

第 2 編 應 用 力 學

〔山口 昇・鶴岡鶴吉〕

<p>第 1 章 材料の力學的性質 103</p> <p> 第 1 節 材料の彈性變形及び殘留變形 103</p> <p> 第 2 節 材料の降伏及破壊の説 105</p> <p> 第 3 節 繰り返し荷重の影響 106</p> <p> 第 4 節 材料の強度 106</p> <p>第 2 章 直應力 108</p> <p>第 3 章 平面力の圖式解法及平 面圖形の諸能率 110</p> <p> 第 1 節 平面力の圖式解法 110</p> <p> 第 2 節 平面圖形の諸能率 113</p> <p>第 4 章 桁 124</p> <p> 第 1 節 桁の應力 124</p> <p> 第 2 節 桁の撓度 131</p> <p> 第 3 節 靜定桁 138</p> <p> 第 4 節 不靜定桁 152</p> <p>第 5 章 平面結構 178</p> <p> 第 1 節 靜荷重をうけたる平面結構... 178</p> <p> 第 2 節 移動荷重(影響線) 180</p> <p>第 6 章 長柱 184</p> <p> 第 1 節 オイラーの長柱式 184</p> <p> 第 2 節 長柱の實用式 187</p>	<p>第 7 章 剛構 191</p> <p> 第 1 節 假想働の原理及び相互反作用 の定理 191</p> <p> 第 2 節 假想働の原理による剛構の解 法 193</p> <p> 第 3 節 三彎曲率の定理に依る剛構の 解法 203</p> <p> 第 4 節 四彎曲率の定理に依る剛構の 解法 209</p> <p>第 8 章 曲桁又は拱 240</p> <p> 第 1 節 曲桁の應力 240</p> <p> 第 2 節 三鉸拱 243</p> <p> 第 3 節 二鉸拱 245</p> <p> 第 4 節 無鉸拱 249</p> <p>第 9 章 勢力式による解法 253</p> <p> 第 1 節 彈性變形の勢力 253</p> <p> 第 2 節 最小仕事の原理 255</p> <p> 第 3 節 最小仕事の原理の應用 256</p> <p>第 10 章 軸 260</p> <p>第 11 章 平板 264</p> <p> 第 1 節 平板の基本式 264</p> <p> 第 2 節 平板各論 266</p>
---	---

第 2 編

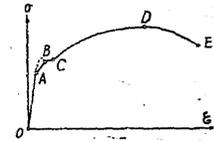
應 用 力 學

第 1 章 材料の力學的性質

第 1 節 材料の弾性變形及び残留變形

1. 直應力を受けた材料の弾性變形及び残留變形 鋼の丸棒を靜かに引き張る時は第 1 圖の如き應力變形率曲線を得。σ は供試體を引き張れる力を供試體の斷面積で割つた張應力、ε は供試體の伸びを原長で割つた伸張率を示す。

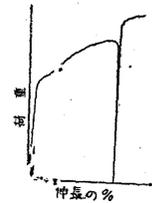
A 點を弾性限と呼び OA 間は正しい直線をなしこの間では σ がなくなれば ε は又 0 に歸る、即ち OA 間では供試體は完全弾性である。B に達すると供試體は急に伸び始める、この點を降伏點といふ。BC 間は ε に平行なる直線をなし、C に於て再び上昇し D で最大の σ となり、少し下つて E で供試體は破壊する。



第 1 圖

A 點は極めて靜かに引けば點線の示す如く B よりも上に至り急に B に降下することがある。B を越えて引き伸した供試體は σ を取去つても ε は再び 0 に歸らず、第 2 圖の如く残留變形を起す。即ち供試體は可塑性となる。これを更に引き張るときは弾性限點は下るが降伏點は一般に前よりも上る、即ち冷硬作用をなす。

供試體は D に於て最大應力を有しこれからは却つて弱くなる様に見えるが、これは供試體の斷面が此處から急に小さくなる爲めであつて、この斷面の縮少を考へれば必ずしも應力は小さくなるわけではない。



第 2 圖

鋼以外の材料では水晶の如きは極めて完全なる弾性をもつが、鑄鐵 銅 錫等の金屬及び石材 コンクリート等については應力變形率曲線は直線部なく従つて完全なる弾性の部分は存在しない。この場合の曲線は第 3 圖の如し。或る材料では弾性部分があり他の材料ではこれが無いのは、材料を構成してゐる組織が前者で

は整然としてゐるし後者では不整の爲めであると解する (エウイング教授の説)。

供試體を押しつぶす場合もほゞ上と同じ狀況を呈す。

2. 直應力と伸縮率との關係 彈性體に對してはフックの法則が成立する。即ち第 1 圖 OA 部に於て

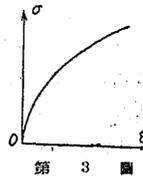
$$\frac{\sigma}{\epsilon} = E \dots \dots \dots (1)$$

但し E は彈性係數 (ヤングの係數) といひ各材料について常數である (9. 參照)。

尙彈性體を引き張るときは斷面は縮少する、この斷面の半徑の縮少の割合と伸張率との比をポアソン比と呼ぶ (9. 參照)。

鐵錳鋼 錫 コンクリート 石材等についてはバツハ・シユレーの法則が成立する。即ち第 3 圖に於て

$$\frac{\sigma^n}{\epsilon} = T \dots \dots \dots (2)$$

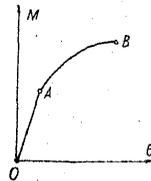


第 3 圖

但し n は 1 より大なる數。

3. 剪應力を受けた材料の變形 鋼の丸棒を靜かに振るときは第 4 圖の如き曲線を得、但し θ は振り角を示し M は θ 丈振るに要する偶力を示す (第 5 圖)。

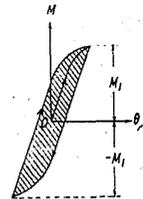
この場合丸棒の斷面には剪應力が働きその合成偶力が M となれる故第 4 圖は剪應力變形率曲線と見ることが出来る。OA 部分は直線でこれは完全彈性をなし、A を超えると可塑性となる。



第 4 圖



第 5 圖



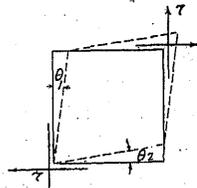
第 6 圖

尙 B を超えて振つた後逆に向けて振り、 $\pm M_1$ の間で繰り返せば第 6 圖の如くなり、陰影を施した面積に相當する仕事は熱其他の勢力と化して消失する。この曲線を彈性ヒステリシスといふ。

4. 剪應力と剪變形率との關係 第 7 圖の如く剪應力を受けるときは彈性部分に於ては

$$\frac{\tau}{\theta} = G \dots \dots \dots (3)$$

但し $\theta = \theta_1 + \theta_2$ 。



第 7 圖

G を剛性係數といふ (9. 參照)。G と E との間には下の如き關係がある

$$G = \frac{m}{2(1+m)} E \dots \dots \dots (4)$$

但し 1/m はポアソン比である。

第 2 節 材料の降伏及破壊の説

5. 彈性限を超えた應力 彈性限を超えて材料を變形するときその原形に復さざるは、恰かも粘性液體の如く材料組織の間で沁りを生ずる爲めである。この沁り面は所謂ハルトマン・リユードス線で明かに認めることが出来る。粘性液體の如く沁るものなる故に、應力の大きさは變形の速度によつて變る。即ち可塑性の場合には應力と變形の速度とを對比して曲線を作る。

6. 材料の降伏又は破壊の説 材料が降伏すること及び破壊することについて下の諸説あり。或點の主張應力が或限度を超えるとそこに降伏又は破壊を起すといふ説、これを最大主應力説といひランキン及びラメによつて支持された説である。或る點の主伸張率が或る限度を超えると降伏又は破壊が起るといふ説、これを最大主變形率説といひボンスレ及びサン・ヴナンによつて唱へられたものである。ギユスト、クローム、トレスカ等は最大接面應力が或限度に達するとき降伏又は破壊を起すといふ最大剪應力説を出した。

フェッブル、カルマン、ローデ等の精細なる實驗の結果降伏又は破壊を起す最大接面應力は垂直應力によつて變つて來ることが知れた。此の説はモールによつて初めに唱へられたものでこれをモールの説と呼ぶ。即ち降伏又は破壊を起す剪應力 τ_B を式で表せば

$$\tau_B = f(\sigma) \dots \dots \dots (5)$$

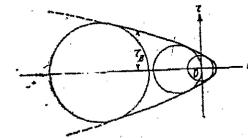
又これを圖示すれば第 8 圖の如し。

ブーシネスクは $f(\sigma)$ を簡單に直線型にとり

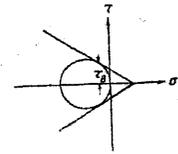
$$\tau_B = C - k\sigma \dots \dots \dots (6)$$

(但し C, k は常數)

