時普通ニ用ヰラルヽmノ値ハ3又ハ4ナリトス.

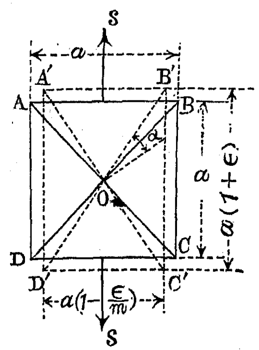
Gノハ張力ニ對スル彈性係數ノ約$\frac{2}{5}$ナリ. 彈性論ニ依レバ

$$G=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{m+1}.E$$

ヲ得. 之ガ證明次ノ如シ.

第100圖ノ如ク細微ナル正方形ヲ想像シ一邊ノ長サヲaトシ

第 100 圖



AB 面ニ作用スル單純ナル單位正應力ヲSトスレバ第一章第 8 節ニヨリ互ニ直角ナル二面BD, ACニ作用スル單位應剪力S_sハ等シクシテ$\frac{1}{2}$Sナリ. 又ADナル方向ノ變形ハ$\epsilon=\frac{S}{E}$ニシテABナル方向ノ變形ハ$-\frac{\epsilon}{m}$ナリ. 從テ正方形ハ矩形トナル. 對角線ノ交角ト90°トノ差ヲαトシ二面A′C′, B′D′ニ於ケル應剪變形ヲγトスレバ$\gamma=\tan\alpha$ナリ.

$$\angle A'D'B'+\angle D'A'C'=\angle D'OC'=\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

$$\angle A'D'B'=\angle D'A'C'.$$

$$\therefore\quad \angle A'D'B'=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}.$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{A'B'}{A'D'}=\frac{1-\frac{\epsilon}{m}}{1+\epsilon}.$$

αハ小ナルニヨ

$$\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}\doteqdot 1-2\tan\frac{\alpha}{2},\qquad \frac{1-\frac{\epsilon}{m}}{1+\epsilon}\doteqdot\left(1-\epsilon-\frac{\epsilon}{m}\right).$$

然ラバ

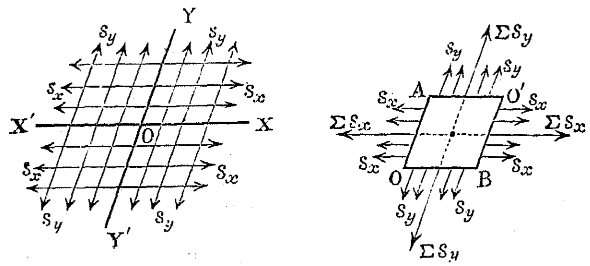
$$1-2\tan\frac{\alpha}{2}=1-\left(1+\frac{1}{m}\right)\epsilon,\qquad 2\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{m+1}{m}.\epsilon.$$

$$\gamma=\tan\alpha\doteqdot 2\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{m+1}{m}.\epsilon$$

$$\therefore\quad \frac{S_s}{\gamma}=\frac{\frac{1}{2}.S}{\frac{m+1}{m}.\epsilon}=\frac{1}{2}.\frac{m}{m+1}\left(\frac{S}{\epsilon}\right),\quad 即チ\quad G=\frac{1}{2}.\frac{m}{m+1}.E$$

70. 共軛應力 (Conjugate Stresses)　第101圖ニ於テOヲ變形物體內ノ一點トシ此點ヲ含ム面XOX′ニ作用スル應力ヲS_yトシO點ヲ通シテS_yノ方向ニ並行ニ第二ノ面YOY′ヲ引クトキハ此面ニ

第 101 圖



働ク應力S_xハ面XOX′ニ並行ナルベシ. 其理由ハ次ノ如シ.

今O點ニ於テ各面ニ並行ナル面ニテ界サレタル細微並行六面體OAO′B (第101圖ノOAO′Bハ並行六面體ノ斷面ヲ表ハスモノトス)ヲ想像シテ之ガ平衡ヲ考フルニAO′及OBナル面ニ作用スル應力ハ平衡スルニヨリAO及O′Bナル面ニ作用スル應力ハ他ノ面ニ作用スル應力ニ全ク關係ナク平衡スベキナリ. 之ガ爲ニハ面AOニ作用スル應力ノ合成ト面O′Bニ作用スル應力ノ合成トハ等大ニシテ方向相反シ且同一直線上ニアルヲ要ス. 即チ應力S_xノ方向ハXOX′ニ並行ナルベキナリ.

如斯ニ一雙ノ應力アリテ各應力ガ他ノ應力ノ方向ニ並行ナル面ニ作用スルトキハ此等ノ應力ヲ**一雙ノ共軛應力** (A Pair of Conjugate Stresses) ト謂フ. 又夫等ノ應力ガ作用スル面ヲ**共軛應力面** (Planes of Conjugate Stresses) ト謂フ.

共軛應力ハ互ニ無關係ニ平衡ヲ保ツモノナレバ別々ニ考フルヲ得ベク, 此等ノ應力ハ同種類或ハ異種類即チ一雙ノ張力, 一雙ノ壓力又ハ張力ト壓力タルコトアルベシ.

一ツノ物體ニ三ツノ共軛應力ガ同時ニ作用スル場合ニハ各應力ノ方向ハ他ノ二ツノ應力ガ働ク面ノ交線ニ並行ナリ. 例ヘバ第101圖ニ於テ一雙ノ共軛應力面YOY′及XOX′ト或傾斜ヲナセル面ヲ働面トシYOY′面トXOX′面トノ交線ニ並行ナル應力ハ他ノ二ツノ應力ノ各ト共軛ナリ. 此場合ニ於テモ亦各面ニ作用

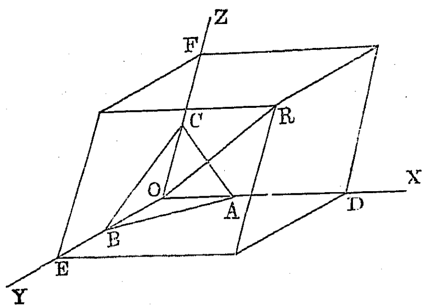
スル應力ノ大サ及其種類ハ互ニ關係ナキモノナリ.

71. 任意ノ方向ニ於ケル應力 (第一)三ツノ共軛應力ガ與ヘラレテ任意ノ第四ノ平面ニ働ク應力ヲ求ムルコト.

三ツノ共軛應力面ヲ XOY, YOZ, ZOX；應力ノ方向ヲ OX, OY, OZ；單位應力ヲ夫々 S_x, S_y, S_z トス(第102圖)

第四ノ平面ニ並行ナル一ツノ面ト共軛應力面トニテ形成スル細微四面體 OABC ノ平衡ヲ考フルニ四ツノ三角面ニ作用スル應力ハ平衡スルニヨリ ABC 面ニ作用スル全應力ハ OBC, OCA, OAB ナル三面ニ作用スル全應力ノ合力ト等大ニシテ方向相反スベキナリ.

第102圖



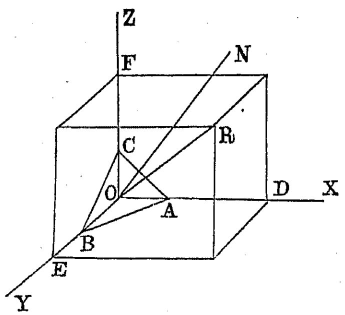
OD＝面 OBC ニ働ク全應力＝S_x(面積 OBC),

OE＝面 OCA ニ働ク全應力＝S_y(面積 OCA),

OF＝面 OAB ニ働ク全應力＝S_z(面積 OAB),

此等ノ値ヲ夫々 OX, OY, OZ 軸ニ沿ヒテ取リテ並行六面體 DEFR ヲ作レバ對角線 OR ハ第四ノ面 ABC ニ働ク全應力ノ大サト方向トヲ表ハシ OR ヲ面積 ABC ニテ除シタル商ハ其單位應力ナリ.

第103圖



(第二)三ツノ正座標面ニ作用スル應力ガ與ヘラレテ任意ノ第四平面ニ作用スル應力ヲ求ムルト.

第103圖ニ於テ三ツノ應力面 XOY, YOZ, ZOX 及單位應力 S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} ガ與ヘラレテ第四ノ

平面ニ作用スル單位應力及其力向ヲ定メントス. 今第四平面ニ引キタル垂直線 ON ガ OX, OY, OZ 軸トナス角ヲ夫々 α, β, γ トスレバ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

ナリ. O 點ニ極接近シテ ON ニ垂直ニ ABC 面ヲ引ケバ之ガ第四面トナルベキナリ. 而シテ

面積 BOC＝(面積 ABC)$\cos\alpha$, 面積 COA＝(面積 ABC)$\cos\beta$,

面積 AOB＝(面積 ABC)$\cos\gamma$.

四面體 OABC ノ平衡ヲ考フルニ ABC 面ニ作用スル全應力ハ三ツノ面 BOC, COA, AOB ニ作用スル全應力ノ合力ト等大ニシテ方向相反スベキナリ. 第103圖ニ於テ

$$\mathrm{OD}=S_x(\text{面積 BOC})+S_{yx}(\text{面積 COA})+S_{zx}(\text{面積 AOB})$$
$$=(\text{面積 ABC})(S_x.\cos\alpha+S_{xy}.\cos\beta+S_{xz}.\cos\gamma),$$

$$\mathrm{OE}=S_y(\text{面積 COA})+S_{xy}(\text{面積 BOC})+S_{zy}(\text{面積 AOB})$$
$$=(\text{面積 ABC})(S_y.\cos\beta+S_{xy}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\gamma),$$

$$\mathrm{OF}=S_z(\text{面積 AOB})+S_{xz}(\text{面積 BOC})+S_{yz}(\text{面積 COA})$$
$$=(\text{面積 ABC})(S_z.\cos\gamma+S_{xz}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\beta).$$

合力 $\mathrm{OR}=\sqrt{\overline{\mathrm{OD}}^2+\overline{\mathrm{OE}}^2+\overline{\mathrm{OF}}^2}.$

合力單位應力 $S=\dfrac{\mathrm{OR}}{\text{面積 ABC}}=\dfrac{\sqrt{\overline{\mathrm{OD}}^2+\overline{\mathrm{OE}}^2+\overline{\mathrm{OF}}^2}}{\text{面積 ABC}}$

$$=\sqrt{[(S_x.\cos\alpha+S_{xy}.\cos\beta+S_{xz}.\cos\gamma)^2+(S_y.\cos\beta+S_{xy}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\gamma)^2+(S_z.\cos\gamma+S_{xz}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\beta)^2]}$$

$$=\sqrt{[S_x^2.\cos^2\alpha+S_y^2.\cos^2\beta+S_z^2.\cos^2\gamma+S^2_{xy}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+S^2_{xz}(\cos^2\alpha+\cos^2\gamma)+S^2_{yz}(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2S_x(S_{xy}.\cos\beta+S_{xz}.\cos\gamma)\cos\alpha+2S_y(S_{xy}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\gamma)\cos\beta+2S_z(S_{xz}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\beta)\cos\gamma+2S_{xy}.S_{xz}.\cos\beta.\cos\gamma+2S_{xy}.S_{yz}.\cos\alpha.\cos\gamma+2S_{xz}.S_{yz}.\cos\alpha.\cos\beta]}\quad\cdots\cdots(87)$$

S ノ方向ハ OR ガ X, Y, Z 軸トナス角 α_r, β_r, γ_r ニ依テ定マル. 而シテ

$$\cos\alpha_r=\frac{OD}{OR},\qquad \cos\beta_r=\frac{OE}{OR},\qquad \cos\gamma_r=\frac{OF}{OR}$$

OX, OY, OZ ナル方向ノSノ分應力ヲ夫々 S_{nx}, S_{ny}, S_{nz} トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_r&=\frac{OD}{OR}=\frac{S_{nx}(\text{面積ABO})}{S(\text{面積ABO})}=\frac{S_{nx}}{S},\\ \cos\beta_r&=\frac{OE}{OR}=\frac{S_{ny}(\text{面積ABO})}{S(\text{面積ABO})}=\frac{S_{ny}}{S},\\ \cos\gamma_r&=\frac{OF}{OR}=\frac{S_{nz}(\text{面積ABO})}{S(\text{面積ABO})}=\frac{S_{nz}}{S}\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(87_a)$$

但

$$\left.\begin{aligned}S_{nx}&=S_x.\cos\alpha+S_{xy}.\cos\beta+S_{xz}.\cos\gamma,\\ S_{ny}&=S_y.\cos\beta+S_{xy}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\gamma,\\ S_{nz}&=S_z.\cos\gamma+S_{xz}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\beta.\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(87_b)$$

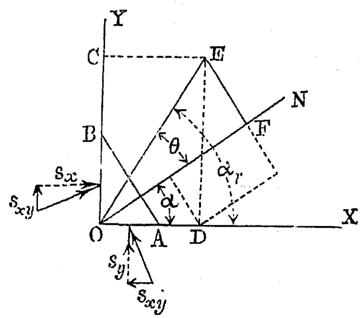
72. 一ツノ平面ニ並行ナル應力　之ハ前節ノ特別ノ場合ナリ. 今應力ガ總テZ面ニ並行ナリトセバOZナル方向ノ應力ハ零ナルユエ

$$S_z=S_{xz}=S_{yz}=0,\quad \beta=90°-\alpha.$$

(87)式ヨリ

$$S=\sqrt{[S_x^2.\cos^2\alpha+S_y^2.\sin^2\alpha+S^2_{xy}+2(S_x+S_y)S_{xy}\cos\alpha.\sin\alpha]}\dots\dots\dots(88)$$

第101圖



之ハ又次ノ方法ニ依テ解クコトヲ得.

第101圖ノ如クX面ニ作用スル單位正應力ヲS_x, Y面ニ作用スル單位正應力ヲS_y, 單位應剪力ヲS_{xy}. 應力ヲ求メントスル面ノ垂直線ヲON, ∠XONヲαトス. ONニ垂直ニO點ニ極接近シテAB面ヲ引キ面ABOヲ底トシ單位高サヲ有スル三角柱ノ平衡ヲ考フルニ AO, LO ナル面ニ作用スル全應力ノ合力ハ面ABニ作用スル全應力ト等大ニシテ方向相反スベシ.

面積OB=(面積AB)cosα,　面積OA=(面積AB)sinα.

S_x(面積OB)=OB面ニ於テOXノ方向ニ働ク應力,

S_{xy}(面積OB)=OB面ニ於テOYノ方向ニ働ク應力,

S_y(面積OA)=OA面ニ於テOYノ方向ニ働ク應力,

S_{xy}(面積OA)=OA面ニ於テOXノ方向ニ働ク應力.

依テ第101圖ノ如クニ,

$$OD=S_x(\text{面積OB})+S_{xy}(\text{面積OA})=\text{面積AB}(S_x.\cos\alpha+S_{xy}.\sin\alpha),$$

$$OC=S_y(\text{面積OA})+S_{xy}(\text{面積OB})=\text{面積AB}(S_y.\sin\alpha+S_{xy}.\cos\alpha)$$

ヲ取リテ合成スレバOEハAB面ニ作用スル全應力ヲ與ヘ$\left(\frac{OE}{\text{面積AB}}\right)$ハ其單位應力ヲ與フベキナリ.

$$OE=\sqrt{\overline{OD}^2+\overline{OC}^2}=(\text{面積AB})\sqrt{[(S_x.\cos\alpha+S_{xy}.\sin\alpha)^2+(S_y.\sin\alpha+S_{xy}.\cos\alpha)^2]}$$

$$=(\text{面積AB})\sqrt{[S_x^2.\cos^2\alpha+S_y^2.\sin^2\alpha+2S_{xy}.\cos\alpha.\sin\alpha.(S_x+S_y)+S^2_{xy}]}.$$

單位應力 $S=\sqrt{[S^2_x.\cos^2\alpha+S^2_y.\sin^2\alpha+2S_{xy}(S_x+S_y)\cos\alpha.\sin\alpha+S^2_{xy}]}$.

∠XOEヲα_rトスレバ

$$\cos\alpha_r=\frac{OD}{OE},\qquad \sin\alpha_r=\frac{OC}{OE}.$$

應力SヲAB面ニ垂直ナル單位分應力S_nト之ニ並行ナル單位分應力S_tトニ分テバ

$$S_n=\frac{OF}{AB}=\frac{OD}{AB}.\cos\alpha+\frac{OC}{AB}.\sin\alpha$$

$$=S_x.\cos^2\alpha+S_y.\sin^2\alpha+2S_{xy}.\cos\alpha.\sin\alpha\dots\dots\dots(88_a)$$

$$S_t=\frac{EF}{AB}=\frac{OC}{AB}.\cos\alpha-\frac{OD}{AB}.\sin\alpha$$

$$=(S_y-S_x)\cos\alpha.\sin\alpha+S_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$=\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)\sin2\alpha+S_{xy}.\cos2\alpha\dots\dots\dots(88_b)$$

AB面ニ作用スル應力ノ傾斜角∠NOEヲθトスレバ

$$\tan\theta=\frac{EF}{OF}=\frac{S_t}{S_n},\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{S_t}{S_n}\dots\dots\dots(88_c)$$

73. 主要應力(Principal Stresses)　一般ニ一ツノ面ニ作用スル應力ノ方向ガ其面ニ引キタル垂直線ト一致スル爲ニハ第71節

ヨリ

$$\cos\alpha_r=\frac{S_{nx}}{S}=\cos\alpha,\quad \cos\beta_r=\frac{S_{ny}}{S}=\cos\beta,\quad \cos\gamma_r=\frac{S_{nz}}{S}=\cos\gamma.$$

又ハ $S_{nx}=S.\cos\alpha,\quad S_{ny}=S.\cos\beta,\quad S_{nz}=S.\cos\gamma.$

(87_b) 式ニ此等ノ値ヲ代入スレバ

$$(S_x-S)\cos\alpha+S_{xy}.\cos\beta+S_{xz}.\cos\gamma=0\ldots\ldots(a)$$

$$S_{xy}.\cos\alpha+(S_y-S)\cos\beta+S_{yz}.\cos\gamma=0\ldots\ldots(b)$$

$$S_{xz}.\cos\alpha+S_{yz}\cos\beta+(S_z-S)\cos\gamma=0\ldots\ldots(c)$$

(b) 式ヨリ

$$\cos\beta=-\frac{S_{xy}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\gamma}{S_y-S}.$$

(c) 式ヨリ

$$\cos\gamma=-\frac{S_{xz}.\cos\alpha+S_{yz}.\cos\beta}{S_z-S}.$$

$$\therefore\quad \cos\beta=-\frac{S_{xy}.\cos\alpha}{S_y-S}+\frac{S_{yz}.S_{zx}.\cos\alpha+S^2_{yz}.\cos\beta}{(S_y-S)(S_z-S)}$$

即チ
$$\cos\beta=\frac{S_{yz}.S_{zx}-(S_z-S)S_{xy}}{(S_y-S)(S_z-S)-S^2_{yz}}.\cos\alpha\ldots\ldots(d)$$

同様ニシテ
$$\cos\gamma=\frac{S_{yz}.S_{xy}-(S_y-S)S_{zx}}{(S_z-S)(S_y-S)-S^2_{yz}}.\cos\alpha\ldots\ldots(e)$$

(d), (e) 兩式ノ値ヲ (a) 式ニ代入シテ各項ヲ $\cos\alpha$ ニテ除セバ

$$(S_x-S)(S_y-S)(S_z-S)-S^2_{yz}(S_x-S)+S_{xy}.S_{yz}.S_{zx}-(S_z-S)S^2_{xy}$$
$$+S_{zx}.S_{yz}.S_{xy}-(S_y-S)S^2_{zx}=0,$$

即チ
$$S^3-(S_x+S_y+S_z)S^2+(S_x.S_y+S_y.S_z+S_z\,S_x-S^2_{xy}-S^2_{yz}$$
$$-S^2_{zx})S-(2S_{xy}.S_{yz}.S_{zx}+S_x\,S_y.S_z-S^2_{yz}.S_x-S^2_{zx}.S_y$$
$$-S^2_{xy}\,S_z)=0\ldots\ldots(89)$$

是レSノ三次方程式ニシテ之ヲ解キテSノ三值ヲ得ベク其各ハ應力面ニ垂直ナルコトノ條件ヲ滿スモノナリ．然ラバ**變形物體內ニハ正應力ノミ作用スル三ツノ面アリテ三ツノ正應力ノ方向ハ共軛應力ノ性質ニ依リ互ニ直角ヲナスベシ**，此ノ如キ共

