第五章　桁　　橋 (Beam bridge)

第一節　撓　　度 (Deflection)

桁の斷面は其の抵抗力率のみならず同時に撓度の制限に依つて定めらるゝことが多い。單桁にして等布荷重を負載するときは其の撓度は次の式で表はさるゝ。

$$\eta = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EJ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中 J は桁の惰性率 (cm^4)、q は單位長の等布荷重 (自重＋活荷重)、

E は 彈性恒數 (Modulus of elasticity) $= 2\,100\,000\ kg/cm^2$ とす。

今 M = 轡曲率 (tm)、l = 支間 (m)、h = 桁の高 (m)、

f = 許容抗曲强度 $= 1\,200\ kg/cm^2$

とせば第 31 表を得。

第 31 表

撓　度 η	J		$\frac{l}{h} \leqq$
$\frac{l}{400}$	198.48 Ml	$\doteqdot$ 200 Ml	21.0
$\frac{l}{450}$	223.21 Ml	225 Ml	18.7
$\frac{l}{500}$	248.00 Ml	250 Ml	16.8
$\frac{l}{550}$	272.82 Ml	275 Ml	15.3
$\frac{l}{600}$	297.62 Ml	300 Ml	14.0

h を mm、l を m、η を mm で表はさば

$$\eta = 119.1\ \frac{l^2}{h} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

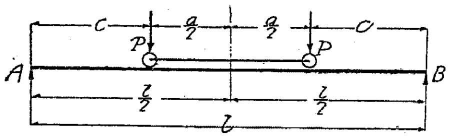
I 形鋼に對しては

$h = 75\sim600\ mm$(日本標準規格)

であるから

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \alpha l^2 \\ \alpha &= \frac{119.1}{h} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

を得。二箇の集中荷重の場合の η は次式の如し。



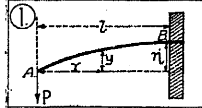
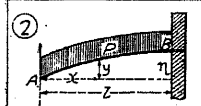
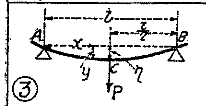
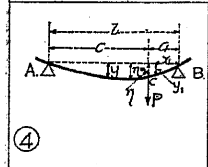
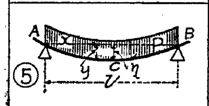
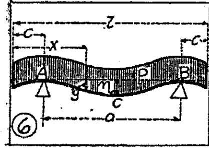
第 61 圖

$$\eta = \frac{Pc}{24EJ}\left[a^2 + 2l(a+l)\right] \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

$$c = \frac{l-a}{2}$$

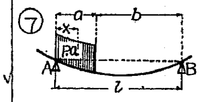
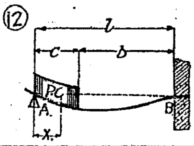
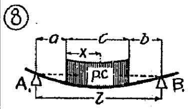
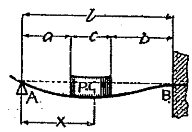
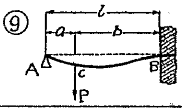
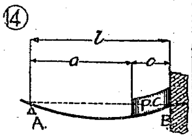
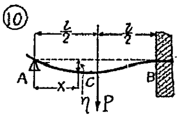
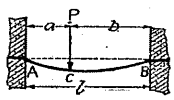
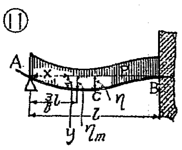
第 32 表

(其一)