とした即ち第 9 圖の如し。



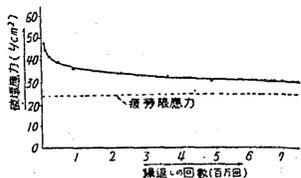
第 8 圖



第 9 圖

第 3 節 繰り返し荷重の影響

7. 繰り返し荷重の影響 ヴェーラー及びバウシinger等は鋼及び鐵に彎曲力、扭力、張力及び壓力を反覆作用せしめる實驗を行ひ、其の結果として次の如き結論を得た。即ち 1) 繰り返し荷重を受けた場合 材料の破壊に對する抵抗は其の時生じた應力の最大及び最小値の代數差に關係し、2) 荷重が正負逆に繰り返された場合の破壊強度は靜荷重に依るものよりも遙かに小さく、時としては弾性限以下の應力で破壊を起すに至つた。この 2) の性質を材料の**疲勞**と云ふ。



第 10 圖

又鋼では6百萬回近く繰り返し載荷すると破壊力の低下がなくなり、第10圖の如く或る一定の値に近づく。これを**疲勞限應力**又は單に**疲勞限**と云ふ。

ヘイの實驗に依れば疲勞限と破壊強度との關係は第1表の如くなる。

第 1 表 疲勞限と破壊強度

材 料	疲勞限と靜破壊荷重との比	
建 築 用 鋼	0.4	
軟 鋼	{ 焼きなましたるもの	0.5
	{ 冷硬作用を受けたるもの	0.6

第 4 節 材 料 の 強 度

8. 材料の強度 同一材料に於てもその大き、形狀及び外力のかかり方等によつて實際には必ずしも同一破壊應力を與へない。故に通常一定の形狀、大きの供試體を作つてこれを外力の一定のかかり方をなす試験器にかけてその**破壊強度**(或は單に**強度**)を測る(9. 参照)。

たとへ形狀が相似であり外力のかかり方が試験器のそれと同一性質のものであつてもこの供試體強度がそのまま相似法則によつて如何なる大きさの場合にも用ひらるるかは疑問である。況んや現場の諸材料は外力の受け方、材料の出來ばえ等供試體の場合の如く單純でないことが多い、従つて供試體強度の數分の一をもつ

てその材料の許容應力とする(9. 参照)。

幾つで割るかといふことは使用材料の信頼しうべきか否かといふ性質及び外力のかかり方の緩急等によつて變る。この割る數を**安全率**と稱す。

9. 材料の彈性係數、強度及び許容應力

1) 金 屬 材 料

種 類	ヤング係數 E (t/cm ²)	剛性係數 G (t/cm ²)	延伸限 σ _p (t/cm ²)	降伏點 σ _f (t/cm ²)	強 度	
					抗張、耐壓 (t/cm ²)	抗 剪 (t/cm ²)
硬 鋼(鐵 鋼 用)	2,200	850	5.0 以上	—	10.0~17.0	—
硬 鋼(橋梁用 St. 48)	2,100	810	2.8 以上	3.1	4.8~5.8	4.0 以上
中 鋼(橋梁用 St. 37)	2,100	810	1.9 以上	2.4	3.7~4.5	2.9~3.8
ニッケル鋼(橋梁用)	2,089	830	3.4	3.8 以上	5.6~6.7	—
硅 素 鋼(橋梁用)	2,100	850	3.2 以上	3.6~4.2	5.0~6.2	4.0~5.0
錳 鋼	2,150	830	2.0 以上	存在せず	3.5~7.0	—
鑄 鐵	750~1000	290~400	存在せず	2.1 以上	抗張 1.2~2.4 耐壓 6.0~8.5	1.3~2.6
鐵 線	2,000	—	2.0 以上	—	5.7~7.0	—
鋼 線	2,150	850	5.0 以上	—	10.0 以上	—
アルミナム	675	260	—	—	0.9~1.0	—

2) 木 材

種 類	彈性係數 E (t/cm ²)	強 度 (kg/cm ²)				
		抗 張	抗 壓		抗 剪	
			繊維に平行	繊維に垂直		
杉	86.8	250	300	30	50	460
赤 松	64.4	240	400	50	55	420
松	71.5	300	430	50	70	500
落 葉 松	77.2	780	500	60	80	500
梅	66.7	470	470	50	75	525
樺	112.3	210	380	35	70	450
米 松	124.9	20	460	35	55	600
米 樺	84.0	10	320	20	55	440
オ ー ク	106.0	850	500	140	55	500
竹	99.0	915	600	125	70	780

13. 互に直角なる三方向の直應力 外力 P, Q, R が互に直角に働けば

伸縮率は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right\} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_z) \right\} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \dots\dots\dots (9)$$

茲に ϵ_v を膨脹率といふ。

直應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+1/m} \left\{ \epsilon_x + \frac{\epsilon_v}{m-2} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+1/m} \left\{ \epsilon_y + \frac{\epsilon_v}{m-2} \right\} \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+1/m} \left\{ \epsilon_z + \frac{\epsilon_v}{m-2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

第 3 章 平面力の圖式解法及平面圖形の諸能率

第 1 節 平面力の圖式解法

14. 物體静止の條件 物體が静止してゐる時は如何なる方向にも直動が起らないから、任意の方向に向ふ外力の分力の總和は 0 である。今座標軸 x, y, z についての外力の分力を X, Y, Z とすれば

$$\sum X=0, \quad \sum Y=0, \quad \sum Z=0 \dots\dots\dots (1)$$

又如何なる軸についても迴轉を起さないから、各座標軸に關する外力の力率を M_x, M_y, M_z とすれば

$$\sum M_x=0, \quad \sum M_y=0, \quad \sum M_z=0 \dots\dots\dots (2)$$

が成立する。この \sum は外力に就ての總和を示す。

(1) 及び (2) は又外力の合成力及び合成偶力が 0 なりと云ふことと同じである。故に合成力の x, y, z 軸に對する分力を $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z$ とし合成偶力の x, y, z 軸に就いてとつたものを $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ とすれば (1) 及び (2) は

$$\mathfrak{R}_x=0, \quad \mathfrak{R}_y=0, \quad \mathfrak{R}_z=0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\mathfrak{M}_x=0, \quad \mathfrak{M}_y=0, \quad \mathfrak{M}_z=0 \dots\dots\dots (4)$$

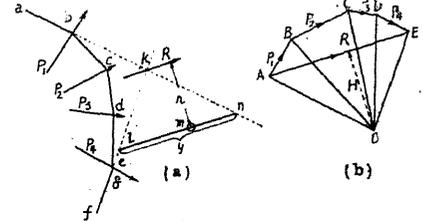
となる。以上の條件は物體の一部分を切りとつて考へる時でも、其の切斷面に適當なる力を入れて其の部分の釣合が破れない様にすれば、ここにも亦當てはまる。

平面力の釣合即ち力が凡て同一平面内に働いてゐる時に、其の平面を xy 面とすれば、上の (1), (2), (3), (4) の式は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \sum X=0, \quad \sum Y=0, \quad \sum M_z=0 \\ \mathfrak{R}_x=0, \quad \mathfrak{R}_y=0, \quad \mathfrak{M}_z=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

15. 平面力の合成 平面力の合成は力の平行四邊形を用ふれば出来るが、多數の力を合成するには力多角形と索多角形を用ひる方法が便利である。

第 14 圖に於て P_1, P_2, P_3, P_4 が與へられ合成力 R を求むるには (b) 圖に於て $\overline{AB}=P_1, \overline{BC}=P_2, \overline{CD}=P_3, \overline{DE}=P_4$ にとり AE を結べば R の大きさと方向とを得、ABCDEA を力多角形と云ふ。次に任意の點 O をとり、 $\overline{OA} \parallel \overline{ab},$



第 14 圖

$\overline{OB} \parallel \overline{bc}, \overline{OC} \parallel \overline{cd}, \overline{OD} \parallel \overline{de}, \overline{OE} \parallel \overline{ef}$ とし \overline{ab} と \overline{fe} との交點を k とすれば、 R は k 點を通る。而して O 點を極、 $abcdef$ を索多角形と云ふ。

P_1, P_2, P_3, P_4 が釣合へる時は $R=0$ 即ち力多角形は閉多角形をなす。

m 點に就いての合成力の力率 M は r を極より合成力に下した垂線とすれば

$$M=Rr$$

今 m を通り R に平行線を引き、 \overline{ak} 及び \overline{kn} との交點を l, n とし \overline{ln} の長さを y とすれば、 Δkln と ΔOAE とは相似なる故に