軛正應力ヲ**主要應力**ト謂ヒ，夫等ノ方向ヲ應力ノ**主要軸**(Principal Axes)ト謂フ．

今主要應力中ノ一ツノ單位應力ヲSトセバ之ガ X, Y, Z 軸トナス角ノ關係ハ次ノ如シ．

(d), (e) 二式ヨリ

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{S_{yz}.S_{zx}-(S_z-S)S_{xy}}{S_{yz}.S_{xy}-(S_y-S)S_{zx}}\ldots\ldots(f)$$

(a), (b) 二式ヨリ

$$\cos\alpha=\frac{S_{yz}\,S_{xy}-(S_y-S)S_{zx}}{(S_x-S)(S_y-S)-S^2_{xy}}.\cos\gamma,$$

$$\cos\beta=\frac{S_{xy}.S_{zx}-(S_x-S)S_{yz}}{(S_x-S)(S_y-S)-S^2_{xy}}.\cos\gamma,$$

$$\therefore\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{S_{yz}.S_{xy}-(S_y-S)S_{zx}}{S_{xy}.S_{zx}-(S_x-S)S_{yz}}\ldots\ldots(g)$$

又 (a), (c) 二式ヨリ

$$\cos\alpha=\frac{S_{yz}.S_{zx}-(S_z-S)S_{xy}}{(S_x-S)(S_z-S)-S_{zx}}.\cos\beta,$$

$$\cos\gamma=\frac{S_{xy}.S_{zx}-(S_x-S)S_{yz}}{(S_x-S)(S_z-S)-S^2_{zx}}.\cos\beta.$$

$$\therefore\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\frac{S_{yz}\,S_{zx}-(S_z-S)S_{xy}}{S_{xy}.S_{zx}-(S_x-S)S_{yz}}\ldots\ldots(h)$$

(f), (g), (h) 三式ヨリ

$$\cos\alpha[S_{xy}.S_{zx}-(S_x-S,S_{yz}]=\cos\beta[S_{xy}.S_{yz}-(S_y-S)S_{zx}]$$
$$=\cos\gamma[S_{yz}\,S_{zx}-(S_z-S)S_{xy}]\ldots\ldots(89_a)$$

74．**應力楕圓體**(Ellipsoid of Stresses)　茲ニ三ツノ主要應力ガ與ヘラレテ任意ノ方向ノ應力ヲ求メントス．

正座標軸 OX, OY, OZ ヲ應力ノ主要軸；求ムル應力ノ働面ノ垂直線ガ OX, OY, OZ 軸トナス角ヲ夫々 α, β, γ；與ヘラレタル單位主要應力ヲ S_1, S_2, S_3；求ムル單位應力ヲSトス．此場合ニハ應剪力ハ總テ零ナルニヨ第71節ニ於タルト同樣ニシテ次式ヲ得．

$$S_{nx}=S_1.\cos\alpha,\quad S_{ny}=S_2.\cos\beta,\quad S_{nz}=S_3.\cos\gamma,$$

$$S=\sqrt{S^2_{nx}+S^2_{ny}+S^2_{nz}}=\sqrt{S_1^2.\cos^2\alpha+S_2^2.\cos^2\beta+S_3^2.\cos^2\gamma}.$$

S ノ方向ガ OX, OY, OZ 軸トナス角ヲ夫々 $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ トスレバ

$$\cos\alpha_r=\frac{S_{nx}}{S},\quad 即チ\quad S_{nx}=S.\cos\alpha_r,$$

$$\cos\beta_r=\frac{S_{ny}}{S},\quad 即チ\quad S_{ny}=S.\cos\beta_r,$$

$$\cos\gamma_r=\frac{S_{nz}}{S},\quad 即チ\quad S_{nz}=S.\cos\gamma_r.$$

$$\therefore\quad S.\cos\alpha_r=S_1.\cos\alpha,\quad S.\cos\beta_r=S_2.\cos\beta,\quad S.\cos\gamma_r=S_3.\cos\gamma.$$

又ハ
$$\frac{\cos\alpha}{S}=\frac{\cos\alpha_r}{S_1},\quad \frac{\cos\beta}{S}=\frac{\cos\beta_r}{S_2},\quad \frac{\cos\gamma}{S}=\frac{\cos\gamma_r}{S_3}.$$

然ラバ
$$\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{S^2}=\frac{\cos^2\alpha_r}{S_1^2}+\frac{\cos^2\beta_r}{S_2^2}+\frac{\cos^2\gamma_r}{S_3^2}.$$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ ナルニヨ

$$\frac{1}{S}=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha_r}{S_1^2}+\frac{\cos^2\beta_r}{S_2^2}+\frac{\cos^2\gamma_r}{S_3^2}}\qquad\cdots\cdots(90)$$

是レ S_1, S_2, S_3 ヲ半軸トセル楕圓體ノ方程式ニシテSハ任意ノ方向ノ直徑ノ半分ヲ表ハス. 此ノ如ク=變形物體內ノ一點ニ於テ任意ノ方向ノ單位應力ハ楕圓體ノ半直徑ニテ表ハサルヽガ故ニ此楕圓體ヲ**應力楕圓體**ト謂フ.

Sノ方向ト其應力面ノ垂直線トナス角 θ ハ次ノ三角公式ニ依テ知ルヲ得.

$$\cos\theta=\cos\alpha.\cos\alpha_r+\cos\beta.\cos\beta_r+\cos\gamma.\cos\gamma_r$$
$$=S\left(\frac{\cos^2\alpha_r}{S_1}+\frac{\cos^2\beta_r}{S_2}+\frac{\cos^2\gamma_r}{S_3}\right)$$
$$=S\left(\frac{\cos^2\alpha}{S^2}.S_1+\frac{\cos^2\beta}{S^2}.S_2+\frac{\cos^2\gamma}{S^2}.S_3\right)$$
$$=\frac{1}{S}\left(S_1.\cos^2\alpha+S_2.\cos^2\beta+S_3.\cos^2\gamma\right)\qquad\cdots\cdots(90_a)$$

S ノ種類ハ $\cos\theta$ ノ符號ニ依テ定マルモノナリ.

75. **一ツノ平面ニ並行ナル主要應力** 第72節第104圖ニ於テ與ヘラレタル面ABニ正應力ノミ作用シ應剪力ガ零ナルコトアリ.

是レAB面ニ作用スル應力ノ方向OEトAB面ノ垂直線トガ一致スルトキナリ. 此場合ニハ (88_b) 式ノ S_t ハ零ナリ. 即チ

$$S_t=\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)\sin2\alpha+S_{xy}.\cos2\alpha=0,$$

$$\therefore\quad \frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{2S_{xy}}{S_x-S_y}=\tan2\alpha\qquad\cdots\cdots(91)$$

此條件式ハ 2α 及 $(2\alpha+180^\circ)$ 又ハ α 及 $(\alpha+90^\circ)$ ナル二値ニテ滿サル. 然ラバ**應剪力ガ零ナルベキ平面ハ二ツアリテ此等ノ面ハ互ニ直角ヲナスベキナリ.** 此ノ如キ二面ニ作用スル正應力ハ所謂**主要應力**ニシテ其働線ハ**應力ノ主要軸**ナリ.

(88)式ノSノ値ヲ α ニ就テ微分シ之ヲ零ト置ケバSヲ極大又ハ極小ニナスベキ α ノ値ヲ得.

(88)式ヨリ

$$\frac{d(S^2)}{d\alpha}=-2S_x^2.\cos\alpha.\sin\alpha+2S_y^2.\sin\alpha.\cos\alpha$$
$$+2S_{xy}(S_x+S_y)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$
$$=2(S_y^2-S_x^2)\cos\alpha.\sin\alpha+2S_{xy}(S_x+S_y)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,$$
$$\therefore\quad \tan2\alpha=\frac{2S_{xy}}{S_x-S_y}$$

是レ(91)式ト全ク同一ナリ. 是ニ由テ見レバ**主要應力ハ考ヘツツアル點ニ於ケル最大應力及最小應力ナリ.** 而シテ孰レガ最大ナルカ最小ナルカハ第二次微分係數

$$\frac{d^2(S^2)}{d\alpha^2}=2(S_y^2-S_x^2)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-8S_{xy}(S_x+S_y)\cos\alpha.\sin\alpha$$

ニ α ト $(\alpha+90^\circ)$ トノ二値ヲ代入シ之ガ負ナルカ正ナルカニ依テ知ルヲ得.

76. **主要應力ノ決定** 互ニ直角ヲナセル二平面ニ作用スル正應力 S_x, S_y 及應剪力 S_{xy} ガ與ヘラレテ主要應力ヲ求メントス.

(91)式ヨリ

$$\tan2\alpha=\frac{2S_{xy}}{S_x-S_y},\quad 2\cos^2\alpha-1=\left(\frac{S_x-S_y}{S_{xy}}\right)\cos\alpha.\sin\alpha,$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{S_x-S_y}{S_{xy}}\right)\cos\alpha.\sin\alpha\right],$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{S_x-S_y}{S_{xy}}\right)\cos\alpha.\sin\alpha\right].$$

第104圖ニ於テAB面ニ作用スル單位分應力S_nハ(88_a)式ニヨリ

$$S_n=S_x.\cos^2\alpha+S_y.\sin^2\alpha+2S_{xy}.\cos\alpha.\sin\alpha.$$

上記$\cos^2\alpha$ト$\sin^2\alpha$トノ値ヲ此式ニ代入スレバAB面ニ作用スル主要應力ヲ得．之ヲS_1ニテ表ハセバ

$$S_1=\frac{1}{2}S_x\left[1+\left(\frac{S_x-S_y}{S_{xy}}\right)\cos\alpha.\sin\alpha\right]+\frac{1}{2}S_y\left[1-\left(\frac{S_x-S_y}{S_{xy}}\right)\cos\alpha.\sin\alpha\right]$$

$$+2S_{xy}.\cos\alpha.\sin\alpha$$

$$=\frac{S_x+S_y}{2}+\frac{\cos\alpha.\sin\alpha}{2}\left[\frac{S_x^2-2S_x.S_y+S^2_y}{S_{xy}}+4S_{xy}\right]$$

$$=\frac{S_x+S_y}{2}+\frac{\cos\alpha.\sin\alpha}{2S_{xy}}\left[(S_x-S_y)^2+4S^2_{xy}\right].$$

而シテ

$$2\sin\alpha.\cos\alpha=\pm\frac{\tan2\alpha}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}}.$$

之ニ上記$\tan2\alpha$ノ値ヲ代入シテ正ノ符號ヲ取レバ

$$\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{S_{xy}}{\sqrt{(S_x-S_y)^2+4S^2_{xy}}},$$

$$\therefore\quad S_1=\frac{1}{2}(S_x+S_y)+\frac{1}{2}\sqrt{(S_x-S_y)^2+4S^2_{xy}}\quad\cdots\cdots(92)$$

$\sin\alpha.\cos\alpha$ノ負値ヲ取レバ他ノ主要應力ガ得ラル．之ヲS_2トスレバ

$$S_2=\frac{1}{2}(S_x+S_y)-\frac{1}{2}\sqrt{(S_x-S_y)^2+4S^2_{xy}}\quad\cdots\cdots(92_a)$$

S_1, S_2ノ中S_1ハ最大應力ニシテS_2ハ最小應力ナルコト明カナリ．

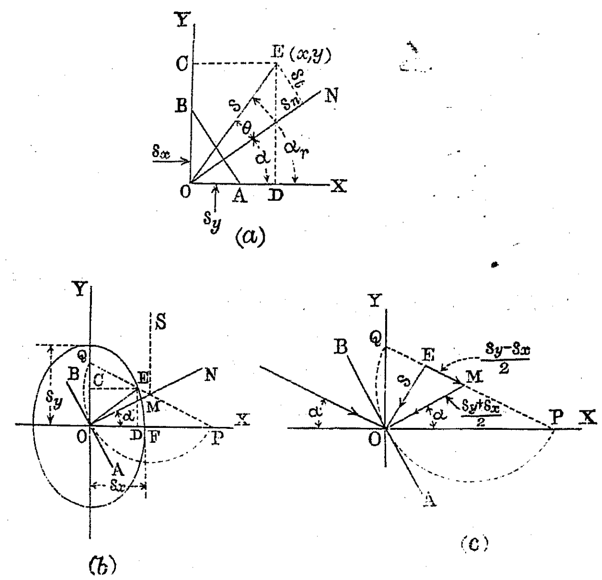
Y面ニ作用スル應力ガ應剪力ノミナルトキ即チ$S_y=0$ナルトキハ

$$\tan2\alpha=\frac{2S_{xy}}{S_x},\quad 主要應力\ S=\frac{1}{2}S_x\pm\frac{1}{2}\sqrt{S^2_x+4S^2_{xy}}\quad\cdots\cdots(92_b)$$

77. 應力楕圓(Ellipse of Stresses)　茲ニ變形物體內ノ一點ニ於

テ一雙ノ主要應力S_x, S_yガ與ヘラレテ其點ヲ含ム第三ノAB面ニ作用スル應力ヲ求メントス(第105圖(a))

第105圖



之ハ第72節ノ特別ノ場合ニシテ(88), (88_a) (88_b)三式中ノS_{xy}ヲ零トスレバ

$$\left.\begin{aligned}S&=\sqrt{S^2_x.\cos^2\alpha+S^2_y.\sin^2\alpha},\\ S_n&=S_x.\cos^2\alpha+S_y.\sin^2\alpha,\\ S_t&=(S_y-S_x)\cos\alpha.\sin\alpha.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(93)$$

應力Sノ傾斜ハ次式ニ依テ定ムルヲ得．

$$\tan\theta=\frac{S_t}{S_n}=\frac{(S_y-S_x)\cos\alpha.\sin\alpha}{S_x.\cos^2\alpha+S_y.\sin^2\alpha}\quad\cdots\cdots(93_a)$$

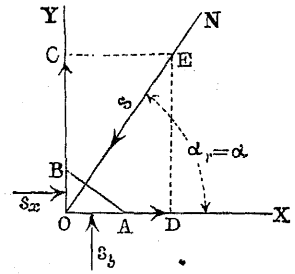
AB面ニ作用スル單位應力Sヲ表ハスベキOEノE端ノ正座標ヲ(x, y)トスレバ

$$x=S_x.\cos\alpha,\quad y=S_y.\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \left(\frac{x}{S_x}\right)^2+\left(\frac{y}{S_y}\right)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(93_b)$$

之ハ S_x, S_y ヲ夫々短半軸,長半軸トセル楕圓(第105圖(b))ノ方程式ニシテ與ヘラレタル點ヲ含ム一平面ニ作用スル單位應力ハ楕圓ノ半直徑ニテ表ハサルヽガ故ニ之ヲ**應力楕圓**ト謂フ.

第106圖



應力楕圓ハ應力楕圓體ノ特別ノ場合ニシテ(93_b)式ハ又(90)式ヨリ求ムルコトヲ得.

特別ノ場合　(第一)**二ツノ主要應力ガ等大ニシテ同性ナル場合**(第106圖)

$$S=\sqrt{S^2_x.\cos^2\alpha+S^2_y.\sin^2\alpha}=S_x,\quad \cos\alpha_r=\frac{S_x.\cos\alpha}{S}=\cos\alpha,\quad \sin\alpha_r=\sin\alpha.$$

是ニ由テ見レバ第三ノ面ABニ作用スル單位應力ハ與ヘラレタル單位主要應力ニ等シクシテAB面ニ垂直ナリ. 卽チ單位應力ハ總テ等大ニシテ方向ハ常ニ面ニ垂直ナリ.

(第二)**二ツノ主要性力ガ等大ニシテ異性ナル場合**　第107圖(a)ノ如ク $S_x=-S_y$ 卽チ S_x ヲ應張力, S_y ヲ應壓力トスレバ

$$S=S_x,\quad \cos\alpha_r=-\cos\alpha,\quad \sin\alpha_r=\sin\alpha.$$

$$\therefore\quad \alpha_r=-\alpha.$$

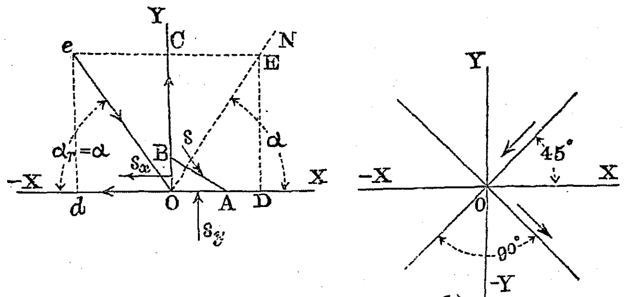
此ノ如クOX軸トαナル角ヲナセルONニ垂直ナルAB面ニ作用スル應力Sハ與ヘラレタル主要應力ト等大ナレドモONノ反對ノ側ニ於テOX軸トαナル角ヲナス. 卽チ應力Sノ傾斜角EOeハOY軸ニテ二等分セラル.

若シ$\angle dOe(=\angle OBA)$ガ$\angle COe$ヨリ小ナレバSハS_xト同性ナルベク,$\angle dOe$ガ$\angle COe$ヨリ大ナレバSハS_yト同性ナルベキナリ. 又Sノ方向Oeガ與ヘラレタル主要應力ト45°ノ傾斜ヲナストキ卽チABニ並行ナルトキハSハ應剪力ナリ.

是ニ由テ見レバ**互ニ直角ヲナセル一雙ノ平面ニ作用スル等**

大ノ應張力ト應壓力($S_x=-S_y$)**ハ與ヘラレタル面ト**45°**ノ傾斜ヲナシテ互ニ直角ヲナセル他ノ一雙ノ平面ニ作用スル等大ノ應剪力**($S=S_x=S_y$)**ニ等値ナリ**(第107圖(b))

第107圖



(a)　(b)

一雙ノ主要應力ガ與ヘラレテ應剪力ノ最大ナルベキ面ノ位置ヲ知ルニハ(9')式ノ

$$S_t=(S_x-S_y)\cos\alpha.\sin\alpha$$

ヲ最大ニナスベキαノ値ヲ求ムレバ可ナリ. 此式ヲαニ就テ微分シタル微分係數ヲ零ト置ケバ次ノ値ヲ得.

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0,\quad \cos\alpha=\pm\sin\alpha.\quad \therefore\quad \alpha=45^\circ \text{ 又ハ } 135^\circ$$

別解法　(93)式ノSハ圖式解法ニ依テ容易ニ之ヲ見出スヲ得. 今S_x, S_yヲ共ニ單位應壓力且$S_x<S_y$トシ共ニ之ヲ正トスレバ

$$S_y=\frac{S_y+S_x}{2}+\frac{S_y-S_x}{2},\quad S_x=\frac{S_y+S_x}{2}-\frac{S_y-S_x}{2}.$$

然ラバ一雙ノ主要應力S_x, S_yハ等大且同性ナル一雙ノ應力$\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)$, $\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)$ト等大ニシテ異性ナル一雙ノ應力$\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)$, $-\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)$トヨリ成ルモノト見做スヲ得ル故AB面ニ作用スル合成應力ハ此等二雙ノ合成應力ヲ別々ニ見出シテ更ニ夫等ヲ合成スレバ可ナリ.

第一群ノ應力$\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)$, $\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)$ノ合成單位應力ハ上記第一特

別ノ場合ノ所論ニ依リ$\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)$ニシテAB面ニ垂直ナリ. 又第二群ノ應力$\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)$, $-\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)$ノ合成單位應力ハ第二特別ノ場合ノ所論ニ依リ$\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)$ニシテ此方向トAB面ノ垂直線トノ間ノ角ハOY軸ニテ二等分セラル. 依テ第105圖(b)ノ如クAB面ノ垂直線ON上ニ第一群ノ合成應力$\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)$ニ等シクOMヲ取リ次ニ∠NMSニ等シク∠SMEヲ定メテ第二群ノ合成應力$\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)$ニ等シクMEヲ取リOトEトヲ連結スレバOEハ明カニ求ムル合成應力ナリ. 此解法ニ於テMEノ方向ヲ定ムルニハ次ノ如クスルヲ便トス.