Load manner	Reaction	Bending Moment	Equation of elastic Curve	Deflection
① 	$B=P$	$M=Px$ $M_{max.}=Pl$ Most at Fixed end	$y=\frac{Pl^3}{2EJ}\left\{\frac{x}{l}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{l^3}\right\}$	at B: $\eta=\frac{Pl^3}{3EJ}$
② 	$B=P$	$M=\frac{Px^2}{2l}$ $M_{max.}=\frac{Pl}{2}$	$y=\frac{Pl^3}{6EJ}\left\{\frac{x}{l}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{l^4}\right\}$	at B: $\eta=\frac{Pl^3}{8EJ}$
③ 	$A=B=\frac{P}{2}$	$M=\frac{Px}{2}$ $M_{max.}=\frac{Pl}{4}$	$y=\frac{Pl^3}{16EJ}\left\{\frac{x}{l}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{l^3}\right\}$	at C: $\eta=\frac{Pl^3}{48EJ}$
④ 	$A=\frac{Pc_1}{l}$ $B=\frac{Pc}{l}$	for AC: $M=\frac{Pc_1x}{l}$ for BC: $M=\frac{Pcx_1}{l}$ $M_{max.}=\frac{Pcc_1}{l}$	$y=\frac{P}{6EJ}\cdot\frac{c^2c_1^2}{l}\left[2\frac{x}{c}+\frac{x}{c_1}-\frac{x^3}{c^2c_1}\right]$ $y_1=\frac{P}{6EJ}\cdot\frac{c^2c^2}{l}\left[2\frac{x_1}{c_1}+\frac{x_1}{c}-\frac{x_1^3}{cc_1^2}\right]$	at C: $\eta=\frac{P}{3EJ}\cdot\frac{c^2c_1^2}{l}$ $\eta_{max.}$ at $x=c\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{c_1}{c}}$ if $c>c_1$ $x_1=c_1\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{c}{c_1}}$ if $c<c_1$
⑤ 	$A=B=\frac{P}{2}$	$M=\frac{Px}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)$ $M_{max.}=\frac{Pl}{8}$	$y=\frac{Pl^3}{24EJ}\left\{\frac{x}{l}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right\}$	at C: $\eta=\frac{5Pl^3}{384EJ}$
⑥ 	$A=B=\frac{P}{2}$	$M=\frac{Px}{2}\left(1-\frac{c}{x}-\frac{x}{l}\right)$ $M_A=M_B=-\frac{Pc^2}{2l}$ $M_C=-\frac{Pl}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{2c}{l}\right)$ $M_A=M_B=M_C=\approx\frac{Pl}{47}$ for $c=0.207l$	$y=\frac{Pl^3}{24EJ}\left[\frac{x}{l}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}+6\frac{cx^2}{l^3}-6\frac{cx}{l^2}-\frac{c}{l}+6\frac{c^2}{l^2}-4\frac{c^3}{l^3}-\frac{c^4}{l^4}\right]$	at C: $\eta=\frac{Pl^3}{24EJ}\left[\frac{5}{16}-\frac{5}{2}\cdot\frac{c}{l}+6\frac{c^2}{l^2}-4\frac{c^3}{l^3}-\frac{c^4}{l^4}\right]$

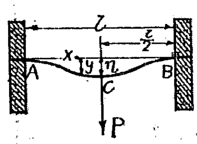
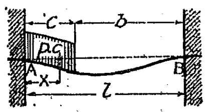
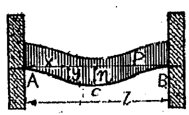
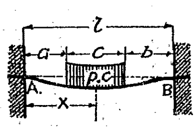
第 32 表

(其二)