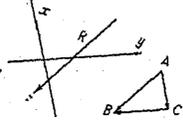
$$M=Hy$$

但し H は力多角形に於て O から R に引いた垂線の長さで極距と云ふ。

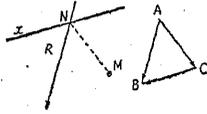
16. 平面力の分解 1) R を與へられた二方向に分つこと 第 15 圖に於て x, y を與へられた方向とする。 $\overline{AB}=R, \overline{AB} \parallel R, \overline{AC} \parallel x, \overline{BC} \parallel y$ とすれば、 $\overline{AC}, \overline{CB}$ は求むる 2 分力の大き及び向きを與へる。

x, y の方向の代りに x と他の分力の通る點 M とが與へられても分力を得ら

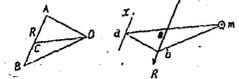
れる。例へば第 16 圖の如く R, x, M が與へられ x と R との交點を N とすれば, MN で y の方向が決るから前と同様になる。此の場合 R と x とが平行の



第 15 圖



第 16 圖

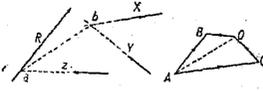


第 17 圖

ときは第 17 圖の如く任意の $\triangle abm$ を描き $ab \parallel AO, bm \parallel BO$ とし $am \parallel OC$ とすれば AC は x の分力, CB は m を通る分力となる。

2) R を一點に交らざる方向 X, Y, Z に

分つこと R, Z の交點 a と X, Y の交點 b とを結び $OA \parallel ab, BO \parallel Z$ とし OA を更に $AC \parallel X, OC \parallel Y$ とすれば力多角形の $BO,$

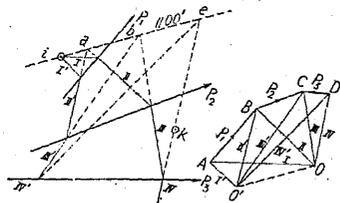


第 18 圖

CO, CA は各々 X, Y, Z の方向の分力となる。

17. 二個の索多角形の對邊の交點はこれに應ずる力多角形の二極を結ぶ直線に平行な一直線上にあり 第 19 圖

の I, II, \dots は O を極とし, $I' II' \dots$ は O' を極とする索多角形の各邊とする。 I と I', II と $II' \dots$ を延長し其の交點を $i, a \dots$ とすれば, $i, a \dots$ は一直線上にありて且つ $ei \parallel OO'$ である。

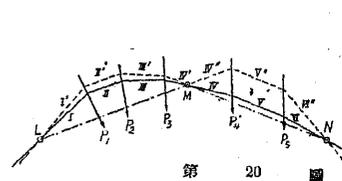


第 19 圖

18. 與へられた二點を通る索多角形 第 19 圖に於て i, k が與へられた 2 點とすれば, 初めに i から任意の極 O' をもつ索多角形 $I' II' III' IV'$ を畫き, 任意の線 ie を引き $ei \parallel OO', ek \parallel IV'$ として極 O を定む。次に力多角形 $ABCD O$ により索多角形 $I II III IV$ を畫けば, 之は求むる i 及び k を通る索多角形である。而して ei 線が不定である爲に斯の如き索多角形は無數に出来る。

19. 與へられたる三點を通る索多角形 第 20 圖に於て L, M, N を與へられたる點とし, L, M を通る索多角形 $I' II' III' IV'$ の極を O_1, MN を通る索多角形 $IV'' V'' VI''$ の極を O_2 とする。 $LM \parallel O_1O, MN \parallel OO_2$ を引くときは其の交點 O は L, M 及び N を通る索多角形の極となる, 即ち力多角形

$O ABCDEFO$ に相應する索多角形 $I II III IV V VI$ は L, M 及び N を通る。此の索多角形は唯一個あるのみである。



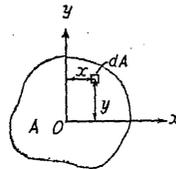
第 20 圖

第 2 節 平面圖形の諸能率

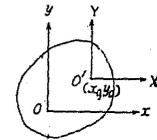
20. 平面圖形の静力率 第 21 圖に於て

$$G_x = \int_A y dA, \quad G_y = \int_A x dA \dots \dots \dots (6)$$

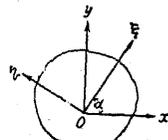
を圖形 A の x 及び y 軸に關する静力率と云ふ。第 22 圖の如く原點 O を $O'(x_0, y_0)$ に移し座標軸を x, y に平行に X, Y に變へるときは



第 21 圖



第 22 圖



第 23 圖

$$G_X = G_x - y_0 A, \quad G_Y = G_y - x_0 A \dots \dots \dots (7)$$

となる。又第 23 圖に於て x, y 軸を α 次廻轉して ξ, η とすれば

$$\left. \begin{aligned} G_\xi &= G_x \cos \alpha - G_y \sin \alpha, \\ G_\eta &= G_y \cos \alpha + G_x \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

を得る。

圖式にて $X-X$ 軸に關する静力率を求める場合には, 第 24 圖の如く圖形を X 軸に平行な帯に分ちその面積の大きさに等しく $1, 2, \dots$ を取り之を力と考へて索多角形を描くときは求める静力率 G_X は $G_X = Hy$.

但し H は力多角形の諸距, y は索多角形の第 1 邊と最終邊とが X 軸上に切り取る長さである。

21. 平面圖形の重心 平面圖形の重心を座標軸原點とするときは静力率は 0 となる故に, 平面圖形の重心を求めるには, 任意にとつた x, y 軸について G_x, G_y を求め

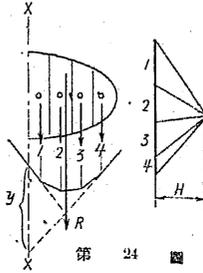
$$x_0 = G_y / A, \quad y_0 = G_x / A \dots \dots \dots (9)$$

より重心の位置が得られる。多くの平面圖形 A_1, A_2, \dots 等の集合の重心は A_1, A_2, \dots 等の重心を $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots$ 等とすると,

$$x_0 = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}, \quad y_0 = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots} \dots (10)$$

より求めることが出来る。但し $A_1, A_2 \dots$ は圖形の面積。

圖式に依り重心を求めるには、第 24 圖の如く圖形を任意の X 軸に平行なる帯に切り其の面積を力と考へて力多角形索多角形を描き、其の合成力の位置を求め、次に他の任意の Y 軸に就いて同様に合成力の位置を求めれば、其の交點が即ち重心である。



第 24 圖

22. 平面圖形の慣性率及び積率 第 21 圖に就いて

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA \dots (11)$$

を夫々 x, y 軸についての平面圖形 A の慣性率と云ひ、

$$J_{xy} = \int_A xy dA \dots (12)$$

を A の積率と云ふ。又 x, y 軸についての廻轉半徑 i_x, i_y は

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \dots (13)$$

第 22 圖に於て座標原點 O を O' に移し x, y 軸を X, Y 軸に變へれば

$$J_X = J_x - 2y_0 G_x + y_0^2 A, \quad J_Y = J_y - 2x_0 G_y + x_0^2 A \dots (14)$$

となり、座標原點 O が圖形の重心と一致するときには

$$J_X = J_x + x_0^2 A, \quad J_Y = J_y + y_0^2 A \dots (15)$$

(15) 式より重心を通る軸に関する慣性率は最小なることを知る。

第 23 圖の如く x, y 軸を α 丈廻轉し之を ξ, η 軸とすれば

$$\left. \begin{aligned} J_\xi &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha. \\ J_\eta &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha. \\ J_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

$J_{\xi\eta} = 0$ となる如き ξ, η 軸を互に共軛なりと稱し、又此の 2 軸が互に直交してゐるときには其の交點に對する主軸と呼ぶ。或る點を通る總ての軸に関する慣性率の内其の點に對する主軸に関するものが最大又は最小である。任意の 2 軸 x, y に關する J_x, J_y 及び J_{xy} を知つてゐる場合に主軸 X, Y と x 軸とのなす角 α 及び $90^\circ + \alpha$ は次式から求められる。

$$\tan 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} \dots (17)$$

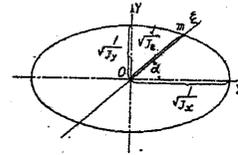
又主軸に關する慣性率は

$$\left. \begin{aligned} J_X &= 1/2 (J_x + J_y) + 1/2 \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \\ J_Y &= 1/2 (J_x + J_y) - 1/2 \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

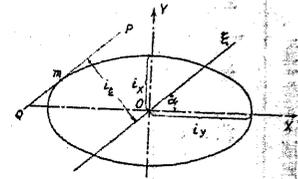
圖形の任意の點 O に關する主軸を X Y, 他の方向の軸を ξ, η とすれば

$$\left. \begin{aligned} J_\xi &= J_X \cos^2 \alpha + J_Y \sin^2 \alpha, \quad J_\eta = J_X \sin^2 \alpha + J_Y \cos^2 \alpha, \\ J_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} (J_X - J_Y) \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

而して總ての任意の軸 ξ 上に O より $1/\sqrt{J_\xi}$ を取り其の端點 m を繼ぐときは一つの橢圓を得る、其の主軸は X, Y に一致する。此の橢圓を第一慣性橢圓と云ふ。(第 25 圖)。