Mヲ中心トシMOヲ半徑トセル圓弧ヲ畫キ之ガOX, OYヲ切ル點P, Qヲ連結スレバPOQハ半圓ナルガ故ニ三點P, M, Qハ一直線上ニアリテPQハ圓ノ直徑ナリ. 然レバ

$$\angle MOP=\angle MPO=\alpha$$

ナルニヨリPQ線ガ第二群ノ合成應力$\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)$ノ方向ヲ表ハスコト明カナリ.

第105圖(b)ニ於テ

$$PE=PM+ME=\frac{S_y+S_x}{2}+\frac{S_y-S_x}{2}=S_y,$$

$$QE=MQ-ME=\frac{S_y+S_x}{2}-\frac{S_y-S_x}{2}=S_x,$$

$\angle MOE=\theta=$求ムル應力Sノ傾斜角.

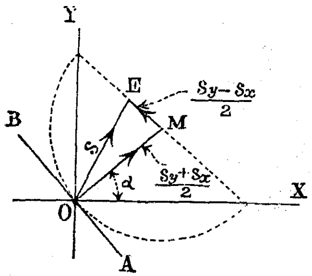
若シS_x, S_yガ共ニ應張力ニシテ且$S_x<S_y$ナレバ共ニ之ヲ正トシ上記ノ如キ二群ニ分チ夫等ヲ合成スベシ(第108圖).

若シS_x, S_yガ不等且異性例ヘバS_yガ應張力, S_xガ應壓力ニシテ$S_x<S_y$ナレバS_yヲ正トシS_xヲ負トシ次ノ如キ二群ニ分チテ夫等ヲ合成スベシ(第109圖).

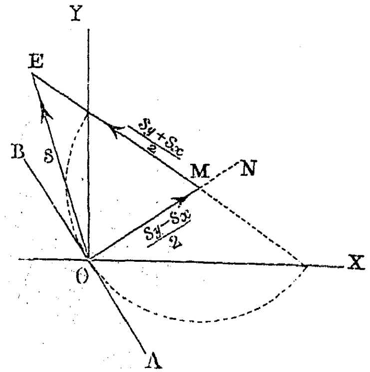
$$S_y=\frac{S_y+(-S_x)}{2}+\frac{S_y-(-S_x)}{2}=\frac{S_y-S_x}{2}+\frac{S_y+S_x}{2},$$

$$S_x=\frac{S_y+(-S_x)}{2}-\frac{S_y-(-S_x)}{2}=\frac{S_y-S_x}{2}-\frac{S_y+S_x}{2}.$$

第108圖



第109圖



此場合ニハOM<MEニシテ

第一群ノ合成應力.........$OM=\frac{S_y-S_x}{2}$,

第二群ノ合成應力.........$MF=\frac{S_y+S_x}{2}$.

次ニ最大傾斜角ヲ有スル應力ヲ知ルニハ∠MOEヲ最大ナラシムルαノ値ヲ定ムレバ可ナリ. 第105圖(b)ニ於テAB面ノ位置ノ如何ニ拘ハラズ△OMEノ邊OMハ常ニ$\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)$, MEハ常ニ$\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)$ニシテ長サ一定セリ. 依テMヲ中心トシMEヲ半徑トセル圓ヲ畫キO點ヨリ此圓ニ切線ヲ引キテ其切點ヲEトセバOEハ最大傾斜角ヲ有スル應力ヲ表ハスベシ. 即チ$\angle OEM=90°$ノトキ應力Sノ傾斜角θハ最大ナリ. 此値ヲφトスレバ(第110圖).

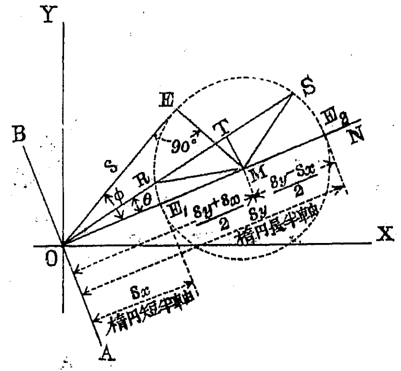
$$\sin\phi=\frac{S_y-S_x}{S_y+S_x},\quad \phi=\sin^{-1}\frac{S_y-S_x}{S_y+S_x}.$$

之ヲ書換フレバ

$$\frac{S_x}{S_y}=\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}. \qquad \text{.........(94)}$$

第110圖ニ於テ一雙ノ共軛應力ノ共通傾斜角θニ等シキ角ヲナシテORSヲ引ケバOR, OSハ明カニ一雙ノ共軛應力ヲ表ハス. 此等ヲS_r, S_sトスレバ

第110圖



$$S_r.S_s = OR \times OS = \overline{OE}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{ME}^2$$

$$= \left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)^2 - \left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)^2 = S_y.S_x \text{..........................} (95)$$

斯ク共軛應力ノ乘積ハ主要應力ノ乘積ニ等シ.

若シ共軛應力ノ傾斜角ガ最大値ナレバ單位應力ハ等大ニシテ次ノ關係ヲ得.

$$\overline{OE}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{ME}^2 = \left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)^2 - \left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)^2 = S_y.S_x \text{ ....} (95_a)$$

第110圖ニ於テ

$$OM = OT.\sec\theta, \quad OT = \frac{1}{2}(S_r+S_s), \quad OM = \frac{1}{2}(S_y+S_x),$$

$$\therefore \quad S_r + S_s = (S_x+S_y)\cos\theta \text{.......................................} (95_b)$$

(95), (95_b) 二式ヨリ一雙ノ共軛應力ガ與ヘラレテ主要應力ヲ見出スヲ得.

又

$$\frac{S_r}{S_s} = \frac{OR}{OS} = \frac{OT-RT}{OT+RT} = \frac{OT-\sqrt{\overline{MR}^2-\overline{MT}^2}}{OT+\sqrt{\overline{MR}^2-\overline{MT}^2}}$$

$$= \frac{OM.\cos\theta - \sqrt{\overline{MR}^2-\overline{OM}^2.\sin^2\theta}}{OM.\cos\theta + \sqrt{\overline{MR}^2-\overline{OM}^2.\sin^2\theta}} = \frac{\cos\theta - \sqrt{\left(\frac{MR}{OM}\right)^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\left(\frac{MR}{OM}\right)^2 - \sin^2\theta}}.$$

而シテ

$$\frac{MR}{OM} = \frac{S_y-S_x}{S_y+S_x} = \frac{ME}{OM} = \sin\phi.$$

$$\therefore \quad \frac{S_r}{S_s} = \frac{\cos\theta - \sqrt{\sin^2\phi - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\sin^2\phi - \sin^2\theta}} = \frac{\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\phi}}{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\phi}} \text{...........} (95_c)$$

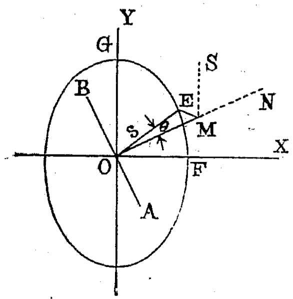
若シ $\theta=0$ ナレバ共軛應力ハ主要應力ニシテ

$$\frac{S_x}{S_y} = \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}$$

又 $\theta=\phi$ ナレバ $S_r=S_s$ ヲ得.

78. 應力楕圓ノ逆 (Converse of the Ellipse of Stress) 玆ニ變形物體內ノ一點ヲ含ム或二面ニ作用スル單位應力ト方向トガ與ヘラレテ主要應力ノ大サト方向トヲ定メントス.

第111圖



第111圖ニ於テABハ與ヘラレタル一ツノ平面, OEハ此面ニ作用スル應力ナリトス. AB面ノ垂直線ON上ニ主要應力ノ和ノ半分ニ等シクOMヲ取リテM點ヲ定ムルヲ得バ表圖ハ完結セラルベキナリ.

今 OE=S=AB面ニ作用スル應力; S'=與ヘラレタル他ノ面ニ作用スル應力; ∠NOE=θ=應力Sノ傾斜角; θ'=應力S'ノ傾斜角トスレバ

$$\overline{ME}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OM}^2 - 2OM.OE.\cos\theta.$$

求ムル主要應力ヲ S_x, S_y トスレバ

$$\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)^2 = S^2 + \left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)S.\cos\theta \text{.......................} (a)$$

同様ニ他ノ面ニ作用スル應力ニ就テ三角形ヲ作レバ

$$\left(\frac{S_y-S_x}{2}\right)^2 = S'^2 + \left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)S'\cos\theta' \text{....................} (b)$$

(a)式ヨリ(b)式ヲ引ケバ

$$S^2-S'^2=2\left(\frac{S_y+S_x}{2}\right)\left(S.\cos\theta-S'.\cos\theta'\right),$$

$$\frac{S_y+S_x}{2}=\frac{S^2-S'^2}{2(S.\cos\theta-S'.\cos\theta')}\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

(c)式ヨリ $\frac{S_y+S_x}{2}$ ヲ求ムレバ(a)又ハ(b)式ヨリ $\frac{S_y-S_x}{2}$ ヲ知ルヲ得．斯クシテOMトMEトヲ知レバOMノ値ヲON上ニ取リテ△OMEヲ完結スベシ．次ニ∠NMEノ二等分線MSヲ引ケバ之ハ大ナル方ノ主要應力軸ニ並行ナルベキヲ以テMSニ並行ニOYヲ引キ，OYニ垂直ニOXヲ引キ且OY上ニ

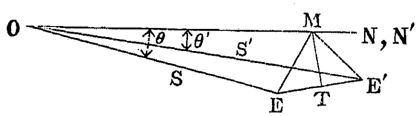
$$OG=S_y=OM+ME,$$

OX上ニ

$$OF=S_x=OM-ME$$

ヲ取ルベシ．

第112圖



圖式解法　第112圖ノ如ク直線ONヲ引キ∠NOE=θ，∠N'OE'=θ'，OE=S，OE'=S'ヲ取リテEトE'トヲ連結シEE'線ヲ垂直線TMニテ二等分シテME，ME'ヲ引ケバ

$$\frac{S_y+S_x}{2}=OM,\quad \frac{S_y-S_x}{2}=ME=ME'.$$

$$\therefore\ S_x=OM-ME,\quad S_y=OM+ME.$$

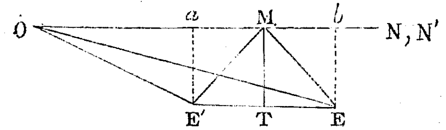
ON及ON'ガOY軸トナス角ハ夫々

$$90^\circ-\alpha=\frac{\angle NME}{2},\quad 90^\circ-\alpha'=\frac{\angle N'ME'}{2}.$$

第112圖ト第105圖(b)トヲ比較考究スベシ．

特別ノ場合　與ヘラレタル二ツノ面ガ互ニ直角ヲナス場合　此場合ニハOE及OE'ノ接觸分應力ハ等シキユエ $aE'=bE$ ナリ(第113圖)．從テEE'ハONニ並行ナリ．今 $Ob=S_n$，$Oa=S'_n$，$aE'=bE=S_t$ トスレバ

第113圖



$$\frac{S_y+S_x}{2}=OM=\frac{S_n+S_n'}{2},$$

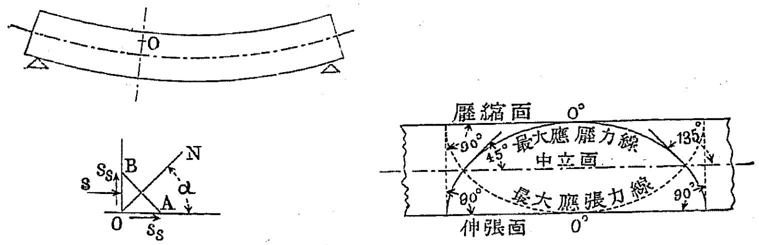
$$\frac{S_y-S_x}{2}=ME=\sqrt{\overline{Mb}^2+S_t^2}=\sqrt{\left(\frac{S_n-S_n'}{2}\right)^2+S_t^2}$$

此等ノ關係式ヨリ S_x 及 S_y ヲ定ムルヲ得．

第十一章　彈性論及其他ノ應用

79. 桁ニ於ケル主要應力線 (Lines of Principal Stress in Beams)　桁ノ一點ニ作用スル應力ハ水平直應力ト應剪力トニシテ此等ノ應力面ハ互ニ直角ヲナス．而シテ一ツノ面ニハ應剪力ノミ作用シ他ノ面ニハ直應力ト應剪力トガ作用スルユエ(第114圖(a))主要應力ヲ見出スニハ(92_b)式ヲ用フレバ可ナリ．

第114圖



(a)　(b)

今單位水平直應力ヲ s；單位應剪力ヲ s_s トス．但 s ハ抵抗力率公式ヨリ求メ，s_s ハ第三章第22節(18)式ヨリ求ムベキナリ．主要應力ヲ s_1, s_2 トスレバ

$$s_1=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sqrt{s^2+4s_s^2},\quad s_2=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+4s_s^2}.$$

此式ヨリ見レバ最大主要應力 s_1 ハ水平直應力 s ト同性ニシテ最小主要應力 s_2 ハ之ト異性ナリ. 夫故ニ桁ノ中立面ヨリ上方ニ於テハ s_1 ハ應壓力, s_2 ハ應張力ニシテ中立面ヨリ下方ニ於テハ s_1 ハ應張力, s_2 ハ應壓力ナリ.

主要應力面ハ (92_b) 式ニ依テ定ムルヲ得. 即チ

$$\tan 2\alpha=\frac{2s_s}{s}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

O點(第114圖(a))ニ於ケル最大應剪力ハ主要應力面ト45°ノ傾斜ヲナシ其値ハ次ノ如シ.

$$\frac{s_1-s_2}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+4s_s^2}.$$

桁ノ緣維ニ於テハ $s_s=0$ ナルユエ

$$\tan 2\alpha=0,\quad 2\alpha=0\ 又ハ\ 180°.$$

$$\therefore\ \alpha=0\ 又ハ\ 90°.$$

然ラバ緣維ニ於ケル最大主要應力ノ方向ハ緣維ニ切觸シ中立面ノ反對ノ側ノ緣維ニ於テハ之ト90°ノ角ヲナスベキナリ.

中立面ニ於テハ $s=0$ ナルユエ

$$\tan 2\alpha=\infty,\quad 2\alpha=90°\ 又ハ\ 270°.$$

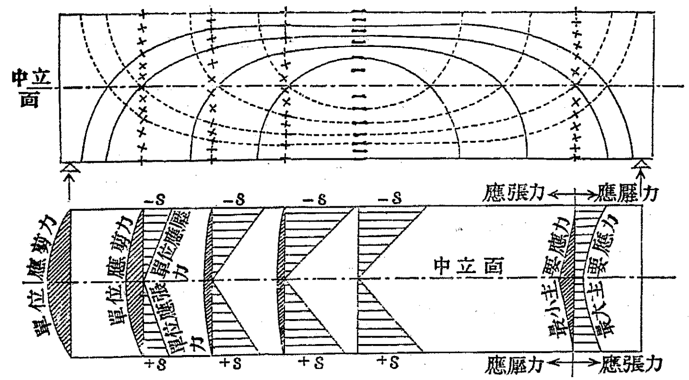
$$\therefore\ \alpha=45°\ 又ハ\ 135°.$$

然ラバ最大主要應力ノ方向ハ中立面ト45°ノ傾斜ヲナスベキナリ.

斯クシテ第114圖(b)ノ如キ曲線ヲ描ケバ其各點ニ於ケル切線ハ夫々最大主要應力ノ方向ヲ表ハスベシ. 而シテ桁ノ中立面ノ上下ニ於テ水平直應力ハ性ヲ異ニシ且最大主要應力ト水平直應力トハ同性ナルニ依リ上述ノ應力ヲ應壓力トスレバ他ニ應張力ニ對シ破線ノ如キ曲線アルベシ. 之ハ無論最大應壓力線ト同形ニシテ只向キガ反對ナルノミナリ. 此ノ如キ數多ノ應力線ヲ引ケバ一ツノ應力線網ヲ得ベシ(第115圖)而シテ此等ノ應力

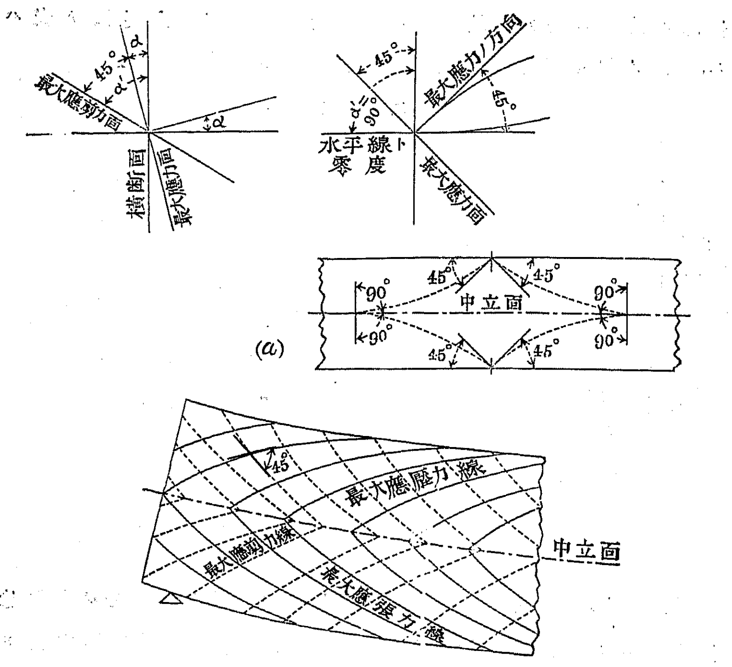
線ハ互ニ直角ヲナシテ交リ交點ニ於テ曲線ニ引キタル二ツノ切線ハ其點ニ於ケル最大及最小應力ノ方向即チ主要軸ヲ表ハス. 此ノ如キ應力線ヲ**主要應力線**ト謂フ.

第115圖



第115圖ノ實線曲線ハ單桁ガ等布荷重ヲ受クル場合ノ主要應壓力線ニシテ破線曲線ハ主要應張力線ナリ. 然ラバ中立面ヨリ上方ノ破線曲線ハ壓縮セラルヽ部分ニ於ケル最小應力ノ方向ヲ與ヘ,中立面ヨリ下方ノ實線曲線ハ伸張セラルヽ部分ニ於ケル最小應力ノ方向ヲ與フベシ. 又第115圖ノ場合ニ最モ危險ナル斷面即チ中央ニ於テハ $s_s=0$ ニシテ且最大應力ノ方向ハ水平ナルヲ以テ緣維ノ最大單位應力ハ普通ノ抵抗力率公式ガ與フル値ト同一ナリ. 從テ普通ノ桁ニ關スル問題ヲ解クニハ特ニ最大及最小應力ニ就テ研究スル必要ナシト雖鐵筋混凝土桁ノ如ク特種ノモノニアリテハ其必要アルベシ. 要スルニ普通ノ彎曲理論ヨリ得ラルヽ單位應力ノ値ハ $s_s=0$ ナル斷面ニ於テハ眞ナレドモ其他ノ斷面ニ於テハ緣維ニ對シテノミ正シキモノナリ.

第116圖



次ニ最大單位應剪力ノ面ガ横斷面トナス角ヲα'トスレバ

$$\alpha'=\alpha+45°,\quad \tan 2\alpha'=\tan(2\alpha+90°)=-\cot 2\alpha=-\frac{s}{2s_s}\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

中立面ニ於テハ$s=0$ナルユヱ

$$\tan 2\alpha'=0,\quad 2\alpha'=0\ 又ハ\ 180°,\quad \alpha'=0\ 又ハ\ 90°.$$

是ニ由テ見レバ最大應剪力線ハ中立面ニ切觸スベシ. 又上下ノ外面ニ於テハ$s_s=0$ナルユヱ

$$\tan 2\alpha'=\infty,\quad 2\alpha'=90°\ 又ハ\ 270°,\quad \alpha'=45°\ 又ハ\ 135°$$

ニシテ此曲線ハ上下ノ外面ニ45°ノ傾斜ヲナスヲ知ルベシ. 結局(a), (b)二式ニ依テ最大應力線ヲ描クヲ得.

例題　茲ニ斷面9吋×20吋,長サ20呎ノ單桁アリ. 之ガ96噸ノ

等布荷重ヲ受クルトキ左支端ヨリ5呎ノ距離ニアル斷面ニ於テ中立軸ヨリ上方5吋隔レル點ノ主要應力及其應力面ガ斷面トナス角ヲ求ム.