Load manner	Reaction	Bending Moment	Load manner	Reaction	Bending Moment
⑦ 	$A=\frac{Pa(2b+a)}{2l}$ $B=\frac{Pa^2}{2l}$	$M_{max}=\frac{A^2}{2P}$ at $x=\frac{A}{P}$	⑫ 	$A=A^\circ-\frac{P}{2l^3}\left(\frac{l^2c^2}{2}-\frac{c^4}{4}\right)$ $B=B^\circ+\frac{P}{2l^3}\left(\frac{l^2c^2}{2}-\frac{c^4}{4}\right)$ Here $A^\circ B^\circ M_x^\circ$ represent the Corresponding Values for the beam Supported Simply on both ends (case ⑦)	$M_B=-\frac{P}{2l^2}\left(\frac{l^2c^2}{2}-\frac{c^4}{4}\right)$ $M_x=M_x^\circ+M_B\frac{x}{l}$
⑧ 	$A=\frac{Pc(2b+c)}{2l}$ $B=\frac{Pc(2a+c)}{2l}$ for $a=b$ ist $A=B=\frac{Pc}{2}$	$M_{max}=A\left(a+\frac{A}{2P}\right)$ at $x=\frac{A}{P}$ for $a=b$ ist $M_{max}=\frac{Pc}{2}\left(\frac{l}{2}-\frac{c}{4}\right)$ at $x=\frac{c}{2}$	⑬ 	$A=A^\circ-\frac{P}{2l^3}\left(l^2\frac{(a+c)^2-a^2}{2}-\frac{(a+c)^4-a^4}{4}\right)$ $B=B^\circ+\frac{P}{2l^3}\left(l^2\frac{(a+c)^2-a^2}{2}-\frac{(a+c)^4-a^4}{4}\right)$ Here $A^\circ B^\circ M_x^\circ$ represent the Corresponding Values for the beam Supported Simply on both ends. (Case ⑧)	$M_B=-\frac{P}{2l^2}\left(l^2\frac{(a+c)^2-a^2}{2}-\frac{(a+c)^4-a^4}{4}\right)$ $M_x=M_x^\circ+M_B\frac{x}{l}$
⑨ 	$A=\frac{P}{2}\left(2-3\frac{a}{l}+\frac{a^3}{l^3}\right)$ $B=\frac{P}{2}\left(\frac{3a}{l}-\frac{a^3}{l^3}\right)$	$M_B=-\frac{Pa(l^2-a^2)}{2l^2}$ $M_c=\frac{Pa}{2}\left(2-\frac{3a}{l}+\frac{a^3}{l^3}\right)$	⑭ 	$A=A^\circ-\frac{P}{2l^3}\left(l^2\frac{l^2-a^2}{2}-\frac{l^4-a^4}{4}\right)$ $B=B^\circ+\frac{P}{2l^3}\left(l^2\frac{l^2-a^2}{2}-\frac{l^4-a^4}{4}\right)$ Here $A^\circ B^\circ M_x^\circ$ represent the Corresponding Values for the beam Supported Simply on both ends. (case ⑦)	$M_B=-\frac{P}{2l^2}\left(l^2\frac{l^2-a^2}{2}-\frac{l^4-a^4}{4}\right)$ $M_x=M_x^\circ+M_B\frac{x}{l}$
⑩ 	$A=\frac{5}{16}P$ $B=\frac{11}{16}P$ Max. Deflection $\eta=\frac{Pl^3}{48\sqrt{5}EJ}$ at $x=l\sqrt{\frac{1}{5}}$	$M_{max}=M_B=-\frac{3}{16}Pl$ $M_c=\frac{5}{32}Pl$	⑮ 	$A=\frac{Pb}{l^3}(l^2-a^2-ab)$ $B=\frac{Pa}{l^3}(l^2-b^2-ab)$	$M_A=-\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_B=-\frac{Pa^2b}{l^2}$ $M_c=\frac{2Pa^2b^2}{l^3}$
⑪ 	$A=\frac{3}{8}P$ $B=\frac{5}{8}P$ Max Deflection $\eta=\frac{Pl^3}{185EJ}$ at $x=\frac{l}{16}(1+\sqrt{33})=0.4215l$ Inflexion point at $x=\frac{3}{4}l$	$M_x=\frac{Px}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{l}\right)$ $M_{max}=M_B=-\frac{Pl}{8}$ $M_c=+\frac{9}{128}Pl$ at $x=\frac{3}{8}l$ (Max. positives Moment)			

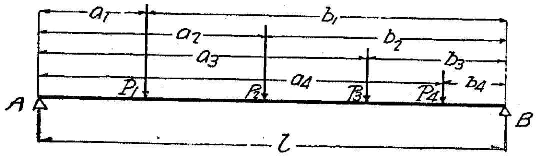
第 32 表

(其三)