第 25 圖



第 26 圖

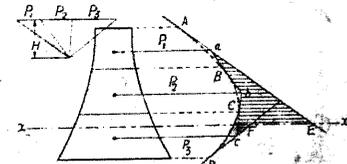
又 O 點を通る總ての ξ 軸に關する廻轉半徑 $i_\xi = \sqrt{(J_\xi/A)}$ を求め、 ξ 軸より i_ξ の距離に平行線 PQ を描くときは、其の平行線群に切して一つの橢圓が出来る。此の橢圓を第二慣性橢圓と云ふ(第 26 圖)。此の第一及び第二慣性橢圓は互に相似で且つ相似の位置にある。

x 軸に關する慣性率を圖式にて求めるためにモールの法を用ふれば、第 27 圖に於て平面圖形を x 軸に平行なる帯に切り其の面積を力と考へて力多角形及び索多角形を描く。而して AE, DF と x 軸との交點を E 及び F とすれば求める慣性率は

$$J_x = 2H(abcFEa)$$

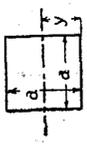
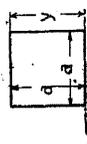
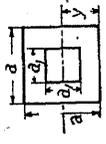
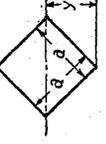
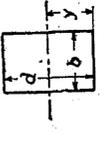
但し H は力多角形の高、括弧内は第 27 圖に陰影を附した面積。

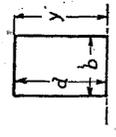
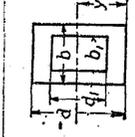
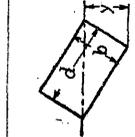
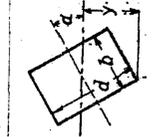
此の方法に於ては平行の帯の幅を出る寸小さく取れば J_x の値は次第に正確になつて来る。而して無限に幅を小さく取るときは索多角形 Aabcd は曲線 ABCD に一致する。



第 27 圖

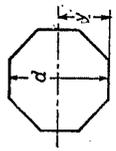
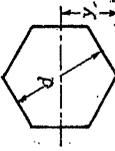
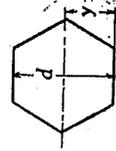
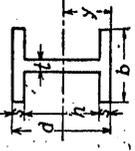
第 2 表 平面圖形の諸能率

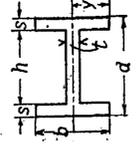
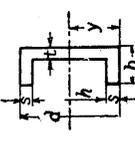
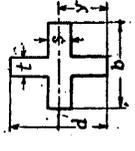
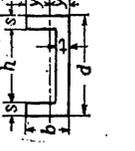
断面	断面積 A	縁維距離 y, y_1	慣性率 J	断面係數 $Z=J/y$	廻轉半徑 $i=\sqrt{(J/A)}$
	a^2	$y = \frac{a}{2}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{12}} = 0.288a$
	a^2	$y = a$	$\frac{a^4}{3}$	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{a}{\sqrt{3}} = 0.577a$
	$a^2 - a_1^2$	$y = \frac{a}{2}$	$\frac{a^4 - a_1^4}{12}$	$\frac{a^4 - a_1^4}{6a}$	$\sqrt{\frac{a^2 + a_1^2}{12}}$
	a^2	$y = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.707a$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6\sqrt{2}} = 0.118a^2$	$\frac{a}{\sqrt{12}} = 0.288a$
	bd	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{bd^3}{12}$	$\frac{bd^2}{6}$	$\frac{d}{\sqrt{12}} = 0.288d$

断面	断面積 A	縁維距離 y, y_1	慣性率 J	断面係數 $Z=J/y$	廻轉半徑 $i=\sqrt{(J/A)}$
	bd	$y = d$	$\frac{bd^3}{3}$	$\frac{bd^2}{3}$	$\frac{d}{\sqrt{3}} = 0.577d$
	$bd - b_1d_1$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{bd^3 - b_1d_1^3}{12}$	$\frac{bd^3 - b_1d_1^3}{6d}$	$\sqrt{\frac{bd^3 - b_1d_1^3}{12[bd - b_1d_1]}}$
	bd	$y = \frac{bd}{\sqrt{b^2 + d^2}}$	$\frac{b^3d^3}{6[b^2 + d^2]}$	$\frac{b^2d^2}{6\sqrt{b^2 + d^2}}$	$\frac{bd}{\sqrt{b^2 + d^2}}$
	bd	$y = \frac{d \cos \alpha + b \sin \alpha}{2}$	$\frac{bd}{12} [d^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha]$	$\frac{bd}{6} \left[\frac{d^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}{d \cos \alpha + b \sin \alpha} \right]$	$\sqrt{\frac{bd^3 \cos^2 \alpha + b^3 \sin^2 \alpha}{12}}$

斷面	斷面積 A	緣維距離 y, y_1	慣性率 J	斷面係數 $Z = J/y$	迴轉半徑 $i = \sqrt{(J/A)}$
	$\frac{bd}{2}$	$y = \frac{2d}{3}$ $y_1 = \frac{d}{3}$	$\frac{bd^3}{36}$	$\frac{bd^2}{24}$	$\frac{d}{\sqrt{18}} = 0.236d$
	$\frac{bd}{2}$	$y = d$	$\frac{bd^3}{12}$	$\frac{bd^2}{12}$	$\frac{d}{\sqrt{6}} = 0.408d$
	$\frac{b + b_1}{2}d$	$y = \frac{b_1 + 2b}{b_1 + b} \frac{d}{3}$ $y_1 = \frac{b + 2b_1}{b + b_1} \frac{d}{3}$	$\frac{b^3 + 4b^2b_1 + b_1^3}{36[b + b_1]} d^3$	$\frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{12[2b + b_1]} d^2$	$\frac{d}{\sqrt{(J + b_1^2)}}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64} = 0.049d^4$	$\frac{\pi d^3}{32} = 0.098d^3$	$\frac{d}{4}$

斷面	斷面積 A	緣維距離 y, y_1	慣性率 J	斷面係數 $Z = J/y$	迴轉半徑 $i = \sqrt{(J/A)}$
	$\frac{\pi[d^2 - d_1^2]}{4} = 0.785[d^2 - d_1^2]$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi[d^4 - d_1^4]}{64} = 0.049[d^4 - d_1^4]$	$\frac{\pi[d^3 - d_1^3]}{32d} = 0.098[d^3 - d_1^3] + d$	$\frac{\sqrt{d^2 + d_1^2}}{4}$
	$\frac{\pi d^2}{8} = 0.393d^2$	$y = \frac{[3\pi - 4]d}{6\pi} = 0.288d$ $y_1 = \frac{2d}{3\pi} = 0.212d$	$\frac{9\pi^2 - 64}{1152\pi} d^4 = 0.007d^4$	$\frac{9\pi^2 - 64}{192[3\pi - 4]} d^3 = 0.024d^3$	$\frac{\sqrt{9\pi^2 - 64}}{12\pi} d = 0.182d$
	$\frac{\pi bd}{4} = 0.785bd$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi bd^3}{64} = 0.049bd^3$	$\frac{\pi bd^2}{32} = 0.098bd^2$	$\frac{d}{4}$
	$\frac{\pi bd}{4} = 0.785bd$	$y = \frac{b}{2}$	$\frac{\pi db^3}{64} = 0.049db^3$	$\frac{\pi db^2}{32} = 0.098db^2$	$\frac{b}{4}$

斷 面	斷 面 積 A	緣 維 距 離 y, y_1	惰 性 率 J	斷 面 係 數 $Z = J/y$	廻 轉 半 徑 $i = \sqrt{J/A}$
	$\frac{3}{2}d^2 \tan 30^\circ = 0.866d^2$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{A}{12} \left[\frac{d^2(1+2 \cos^2 30^\circ)}{4 \cos^2 30^\circ} \right] = 0.06d^4$	$\frac{A}{6} \left[\frac{d(1+2 \cos^2 30^\circ)}{4 \cos^2 30^\circ} \right] = 0.12d^3$	$\frac{d}{4} \sqrt{\frac{1+2 \cos^2 30^\circ}{3 \cos^2 30^\circ}} = 0.264d$
	$\frac{3}{2}d^2 \tan 30^\circ = 0.866d^2$	$y = \frac{d}{2 \cos 30^\circ} = 0.577d$	$\frac{A}{12} \left[\frac{d^2(1+2 \cos^2 30^\circ)}{4 \cos^2 30^\circ} \right] = 0.06d^4$	$\frac{A}{6} \left[\frac{d(1+2 \cos^2 30^\circ)}{4 \cos^2 30^\circ} \right] = 0.104d^3$	$\frac{d}{4} \sqrt{\frac{1+2 \cos^2 30^\circ}{3 \cos^2 30^\circ}} = 0.264d$
	$2d^2 \tan 22\frac{1}{2}^\circ = 0.828d^2$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{A}{12} \left[\frac{d^2(1+2 \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ)}{4 \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ} \right] = 0.055d^4$	$\frac{A}{6} \left[\frac{d(1+2 \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ)}{4 \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ} \right] = 0.109d^3$	$\frac{d}{4} \sqrt{\frac{1+2 \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ}{3 \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ}} = 0.257d$
	$bd - h(b-t)$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{bd^3 - h^3(b-t)}{12}$	$\frac{bd^3 - h^3(b-t)}{6d}$	$\sqrt{\frac{bd^3 - h^3(b-t)}{12[bd - h(b-t)]}}$