彎曲率 $M=48\times5-\frac{96}{20}\times\frac{5^2}{2}=180$ 噸呎$=2,160$噸吋,

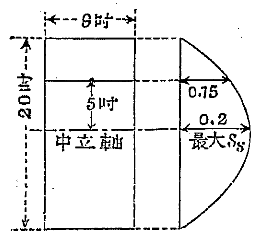
$$\frac{M.c}{I}=\frac{2,160\times10}{\frac{1}{12}\times9\times20^3}=3.6\ 噸每平方吋$$

=與ヘラレタル斷面ニ於ケル纖維ノ單位應力.

$$s=3.6\times\frac{5}{10}=1.8\ 噸每平方吋$$

=與ヘラレタル點ノ水平單位應力.

第117圖



鉛直剪斷力 $V=48-24=24$噸,

$$\frac{24}{9\times20}=\frac{2}{15}\ 噸每平方吋$$

=斷面ノ平均單位應剪力,

最大 $s_s=\frac{3}{2}\times\frac{2}{15}=0.2$ 噸每平方吋.

考ヘツヽアル點ニ於ケル單位應剪力ハ第三章第22節ヨリ

$$\frac{4\times0.2}{20^2}\left(\frac{20^2}{4}-5^2\right)=\frac{3}{4}\times0.2=0.15\ 噸每平方吋.$$

$$\therefore\quad s_1=\frac{1.8}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1.8^2+4\times0.15^2}=0.9+0.91$$

$=1.81$ 噸每平方吋(應壓力),

$s_2=0.9-0.91=-0.01$ 噸每平方吋(應張力)

此場合ニs_1ハ與ヘラレタル點ニ於ケル最大主要應力ニシテs_2ハ最小主要應力ナリ.

又　$\tan 2\alpha=\frac{0.15\times2}{1.8}=0.16,\quad 2\alpha=9°28'.$

$$\therefore\quad \alpha=4°44'.$$

之ハ最大主要應力ノ面ガ斷面トナス角ナリ.

80. 彎曲應力ト應扭力トノ合成眞應力　彎曲力ト扭力トノ

作用ヲ受クル軸ノ外面ノ一點ニ働ク應力ハ次ノ如シ.

軸ノ軸線ニ垂直ナル面ニ於テハ $\left\{\begin{array}{l}\text{(i) 彎曲率 } M_1 \text{ ヨリ生スル最大單位應力 } s. \\ \text{(ii) 扭力率 } M_2 \text{ ヨリ生ズル最大單位應剪力 } s_s.\end{array}\right.$

軸線ノ方向ノ面ニ於テハ $\left\{\begin{array}{l}\text{(i) } s=0. \\ \text{(ii) 單位應剪力 } s_s.\end{array}\right.$

然ラバ桁ノ場合ト同樣ニ

$$\text{最大 } s_1=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sqrt{s^2+4s_s^2},$$

$$\text{最小 } s_2=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+4s_s^2}.$$

主要應力ノ方向ノ變形ヲ夫々 ϵ_1, ϵ_2 トスレバ

$$E.\epsilon_1=s_1-\frac{s_2}{m},\quad E.\epsilon_2=s_2-\frac{s_1}{m}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\ E.\epsilon_1=\dfrac{m-1}{2m}.s+\dfrac{m+1}{2m}\sqrt{s^2+4s_s^2} \\ E.\epsilon_2=\dfrac{m-1}{2m}.s-\dfrac{m+1}{2m}\sqrt{s^2+4s_s^2}\end{array}\right\}\cdots\cdots(96)$$

此式ニ於テ $E.\epsilon_1$, $E.\epsilon_2$ ハ夫々眞ノ最大單位應力及眞ノ最小單位應力ナリ. m ヲ 4 ニ取レバ

$$\text{眞ノ最大單位應力}=\frac{3}{8}.s+\frac{5}{8}\sqrt{s^2+4s_s^2}\cdots\cdots(96_a)$$

但 $$s=\frac{M_1.c}{I},\quad s_s=\frac{M_2.c}{2I}.$$

此等ノ値ヲ (96_a) 式ニ代入スレバ

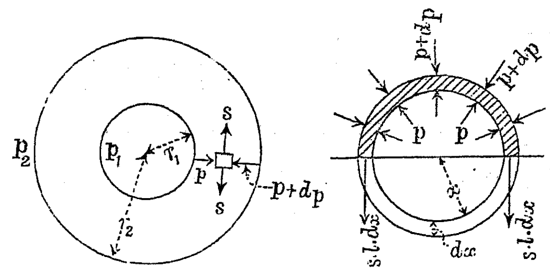
$$\text{眞ノ最大單位應力}=\frac{c}{I}\left[\frac{3}{8}M_1+\frac{5}{8}\sqrt{M_1^2+M_2^2}\right]\cdots\cdots(96_b)$$

此式ノ括弧内ノ項ハ所謂**等値彎曲率**ナリ.

81. 厚キ中空圓壔 (Thick Hollow Cylinders) 中空圓壔ノ壁ガ半徑ニ比シテ比較的厚ケレバ薄キ圓壔ニ於ケルガ如ク斷面ノ應力配布ハ均等ナリト見做スヲ得ズ. 圓壔ノ壁ガ壓力ヲ受ケテ變

形スルニエ其各層ハ壓力ノ一部分ニ耐ヘ殘リノ壓力ハ順次傳達セラルヽニ從ヒ次第ニ減少スルコト明カナリ. 而シテ內壓ガ外壓ヨリモ大ナルカ又ハ小ナルカニ依テ各層ハ張力又ハ壓力ヲ受クベキナリ. 水壓機 (Hydraulic Press), 水力扛重機 (Hydraulic Jack) ノ圓壔ノ如キハ內面ニ於テ水壓ヲ受ケ, 外面ニ於テ氣壓ヲ受クルモノナレドモ此場合ノ外壓ハ內壓ニ比シテ甚小ナルヲ以テ實用上之ヲ省略スルヲ得.

第 118 圖



第 118 圖ニ於テ r_1 ハ內半徑; r_2 ハ外半徑; p_1 ハ內壓; p_2 ハ外壓ナリトス. 又中心ヨリ x ナル距離ニ於テ半徑ノ方向ノ單位應壓力ヲ p トシ圓周ニ沿ヒタル單位應張力ヲ s トス.

今圓壔ノ長サヲ l トシ, 半徑 x ニシテ細微ナル厚サ dx ヲ有スル圓壔ノ半分ノ平衡ヲ考フルニ內外兩面ニ働ク壓力ノ合力ハ直徑ヲ含ム平面ニ垂直ニ作用スル**周張力** (Hoop Tension) ニ等シカルベキナリ. 卽チ

$$(p\times 2x.l)-(p+dp).2(x+dx)l=2.s.l.dx,\quad -p.dx-x.dp-dp.dx=s.dx.$$

此式中 $dp.dx$ ハ他ノ項ニ比シテ甚小ナルニエ之ヲ省略スルヲ得. 依テ

$$s=-p-x.\frac{dp}{dx}=-\frac{d}{dx}(p.x)\cdots\cdots(a)$$

橫斷面ハ壓力ヲ受ケタル後モ矢張平面ナリト見做スヲ得ベシ. 然ラバ斷面中ノ任意ノ點ニ於ケル軸ノ方向ノ變形 ϵ ハ常數

ニシテ x ニ無關係ナリ．從テ軸ノ方向ノ應力配布ハ均等ナリ．

此單位應力ヲ s' トスレバ之ガ應張力ナル場合ニハ

$$\epsilon=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(s'-\frac{s-p}{m}\right).$$

ϵ, E, s' 及 m ハ常數ナルユヱ $(s-p)$ モ亦常數ナルベキナリ．即チ

$$s-p=2a \quad \cdots\cdots\cdots (b)$$

之ニ (a) 式ノ s ノ値ヲ代入スレバ

$$-2p-x.\frac{dp}{dx}=2a, \qquad \frac{dp}{p+a}=-\frac{2.dx}{x}.$$

之ヲ積分スレバ

$$\log(p+a)=-\log x^2+(\text{積分常數}),$$

$$p+a=\frac{b}{x^2}, \quad p=\frac{b}{x^2}-a \quad \cdots\cdots\cdots (c)$$

此ニ於テ a, b ハ常數ニシテ與ヘラレタル條件ニ依テ定ムベキモノナリ．

(b), (c) 二式ヨリ

$$s=\frac{b}{x^2}+a \quad \cdots\cdots\cdots (d)$$

$x=r_1$ ナレバ $p=p_1$, $x=r_2$ ナレバ $p=p_2$ ナルユヱ (c) 式ヨリ

$$b=\frac{r_2^2.r_1^2}{r_2^2-r_1^2}(p_1-p_2), \quad a=\frac{p_1.r_1^2-p_2.r_2^2}{r_2^2-r_1^2}$$

此値ヲ (c), (d) 二式ニ代入スレバ

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{r_2^2.r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.\frac{p_1-p_2}{x^2}-\frac{p_1.r_1^2-p_2.r_2^2}{r_2^2-r_1^2}, \\ s&=\frac{r_2^2.r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.\frac{p_1-p_2}{x^2}+\frac{p_1.r_1^2-p_2.r_2^2}{r_2^2-r_1^2}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (97)$$

之ヲらあめ氏 (Lamé) 公式ト謂フ．

若シ $p_2=0$ ナレバ

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{r_2^2r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.\frac{p_1}{x^2}-\frac{p_1.r_1^2}{r_2^2-r_1^2}=\frac{p_1.r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{x^2}-1\right), \\ s&=\frac{p_1.r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{x^2}+1\right). \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (97_a)$$

是ニ由テ見レバ x ガ小ナル程 s ハ大ナルユヱ內面 $(x=r_1)$ ニ於ケル周張力ガ最大單位應力ニシテ其値ハ (97) 式ヨリ

$$\text{最大 } s_1=\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}(p_1-p_2)+\frac{p_1.r_1^2-p_2.r_2^2}{r_2^2-r_1^2}.$$

$p_2=0$ ナルトキハ

$$\text{最大 } s_1=p_1.\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}. \quad \cdots\cdots\cdots (97_b)$$

軸ノ方向ノ應力 s' 及 p_2 共ニ零ナルトキハ s_1 ノ方向ノ最大變形ハ次ノ如シ．

$$\epsilon_1=\frac{s_1}{\mathrm{E}}+\frac{p_1}{m.\mathrm{E}}=\frac{p_1}{\mathrm{E}}\left(\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}+\frac{1}{m}\right),$$

$$\mathrm{E}.\epsilon_1=p_1\left(\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}+\frac{1}{m}\right)=p_1\left[\frac{r_2^2(m+1)+r_1^2(m-1)}{m(r_2^2-r_1^2)}\right] \cdots\cdots\cdots (97_c)$$

此應力 $\mathrm{E}.\epsilon_1$ ハ (97_b) 式ガ與フル s_1 ヨリモ大ナリ．m ヲ 4 ニ取レバ

$$\mathrm{E}\,\epsilon_1=p_1.\frac{\frac{5}{4}.r_2^2+\frac{3}{4}.r_1^2}{r_2^2-r_1^2} \cdots\cdots\cdots (97_d)$$

次ニ圓壔ノ端面ガ內壓力 $\pi r_1^2.p_1$ ヲ受クルトキハ應張力 s' ハ $\left(p_1.\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\right)$ ニシテ此場合ニ內面ニ於テハ

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1&=\frac{s_1}{\mathrm{E}}-\frac{s'-p_1}{m.\mathrm{E}} \\ \mathrm{E}.\epsilon_1&=p_1\left[\frac{r_2^2(m+1)+r_1^2(m-2)}{m(r_2^2-r_1^2)}\right] \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (97_e)$$

此應力 $\mathrm{E}.\epsilon_1$ ハ (97_c) ガ與フル $\mathrm{E}.\epsilon_1$ ヨリモ小ナリ．

若シ p_2 ノミ作用シ p_1 ガ零ナレバ

$$b=-\frac{r_2^2.r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.p_2, \quad a=-\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}.p_2.$$

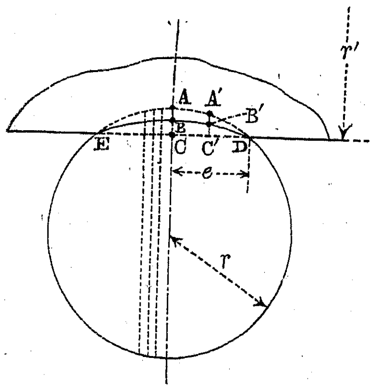
$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad p&=-\frac{r_2^2.r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.\frac{p_2}{x^2}+\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}.p_2=p_2.\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1-\frac{r_1^2}{x^2}\right), \\ s&=-p_2.\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1+\frac{r_1^2}{x^2}\right). \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (97_f)$$

此場合ノ s ハ應壓力ニシテ其最大値ハ次ノ如シ．

$$最大\ s=\left[-p_2\cdot\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1+\frac{r_1^2}{x^2}\right)\right]_{x=r_1}=-\frac{2p_2\,r_2^2}{r_2^2-r_1^2}.$$

82. 圓輥子ノ抵抗力 (Resistance of Solid Rollers)　今圓輥子ニテ荷重ヲ上方ヨリ下方ニ傳フル場合ヲ考フ．　第119圖ノ如ク輥子ハdxナル細微ノ厚サヲ有シ軸ニ並行ナル鉛直片ノ集合ヨリ成リ且此等ハ互ニ獨立ニ働クモノト假定ス．

第 119 圖



材料ノ彈性係數ヲE；輥子ノ上方ニアル材料ノ彈性係數ヲE′；輥子ノ半徑ヲr；輥子ノ上方ニ於ケル材ノ厚サヲr'；A點ニ於ケル單位應壓力ヲp；他ノ點A′ニ於ケル單位應壓力ヲp'；輥子ガ單位ノ長サニ付支持スル全荷重ヲP；Aヲ原點トシテ水平ニ測リタル距離ヲx；輥子ト上方ニ於ケル材トノ變形ノ和ACヲϵ；DCナル長サヲeトス．　然ラバ

$$AB=\frac{p.r}{E},\quad A'B'=\frac{p'.r}{E},\quad BC=\frac{p.r'}{E'},\quad B'C'=\frac{p'.r'}{E'}.$$

$$\epsilon=AC=AB+BC=p\left(\frac{r}{E}+\frac{r'}{E'}\right)\dots\dots\dots\dots(a)$$

$$A'C'=A'B'+B'C'=p'\left(\frac{r}{E}+\frac{r'}{E'}\right)\dots\dots\dots\dots(b)$$

(b)式ヲ(a)式ニテ除セバ

$$p'=A'C'.\frac{p}{\epsilon}.$$

$$\therefore\quad P=\int_{-e}^{+e}p'.dx=\frac{p}{\epsilon}\int_{-e}^{+e}A'C'.dx.$$

曲線DAEヲ拋物線ト見做スモ之ニ依テ生ズル誤差ハ小ナルニヨ

$$\int_{-e}^{+e}A'C'.dx=\frac{4}{3}.e.\epsilon.$$

然ラバ

$$P=\frac{4}{3}.p.e.$$

而シテ

$$e=\sqrt{2r.\epsilon-\epsilon^2}\doteqdot\sqrt{2r.\epsilon}=\sqrt{2r.p\left(\frac{r}{E}+\frac{r'}{E'}\right)}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad P&=\frac{4}{3}\sqrt{2p^3.r\left(\frac{r}{E}+\frac{r'}{E'}\right)},\\ r=r'\ ナラバ\quad P&=\frac{4}{3}.r\sqrt{2p^3\left(\frac{E+E'}{E.E'}\right)}.\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots(98)$$

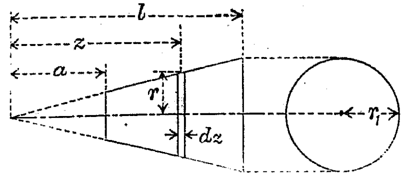
輥子ノ長サヲlトシ全抵抗力ヲRトスレバ

$$\left.\begin{aligned}R&=P.l=\frac{4}{3}.l\sqrt{2p^3.r\left(\frac{r}{E}+\frac{r'}{E'}\right)},\\ r=r'\ ナラバ\quad R&=P.l=\frac{4}{3}.r.l\sqrt{2p^3\left(\frac{E+E'}{E.E'}\right)}.\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots(98_a)$$

此式ガ與フルRノ値ハ眞値ナラザレドモ諸構造物ニ使用セラル丶輥子ノ設計ニ對シ滿足ナル結果ヲ與フルモノナリ．　例ヘバ鋼輥子ノ作用强度ヲ$p=15{,}000$听每平方吋，$E=E'=30{,}000{,}000$听每平方吋ニ取レバ$r=r'$ナル場合ニハ(98)式ヨリ

$$P=\frac{8}{3}.r\sqrt{\frac{p^3}{E}}\doteqdot 900.r.$$

第 120 圖



第120圖ニ示セルハ錐形輥子ニシテ圓錐ノ頂點ヨリ或斷面迄ノ距離ヲzトス．　dzヲ長サトセル錐形輥子ノ一部分ヲ考フルニ

$$r=\frac{z}{l}.r_1$$

ナルニヨ　$r_1=r'$ナル場合ニハ此部分ニテ支持スル荷重ハ(98_a)式ヨリ

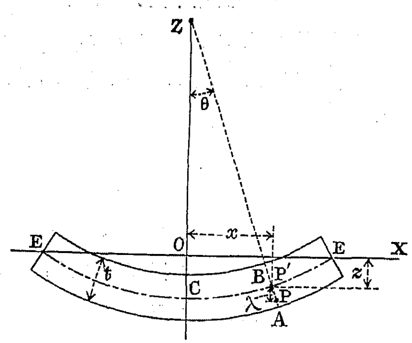
$$dR=\frac{4}{3}\cdot\frac{r_1}{l}\sqrt{2p^3\left(\frac{E+E'}{E.E'}\right)}.z.dz.$$

$$\therefore\quad R=\int_a^l dR=\frac{4}{3}\cdot\frac{l^2-a^2}{2l}\cdot r_1\sqrt{2p^3\left(\frac{E+E'}{E.E'}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots(90)$$

83. 平鈑ノ强サ (Strength of Flat Plates) 周邊ニテ支ヘラレ又ハ固定セラレタル平鈑ガ鈑面ニ垂直ニ外力ヲ受クルトキハ,單桁ニ於ケルト異ナリ,彎曲ハ鈑ニ垂直ナル各面ニ於テ起ルベシ. 以下述ブル所ノ平鈑强度論ハ**ぐらぁすほっふ氏** (Grashof) ノ理論ニ基クモノナリ.

(I) **圓鈑** 平鈑ノ中央層ニ於テ其中心 O ヲ通シテ正座標軸 OX, OY ヲ假定シ之ニ直角ニ OZ 軸ヲ取リ下方ニ測リタル z ヲ正トス. 然ラバ平鈑ガ荷重ヲ受ケタル後ノ中央層中ノ一點 P′ ノ正座標ハ x, y, z ナリ. 又 XZ 面中ノ一點 P ノ位置ハ横距 x ト中央層ヨリ此點迄ノ距離 λ トニテ定マリ,中央層ノ**子午曲線** EE (Meridian Curve) ハ正座標 x, z ニ依テ定マル.