Load manner	Reaction	Bending Moment	Load manner	Reaction	Bending Moment
⑯ 	$A=B=\frac{P}{2}$ Max. Deflection $\eta=\frac{Pl^3}{192EJ}$ Inflexion Point at $x=\frac{1}{4}l$ and $x=\frac{3}{4}l$	$M_x=\frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{4}\right)$ $M_A=M_B=-\frac{Pl}{8}$ $M_c=+\frac{Pl}{8}$	⑱ 	$A=A^\circ-\frac{M_A-M_B}{l}$ $B=B^\circ-\frac{M_B-M_A}{l}$ Here $A^\circ B^\circ M_x^\circ$ represent the Corresponding Values for the beam Supported Simply on both ends. for $c=\frac{l}{2}$ $\therefore M_A=-\frac{11}{192}Pl^2$ and $M_B=-\frac{5}{192}Pl^2$	$M_B=-\frac{P}{l^2}\left(\frac{lc^3}{3}-\frac{c^4}{4}\right)$ $M_A=-\frac{P}{l^2}\left(\frac{l^2c^2}{2}-\frac{2}{3}lc^3+\frac{c^4}{4}\right)$ $M_x=M_{x^\circ}+M_A\left(1-\frac{x}{l}\right)+M_B\frac{x}{l}$
⑰ 	$A=B=\frac{P}{2}$ Max. Deflection $\eta=\frac{Pl^3}{384EJ}$ Inflexion Point for $x=\frac{1}{2}l\left(1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ $x_1=0.7887l,\ x_2=0.2113l$	$M_x=-\frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_A=M_B=-\frac{Pl}{12}$ $M_c=+\frac{Pl}{24}$	⑲ 	$A=A^\circ-\frac{M_A-M_B}{l}$ $B=B^\circ-\frac{M_B-M_A}{l}$ Here $A^\circ B^\circ M_x^\circ$ represent the Corresponding Values for the beam Supported Simply on both end (case ⑧)	$M_B=-\frac{p}{l^2}\left(l\frac{(a+c)^3-a^3}{3}-\frac{(a+c)^4-a^4}{4}\right)$ $M_A=-\frac{p}{l^2}\left(l^2\frac{(a+c)^2-a^2}{2}-2l\frac{(a+c)^3-a^3}{3}+\frac{(a+c)^4-a^4}{4}\right)$ $M_x=M_x^\circ+M_A\left(1-\frac{x}{l}\right)+M_B\frac{x}{l}$

第二節 單桁の計算

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{l}(P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3 + \cdots\cdots) \\ B &= \frac{1}{l}(P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \cdots\cdots) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$



第 62 圖

最大彎曲率は、剪力が零となるか或ひは其の符號を變ずる點に生ずる。即ち

$$A - (P_1 + P_2 \cdots\cdots) \gtreqless 0 \cdots\cdots(6)$$

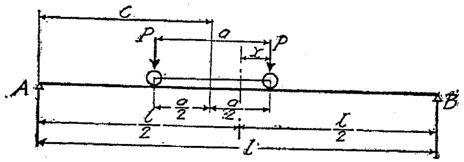
若し最大彎曲率の生ずる點が分れば一此の圖の場合には P_2 の下で起るものとせば一最大彎曲率は

$${}_{max}M = A\,a_2 - P_1(a_2 - a_1) \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

となり、從つて所要の抗曲率（Moment of resistance）は

$$W = \frac{{}_{max}M}{f} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

となる。W を英米では Section modulus と謂つて S で表はしてある。



第 63 圖

二箇の同一重量の荷重が、一定の間隔 a を保つて桁の上を動くとき、若し $a < 0.586\,l$ ならば最大彎曲率は $x = \frac{a}{4}$ のときに起り、其の値は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned} {}_{max}M &= \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 = \frac{P}{8l}(2l-a)^2 = \frac{2Pc^2}{l} \\ c &= \frac{l}{2} - \frac{a}{4} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(9)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= P\,\frac{2l+a}{2l} \\ B &= P\,\frac{2l-a}{2l} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

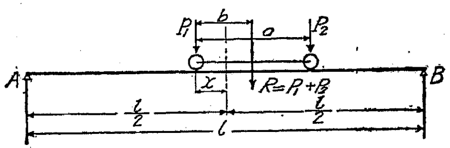
上式は兩荷重 P が桁の上に在るときだけに適用さるゝ。

$a \geqq 0.586\,l$ なるときは一箇の荷重 P が桁の中央に載つたときに最大彎曲率を生じ、其の値は

$${}_{max}M = \frac{Pl}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

となる。

二箇の異なれる重量の荷重が、一定の間隔 a を保つて桁の上を動く場合は、$P_1 > P_2$ で $x > 0$ ならば P_1 の下で最大彎曲率が起る。



第 64 圖

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{P_2 a}{R} \\ {}_{max}M &= \frac{R}{4}\,\frac{(l-b)^2}{l} \qquad x = \frac{b}{2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