斷 面	斷 面 積 A	緣 維 距 離 y, y_1	惰 性 率 J	斷 面 係 數 $Z = J/y$	廻 轉 半 徑 $i = \sqrt{J/A}$
	$bd - h(b-t)$	$y = \frac{b}{2}$	$\frac{2bs^3 + ht^3}{12}$	$\frac{2bs^3 + ht^3}{6b}$	$\sqrt{\frac{2bs^3 + ht^3}{12[bd - h(b-t)]}}$
	$bd - h(b-t)$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{bd^3 - h^3(b-t)}{12}$	$\frac{bd^3 - h^3(b-t)}{6d}$	$\sqrt{\frac{bd^3 - h^3(b-t)}{12[bd - h(b-t)]}}$
	$td + s(b-t)$	$y = \frac{d}{2}$	$\frac{td^3 + s^3(b-t)}{12}$	$\frac{td^3 + s^3(b-t)}{6d}$	$\sqrt{\frac{td^3 + s^3(b-t)}{12[td + s(b-t)]}}$
	$bd - h(b-t)$	$y = \frac{1}{2} \left[\frac{b^2 d - h(b-t)^2}{bd - h(b-t)} \right]$ $y_1 = b - y$	$\frac{2bs^3 + ht^3}{3} - Ay_1^2$	$\frac{J}{y}$	$\sqrt{\frac{J}{A}}$

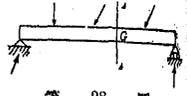
斷 面	斷 面 積 A	緣 維 距 離 y_1, y_2	惰 性 性 率 J	斷 面 係 數 $Z = J/y$	迴 轉 半 徑 $i = \sqrt{J/A}$
	$bs + ht$	$y_1 = \frac{d^2t + s^2(b-t)}{2A}$ $y_2 = d - y_1$	$J = \frac{td^3 + by_1^3 - (b-t)(y_1 - s)^2}{3}$	$Z = \frac{J}{y}$	$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$
	$\frac{ht}{2}(t + l)$	$y_1 = \frac{6bs^2 + 3ht(d+s) + M(t-f)(h+3s)}{6A}$ $y_2 = d - y_1$	$J = \frac{4bs^2 + ht^2(3t + l)}{12} - A(y_1 - s)^2$	$Z = \frac{J}{y}$	$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$
	$ts + ht + bs_1$	$y = \frac{td^2 + [t-f]s^2 + [b-f](2d-s)s}{2A}$ $y_1 = d - y$	$J = \frac{bt_1y_1^2 + by_1^2 - [b-f](y_1 - s)^2 - [b-f](y_1 - s)^2}{3}$	$Z = \frac{J}{y}$	$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$
	$bs + 2lt + bs_1$	$y = \frac{2bt^2 + [b_1 - 2l]s^2 + [b - 2l](2d - s)s}{2A}$ $y_1 = d - y$	$J = \frac{bs_1y_1^2 + by_1^2 - [b_1 - 2l](y_1 - s)^2 - [b - 2l](y_1 - s)^2}{3}$	$Z = \frac{J}{y}$	$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$

斷 面	斷 面 積 A	緣 維 距 離 y_1, y_2	惰 性 性 率 J	斷 面 係 數 $S = J/y$	迴 轉 半 徑 $i = \sqrt{J/A}$
	$(d + 2b)(s + n)$	$y = \frac{d}{2}$ $g = \text{突縁の勾配} = \frac{n-s}{b} = \frac{h-l}{b-l} = \frac{1}{2}$ (標準型の場合)	$J = \frac{1}{12} [bd^3 - \frac{1}{4}(h^4 - l^4)]$	$S = \frac{J}{y}$	$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$
	$(l + 2b)(s + n)$	$y = \frac{b}{2}$ $g = \text{突縁の勾配} = \frac{n-s}{b} = \frac{h-l}{b-l} = \frac{1}{2}$ (標準型の場合)	$J = \frac{1}{12} [b^2(l-h) + lt^2 + \frac{g}{4}(l^4 - h^4)]$	$S = \frac{J}{y}$	$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$
	$(d + b)(s + n)$	$y = \frac{d}{2}$ $g = \text{突縁の勾配} = \frac{n-s}{b} = \frac{h-l}{2(b-l)} = \frac{1}{2}$ (標準型の場合)	$J = \frac{1}{12} [bd^2 - \frac{1}{8}(l^4 - h^4)]$	$S = \frac{J}{y}$	$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$
	$(d + b)(s + n)$	$y_1 = \left[\frac{M^2}{2} + \frac{g}{3}(b-f)(b+2f) \right] + A$ $y_2 = d - y_1$ $g = \text{突縁の勾配} = \frac{n-s}{b} = \frac{h-l}{2(b-f)} = \frac{1}{2}$ (標準型の場合)	$J = \frac{1}{3} \left[2bs^2 + ts + \frac{g}{2}(b^4 - t^4) \right] - 4y_1^2$	$S = \frac{J}{y}$	$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$

第 4 章 桁

第 1 節 桁の應力

23. 垂面力, 剪力, 彎曲率の定義 桁が荷重を受けたる場合此の桁に働くすべての力は平衡を保たざるべからず。今 s-s 断面に於て G をその重心とすれば 1) 断面の片側に働く桁の軸方向の分力は断面 s-s に於ける垂面力と云ひ N にて表はし, 2) 軸と直角方向の分力は断面 s-s に於ける剪力と云ひ S にて表はし, 3) 断面の片側に働く外力の力率を断面 s-s に於ける G 點に對する彎曲率と稱し M にて表はす。



第 28 圖

24. 垂面應力 1) 垂面應力の一般式 桁の應力を求めるには「元々平面であつた横断面は變形後に於てもそのままの平面をなして傾く」と云ふベルヌーイ・オイラーの假定を用ふ。

垂面應力 σ を求めるに今桁の断面の重心に原點をとり互に共軛なる ξ, η なる座標軸を考へる。K (ξ_k, η_k) に垂面力 N が働くとするれば平衡條件より次の式が成立つ。

$$N = \int \sigma dA, \quad N\xi_k = \int \xi \sigma dA, \quad N\eta_k = \int \eta \sigma dA \quad \dots \dots \dots (1)$$

ベルヌーイ・オイラーの假定とフックの法則と合せ考へて σ は又次の如く平面の式にて表はさる。

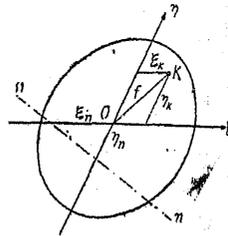
$$\sigma = a + b\xi + c\eta \dots \dots \dots (2)$$

但し a, b 及び c は考へてゐる断面につき一定の値をとるものなり。

(2) 式の關係を (1) 式に用ひて

$$N = \int (a + b\xi + c\eta) dA, \quad N\xi_k = \int (a + b\xi + c\eta) \xi dA, \quad N\eta_k = \int (a + b\xi + c\eta) \eta dA.$$

原點は重心にして共軛軸を用ひたれば $\int \xi dA = 0, \int \eta dA = 0, \int \xi \eta dA = 0$ なる故



第 29 圖

$$N = aA, \quad N\xi_k = b \int \xi^2 dA = I_{\xi\xi} J_{\eta}, \quad N\eta_k = c \int \eta^2 dA = c J_{\xi\xi}.$$

但し J_{η}, J_{ξ} は夫々 η 及び ξ 軸に關する断面の慣性率とす。

故に σ の式として次の一般式を得。

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N\xi_k \xi}{J_{\eta}} + \frac{N\eta_k \eta}{J_{\xi}} \dots \dots \dots (3)$$

$$\sigma = 0 \text{ とすれば } 0 = \frac{N}{A} + \frac{N\xi_k \xi}{J_{\eta}} + \frac{N\eta_k \eta}{J_{\xi}} \dots \dots \dots (4)$$

となり一つの直線式となり、之が座標軸を切斷する點は

$$\xi_n = -\frac{J_{\eta}}{A\xi_k} = -\frac{i_{\eta}^2}{\xi_k}, \quad \eta_n = -\frac{J_{\xi}}{A\eta_k} = -\frac{i_{\xi}^2}{\eta_k} \dots \dots \dots (5)$$