第 121 圖



今與ヘラレタル點 P ニ就テ X 軸ノ方向ノ單位應力ヲ s_x, 變形ヲ ϵ_x; Y 軸ノ方向ノ單位應力卽チ單位周應力 (Circumferential Unit-Stress) ヲ s_y, 變形ヲ ϵ_y; Z 軸ノ方向ノ單位應力ヲ s_z, 變形ヲ ϵ_z トス. 然ルトキハ第十章第 69 節 (86) 式ヨリ

$$s_x=\frac{m.E}{m+1}\left(\epsilon_x+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z}{m-2}\right),\quad s_y=\frac{m.E}{m+1}\left(\epsilon_y+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z}{m-2}\right),$$

$$s_z=\frac{m.E}{m+1}\left(\epsilon_z+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z}{m-2}\right).$$

鈑ノ厚サ t ガ半徑 r ニ比シテ小ナルトキハ s_z ハ s_x 及 s_y ニ比較シテ省略シ得ル程ニ小ナルヲ以テ s_z ヲ零ト置ケバ

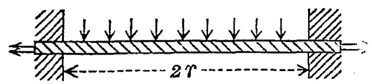
$$\epsilon_z+\frac{\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z}{m-2}=0,\qquad \epsilon_z=-\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{m-1}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad s_x&=\frac{m.E}{m^2-1}(m.\epsilon_x+\epsilon_y),\\ s_y&=\frac{m.E}{m^2-1}(\epsilon_x+m.\epsilon_y).\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(a)$$

中央層上ニ於テ Z 軸ヨリ x ナル距離ニアル點 P′ ニ就テ X 軸ト Y 軸トノ方向ノ變形ヲ夫々 ϵ_x', ϵ_y'; 子午曲線 EE ノ曲度半徑ヲ ρ; 紙面ニ垂直ニシテ且 BZ ヲ含ム平面内ニ於テ, P 點ヲ含ム曲面ノ曲度半徑ヲ ρ' トス. 若シ中央層ニ働ク應力ナケレバ中央層ヨリ λ ナル距離ニ於ケル層ノ變形ハ桁ノ普通彎曲理論ニ於ケルト同様ニ

$$\epsilon_x=\pm\frac{\lambda}{\rho},\qquad \epsilon_y=\pm\frac{\lambda}{\rho'}.$$

第 122 圖



第 122 圖ノ如ク周邊ニテ固定セラレ從ツテ中央層ガ應力ノ作用ヲ受ケ ϵ_x', ϵ_y' ナル變形ヲ生ジタリトセバ一般ニ

$$\epsilon_x=\epsilon_x'+\frac{\lambda}{\rho},\qquad \epsilon_y=\epsilon_y'+\frac{\lambda}{\rho'}$$

而シテ

$$\frac{1}{\rho}\doteqdot-\frac{d^2z}{dx^2},\quad \rho'\doteqdot\frac{x}{\sin\theta}\doteqdot\frac{x}{\tan\theta}=\frac{x}{-\dfrac{dz}{dx}},\quad \frac{1}{\rho'}\doteqdot-\frac{1}{x}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad \epsilon_x&=\epsilon_x'-\lambda.\frac{d^2z}{dx^2},\\ \epsilon_y&=\epsilon_y'-\frac{\lambda}{x}\cdot\frac{dz}{dx}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(b)$$

此値ヲ (a) 式ニ代入スレバ

$$\left.\begin{aligned}s_x&=\frac{m.E}{m^2-1}\left[m.\epsilon_x'+\epsilon_y'-\lambda\left(m.\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\right],\\ s_y&=\frac{m.E}{m^2-1}\left[\epsilon_x'+m.\epsilon_y'-\lambda\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{m}{x}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\right].\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(c)$$

平鈑ノ周邊ニ垂直ニ且均等ニ p ナル單位張力ガ作用スルトキ，中央層中ノ P′ 點ニ於テ，p ヨリ生ズル應力 s_x', s_y' ヲ知ラントセバ (c) 式中ノ λ ヲ零ト置クベシ．卽チ

$$s_x'=\frac{m.\mathrm{E}}{m^2-1}\left[m.\epsilon_x'+\epsilon_y'\right]=p,\quad s_y'=\frac{m.\mathrm{E}}{m^2-1}\left[\epsilon_x'+m.\epsilon_y'\right]=p$$

$$\therefore\ \epsilon_x'=\epsilon_y'=\frac{p(m-1)}{m.\mathrm{E}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

之ヲ (b) 式ニ代入スレバ

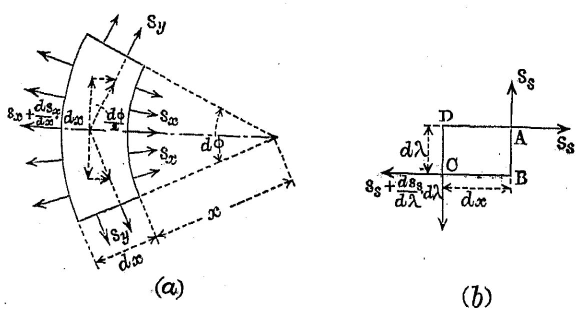
$$\epsilon_x=\frac{p(m-1)}{m.\mathrm{E}}-\lambda.\frac{d^2z}{dx^2},\quad \epsilon_y=\frac{p(m-1)}{m.\mathrm{E}}-\frac{\lambda}{x}.\frac{dz}{dx}.$$

(d) 式ノ値ヲ (c) 式ニ代入スレバ

$$\left.\begin{aligned}s_x&=p-\frac{m.\mathrm{E}.\lambda}{m^2-1}\left[m.\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}.\frac{dz}{dx}\right],\\ s_y&=p-\frac{m.\mathrm{E}.\lambda}{m^2-1}\left[\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{m}{x}.\frac{dz}{dx}\right].\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

此式ハ考ヘツヽアル點ノ應力ヲ其點ノ正座標ノ項ニテ表ハスモノナリ．

第 123 圖



今第 123 圖ノ如ク $d\phi$ ナル細微角ヲナセル二ツノ鉛直子午面ト x 及 $x+dx$ ヲ半徑トセル圓墻面トニテ界サレタル鈑ノ細微部分ノ平衡ヲ考フ．(a) 圖ハ鈑ノ中立面ヨリ下方ニ於ケル水平斷面ヲ表ハスモノニシテハ s_x, s_y ハ共ニ應張力ナリ (中立面ヨリ上方卽チ λ ガ負ナルトキハ s_x, s_y ハ共ニ應壓力ナリ)．此細微部分ガ

平衡ニアレバ次ノ條件ガ成立スベシ．

$$s.xd\phi.d\lambda+2.s_y\sin\frac{d\phi}{2}.d\lambda.dx+s_s\left(x+\frac{dx}{2}\right)d\phi.dx$$
$$-\left(s_x+\frac{ds_x}{dx}.dx\right)\left(x+dx\right)d\phi.d\lambda-\left(s_s+\frac{ds_s}{d\lambda}.d\lambda\right)\left(x+\frac{dx}{2}\right)d\phi.dx=0.$$

此式中 $ds_x.d\lambda.dx$ 及 $\frac{1}{2}ds_s\overline{dx}^2$ ハ他項ニ比シ省略シ得ルガ故ニ

$$s_y-s_x-x.\frac{ds_x}{dx}-x.\frac{ds_s}{d\lambda}=0,$$

$$\frac{ds_s}{d\lambda}=\frac{s_y}{x}-\frac{1}{x}\left(s_x+x.\frac{ds_x}{dx}\right)=\frac{s_y}{x}-\frac{1}{x}.\frac{d(x.s_x)}{dx}.$$

之ニ (e) 式ノ s_x, s_y ノ値ヲ代入スレバ

$$\frac{ds_s}{d\lambda}=\frac{1}{x}\left[p-\frac{m.\mathrm{E}.\lambda}{m^2-1}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{m}{x}.\frac{dz}{dx}\right)-p+\frac{m.\mathrm{E}.\lambda}{m^2-1}\left(m.\frac{d^2z}{dx^2}+m.x.\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right],$$

$$\frac{ds_s}{d\lambda}=\frac{m^2.\mathrm{E}.\lambda}{m^2-1}\left[\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}.\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}.\frac{dz}{dx}\right].$$

括弧內ノ量ハ λ ノ函數ニアラザルニヨ上式ヲ積分スレバ

$$s_s=\frac{m^2.\mathrm{E}.\lambda^2}{2(m^2-1)}\left[\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}.\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}.\frac{dz}{dx}\right]+\mathrm{C}.$$

鈑ノ上面又ハ下面卽チ $\lambda=\pm\frac{t}{2}$ ニ對シテハ應剪力ハ零トナルニヨ

$$\mathrm{C}=-\frac{m^2.\mathrm{E}\,t^2}{8(m^2-1)}\left[\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}.\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}.\frac{dz}{dx}\right].$$

$$\therefore\ s_s=-\frac{m^2.\mathrm{E}(t^2-4\lambda^2)}{8(m^2-1)}\left[\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}.\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}.\frac{dz}{dx}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(f)$$

之ハ中央層ヨリ λ ナル距離ニアル一點 (x, z) ニ於ケル單位應剪力ニシテ之ハ又該點ヲ含ム鉛直平面ニ沿ヒテ作用スル單位應剪力ナリ．(f) 式ノ負ノ符號ハ第 123 圖 (b) ニ記シタル應剪力ノ方向ガ反對ニシテ直角 A, C ハ鈍角ニ變ズルコトヲ表ハスモノナリ．

玆ニ平鈑ガ中心ニ於テ W ナル荷重並ニ單位面積ニ付 w ナル分布荷重ヲ受クル場合ヲ考フルニ

鈑ノ中心ヨリxナル距離ニ於ケル斷面(潰壞面)ノ剪斷力

$$=\pi x^2.w+\mathrm{W}.$$

之ハxヲ半徑トセル圓鈑ノ部分ヲ他部分ヨリ剪斷セントスル作用ヲナスモノニシテ之ニ抵抗シテ平衡ヲ保ツモノハ其斷面ニ作用スル全應剪力ナリ.

$$\therefore\quad \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} s_s.2\pi x\,d\lambda=\pi x^2.w+\mathrm{W},\qquad \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} s_s.d\lambda=\frac{1}{2}\left(w.x+\frac{\mathrm{W}}{\pi x}\right).$$

之ニ(f)式ノs_sノ數値ヲ代入スレバ

$$\frac{m^2.\mathrm{E}}{8(m^2-1)}\left[\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}.\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}.\frac{dz}{dx}\right]\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}}(t^2-4\lambda^2)\,d\lambda=\frac{1}{2}\left(w.x+\frac{\mathrm{W}}{\pi.x}\right),$$

$$\frac{m^2.\mathrm{E}}{8(m^2-1)}\left[\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}.\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}.\frac{dz}{dx}\right]\left[\left(\frac{t}{2}t^2+\frac{t}{2}.t^2\right)-\left(\frac{4}{3}.\frac{t^3}{8}+\frac{4}{3}.\frac{t^3}{8}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(w.x+\frac{\mathrm{W}}{\pi.x}\right),$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}.\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}.\frac{dz}{dx}=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}\left(w.x+\frac{\mathrm{W}}{\pi.x}\right),$$

$$\therefore\quad s_s=\frac{m^2.\mathrm{E}(t^2-4\lambda^2)}{8(m^2-1)}\times\left\{\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}\left(w.x+\frac{\mathrm{W}}{\pi.x}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{4}.\frac{t^2-4\lambda^2}{t^3}\left(w.x+\frac{\mathrm{W}}{\pi.x}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(g)$$

是レ平鈑ノ任意ノ點ニ於ケル單位應剪力ナリ. 而シテ(g)式ガ表ハス如ク$\mathrm{W}>0$ニシテ且平鈑ガ完全ニ彈性的ノモノナラバ鈑ノ中心點$(x=0)$ニ於ケルs_sハ無窮大ナルベキナリ. 尤モ實際ニハ荷重ハ眞ノ一點ニ作用スルニアラズ多少ノ面積上ニ作用スルモノナルニヨ事實上中心點ニ於ケルs_sハ無窮大ニナルコトナシ.

次ニ平鈑子午線ノ方程式ヲ求メントス.

$$\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}.\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}.\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}.\frac{dz}{dx}\right)=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}\left(w.x+\frac{\mathrm{W}}{\pi.x}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}.\frac{dz}{dx}=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{x^2}{2}.w+\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.\log_e x+\mathrm{C}_1.$$

$$x.\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x.\frac{dz}{dx}\right)=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{x^3}{2}.w+\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.x.\log_e x+\mathrm{C}_1.x,$$

$$x.\frac{dz}{dx}=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{x^4}{8}.w+\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.\frac{x^2}{2}.\log_e x-\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.\frac{x^2}{4}+\frac{\mathrm{C}_1.x^2}{2}+\mathrm{C}_2,$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{x^3}{8}.w+\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.\frac{x}{2}.\log_e x-\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.\frac{x}{4}+\frac{\mathrm{C}_1.x}{2}+\frac{\mathrm{C}_2}{x},$$

$$\therefore\quad z=\int dz=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{x^4}{32}.w+\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{2\pi}\left[\log_e x-\frac{1}{2}\right]\frac{x^2}{2}$$

$$-\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.\frac{x^2}{8}+\frac{\mathrm{C}_1.x^2}{4}+\mathrm{C}_2.\log_e x+\mathrm{C}_3.$$

即チ

$$z=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{x^4}{32}+\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.\frac{x^2}{4}(\log_e x-1)+\frac{\mathrm{C}_1.x^2}{4}$$

$$+\mathrm{C}_2.\log_e x+\mathrm{C}_3\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(h)$$

是レ平鈑曲面ノ子午線ノ一般方程式ニシテ積分常數C_1, C_2及C_3ハ夫々ノ場合ニ應ジ適當ニ定ムベキモノナリ.

$x=0$ナル點ニ於テ$\dfrac{dz}{dx}=0$ナルニヨ$\mathrm{C}_2=0$ナリ. 從テ(h)式ヨリ

$$z=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{x^4}{32}+\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t}.\frac{\mathrm{W}}{\pi}.\frac{x^2}{4}(\log_e x-1)+\frac{\mathrm{C}_1.x^2}{4}+\mathrm{C}_3.$$

特別ノ場合

(第一) $\mathrm{W}=0$ニシテ荷重wノミ作用スル場合.

$$z=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{x^4}{32}+\frac{\mathrm{C}_1.x^2}{4}+\mathrm{C}_3.$$

$x=r$ニ對シテ$z=0$ナルニヨ

$$0=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{r^4}{32}+\frac{\mathrm{C}_1 r^2}{4}+\mathrm{C}_3.$$

$$\therefore\quad \mathrm{C}_3=-\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{r^4}{32}-\frac{\mathrm{C}_1 r^2}{4}.$$

$$z=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{x^4}{32}+\frac{\mathrm{C}_1.x^2}{4}-\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{r^4}{32}-\frac{\mathrm{C}_1 r^2}{4}$$

$$=-\left(\frac{r^2-x^2}{4}\right)\left[\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{r^2+x^2}{8}+\mathrm{C}_1\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

之ヲ微分スレバ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}\,t^3}.w.\frac{x^3}{8}+\frac{\mathrm{C}_1.x}{2},\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{3}{8}.x^2+\frac{\mathrm{C}_1}{2}.$$

此等ノ値ヲ(b)式ニ代入スレバ

$$\epsilon_x=\epsilon'_x-\lambda.\frac{d^2z}{dx^2}=\epsilon_x'-\lambda\left[\frac{3}{8}.\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.x^2+\frac{\mathrm{C}_1}{2}\right].$$

$$\therefore\quad \mathrm{E}.\epsilon_x=\frac{m-1}{m}.p-\mathrm{E}\left[\frac{3}{8}.\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.x^2+\frac{\mathrm{C}_1}{2}\right]\lambda\ldots\ldots\ldots\ldots(j)$$

又

$$\epsilon_y=\epsilon_y'-\frac{\lambda}{x}.\frac{dz}{dx}=\epsilon_y'-\lambda\left[\frac{6(m^2-1)}{m^2\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{x^2}{8}+\frac{\mathrm{C}_1}{2}\right].$$

$$\mathrm{E}.\epsilon_y=\mathrm{E}.\epsilon_y'-\mathrm{E}\left[\frac{1}{8}.\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}\,t^3}.w.x^2+\frac{\mathrm{C}_1}{2}\right]\lambda.$$

而シテ(d)式ヨリ

$$\mathrm{E}.\epsilon_y'=p.\frac{m-1}{m}.$$

$$\therefore\quad \mathrm{E}.\epsilon_y=\frac{m-1}{m}p-\mathrm{E}\left[\frac{1}{8}.\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.x^2+\frac{\mathrm{C}_1}{2}\right]\lambda\ldots\ldots\ldots\ldots(k)$$

(g)式中Wヲ零ト置ケバ

$$s_s=\frac{3}{4}.\frac{t^2-4\lambda^2}{t^3}.w.x.$$

(第二) W=0ニシテ且平鈑ガ周邊ニテ支ヘラルル場合　$x=r$ ニ對シテハλノ値ニ拘ハラズ $s_x'=s_x=p=0$ ナルユエ(e)式ヨリ

$$m\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=r}+\frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=r}=0.$$

(i)式ヨリ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}\,t^3}.w.\frac{x^3}{8}+\frac{\mathrm{C}_1.x}{2},\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}\,t^3}.w.\frac{3}{8}.x^2+\frac{\mathrm{C}_1}{2}.$$

$$\therefore\quad m\left[\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{3}{8}.r^2+\frac{\mathrm{C}_1}{2}\right]+\frac{1}{r}\left[\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.\frac{r^3}{8}+\frac{\mathrm{C}_1.r}{2}\right]=0.$$

$$\mathrm{C}_1=-\frac{3}{2}.\frac{(m-1)(3m+1)}{m^2}.\frac{w.r^2}{\mathrm{E}.t^3}.$$

此値ヲ(i)式ニ代入スレバ

$$z=\frac{3}{16}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{w}{\mathrm{E}\,t^3}\left[-x^2+\frac{5m+1}{m+1}.r^2\right](r^2-x^2).$$

x ヲ零ト置ケバ最大撓度ヲ得.

$$最大\ z=\frac{3}{16}.\frac{(m-1)(5m+1)}{m^2}.\frac{w.r^4}{\mathrm{E}.t^3}\ldots\ldots\ldots\ldots(100)$$

(j)式ニ於テpヲ零トシ且 C_1 ノ値ヲ代入スレバ

$$\mathrm{E}.\epsilon_x=\frac{3}{4}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{w}{t^3}\left[-3x^2+\frac{3m+1}{m+1}.r^2\right]\lambda.$$

(k)式ニ C_1 ノ値ヲ代入スレバ

$$\mathrm{E}\,\epsilon_y=\frac{3}{4}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{w}{t^3}\left[-x^2+\frac{3m+1}{m+1}.r^2\right]\lambda.$$

$x=0,\ \lambda=\pm\frac{t}{2}$ ニ對シテ $\mathrm{E}.\epsilon_x$, $\mathrm{E}.\epsilon_y$ ノ値ハ最大ナリ. 依テ

$$最大(\mathrm{E}.\epsilon_x)=最大(\mathrm{E}.\epsilon_y)=\pm\frac{3}{8}.\frac{(m-1)(3m+1)}{m^2}.\frac{w.r^2}{t^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(100_a)$$

s_s ノ値ハ $x=r,\ \lambda=0$ ニ對シテ最大ナリ. 即チ

$$最大\ s_s=\frac{3}{4}.\frac{r}{t}.w.$$

今 m ヲ3トシ又作用強度ヲ s トスレバ

$$最大(\mathrm{E}.\epsilon_x)=最大(\mathrm{E}\,\epsilon_y)=\frac{5}{6}.\frac{r^2.w}{t^2}$$

ナルユエ

$$s=\frac{5}{6}.\frac{r^2.w}{t^2},\qquad t=r\sqrt{\frac{5w}{6s}}\ldots\ldots\ldots\ldots(100_b)$$

(第三) 周邊ニテ固定セラレタル平鈑ガ等布荷重ノミ受クル場合　$x=r$ ニ對シテ $\frac{dz}{dx}=0$ ナルユエ(i)式ノ微分係數ヨリ

$$\left[\frac{dz}{dx}\right]_{x=r}=\frac{3}{4}.\frac{(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.r^3+\frac{\mathrm{C}_1.r}{2}=0,$$

$$\therefore\quad \mathrm{C}_1=-\frac{3}{2}.\frac{m^2-1}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.r^2,$$

$$z=-\left[\frac{6(m^2-1)}{m^2.\mathrm{E}\,t^3}.w.\frac{r^2+x^2}{8}-\frac{3}{2}.\frac{m^2-1}{m^2.\mathrm{E}.t^3}.w.r^2\right]\left(\frac{r^2-x^2}{4}\right),$$

$$z=\frac{3}{16}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{w}{\mathrm{E}.t^3}.(r^2-x^2)^2$$

$$最大撓度\ z=\frac{3}{16}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{w.r^4}{\mathrm{E}.t^3}\ldots\ldots\ldots\ldots(101)$$

(j)式ニ C_1 ノ値ヲ代入スレバ

$$\mathrm{E}.\epsilon_x=\frac{m-1}{m}.p+\frac{3}{4}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{w}{t^3}.(r^2-3x^2)\lambda.$$