〔例 1〕 $l = 6.40\,m$ の單桁に $P = 7\,200\,kg$ が等布荷重として滿載されたるときI形鋼の斷面を求む。

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{7.2\times6.4}{8} = 5.76\,tm = 576\,000\,kg\,cm$$

$$W = \frac{576\,000}{1\,200} = 480\,cm^3$$

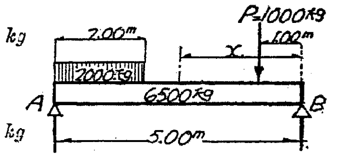
$$J = 250\times5.76\times6.4 = 9\,200\,cm^4\text{、（第三十一表、}\eta = \frac{l}{500}\text{）}$$

300×150 I @ 48.34 kg を用ふれば $J = 9\,490\,cm^4$、 $W = 633.2\,cm^3$ となる。

〔例 2〕 $l = 5.0\,m$、自重 6 500 kg、集中荷重 1 000 kg と 2 000 kg の等布荷重が作用する時、最大彎曲率の生ずる點を求む。

$$A = \frac{1}{2}\times6\,500 + \frac{1}{5}(2\,000\times4+1\,000\times1) = 5\,050\,kg$$

$$B = \frac{1}{2}\times6\,500 + \frac{1}{5}(2\,000\times1+1\,000\times4) = 4\,450\,kg$$



最大彎曲率は剪力の零なる點に起るから

$$4\,450 - 1\,000 - \frac{6\,500}{500}\,x = 0$$

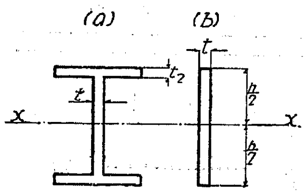
$$x = 265\,cm$$

$$W = \frac{1}{1\,200}\left(4\,450\times265-1\,000\times165-\frac{6\,500}{500}\times\frac{265^2}{2}\right)=465\ cm^3$$

$$J = 250\times\frac{1\,200\times465}{100\times1\,000}\times5.0 = 6\,975\ cm^4 \quad (\text{第 31 表、}\ \eta = \frac{l}{500})$$

250×125 I @ $55.52\ kg$ を用ふれば $J = 7\,338\ cm^4$、 $W = 587.0\ cm^3$ となる。

普通の支間に於ては彎曲率に依つて求めた斷面は、同時に剪力に對しても滿足するが、極めて短支間のときは M は比較的小で剪力 S が大きく、寧ろ剪力より斷面を定めねばならない場合がある。其のときには下の式を用ふる。



第 65 圖

$$f_s \geqq \frac{SG_x}{tJ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

式中 f_s は許容應剪强度

G_x は x 軸に對する幾何率

(Geometrical moment)

S は全剪力

を表はすものとす。

剪力の分布は腹鈑の所に多く突緣に少いから、或る人は腹鈑の厚を有する矩形（第65圖）と假定して

$$f_s \geqq \frac{3}{2}\ \frac{S}{ht} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

を用ふることあるも、I 形鋼に對しては餘り正確でない。

第三節　支間 (Effective span) と高 (Depth)

應力計算上の支間としては桁の場合は支承中心間の距離、縱桁 (Stringer) の場合は橫桁 (Cross beam) 中心間の距離を謂ふ。

鐵道橋に於ては高は支間の十二分一以上とする。日本標準規格の I 形鋼を用ふる場合は、其の高は最大 $600\ mm$ なる故最大支間長は

$$600\times12 = 7\,200 = 7.2\ m$$

となり、溝形鋼の場合は

$$380\times12 = 4\,560 = 4.6\ m$$

となる。

電氣鐵道橋及道路橋に於ては、高は支間の二十分一以上となす。

普通 $9.0\ m$ 位までは壓延桁 (Rolled beam) を用ふるが、ウイスコンシン道路委員會では $11.5\ m$、イリノイス道路委員會では $13.6\ m$ までの使用を許してゐる。支間が之以上となれば撓度が大きくなるから鈑桁橋を以て之に代ふる。