但し i_{ξ}, i_{η} は夫々 ξ 及 η 軸に關する迴轉半徑である。

第 29 圖の n-n がそれである、即ち n-n の線上では垂面應力は 0 となる。従て變位なくこの線を軸として断面が迴轉するので n-n を中軸と稱す。(5) 式より

$$\frac{\eta_n}{\xi_n} = \frac{\eta_k}{\xi_k} = \frac{J_{\xi}}{J_{\eta}} = \frac{i_{\xi}^2}{i_{\eta}^2} \dots \dots \dots (6)$$

を得。(5) (6) 式より次の結論を得。「着力點が與へらるれば中軸 n-n の方向は決定す。OK を結んだ線を力線と名づければ力線が與へらるれば n-n は決定す」又「K が重心と一致すれば中軸は無限大の距離にあり、K が無限大のところにあれば中軸は重心を通る。」又「 ξ_k, η_k に働く垂面力 N によつて ξ, η 點に起る垂面應力 σ は ξ, η 點に N が働いた場合に ξ_k, η_k 點に起る應力と全く同一の大きさである。」と。

今 $N\eta_k = M_{\xi} = (N \text{ の } \xi \text{ 軸に對する力率}), \quad N\xi_k = M_{\eta} = (N \text{ の } \eta \text{ 軸に對する力率})$ とすれば (3) 及び (6) 式は次の如く書き換ふる事を得。

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}} \xi + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}} \eta, \quad \frac{\eta_n}{\xi_n} = -\frac{i_{\xi}^2}{i_{\eta}^2} \frac{M_{\eta}}{M_{\xi}} \dots \dots \dots (7), (8)$$

2) 座標軸と力線とが一致する場合の垂面應力 若し η 軸を力線 OK に一致さすれば $\xi_k = 0, M_{\eta} = 0, \eta_k = f$ となり $Nf = M = (N \text{ の重心に對する力率})$ と置けば

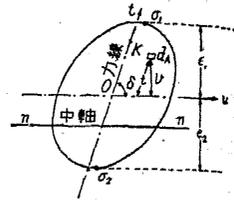
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N\eta_k \eta}{J_{\xi}} = \frac{N}{A} + \frac{M\xi \eta}{J_{\xi}} \dots \dots \dots (9)$$

となる。 $\xi_k = 0, \eta_k = \eta_k$ を (5) に代入して

$$\xi_n = -\frac{i\eta^2}{\xi_k} = \infty, \quad \eta_n = -\frac{i\xi^2}{\eta_k} \dots (10)$$

を得。即ち中軸は ξ 軸に平行にして η 軸を $-i\xi^2/\eta_k$ の點にて切斷す。故に(10)式より「中軸と力線とは互に共軛なり」と云ふ事を得。

今第 30 圖の如く力線を t 軸にとり重心 O を通して t に共軛なる u 軸をとり $\int v^2 dA = J_u$ とすれば (t に當る) $= v/\sin \delta$



第 30 圖

$$J_{uv} (J_{\xi} \text{に當る}) = \int t^2 dA = \frac{1}{\sin^2 \delta} \int v^2 dA = \frac{J_u}{\sin^2 \delta}$$

となり (9) 式より

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M \sin \delta}{J_u} v \dots (11)$$

を得。 σ は u 軸より最も離れた處即ち上下の縁にて最大又は最小となる、之を縁維應力と云ひ、之等を σ_1, σ_2 とすれば其の値は

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M \sin \delta}{J_u} e_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M \sin \delta}{J_u} e_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_2} \dots (12)$$

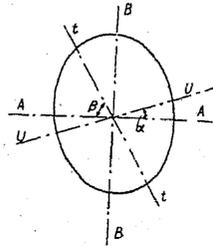
但し $Z_1 = \frac{J_u}{e_1 \sin \delta}, \quad Z_2 = \frac{J_u}{e_2 \sin \delta} \dots (12')$

にして Z を $u-u$ 軸に關する断面係數と云ふ。

$N=0$ ならば中軸は $u-u$ 軸と一致す。

第 31 圖の如く A-A, B-B が主軸ならば次の關係あり $tg \alpha \cdot tg \beta = J_A/J_B \dots (13)$

但し $J_A = J_{max}, \quad J_B = J_{min}$ である。



第 31 圖

3) 對稱断面を有する桁の垂面應力 吾々の取扱ふ桁の断面は對稱的のもの多く、從て主軸は断面を對稱に分つ $x-x, y-y$ 軸となり、力線はその内の 1 軸と一致すること多し。今力線は $y-y$ 軸と一致し從て $\delta = \pi/2$ となる場合には

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{J_y} y_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{J_y} y_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_2} \dots (14)$$

普通取扱ふ桁に於ては垂直荷重なる場合多く、從て $N=0$ となり次式を用ふ。

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y, \quad \sigma_1 = \frac{M}{J_x} y_1 = \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_2 = -\frac{M}{J_x} y_2 = -\frac{M}{Z_2} \dots (14')$$

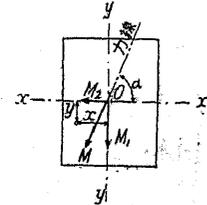
但し J_x は $x-x$ 軸に關する慣性率、中軸は力線に直交す。

断面が對稱であつて力線が主軸と一致せぬ場合には (第 32 圖)、一般式 (3) を用ふるを便利とする。

即ち M を M_1 及び M_2 なる 2 つの方向の分力率に分けて取扱ふ。 $M_1 = M \sin \alpha, \quad M_2 = M \cos \alpha$ 。

故に任意點 (x, y) の垂面應力は

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{J_x} y + \frac{M_2}{J_y} x \dots (15)$$

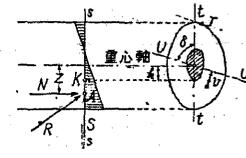


第 32 圖

但し J_x, J_y は夫々 x 及 y 軸に關する慣性率である。

4) 断面の核 R を断面 $s-s$ より左に働く外力の合力とし $s-s$ 断面を A 點にて切るとすると、彎曲率は $M=Nz$ にて與へらる (第 33 圖)。今力線を $t-t$ 軸とし之と共軛なる $u-u$ 軸より v なる距離の點に於ける垂面應力は次の如し。

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{Nz \sin \delta}{J_u} v \\ &= \frac{N}{A} \left(1 + \frac{Az \sin \delta}{J_u} v \right) \\ &= \frac{N}{A} \left(1 + \frac{zv}{i_u^2} \sin \delta \right) \end{aligned}$$



第 33 圖

但し i_u は彎曲半徑である。

而して $v_0 = -\frac{i_u^2}{z} \operatorname{cosec} \delta$ なる時に σ は 0 となる。即ち中軸の位置は N の大さには全く無關係であつて單に z の函數である。 R が重心を通るならば $M=0$ となり垂面應力は断面に一様に分布さる、即ち $z=0$ ならば $v_0 = \infty$ となり中軸が無限大の距離に押しやられるのである。 A の位置が重心より遠ざかるに從て A 點の側の應力は大となり反對側の應力は減少す。 $z=k$ 即ち K 點に R が働く場合には A の反對側に於て中軸は r 點に於て断面に切す即ち r 點に於て應力は 0 となる。此の K 點を核點と稱す。着力點が K と A 側邊緣との間にある場合は r 點の應力は A 側の應力と反對の符號を持つ。今断面の周邊のすべてに對する核點 K を求め得たとし此等の點を結び合すれば一つの面を作る。之を核面積又は單に核と云ふ。

R の着力點が核の中にある場合には断面の應力は同一の符號を持つ。 R が核の縁に働く場合は断面の縁維應力の内 R の着力點と反對側のものが 0 となる。

5) 核を用ひて縁維應力を求むる方法 力線 $t-t$ に関する核點 1 及 2 は次式にて與へらる。(t, u 軸は共軸軸)

$$k_1 = \frac{i_u^2}{e_2 \sin \delta}, \quad k_2 = \frac{i_u^2}{e_1 \sin \delta} \dots (16)$$

又は $k_1 = \frac{Z_2}{A}, \quad k_2 = \frac{Z_1}{A} \dots (16)'$

但し i_u は $t-t$ に共軸なる $u-u$ 軸に関する迴轉半徑, Z_1 及び Z_2 は $u-u$ 軸に関する断面係數, A は断面積である。

縁維應力は次の如く與へらる。

$$\sigma_1 = \frac{M_2}{A k_2} = \frac{M_2}{Z_1}, \quad \sigma_2 = -\frac{M_1}{A k_1} = -\frac{M_1}{Z_2} \dots (17)$$

茲に M_1 及び M_2 は核點 1 及び 2 に関する彎曲率でこれを核點彎曲率と云ふ。(17) に見る如く σ を求むる際に k 及び核點彎曲率は σ を起すべき周縁と反對側の核點に関する値なる事を注意すべし。普通の平面圖形の核點の値は第 3 表の如し。