(k) 式 = C_1 ノ値ヲ代入スレバ

$$\mathrm{E}.\epsilon_y=\frac{m-1}{m}.p+\frac{3}{4}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{w}{t^3}.(r^2-x^2)\lambda.$$

$p\geqq 0$ ナレバ $\mathrm{E}.\epsilon_x$ ノ値ハ $x=0,\ \lambda=\frac{t}{2}$ 及 $x=r,\ \lambda=-\frac{t}{2}$ ニ對シテ最大ナリ．又 $\mathrm{E}.\epsilon_y$ ノ値ハ $x=0,\ \lambda=\frac{t}{2}$ ニ對シテ最大ニシテ $\mathrm{E}.\epsilon_x$ ノ第一最大値ニ等シ．即チ

第一最大 $(\mathrm{E}.\epsilon_x)$＝最大 $(\mathrm{E}.\epsilon_y)$

$$=\frac{m-1}{m}.p+\frac{3}{8}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{r^2}{t^2}.w \qquad (101_a)$$

$$\text{第二最大}(\mathrm{E}.\epsilon_x)=\frac{m-1}{m}.p+\frac{3}{4}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{r^2}{t^2}.w \qquad (101_b)$$

此中ニテ第二者ハ明カニ最大値ナリ．

$p=0$ ナル場合ニハ

$$\text{最大}(\mathrm{E}.\epsilon_x)=\frac{3}{4}.\frac{m^2-1}{m^2}.\frac{r^2}{t^2}.w \qquad (101_c)$$

此式ニ於テ m ヲ 3 トスレバ

$$\text{最大}(\mathrm{E}.\epsilon_x)=\frac{2}{3}.\frac{r^2.w}{t^2}$$

トナルニエ作用強度ヲ s トセバ

$$s=\frac{2}{3}.\frac{r^2.w}{t^2},\qquad t=r\sqrt{\frac{2}{3}.\frac{w}{s}} \qquad (101_d)$$

(II) 矩形鈑　周邊ニテ固定セラレタル矩形鈑ガ等布荷重ヲ受ケタル場合ニ就キぐらゝすほっふ氏ガ與ヘタル解法ハ次ノ如シ．

1°．鈑ノ中央層ノ方程式ハ x 及 y ノ函數タルベキナリ．

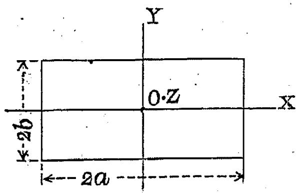
2°．鈑ノ邊ノ長サヲ $2a,\ 2b$ トスレバ求ムル所ノ函數ハ

(α)　$b=\infty$ ナルトキ y ノ總テノ値ニ對シテ

$$z=\frac{w}{2\mathrm{E}.t^3}(a^2-x^2)^2$$

(β)　$x=\infty$ ナルトキ x ノ總テノ値ニ對シテ

第 124 圖



$$z=\frac{w}{2\mathrm{E}.t^3}(b^2-y^2)^2$$

ナルベキナリ．何者此場合ニハ平鈑ハ兩端固定ノ一ツノ桁ト見做シ得ルヲ以テナリ．

以上ノ條件ヲ滿足スベキ函數ハ次ノ如シ．

$$z=\frac{w}{2\mathrm{E}.t^3}.\frac{(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2}{a^4+b^4}.$$

$x=y=0$ ニ對シテ z ハ最大ナリ．即チ

$$\text{最大}\ z=\frac{1}{2}.\frac{w}{\mathrm{E}.t^3}.\frac{a^4.b^4}{a^4+b^4} \qquad (102)$$

z ノ方程式ヲ微分スレバ

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{2w}{\mathrm{E}.t^3}.\frac{(a^2-3x^2)(b^2-y^2)^2}{a^4+b^4},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{2w}{\mathrm{E}.t^3}.\frac{(a^2-x^2)^2(b^2-3y^2)}{a^4+b^4},$$

$$\frac{d^2z}{dx.dy}=\frac{8w}{\mathrm{E}.t^3}.\frac{(a^2-x^2)\,x.(b^2-y^2)y}{a^4+b^4}.$$

$\frac{d^2z}{dx^2}$ ハ $x=\pm a,\ y=0$ ニ對シテ最大ナリ．即チ

$$\text{最大}\ \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4w}{\mathrm{E}.t^3}.\frac{a.^2b^4}{a^4+b^4}.$$

$\frac{d^2z}{dy^2}$ ハ $y=\pm b,\ x=0$ ニ對シテ最大ナリ．即チ

$$\text{最大}\ \frac{d^2z}{dy^2}=\frac{4w}{\mathrm{E}.t^3}.\frac{a^4.b^2}{a^4+b^4}.$$

$\frac{d^2z}{dx.dy}$ ハ $x^2=\frac{1}{3}a^2,\ y^2=\frac{1}{3}b^2$ ニ對シテ最大ナリ．即チ

$$\text{最大}\ \frac{d^2z}{dx.dy}=\frac{32}{27}.\frac{w}{\mathrm{E}.t^3}.\frac{a^3.b^3}{a^4+b^4}.$$

$$\therefore\ \text{最大}\ \epsilon_x=\epsilon_x'-\frac{1}{m}.\epsilon_y'\pm\frac{t}{2}.\frac{4w}{\mathrm{E}.t^3}.\frac{a^2.b^4}{a^4+b^4},$$

$$\text{最大}(\mathrm{E}.\epsilon_x)=s_x'-\frac{1}{m}.s_y'\pm\frac{2b^4}{a^4+b^4}.\frac{a^2}{t^2}.w \qquad (102_a)$$

同樣ニ

$$\text{最大}\ (\mathrm{E}.\epsilon_y)=s_y'-\frac{1}{m}.s_x'\pm\frac{2a^4}{a^4+b^4}.\frac{b^2}{t^2}.w\ldots\ldots\ldots\ldots(102_b)$$

圓鈑ニ於ケルガ如ク中央層ヨリ鈑ノ任意ノ點ニ至ル距離ヲλ；(x, y, z)點ニ於テOXニ並行ナル正斷面(Normal Section)ノ曲度半徑ヲρ_x；(x, y, z)點ニ於テOYニ並行ナル正斷面ノ曲度半徑ヲρ_yトスレバ一般ニ

$$\epsilon_x=\epsilon_x'+\frac{\lambda}{\rho_x}.\qquad \epsilon_y=\epsilon_y'+\frac{\lambda}{\rho_y}.$$

此ニ於テϵ_x'及ϵ_y'ハ夫々OX及OYノ方向ニ於ケル中央層ノ變形ナリトス．又微分學ニヨリ次ノ關係ヲ得．

$$\rho_x=-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\frac{d^2z}{dx^2}.\cos^2\alpha+2\frac{d^2z}{dx.dy}.\cos\alpha.\cos\beta+\frac{d^2z}{dy^2}.\cos^2\beta}.$$

此式中αハ法線(Normal)トZ軸トナス角ニシテβハ法線トX軸トナス角ナリ，而シテ$\frac{dz}{dx}$及$\frac{dz}{dy}$ハ傾斜ヲ表ハシ其値小ナルユヱ$\cos\alpha\fallingdotseq 1$及$\cos\beta\fallingdotseq 0$ナリ．然ラバ

$$\frac{1}{\rho_x}=-\frac{d^2z}{dx^2},\ \text{及}\ \frac{1}{\rho_y}=-\frac{d^2z}{dy^2}.$$

$$\therefore\quad \epsilon_x=\epsilon_x'-\lambda.\frac{d^2z}{dx^2},\qquad \epsilon_y=\epsilon_y'-\lambda.\frac{d^2z}{dy^2}.$$

次ニx及yノ變化ヲ夫々ξ及ηトスレバ

$$\xi=\int_0^x\epsilon_x.dx=\int_0^x\left[\epsilon_x'-\lambda.\frac{d^2z}{dx^2}\right]dx=\left[x.\epsilon_x'-\lambda.\frac{dz}{dx}\right]_0^x=x.\epsilon_x'-\lambda.\frac{dz}{dx},$$

$$\therefore\quad \frac{d\xi}{dy}=-\lambda.\frac{d^2z}{dx.dy}.$$

$$\eta=\int_0^y\epsilon_y.dy=y.\epsilon'_y-\lambda.\frac{dz}{dy},$$

$$\therefore\quad \frac{d\eta}{dx}=-\lambda.\frac{d^2z}{dx.dy}.$$

然ルニ

$$s_{xy}=\mathrm{G}.\gamma_{xy}=\mathrm{G}\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)=-2\mathrm{G}.\lambda.\frac{d^2z}{dx.dy}.$$

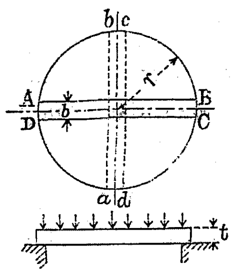
$$\therefore\quad \text{最大}\ s_s=2\mathrm{G}.\lambda\frac{d^2z}{dx.dy}=\frac{m.\mathrm{E}}{m+1}.\frac{t}{2}.\frac{d^2z}{dx.dy}$$

$$=\frac{8}{27}.\frac{m}{m+1}.\frac{2a^2b^2}{a^4+b^4}.\frac{a.b}{t^2}.w\ldots\ldots\ldots\ldots(102_c)$$

ϵ_x及ϵ_yガ最大ナル所ニ於テハ$s_s=0$ニシテs_sガ最大ナル所ニ於テハ$s_x=s'_x$, $s_y=s_y'$ナリ．

(III)略算法 (第一)周邊ニテ支ヘラレタル圓鈑ガ單位面積ニ付wナル等布荷重ヲ受クル場合

第 125 圖



鈑ニ加ハル全荷重$=\pi r^2.w$,

全圓周ニ於ケル反力$=\pi r^2.w$,

圓周ノ單位長サニ於ケル反力$=\frac{\pi r^2.w}{2\pi r}$

$=\frac{r}{2}w.$

第125圖ノ如クABCDナル細長片ヲ取リ此幅ハ甚狭クシテ中心線ハ鈑ノ直徑ト一致スルモノトセバ

細長片ノ各端ニ於ケル反力$=b.\frac{r}{2}w,$

細長片ニ加ハル全荷重$=b.2rw.$

是ニ由テ見レバ細長片ノ兩端ニ於ケル反力ノ和ハ細長片ニ加ハル全荷重ノ半分ナルユヱ此細長片ガ平衡ニアル爲ニハAB, DCナル兩側鉛直面ニ沿ヒテbrwナル剪斷力ガ作用スベキナリ．此剪斷力ノ配布ハ不明ナレド之ハ均等ニ配布セラルヽモノト假定スルヲ得ベシ．今細長片ABCDヲ一ツノ單桁ト見做セバ中央ニ於ケル彎曲率ハ

$$\mathrm{M}=\frac{1}{2}brw.r-brw.\frac{r}{2}+\frac{1}{2}brw.\frac{1}{2}r=\frac{1}{4}br^2w.$$

細長片ノ中央ニ於ケル纖維單位應力ハ

$$s=\frac{\mathrm{M}.\frac{t}{2}}{\mathrm{I}}=\frac{\frac{1}{4}br^2w.\frac{t}{2}}{\frac{1}{12}bt^3}=\frac{3}{2}.\frac{r^2}{t^2}w$$

而シテABCDト直角ヲナセル細長片$abcd$ノ中央ニ於ケル纖維單

位應力モ亦$\frac{3}{2}\cdot\frac{r^2}{t^2}\cdot w$ナリ. 依テ

$$最大(E.\epsilon)=\pm\frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{r^2}{t^2}\cdot w \qquad \cdots\cdots(103)$$

mヲ3トセバ

$$最大(E.\epsilon)=\pm\frac{r^2}{t^2}\cdot w \qquad \cdots\cdots(103_a)$$

正確ナル解法(100_b)式ニヨレバ

$$最大(E.\epsilon)=\pm\frac{5}{6}\cdot\frac{r^2}{t^2}\cdot w$$

即チ(103_b)式ガ與フル値ハ此$\frac{6}{5}$ナリ.

鈑ガ周邊ニテ固定セラルヽ場合ニハ彈曲線ノ方程式ヲ知ラザルベカラズ. 從テ上記ノ如キ略算法ニ依ル能ハズ. ((101_a)式參照).

例題 茲ニ直徑3呎ノ鑄鐵圓鈑アリ. 之ガ周邊ニテ支ヘラレテ250听毎平方吋ノ等布荷重ヲ受クルトキ最大單位應張力ヲシテ3,600听毎平方吋ヨリ超過セシメザラントス. 其厚サ如何.

mヲ3ニ取レバ(103_a)式ヨリ

$$t=18\sqrt{\frac{250}{3,600}}=4\frac{3}{4}\ 吋.$$

(100_b)式ヲ用フレバ

$$t=18\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{250}{3,600}}=4\frac{3}{8}\ 吋.$$

斯ク兩式ガ與フル値ニ$\frac{3}{8}$吋ノ差アリ.

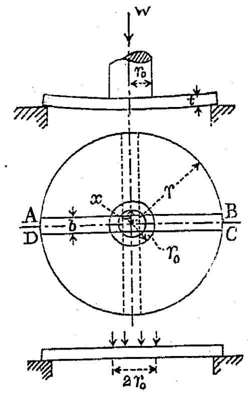
(第二)周邊ニテ支ヘラレタル圓鈑ガ中心ニ於テWナル集中荷重ヲ受クル場合

r_0ヲ半徑トセル小圓內ノ單位面積ニ加ハル荷重$=\frac{W}{\pi r_0^2}$,

xヲ半徑トセル圓($x<r_0$)ノ面上ニ加ハル全荷重$=\pi x^2\times\frac{W}{\pi r_0^2}$

$$=\frac{W.x^2}{r_0^2},$$

第126圖



半徑xノ圓周ニ沿ヒテ單位ノ長サニ作用スル剪斷力$=-\dfrac{\frac{W.x^2}{r_0^2}}{2\pi x}=-\dfrac{W.x}{2\pi r_0^2}$.

半徑xノ圓周ニ沿ヒテbナル長サノ間ニ作用スル剪斷力ヲVトスレバ

$$V=-\frac{W.x}{2\pi r_0^2}.b.$$

第一ノ場合ニ於ケルガ如クbナル幅ノ細長片ABCDヲ取リ之ヲ一ツノ單桁ト見做シ徑間ノ中央ヨリxナル距離ニ於ケル斷面ノ剪斷力ガ$-\frac{W.x}{2\pi r_0^2}.b$ナリトスレバ

$$dM=V.dx,\quad M=\int dM=-\int V.dx+C_1=-\int\frac{W.x}{2\pi r_0^2}.b.dx+C_1$$

$$=-\frac{W.b.x^2}{4\pi r_0^2}+C_1 \qquad \cdots\cdots(a)$$

次ニ小圓外ニ於テzヲ半徑トセル圓($r_0<z<r$)ヲ考フルニ此圓周上ニ於テbナル長サノ間ニ作用スル剪斷力ヲV'トスレバ

$$V'=-\frac{W}{2\pi z}.b,\quad M'=\int dM'=-\int V'.dz+C_2=-\int\frac{W.b}{2\pi z}.dz+C_2$$

$$=-\frac{W.b}{2\pi}.\log_e z+C_2 \qquad \cdots\cdots(b)$$

(b)式ニ於テzヲrトセバ$M'=0$ナルニヨ$C_2=\frac{W.b}{2\pi}.\log_e r$ヲ得.

$$\therefore\ M'=\frac{W.b}{2\pi}.\log_e\frac{r}{z},\quad M'_{z=r_0}=\frac{W.b}{2\pi}.\log_e\frac{r}{r_0} \qquad \cdots\cdots(c)$$

(a)式ニ於テxヲr_0トスレバ$M_{x=r_0}=M'_{z=r_0}$ナルベキヲ以テ

$$\frac{W.b}{2\pi}.\log_e\frac{r}{r_0}=-\frac{W.br_0^2}{4\pi r_0^2}+C_1,\quad C_1=\frac{W.b}{2\pi}\left[\log_e\frac{r}{r_0}+\frac{1}{2}\right]$$

$$\therefore\ M=\frac{W.b}{2\pi}\left[-\frac{x^2}{2r_0^2}+\log_e\frac{r}{r_0}+\frac{1}{2}\right] \qquad \cdots\cdots(d)$$

(d)式中xヲ零ト置ケバ細長片ノ中央即チ鈑ノ中心ニ於ケル彎曲率ヲ得,

$$M_{x=0}=\frac{W.b}{2\pi}\left[\log_e\frac{r}{r_0}+\frac{1}{2}\right]$$

依テ鈑ノ中心ニ於ケル纎維單位應力ハ

$$s=\frac{M.\frac{t}{2}}{I}=\frac{W.b}{2\pi}\left[\log_e\frac{r}{r_0}+\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\frac{1}{12}bt^3}=\frac{3W}{\pi t^2}\left[\log_e\frac{r}{r_0}+\frac{1}{2}\right].$$

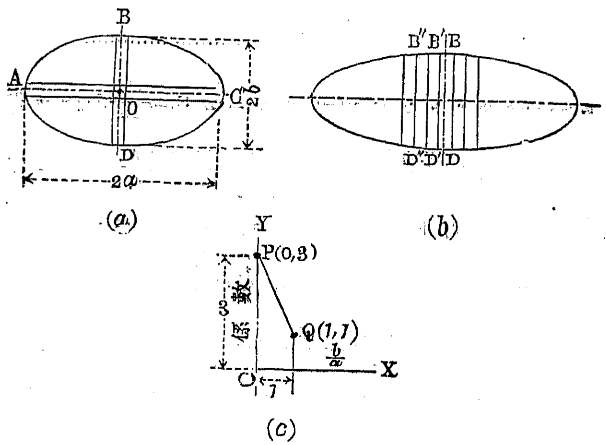
然ルニABCDニ垂直ナル細長片ノ中央ニ於テモ亦之ト等大ノ單位應力ガ作用スベキニヨリ

$$最大(E\epsilon)=\pm\frac{m-1}{m}\cdot\frac{3W}{\pi t^2}\left[\log_e\frac{r}{r_0}+\frac{1}{2}\right]\text{......................}(104)$$

此式ニ於テ$r_0=r$從テ$W=\pi r_0^2 w$ト置ケバ(103)式ト同一ノ式ヲ得.

(第三)周邊ニテ支ヘラレタル楕圓鈑ガ單位面積ニ付wナル等布荷重ヲ受クル場合 此場合ニ鈑ノ中心Oニ於テ彎曲應力ガ最大ナルコトハ想像シ得ベシ. 今前同樣ニ短軸及長軸ヲ夫々中心線トセル細長片BD及ACヲ取リ此等ヲ各々獨立ノ單桁ト考フレバ各細長片ハ等布荷重並ニ其兩側面ニ沿ヒテ作用スル剪斷力ヲ受クベシ. 而シテ剪斷力ノ大サ及配布ハ共ニ不明ナレドモ細長片BD, ACガ受クル荷重ト剪斷力トノ代數和ヲ夫々W_1, W_2トスレバ

第127圖



細長片BD及ビACノ中央點ニ於ケル撓度ヲ等値トスレバ

$$\frac{5}{384}\cdot\frac{W_1(2b)^3}{EI}=\frac{5}{384}\cdot\frac{W_2(2a)^3}{EI}\qquad\therefore\ W_1.b^3=W.a^3$$

細長片ノ兩端ニ於ケル反力ハ荷重ニ正比例スベキヲ以テB又ハDニ於ケル反力ヲR_1, A又ハCニ於ケル反力ヲR_2トセバ

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{W_1}{W_2}=\frac{a^3}{b^3}$$

ヲ得. 此ノ如クR_1, R_2ハa^3, b^3ニ反比例スルヲ以テ楕圓鈑ノ周邊ニ於ケル反力ハ均等ナラズB及Dニ於テ最大ニシテA及Cニ於テ最小ナルヲ知ル.

$$M_1=R_1.b-\frac{W_1 b}{4}=細長片BDノ中央點Oニ於ケル彎曲率.$$

$$M_2=R_2.a-\frac{W_2.a}{4}=細長片ACノ中央點Oニ於ケル彎曲率.$$

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{R_2.\frac{a^3}{b^3}.b-W_2.\frac{a^3}{b^3}.\frac{b}{4}}{R_2.a-W_2\frac{a}{4}}=\frac{a^2}{b^2}.$$

即チ彎曲率ハa^2, b^2ニ反比例ス. 然ラバ彎曲率ハ細長片BDニ於テ最大ニシテACニ於テ最小ナリ. 從テ彎曲應力モ亦細長片BDニ於テ最大ニシテACニ於テ最小ナルヲ知ル. 換言スレバ$a>b$ナレバO點ニ於テBDナル方向ノ彎曲應力ハ之ニ垂直ナル方向ノ應力ヨリモ大ニシテ鈑中ノ最大ナルモノナリ.

今最大應力ノ近似値ヲ定メンニ第127圖(b)ノ如クBDニ並行ナル數多ノ細長片B′D′, B″D″等ニ分ツトキ此等ノ長サニ餘リ差異ナキ程ニaガbニ比シテ甚大ナリト假定セヨ. 然ラバ細長片BD, B′D′ノ撓度ハ殆ド同一ニシテ其境界即チBDノ兩側ニ於テ剪斷力ノ作用スルコトナク從テBDハ何等控制ヲ受ケザル單桁ト見做スヲ得ベシ. 此假定ニ據レバ

$$細長片BDノ中央ニ於ケル彎曲率=\frac{1}{8}(wa)(2b)^2=\frac{1}{2}w.a.b^2,$$

$$細長片BDノ斷面係數=\frac{1}{6}a.t^2.$$

但 a ハ細長片ノ幅ニシテ t ハ鈑ノ厚サナリトス.

$$\therefore\ \pm\frac{\frac{1}{2}w.a.b^2}{\frac{1}{6}a.t^2}=\pm 3w.\frac{b^2}{t^2}=0\text{ 點ニ於ケル縁維應力.}$$

實際ハ細長片BDノ兩側ニ作用スル剪斷力ノ爲ニ控制セラルヽ故撓度減少シ應力ハ $\pm\frac{3w.b^2}{t^2}$ ヨリモ多少減ゼラルベシ.

次ニ $a=b$ 即チ楕圓ガ圓トナルトキハ(103_a)式ニヨリ縁維應力ハ $\pm\frac{b^2}{t^2}W$ ヲ得. 夫故ニ上記二ツノ場合ノ外ハ $3\frac{w.b^2}{t^2}$ ト $\frac{b^2}{t^2}.w$ トノ中間ノ應力ヲ受クルモノト見做スヲ得. 係數ガ $\frac{b}{a}$ ノ値ニ對シテ如何ニ變ズルヤ不明ナレドモ之ヲ $\frac{b}{a}$ ノ一次函數ト假定シ $\frac{b}{a}=0$ ナルトキ係數ガ3ニシテ $\frac{b}{a}=1$ ナルトキハ係數ガ1ナル條件ニ依リ次式ガ得ラル.

$$\frac{1-0}{3-1}=\frac{1-x}{y-1}\text{……直線PQノ方程式}$$

$$y=2(1.5-x),\quad \text{係數}=2\left(1.5-\frac{b}{a}\right),$$

$$\pm 2\left(1.5-\frac{b}{a}\right)\frac{b^2}{t^2}.w=0\text{ 點ニ於ケル最大縁維應力}\ldots\ldots(105)$$

めりまん氏(M. Merriman)ガぐらゝすほっふ氏ノ研究及ばっは氏(C. Bach)ノ實驗ノ結果ニ基キ錬鐵又ハ鋼楕圓鈑ニ就テ與ヘタル公式ハ次ノ如シ.

鈑ガ周邊ニテ支ヘラルヽ場合ニハ

許容單位應張力(Allowable tensile unit-stress)

$$=2\frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{b^2}{t^2}.w\ldots\ldots(106_a)$$

鑄鐵鈑ナレバ

$$\text{許容單位應張力}=\frac{9}{4}.\frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{b^2}{t^2}.w\ldots\ldots(106_b)$$

鈑ガ周邊ニテ固定セラルヽ場合ニハ

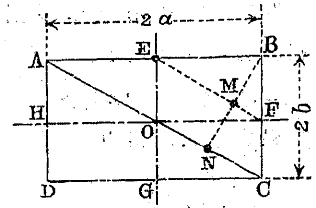
$$\text{許容單位應張力}=\frac{4}{3}.\frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{b^2}{t^2}.w\ldots\ldots(106_c)$$

鑄鐵鈑ナレバ

$$\text{許容單位應張力}=\frac{3}{2}.\frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{b^2}{t^2}.w\ldots\ldots(106_d)$$

(第四)周邊ニテ支ヘラレタル矩形鈑ガ單位面積ニ付 w ナル等布荷重ヲ受クル場合 周邊ノ反力ハ楕圓鈑ニ於ケルト同樣ニ $R_E>R_F$ ナリ(第128圖)而シテAB間ニアリテハEニ於テ最大ニシテA及Bニ近付クニ從ヒ減少ス. 又BC間ニアリテモFニ於テ最大ニシテB及Cニ近付クニ從ヒ減少スルコトヲ想像シ得ベシ. 故ニ對稱軸HFヲ取リテ其一側ニ加ハル荷重及反力ヨリ生ズル彎曲率ノ爲ニ鉛直斷面HFニ如何ナル彎曲應力ヲ生ズルカヲ考フベキナレドモ周邊HA, AB, BFニ於ケル反力ノ配布不明ニシテ反力ニ基因スル彎曲率ヲ知ル能ハズ. 依テ便宜上對角線ACヲ含ム鉛直斷面ACニ於ケル應力ヲ考フベシ. 然ラバ反力ノ配布ハ如何ナリトモ周邊ABニ於ケル反力ノ合力ハABノ中央點Eニ働クベク同樣ニ周邊BCニ於ケル反力ノ合力ハF點ニ働クベシ. 從テ周邊AB, BCニ於ケル反力ノ合力ノ働點ハEF線中ニ在ルベクACヨリ働點迄ノ距離ハ $\mathrm{NM}=\frac{1}{2}.\mathrm{BN}$ ナリ.

第 128 圖



次ニ三角形ABCニ加ハル荷重ノ合成ハ其中心ニ働キACヨリノ距離ハ $\frac{1}{3}.\mathrm{BN}$ ナリ. 而シテ荷重及反力ノ大サハ共ニ $2a.b\,w$ ナルニ ACニ於ケル彎曲率ハ

$$2a.b.w\left(\frac{1}{2}.\overline{\mathrm{BN}}-\frac{1}{3}.\overline{\mathrm{BN}}\right)=\frac{1}{3}.a.b\,w.\overline{\mathrm{BN}}.$$

然ルニ

$$\frac{\overline{\mathrm{BN}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}},\qquad \overline{\mathrm{BN}}=\frac{2a.2b}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2a\,b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

斷面ACノ斷面係數ハ

$$\frac{1}{6}.\overline{\mathrm{AC}}.t^2=\frac{1}{6}.2\sqrt{a^2+b^2}.t^2=\frac{t^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}.$$

故ニ斷面ACニ於ケル平均纖維應力ハ

$$s=\frac{\frac{1}{3}.a.b.w\times\frac{2a.b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{t^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b^2}{t^2}.w \quad\text{..............(107)}$$

$\frac{a}{b}$ガ大ナレバ s ノ値ハ $2.\frac{b^2}{t^2}.w$ ニ近付クベシ．又 $a=b$ ナレバ

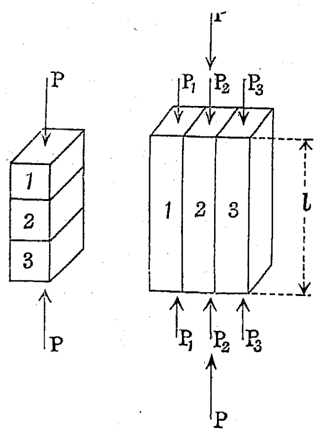
$$s=\frac{b^2}{t^2}.w \quad\text{..............}(107_a)$$

めりまん氏ガばっは氏ノ實驗ヨリ得タル係數ニ基キ矩形鈑及正方形鈑ニ就テ與ヘタル最大單位應張力ハ次ノ如シ．

	周邊ニテ支ヘラレタル場合 最大單位應張力	周邊ニテ固定セラレタル場合 最大單位應張力
矩形鈑	$\frac{9}{4}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b^2}{t^2}.w$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b^2}{t^2}.w$
正方形鈑	$\frac{9}{8}\cdot\frac{b^2}{t^2}.w$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{b^2}{t^2}.w$

34. 集成棒狀體及集成桁 (Compound Bars and Beams) 第129圖(a)ノ如キ異種類ノ材料ヨリ成レル棒狀體ガ支持シ得ル荷重ハ弱キ斷面ガ支持シ得ル荷重ニ依テ定マルコト明カナリ．而シテ各斷面ノ全應力ハ外力Pニ等シキユエ斷面積ヲ知レバ任意ノ斷面ノ單位應力ヲ見出スヲ得．又各部分ノ長サ及材料ノ彈性係數ヲ知レバ普通ノ棒狀體ニ於ケルト同樣ニシテ各部分ノ縱變形ヲ求メ得ベク全變形ハ各部分ノ變形ノ和ニ等シ．

第 129 圖



(a) (b)

(b)圖ノ場合ニ於テハ各部分ガ支

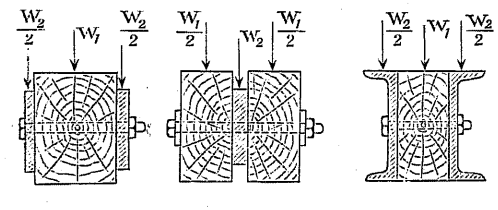
持シ得ル荷重ハ各部分ノ長サノ變化ガ同一ナルコトノ條件ニ依テ見出スヲ得．今三ツノ部分ノ彈性係數ヲ E_1, E_2, E_3；斷面積ヲ A_1, A_2, A_3；共通變形ヲ ϵ；共通ノ長サヲ l トスレバ

$$\epsilon=\frac{P_1.l}{A_1.E_1}=\frac{P_2.l}{A_2.E_2}=\frac{P_3.l}{A_3.E_3},\quad P=P_1+P_2+P_3.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad P_1&=\frac{P.A_1.E_1}{A_1.E_1+A_2.E_2+A_3.E_3}\\ P_2&=\frac{P.A_2.E_2}{A_1.E_1+A_2.E_2+A_3.E_3}\\ P_3&=\frac{P.A_3.E_3}{A_1.E_1+A_2.E_2+A_3.E_3}\\ \epsilon&=\frac{P.l}{A_1.E_1+A_2.E_2+A_3.E_3}\end{aligned}\right\}\text{..............(108)}$$

外力Pガ軸ニ沿ヒテ働クナラバ上述ノ推論ハPノ壓力ナルト張力ナルトヲ問ハズ等シク之ヲ適用スルヲ得ベシ．

第 130 圖



(a) (b) (c)

次ニ第130圖ノ如ク二ツノ異種類ノ材料ヨリ成レル桁ヲ考フルニ集成棒狀體ニ於ケルト同樣ニ荷重ハ各部分ニ適當ノ割合ニテ配分セラルベキナリ．此場合ニ各部分ノ撓度ハ同一ナルヲ以テ

$$\Delta=\frac{W_1.l^3}{\beta E_1.I_1}=\frac{W_2.l^3}{\beta E_2.I_2}.\quad\text{(第四章第29節參照)}$$

$$W=W_1+W_2.$$

此ニ於テWハ桁ガ受クル全荷重ニシテ W_1 及 W_2 ハ各材料ガ受クル荷重ナリトス．然ラバ

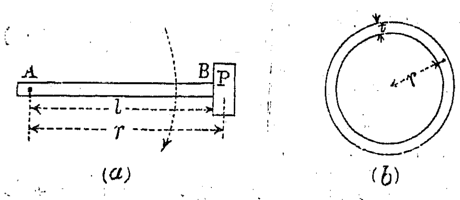
$$W_1=\frac{W}{1+\frac{E_2.I_2}{E_1.I_1}}\qquad W_2=\frac{W}{1+\frac{E_1.I_1}{E_2.I_2}}\text{..............(109)}$$

此式ニ依テ一ツノ集成桁ガ與ヘラレタル荷重ニ對シテ安全ナリヤ否ヤヲ檢シ得ベク,又集成桁ヲ設計スルニハ先ヅ各材料ノ大サ及斷面形ヲ假定シテ之ガ支持シ得ル荷重ヲ算出シ之ト與ヘラレタル荷重トガ一致スル迄計算ヲ繰返セバ可ナリ.

85. 遠心力ヨリ生ズル應力(Centrifugal Stresses)

(I) 遠心力ヨリ生ズル應張力 Pナル重量ヲ有スル物體ノ重心ガvナル等速度ヲ以テ軸ノ周リニ回轉スレバ其軸ト物體トヲ連結スル綱又ハ棒狀體ニ應力ヲ生ズベシ. 此場合ノ遠心力ハ

第131圖



$$Q=\frac{P.v^2}{g.r}$$

ニシテ式中ノrハ軸ヨリ物體ノ重心迄ノ距離,gハ重力ノ加速度ナリトス.

第131圖(a)ニ示セルハ長サlナル均等橫斷面ノ棒狀體ノ一端ニPナル重量ヲ付ケ之ヲシテ他端ニ於ケル軸Aノ周リニ回轉セシムル場合ニシテ,今每秒n回轉ノ速度ヲ保チテ之ヲ回轉スルトキAニ於ケル棒狀體ノ應力ヲ求メントス.

軸ヨリ任意ノ距離r_1ニ於ケル速度ハ$2\pi r_1.n$ニシテ角速度ヲωトスレバr_1ナル距離ニ於ケル速度ハ$r_1\omega$ナルユヱ

$$2\pi r_1.n=r_1.\omega,\quad 2\pi n=\omega.$$

之ハnトωトノ關係ヲ表ハスモノナリ. 又棒狀體ノ重量ヲWトシ此重心ノ速度ヲv_1トスレバ重心ノ遠心力ハ$W.v_1{}^2/\frac{1}{2}gl$ナルユヱ

$$Q=\frac{P.v^2}{g.r}+\frac{W.v_1{}^2}{\frac{1}{2}g.l}=\frac{P(r.\omega)^2}{g.r}+\frac{W(\frac{1}{2}l.\omega)^2}{\frac{1}{2}g.l}=\frac{(P.r+\frac{1}{2}W.l)\omega^2}{g}\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

此遠心力ハABニ應張力ヲ生ジ軸ニ於テハ之ニ直角ナル方向ノ壓力ト彎曲率トヲ生ズベキナリ. (a)式ニ於テP=0ナレバ

$$Q=\frac{\frac{1}{2}W.l.\omega^2}{g}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

ABノ應張力ハ放端ニ於テ零ニシテ軸ニ近付クニ從ヒテ增加シAニ於テハQトナル.

斷面積ヲA;單位容積ノ重量ヲw;軸ヨリ任意ノ點迄ノ距離ヲxトスレバ$(l-x)$ナル長サノ部分ノ重量ハ$w.A(l-x)$ニシテ此重心ヨリ軸迄ノ距離ハ$x+\frac{l-x}{2}=\frac{1}{2}(l+x)$ナリ. 然ラバ此部分ノ遠心力ハ

$$Q'=\frac{w.A(l-x)\frac{1}{2}(l+x).\omega^2}{g}=\frac{w.A.\omega^2(l^2-x^2)}{2g}$$

ニシテ之ハ軸ヨリxナル距離ニ於テ作用スル應張力ナリ. $x=l$ナレバQ'ハ零ニシテ$x=0$ナレバ(b)式ノ如ク$Q'=\frac{1}{2}.\frac{Wl\omega^2}{g}$ヲ得.

軸ヨリxナル距離ニ於テ作用スル單位應張力ハ

$$s_t=\frac{Q'}{A}=\frac{w.\omega^2(l^2-x^2)}{2g}=\frac{1}{2}\left(\frac{w.\omega^2}{g}\right)(l^2-x^2).$$

例題 1. 玆ニ長サ6呎,斷面2吋×2吋ナル錬鐵釬アリ. 此一端ニ400听ノ重量ヲ付シ之ヲ回轉スルトキ釬ヲ破壞スベキ回轉數每秒如何. 但釬ノ全重量ハ80听ニシテ回轉軸ヨリ400听ノ重量ノ重心迄ノ距離ハ$6\frac{1}{4}$呎,錬鐵ノ破壞抗張强度ハ50,000听每平方吋,gハ32.16呎每秒每秒ナリトス,

(a)式ヨリ

$$50{,}000\times4=\frac{(400\times6\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times80\times6)\omega^2}{32.16},$$

$$\omega^2=2{,}347.44,\quad \omega=48.4\text{ 弧度每秒}.$$

$$\therefore\ n=\frac{\omega}{2\pi}=7.8\text{ 回轉每秒}.$$

第131圖(b)ハ薄キ圓箍ニシテ此平均半徑ヲrトシ幅ヲbトスレバ重量ハ$W=2\pi.w.b.r.t$ナリ. 之ガ回轉スルトキハ箍ノ重心ト回轉軸ト一致スルユヱ軸ニ作用スル遠心力ハ零ナリ. 從テ軸ニ加ハル壓力ハ零ナレドモ遠心力ハ半徑ノ方向ニ於テ箍ニ作用シ薄キ管ニ於ケル內壓ト同樣ニ應張力ヲ生ズベシ.

$$Q=\frac{W.v^2}{g.r}=\frac{W.r^2.\omega^2}{g.r}=\frac{2\pi.w.b.r.t.r\omega^2}{g}=\frac{2\pi.w.b.r^2.t.\omega^2}{g}.$$

半徑ノ方向ノ單位壓力ハ

$$p'=\frac{2\pi.w.b.r^2.t.\omega^2}{g}\Big/2\pi.b\,r=\left(\frac{w.\omega^2}{g}\right)r.t.$$

第二章第14節(10)式ニヨリ圓周ノ方向ノ單位應力 s ト p' トノ關係ハ次ノ如シ.

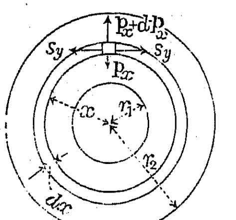
$$\left.\begin{array}{l} r.p'=t.s,\quad \therefore\quad s=\dfrac{r.p'}{t}=\left(\dfrac{w.\omega^2}{g}\right)r^2, \\ \omega=2\pi n. \end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

例題 2. 茲ニ幅4吋,厚サ2吋,外徑62吋ノ鑄鐵製箍アリ. 之ガ一分間ニ300回轉ヲナストキ應張力ハ幾何ナルカ.

(c)式ヨリ

$$s=\frac{\frac{450}{\overline{12}^3}\times(2\pi.5)^2}{32.16\times12}\times\overline{30}^2\fallingdotseq600\ \text{听/平方吋}.$$

第132圖



次ニ內半徑 r_1, 外半徑 r_2 ナル厚キ箍ニ於テ(第132圖)內半徑 x, 外半徑 $(x+dx)$ ナル環帶ヲ想像シ半徑ノ方向ノ單位應力ヲ p_x, (p_x+dp_x) トシ此等ヲ應張力ト考フレバ環帶ニ作用スル外向キノ力ハ (p_x+dp_x) ニシテ遠心力ヨリ生ズル單位壓力ハ p_x' ナリ. 此 p_x' ハ $\left(\frac{w.\omega^2}{g}\right)r.t$ ナル式中ノ r ト t トヲ夫々 x ト dx トニテ置換ヘタルモノ卽チ $\left(\frac{w.w^2}{g}\right)x.dx$ ナリ. 又內方ニ向ヘル力ハ p_x ナリ. 然ラバ平衡條件式ハ次ノ如シ.

$$(p_x'+p_x+dp_x)(x+dx)-p_x.x=s_y.dx.$$

$dp_x.dx$ 及 $\overline{dx}^2$ ヲ省略スレバ

$$\left(\frac{w.\omega^2}{g}\right)x^2.dx+p_x.dx+x.dp_x=s_y.dx.$$

$$\left(\frac{w.\omega^2}{g}\right)x^2+p_x+x.\frac{dp_x}{dx}=s_y\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

變形後ニ x ガ $(x+\xi)$ ニ, dx ガ $(dx+d\xi)$ ニナリタリトスレバ半徑ノ方向ノ變形ハ $\frac{d\xi}{dx}$ ニシテ圓周ノ方向ノ變形ハ $\frac{2\pi(x+\xi)-2\pi x}{2\pi x}=\frac{\xi}{x}$ ナリ. 然ラバ回轉軸ノ方向ノ應力ハ零ナルヲ以テ

$$\frac{\xi}{x}=\frac{1}{E}\left(s_y-\frac{p_x}{m}\right),\quad \frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{E}\left(p_x-\frac{s_y}{m}\right).$$

此兩式ヲ解キテ

$$s_y=\frac{E.m}{m^2-1}\left[m.\frac{\xi}{x}+\frac{d\xi}{dx}\right],\quad p_x=\frac{E.m}{m^2-1}\left[\frac{\xi}{x}+m.\frac{d\xi}{dx}\right].$$

(d)式ニ p_x, s_y 及 $\frac{dp_x}{dx}$ ノ値ヲ代入スレバ

$$x.\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{d\xi}{dx}-\frac{\xi}{x}=-\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{m^2-1}{m^2.E}.x^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{1}{x}.\frac{d\xi}{dx}-\frac{\xi}{x^2}=-\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{m^2-1}{m^2E}.x.$$

之ヲ解クニハ先ヅ次ノ微分方程式ヲ解クヲ要ス.