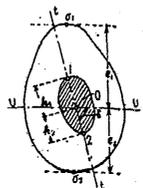
第 3 表 核 の 表

断面の形状	核
矩形 (第 35 圖)	$k_{min} = bh/6 \sqrt{b^2 + h^2}$
二等邊三角形 (第 36 圖)	$k_1 = h/6, \quad k_2 = h/12$ (相似三角形)
圓形 (直徑= d)	$k = d/8 = \text{一定}$ (圓面積を形成す)
圓環 ($D = \text{外徑}$ $d = \text{内徑}$)	$k = D/8 \times (1 + d^2/D^2) = \text{一定}$

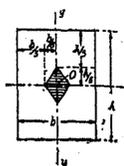
6) 壓力のみをうける断面 (擁壁の基礎, 橋臺等の場合) 力線が断面の主軸と一致する場合(多くは對稱軸)に於て軸壓力 N の働點が核の内にあるときは断面のすべての點で應壓力を生じ, 縁維應力 σ_1 及び σ_2 とは次式にて與へらる。

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_2}$$

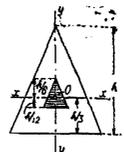
若し N の働點 A が核點の外にあるときは中軸を境として一部分は應壓力を生じ, 他の部分には全然應力を生ぜざるものと考へて計算をする (理論上は應壓力を生ずべき部分が張力に耐へ得ざる物である場合)。その應力分布の狀態は第 37 圖の如し。 $\xi = a + z$ を軸壓力 N の働點と中軸との距離とすれば



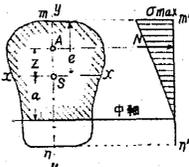
第 34 圖



第 35 圖



第 36 圖



第 37 圖

$$\xi = J'/S' \dots (18)$$

但し J' = 中軸 (未知) に對する應力部分の慣性率, S' = 同部分の靜力率。

σ_{max} を求むるには應力の總計が軸壓力に等しかるべしとの平衡條件より

$$\int \sigma_{max} \frac{v}{a+e} df = N \text{ にして } \int v df = S' \text{ なる故に}$$

$$\sigma_{max} = \frac{a+e}{S'} N \dots (19)$$

断面が矩形なる場合には (第 38 圖), N の働點 A が近い縁よりの距離 c ならばこの周縁より中軸迄の距離は $3c$ である。依て

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{3bc} \dots (20)$$

となるべし。

【計算例】 第 39 圖の平面圖及び立面圖に示す如く基礎コンクリートが地盤と m, n にて接してある場合 m 端より 0.35 の距離に於て $N=40$ t の壓力をうけたるとき m 點に生ずる最大應壓力を求む。

先づ A 點が核點 1 の内外いづれにあるかを見る, 全断面積の重心を通る $s-s$ 軸に對する慣性率 $J_2 = 0.667 \text{ m}^4$ 故に断面係數 Z_1 は $Z_1 = J_2/y$ (但し y は s より一端 n 迄の距離) 即ち

$$Z_1 = \frac{0.667}{1.054} = 0.633 \text{ m}^3$$

故に s より核點 1 迄の距離は體面積 $A = 2.6 \text{ m}^2$ なる故 $k_1 = \frac{Z_1}{A} = \frac{0.632}{2.6} = 0.243 \text{ m}$ 。

故に A 點は k_1 より外にある。(18) 式 $\xi = J'/S'$ より中軸の位置を求むるに J' 及び S' を第 39 圖の a の項にて表はせば

$$\xi = a + (0.8 - 0.35) = a + 0.45$$

$$S' = 2 \times 0.8(0.4 + a) + \frac{a^2}{2} = 0.64 + 1.6a + 0.5a^2$$

$$J' = \frac{1}{2} \frac{1}{12} 2^3 [2(0.8 + a)^2 - a^3] = \frac{1}{3} (1.024 + 3.84a + 4.8a^2 + a^3)$$

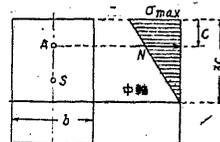
依て $a + 0.45 = \frac{1}{3} \frac{1.024 + 3.84a + 4.8a^2 + a^3}{0.64 + 1.6a + 0.5a^2}$

此の a に関する 3 次式を解きて $a = 0.30 \text{ m}$ を得。従て $S' = 1.165 \text{ m}^3$ を求め (19) 式

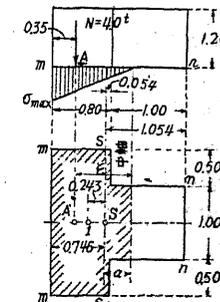
$$\sigma_{max} = \frac{a+e}{S'} N \text{ より } \sigma_{max} \text{ を算出すれば次の如くなる。}$$

$$\sigma_{max} = \frac{0.30 + 0.80}{1.165} 40 = 38 \text{ t/m}^2 = 3.8 \text{ kg/cm}^2$$

25. 剪應力 第 40 圖に於て δx の両面に働く垂面應力の大ききの差 $\delta \sigma_x$ は断面 A'' に於ける接面應力 τ の働きによつて釣合つてゐる。故に陰影部に働く應力の軸方向の釣合を考へれば



第 38 圖



第 39 圖

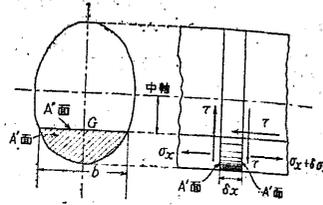
$$\int_{A'} (\sigma_x + \delta\sigma_x) dA - \int_{A'} \sigma_x dA + \int_{A'} \tau dA = 0 \quad \text{或は} \quad \int_{A'} \tau dA = - \int_{A'} \delta\sigma_x dA$$

今 τ を b の方向に於て不変と考へれば

$$\tau = - \frac{1}{b} \int_{A'} \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dA$$

然るに $\sigma_x = - \frac{M}{J} y$ なる故

$$\tau = \frac{1}{bJ} \frac{\delta M}{\delta x} \int_{A'} y dA = \frac{SG_{A'}}{bJ} \dots (21)$$



第 40 圖

この τ は A' 面に働く剪應力と等しい。 $G_{A'} = \int_{A'} y dA$ は断面 A' 部分 (第 40 圖陰影部) の中立軸についての静力率である故に剪應力の最大値は中立軸に於て起る。

$S = \frac{\delta M}{\delta x}$ は彎曲率の微分係数であるがこれに働く凡ての外力の y 軸の方向の分力の總和に當り剪力と稱し各種の桁に於て外力の配置と G 點の位置とにより決定する値である。尙 S は物體靜止の條件より A' 面内の τ の總和に等し即ち

$$S = \int_A \tau b dy \dots \dots \dots (22)$$

τ は上下縁端に於て 0 となり中軸剪應力が最大となる。

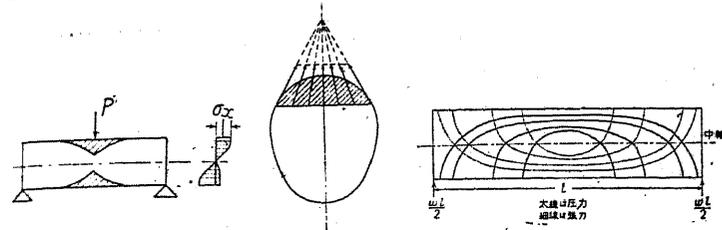
第 4 表 最大剪應力

断面形状	矩形	圓形	圓環
τ_{max}	$\frac{3}{2} \frac{S}{A}$	$\frac{4}{3} \frac{S}{A}$	$\frac{2}{3} \frac{S}{A}$

26. 彎曲應力總論 彈性限を超えて彎曲するときは桁の一部は第 41 圖の陰影部の如く可塑性領域に入る。従てかゝる部分には上の計算は補正を要する。かゝる場合に於ても尙變形についてはベルヌーイ・オイラーの假定が用ひらるゝとするも垂面應力はもはや等變的ではなく拋物線に近い分布をなす (バツハの定理)。

25. に於て用ひた假定「 τ が b について不変」としたのは矩形断面以外の時は當てはまらない。他の形では邊緣で τ が邊緣の切線に一致する如くになつてゐて第 42 圖の如くなる。

桁が等彎曲を受けた場合の主應力曲線をかけば第 43 圖の如し。



第 41 圖

第 42 圖

第 43 圖

第 2 節 桁の撓度

27. 垂面應力による撓度 剪應力の爲めに起る撓度は通常小なる故にこれを略して垂面應力によるもののみを考ふ。第 44 圖 (b) に於て

$$dx' = dx \left\{ 1 + \frac{\sigma_x}{E} \right\}, \quad \frac{\rho + y}{\rho} = \frac{dx(1 + \frac{\sigma_x}{E})}{dx} = 1 + \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\therefore \frac{y}{\rho} = \frac{\sigma_x}{E}$$