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{1}{x}.\frac{d\xi}{dx}-\frac{\xi}{x^2}=\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\xi}{x}\right)=0,$$

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{\xi}{x}=2A,\quad 2A=\text{積分常數}.$$

$$x.\frac{d\xi}{dx}+\xi=2A.x,\quad \xi.x=A.x^2+B,\quad B=\text{積分常數}.$$

$$\frac{\xi}{x}=A+\frac{B}{x^2}.\quad \therefore\quad \frac{d\xi}{dx}=A-\frac{B}{x^2}.$$

次ニ $\xi=C.x^3$ ナリト假定スレバ

$$\frac{\xi}{x}=C.x^2,\quad \frac{d\xi}{dx}=3C.x^2,\quad \frac{d^2\xi}{dx^2}=6C.x.$$

此等ヲ(e)式ニ代入スレバ $C=-\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{m^2-1}{8m^2.E}$ ヲ得. 然ラバ微分方程式解法ニ依リ(e)式ノ解答ハ次ノ如シ.

$$\frac{\xi}{x}=A+\frac{B}{x^2}-\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{m^2-1}{8m^2.E}.x^2,$$

$$\frac{d\xi}{dx}=A-\frac{B}{x^2}-\frac{w.w^2}{g}.\frac{3(m^2-1)}{8m^2.E}.x^2$$

$$\therefore\ p_x=\frac{E.m}{m^2-1}\left[(m+1)A-(m-1)\frac{B}{x^2}-(3m+1)\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{m^2-1}{8m^2.E}.x^2\right]\cdots\cdots(f)$$

$x=r_2$, $x=r_1$ ニ對シテ $p_x=0$ ナルニヨ

$$\left.\begin{aligned}0&=(m+1)\mathrm{A}-(m-1)\frac{\mathrm{B}}{r_2^2}-(3m+1)\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{m^2-1}{8m^2.\mathrm{E}}.r_2^2,\\0&=(m+1)\mathrm{A}-(m-1)\frac{\mathrm{B}}{r_1^2}-(3m+1)\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{m^2-1}{8m^2.\mathrm{E}}.r_1^2.\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{(3m+1)(m-1)}{8m^2.\mathrm{E}}(r^2{}_2+r_1{}^2).\\\mathrm{B}&=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{(3m+1)(m+1)}{8m^2.\mathrm{E}}.r^2{}_2.r_1{}^2.\end{aligned}\right\}$$

(f) 式ヨリ

$$p_x=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{3m+1}{8m}\left[r^2{}_2+r_1{}^2-\frac{r_2{}^2.r_1{}^2}{x^2}-x^2\right].$$

而シテ

$$s_y=\frac{\mathrm{E}.m}{m^2-1}\left[m.\frac{\xi}{x}+\frac{d\xi}{dx}\right]=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{1}{8m}\left[\left((3m+1)(r_2{}^2+r_1{}^2+\frac{r_2{}^2.r_1{}^2}{x_2}\right)-(m+3)x^2\right].$$

s_y ノ値ハ常ニ正ニシテ x ガ增スニ從ヒテ減少ス. 依テ $x=r_1$ ニ對シテ其値ハ最大ナリ. 即チ

$$最大\ s_y=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{1}{4m}\left[(3m+1)r_2{}^2+(m-1)r_1{}^2\right].$$

r_1 ガ甚小ナル場合ニハ最大 s_y ハ $\left(\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{3m+1}{4m}.r_2{}^2\right)$ ニ近キ値トナリ r_2 ト r_1 トノ差ガ小ナルトキハ薄キ箍ノ場合ノ $s=\frac{w.\omega^2}{g}.r^2$ ニ近キ値トナルヲ知ルベシ. 又 p_x ハ r_1 ヨリ大ニシテ r_2 ヨリ小ナル x ノ總テノ値ニ對シテ正即チ應張力ニシテ

$$\frac{dp_x}{dx}=(常數)\left[\frac{2r_2{}^2.r_1{}^2}{x^3}-2x\right].$$

然ルニ

$$\left[\frac{2r_2{}^2.r_1{}^2}{x^3}-2x\right]_{x=\sqrt{r_2.r_1}}=0$$

$$\therefore\quad最大\ p_x=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{3m+1}{8m}(r_2-r_1)^2.$$

若シ $r_1=0$ ナレバ $x=r_2$ ニ對シテ $p_x=0$ 又 $x=0$ ニ對シテ $\xi=0$ ナリ. 然ラバ $\frac{\xi}{x}$ ノ式ガ示ス如ク $\mathrm{B}=0$ ナリ. 依テ (f) 式ヨリ

$$0=(m+1)\mathrm{A}-(3m+1)\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{m^2-1}{8m^2.\mathrm{E}}.r_2{}^2.$$

$$\therefore\quad\mathrm{A}=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{(3m+1)(m-1)}{8m^2.\mathrm{E}}.r_2{}^2,$$

$$s_y=\frac{\mathrm{E}.m}{m^2-1}\left[m.\frac{\xi}{x}+\frac{d\xi}{dx}\right]=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{1}{8m}\left[(3m+1)r_2{}^2-(m+3)x^2\right].$$

之ハ $x=0$ 即チ中心ニ於テ最大ニシテ

$$最大\ s_y=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{3m+1}{8m}.r_2{}^2.$$

此値ハ中心ニ微小ナル孔ヲ有スル厚キ箍ニ於ケル最大 s_y ノ約半分ナリ.

又　$$p_x=\frac{\mathrm{E}.m}{m^2-1}\left[\frac{\xi}{x}+m.\frac{d\xi}{dx}\right]=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{3m+1}{8m}.(r_2{}^2-x^2).$$

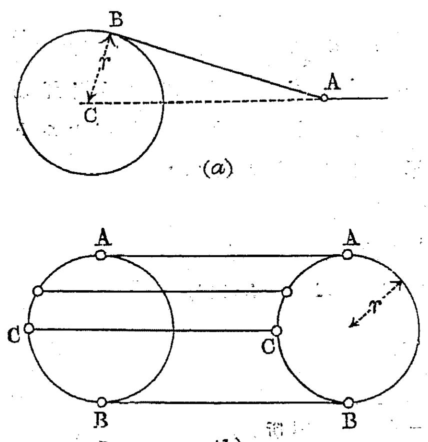
之ハ常ニ正ニシテ中心ヨリ遠ザカルニ從ヒテ減少ス. 夫故ニ

$$最大\ p_x=\frac{w.\omega^2}{g}.\frac{3m+1}{8m}.r_2{}^2$$

トナリ最大 s_y ト同値ナリ.

(II)遠心力ヨリ生ズル彎曲應力　蒸汽機關ノ滑頭(Cross-Head)ト曲柄軸(Crank-Pin)トヲ連結スル連釺(Connecting Rod)ノ如キハ一端ガ圓ヲ畫キテ回轉スルニ遠心力ノ爲ニ之ニ彎曲應力ヲ生ズベシ(第133圖(a))又機關車ノ二ツノ働輪ヲ連結スル水平釺ノ如キハ其一例ナリ(第133圖(b))而シテ(b)圖ノ場合ニハ釺ノ總テノ點ガ同速度ニテ回轉スルユヘ(a)圖ノ場合ニ於ケルヨリモ解法簡單ナリ.

第133圖



(a)　(b)

先ヅ水平釺ニ就テ考フ

ル＝機關車ノ速度ヲu;水平釬ヲ連結セル働輪ノ周リノ水平釬端ノ回轉速度ヲv;働輪ノ半徑ヲr_1;水平釬端ガ畫ク圓ノ半徑ヲrトスレバ働輪ノ圓周ノ回轉速度ト機關車ノ線速度トハ同一ナルヲ以テ

$$v=\frac{u.r}{r_1}$$

ヲ得. 釬端ノミナラズ各點ハvナル速度ニテ圓ヲ畫キテ回轉スルヲ以テ遠心力ノ爲ニ釬ハ彎曲作用ヲ受クベシ. 而シテ釬ガ最低位BBニアレバ遠心力ハ之ニ下向キノ等布荷重トシテ働キ,最高位AAニアルトキハ上向キノ等布荷重トシテ働キ,車軸ト同平面卽チCCナル位置ニアルトキハ釬ノ長サノ方向ニ應壓力ヲ生ズ.

水平釬ノ單位長サノ重量ヲwトスレバ每單位長サノ遠心荷重w'ハ次ノ如シ.

$$w'=\frac{w.v^2}{g.r}=\frac{w.u^2.r}{g.r_1^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

水平釬ヲ一ツノ單桁ト見做シ長サヲl,幅ヲb,高サヲdトスレバ最大單位彎曲應力ハ次ノ如シ.

$$s=\pm\frac{6M}{b.d^2}=\pm\frac{3}{4}\cdot\frac{w'.l^2}{b.d^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

例題 機關車ノ速度60哩每時間,働輪ノ半徑3呎,水平鋼釬端ガ畫ク圓ノ半徑1呎,釬ノ厚サ2吋及高サ4吋,長サ8呎ナルトキ遠心荷重ヨリ生ズル最大單位彎曲應力ヲ求ム.

$u=88$ 呎每秒$=22\times88$吋每秒,

$g=12\times32.16$吋每秒每秒, $r_1=3\times12$吋,

$r=1\times12$吋, $l=8\times12$吋, $b=2$吋, $d=4$吋,

$$w=\frac{8\times490}{\overline{12}^3}=2.27\text{ 听/吋}.$$

$$\therefore\ w'=\frac{2.27\times\overline{12\times88}^2\times\overline{12\times1}}{32.16\times12\times\overline{3\times12}^2}=61\text{ 听/吋}.$$

$$s=\pm\frac{3\times61\times\overline{8\times12}^2}{4\times2\times4^2}=13{,}200\text{ 听/平方吋}.$$

水平釬ノ如キハ急速ナル交番應力(Alternate Stresses)ヲ受クルノミナラズ激衝(Shock)ヲ受クルモノナリ.

次ニ第133圖(a)ニ就テ考フルニB端ハ半徑rノ圓ヲ畫キ他端Aハ單ニ直線運動ヲナスヲ以テA端ニ於テハ遠心力ハ零ニシテB端ニ於テハ(a)式ガ與フルw'ト同樣ノ遠心力ガ働クベキナリ. 連釬ガ(a)圖ノ如キ位置ニアルトキハ遠心荷重ハAニ於ケル零ヨリBニ於ケルw'迄均等ニ變化ス. 今此釬ヲ一ツノ單桁ト見做セバ全荷重ハ$\frac{1}{2}w'.l$ニシテ

$$\text{A ニ於ケル反力}=\left(\frac{1}{2}w'.l\times\frac{1}{3}l\right)\Big/l=\frac{1}{6}w'.l,$$

$$\text{B ニ於ケル反力}=\frac{1}{3}w'.l$$

ナルニエAヨリxナル距離ニ於ケル斷面ノ彎曲率ハ次ノ如シ.

$$M=\frac{1}{6}w'l.x-\frac{w'x^2}{2l}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}\cdot\frac{w'(l^2.x-x^3)}{l}.$$

$$\frac{dM}{dx}=(\text{常數})(l^2-3x^2),\quad\Big[l^2-3x^2\Big]_{x^2=\frac{1}{3}l^2}=0$$

卽チ$x^2=\frac{1}{3}l^2$ニ對シテMハ最大ナルニエ

$$\text{最大 }M=0.0642w'.l^2.$$

矩形斷面ナレバ最大單位彎曲應力ハ

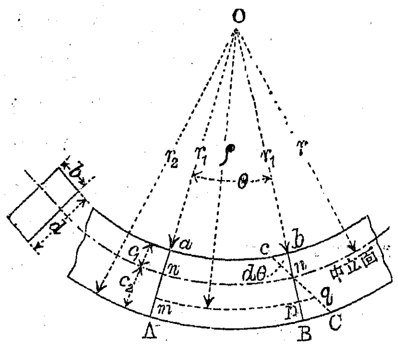
$$s=\pm\frac{6M}{bd^2}=\pm0.385\frac{w.'l^2}{b.d^2},$$

但 $$w'=\frac{w.v^2}{g.r}.$$

此ノ如ク最大sハ水平釬ニ於ケル最大sノ約二分ノ一ナリ. 而シテ水平釬ノ斷面ハ中央ニ於テ最大ニナシ,連釬ノ斷面ハ滑頭ヨリ約$0.6l$ノ所ニ於テ最大ニナスベキナリ.

86. 曲桁(Curved Beams) 普通ノ桁ノ理論ニ關スル基本假定ハ曲桁ニモ亦之ヲ適用スルヲ得. 第134圖ニ示セルハ矩形斷面ノ

第134圖



曲桁ニシテ上下兩面ハ同心曲面ナリ.

上下曲面ノ半徑ヲ夫々 r_1 及 r_2；幅ヲ b；高サヲ d トスレバ

$$r_2-r_1=d$$

又中立面ヨリ凹面及凸面迄ノ距離ヲ夫々 c_1 及 c_2 トスレバ

$$c_1+c_2=d.$$

今 $c_1<c_2$ 卽チ中立面ハ凹面ニ近クシテ單位彎曲應力ハ凸面ニ於ケルヨリモ凹面ニ於テ大ナルコトヲ證セントス.

桁ノ普通彎曲理論ニ於ケルト同樣ニ彎曲スル前ノ半徑ノ方向ノ任意斷面Bbハ彎曲後モ尙平面ニシテCcナル位置ヲ取リタリトセヨ. 然レバ纖維abハbc丈ケ短縮シ纖維ABハBC丈ケ伸張シ中立面ニ於ケル纖維nnノ長サハ不變ナリ. OAトOBトノ間ノ角ヲ θ トシ, CcトBbトノ間ノ角ヲ $d\theta$ トスレバ

$$ab=r_1.\theta,\quad bc=c_1.d\theta$$

ナルヲ以テ

$$\text{凹面ニ於ケル單位短縮}=\frac{c_1.d\theta}{r_1.\theta}.$$

又

$$AB=r_2\theta,\quad BC=c_2.d\theta$$

ナルヲ以テ

$$\text{凸面ニ於ケル單位伸張}=\frac{c_2.d\theta}{r_2.\theta}.$$

中立面ノ半徑ヲ r トシ, 任意ノ曲面ノ半徑ヲ $\rho\,(r_1<\rho<r_2)$ トスレバ

$$\frac{pq}{np}=\frac{(\rho-r)d\theta}{\rho.\theta}=\text{纖維}mp\text{ノ單位變形}.$$

夫故ニ

$$s_1=E.\frac{d\theta}{\theta}.\frac{c_1}{r_1}=\text{凹面ニ於ケル單位彎曲應力},$$

$$s_2=E.\frac{d\theta}{\theta}.\frac{c_2}{r_2}=\text{凸面ニ於ケル單位彎曲應力},$$

$$s=E.\frac{d\theta}{\rho}.\frac{\rho-r}{\rho}=\text{半徑}\rho\text{ナル曲面ノ單位彎曲應力}.$$

中立面ノ位置ハ半徑OBノ方向ニ垂直ナル總テノ應力ノ代數和ガ零ナルコトノ條件ニ依テ之ヲ定ムルヲ得.

玆ニ斷面ノ高サノ方向ニ於テ $b.d\rho=dA$ ナル微細面積ヲ考フルニ

$$\Sigma s.dA=E.\frac{d\theta}{\theta}\Sigma\left(\frac{\rho-r}{\rho}.dA\right)=b.E.\frac{d\theta}{\theta}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\rho-r}{\rho}\right)d\rho=0,$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\rho-r}{\rho}\right)d\rho=\Big[\rho-r.\log_e\rho\Big]_{r_1}^{r_2}=(r_2-r_1)-r.\log_e\frac{r_2}{r_1}=d-r.\log_e\frac{r_2}{r_1}=0.$$

$$\therefore\quad r=\frac{d}{\log_e\frac{r_2}{r_1}}$$

$$r_1+c_1=\frac{d}{\log_e\frac{r_2}{r_1}},\qquad r_2-c_2=\frac{d}{\log_e\frac{r_2}{r_1}}.$$

$$\therefore\quad c_1=-r_1+\frac{d}{\log_e\frac{r_2}{r_1}},$$

$$c_2=r_2-\frac{d}{\log_e\frac{r_2}{r_1}}.$$

此兩式ハ矩形斷面曲桁ノ中立面ヨリ凹面及凸面ニ至ル半徑ノ方向ノ距離ヲ與フルモノニシテ明カニ $c_2>c_1$ ナリ.

斷面Bbニ於ケル彎曲率Mハ抵抗力率ニ等シキユヱ

$$M=\Sigma s(\rho-r).dA=b.E.\frac{d\theta}{\theta}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(\rho-r)^2}{\rho}.d\rho=b.E\frac{d\theta}{\theta}.\frac{d.(c_2-c_1)}{2}$$

之ニ

$$s_1=E.\frac{d\theta}{\theta}.\frac{c_1}{r_1},\quad \text{卽チ}\quad E.\frac{d\theta}{\theta}=\frac{s_1r_1}{c_1}$$

ヲ代入スレバ

$$s_1=\frac{2M.c_1}{b.d.r_1(c_2-c_1)}=\text{曲桁ノ凹面ニ於ケル單位彎曲應力}.$$

又

$$s_2=\mathrm{E}.\frac{d\theta}{\theta}.\frac{c_2}{r_2},\quad \text{即チ}\quad \mathrm{E}.\frac{d\theta}{\theta}=\frac{s_2.r_2}{c_2}$$

ヲ代入スレバ

$$s_2=\frac{2\mathrm{M}.c_2}{b.d.r_2(c_2-c_1)}=\text{曲桁ノ凸面ニ於ケル單位彎曲應力.}$$

以上 s_1 及 s_2 ノ式中ニ於テ $\frac{c_1}{r_1}$ ハ $\frac{c_2}{r_2}$ ヨリ大ナルヲ以テ明カニ s_1 ハ s_2 ヨリ大ナリ.

例題　$r_1=24$ 吋, $r_2=36$ 吋ナル矩形斷面曲桁ノ單位彎曲應力ヲ求ム.

$$\log_e\frac{r_2}{r_1}=3.5835-3.1780=0.4055,$$

$$c_1=-r_1+\frac{d}{0.4055}=-24+\frac{12}{0.4055}=-24+29.6=5.6\text{ 吋},$$

$$c_2=12-5.6=6.4\text{ 吋}.$$

$$\therefore\quad s_1=\frac{2\times5.6\mathrm{M}}{bd\times24\times0.8}=\frac{7.0\mathrm{M}}{bd^2},$$

$$s_2=\frac{2\times6.4\mathrm{M}}{bd\times36\times0.8}=\frac{5.3\mathrm{M}}{bd^2}.$$

是ニ由テ見レバ曲桁ノ凹面ニ於ケル單位應力ハ常ニ普通ノ單桁ニ於ケル單位應力ヨリモ大ナリ.

r_1 ガ甚小ナレバ c_1 モ亦甚小トナリ從テ s_1 ハ甚シク大トナルヲ以テ小ナル彎曲率ニ依テ破壞ヲ來タスベシ. 夫故ニ曲材ノ半徑ハ成ルベク大ニナスベキナリ.

(第四篇終)