且つ $\sigma_x = \frac{M}{J} y$

及び $\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2 \eta}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} = - \frac{d^2 \kappa}{dx^2}$

$$\therefore \frac{d^2 \eta}{dx^2} = - \frac{M}{EJ} \dots \dots \dots (23)$$

但し M は彎曲率である。第 44 圖 (c) に示す如く M 正ならば ρ は負、 M 負ならば ρ は正となる。

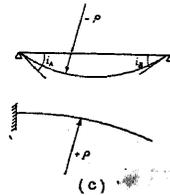
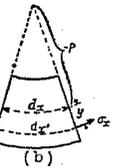
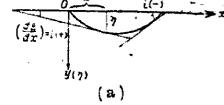
(23) 式を彈性線の式と云ひ EJ を桁の彎曲剛度と云ふ。

今彎曲剛度を常數と考へて (23) 式を微分すれば

$$\frac{d^3 \eta}{dx^3} = - \frac{1}{EJ} \frac{dM}{dx} = - \frac{S}{EJ} \dots \dots \dots (24)$$

$$\therefore \frac{dM}{dx} = S$$

但し S は剪力である。更に微分して



第 44 圖

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{1}{EJ} \frac{dS}{dx} = +\frac{q}{EJ} \quad \therefore \quad \frac{dS}{dx} = -q \dots (25)$$

但し q は 連続荷重であつて kg/m^2 で表はす。逆に (23) 式を積分すれば

$$\frac{d\eta}{dx} = i = C_1 - \frac{1}{EJ} \int M dx \dots (26)$$

i を 撓角と云ひ、 C_1 は 積分定数とす。更に積分して

$$\eta = C_2 + C_1 x - \frac{1}{EJ} \int \int M dx dx \dots (27)$$

η を 撓度と稱し、 C_1 及 C_2 共に 積分定数である。(23), (25) 式より

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}, \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q \dots (28)$$

又 (28) 式より $\frac{d\eta}{dx} = i$, $\frac{dM}{dx} = S$ なる故

$$\frac{di}{dx} = -\frac{M}{EJ}, \quad \frac{dS}{dx} = -q \dots (29)$$

(28) 及び (29) 式の有する意味を説明せんに「連続荷重より撓曲率を求むる事と M/EJ より撓度を求むるは全く同一の操作なり。即ち桁の撓度を求むるには先づ與へられたる荷重により M/EJ を求め更に M/EJ を荷重と考へて撓曲率を求むれば可なり。又 M/EJ を荷重と考へて任意點の剪力を求むればその點の傾斜角を表はす。」以上をモールの定理と云ふ。此の定理を用ひて與へられたる荷重より撓角及撓度を簡単に求むることを得。

圖式的に撓度を求むるには第 45 圖(a); (b) の如く先づ與へられたる荷重より M -面を求む。

$$M = y_1 H_1$$

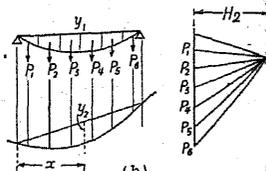
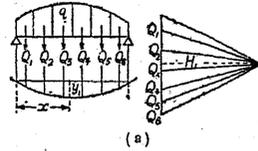
更に此の M -面の y_1 を同様に取扱ひ η -面を得。

$$\eta = \frac{1}{EJ} y_2 H_1 H_2$$

にて與へらる。

撓曲率圖が三角、四角、拋物線形をなすときは 30. 3) 4) に述べる ω -法を用ひて撓度を計算する事を得。

28. 各種の桁の實用式



第 45 圖

No.	桁の種類及載荷力法	反力, 剪力	彎曲率	撓度	備考
1		$R_A = P$ $S_B = P$	$M_x = -P(a-x)$ $\max M = -Pa$	$y = \frac{Px^3}{6EJ} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]$ $x = a: f = \frac{Pa^3}{8EJ}$	$P = \text{全荷重}$ $x' = l - x$
2		$R_A = pa$ $S_B = p(a-x)$ $\max S = pa$	$M_x = -\frac{p}{2}(a-x)^2$ $\max M = -\frac{pa^2}{2}$	$y = \frac{px^3}{6EJ} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right]$ $x = a: f = \frac{pa^4}{8EJ}$	
3		$R_A = P$ $S_B = P \frac{x^{1/2}}{l}$	$M_x = -\frac{P}{3} \frac{x^{3/2}}{l}$ $\max M = -\frac{Pl}{3}$	$y = \frac{Px^3}{12EJ} \left[\frac{4}{5} \frac{x'}{l} - \frac{1}{6} \left(\frac{x'}{l} \right)^2 \right]$ $x = l: f = \frac{Pl^2}{15EJ}$	
4		A-C: $R_A = S_B = \frac{Pb}{l}$ C-B: $R_B = S_{a1} = \frac{Pa}{l}$	A-C: $M_x = \frac{Pb}{l} x$ C-B: $M_x = \frac{Pa}{l} x_1$ Cに於て: $\max M = \frac{Pab}{l}$	A-C: $y = \frac{Pbx}{6EJ} (l^2 - b^2 - x^2)$ C-B: $y_1 = \frac{Pax_1}{6EJ} (l^2 - a^2 - x_1^2)$ Cに於て: $f = \frac{Pa^2 b^3}{8EJl}$ 若し $a=b: f = \frac{Pl^3}{48EJ}$	

No.	桁の種類及載荷方法	反力, 剪力	彎曲率	備考
5		$R_A = \frac{2P}{l} \left(l - x - \frac{a}{2} \right)$ $R_B = \frac{2P}{l} \left(x + \frac{a}{2} \right)$	$M_1 = \frac{2P}{l} \left(l - x - \frac{a}{2} \right) x$, $M_2 = \frac{2P}{l} \left(l - x - a \right) \left(x + \frac{a}{2} \right)$ $x = \frac{a}{2} - \frac{a}{4}$ に對して: $M_1 = \max M = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{a}{2l} \right)^2$ 撓度 $y = \frac{pl^4}{24EJ} \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right]$ $x = \frac{l}{2}$ に對して: $f = \frac{5pl^4}{384EJ}$	但し $\frac{a}{l} \geq 0.586$: 單一荷重の場合と同様に $\max M = \frac{1}{4} Pl$
6		$R_A = R_B = \frac{1}{2} pl$ $S_x = p \left(\frac{l}{2} - x \right)$	$M_x = \frac{1}{2} px(l-x)$ $x = \frac{l}{2}$ に對して: $\max M = \frac{1}{8} pl^2$	
7		$R_A = p \frac{bc}{l}$ $R_B = p \frac{ac}{l}$	A-C': $M_x = p \frac{bc}{l} x$ C''-B: $M_{c_1} = p \frac{ac}{l} x_1$ C に於て: $M_C = pc \left(\frac{cb}{l} - \frac{c}{8} \right)$ $x = a - \frac{c}{2} + \frac{l}{8}$ に對して: $\max M = \frac{pabc}{8} \left(l - \frac{c}{2} \right)$	

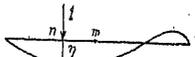
No.	桁の種類及載荷方法	反力, 剪力	彎曲率	撓度	備考
8		$R_A = \frac{P}{3}$ $R_B = \frac{2P}{3}$	$M_x = \frac{Px}{3} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$ $x = 0.577l$ に對して: $\max M = 0.128Pl$	$y = \frac{Pp^3}{180EJ} \left[7 \left(\frac{x}{l} \right) - 10 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^5 \right]$ $x = 0.519l$ に對して: $\max y = 0.01304 \frac{Pl^3}{EJ}$	P=全荷重
9		$R_A = R_B = \frac{P}{2}$ $S_x = P \left[\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$ 故に $0 < x < \frac{l}{2}$	$0 < x < \frac{l}{2}$: $M_x = \frac{P}{6} \left[\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$ $x = \frac{l}{2}$ に對して: $\max M = \frac{Pl}{6}$	$y = \frac{Pl^3}{12EJ} \left[\frac{5}{8} \left(\frac{x}{l} \right) - \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \frac{2}{5} \left(\frac{x}{l} \right)^5 \right]$ $x = \frac{l}{2}$ に對して: $f = \frac{Pl^3}{60EJ}$	P=全荷重
10	突桁部を有する桁 	$R_A = -P \frac{c_1}{l}$ $R_B = P \frac{l+c_1}{l}$ A-B: $S_x = -P \frac{c_1}{l}$ B-D: $S_{x_1} = P$	A-B: $M_x = -P \frac{c_1 x}{l}$ B-D: $M_{x_1} = P(c_1 - x_1)$	A-B: $y = -\frac{Pc_1^2}{6EJ} \left(\frac{x}{l} \right) \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$ $x = 0.577l$: $\max y = \frac{Pc_1^2}{9\sqrt{3}EJ}$ B-D: $y_1 = \frac{Pc_1^2 x_1}{6EJ} \left[2 \frac{l}{c_1} + 3 \frac{x_1}{c_1} - \left(\frac{x_1}{c_1} \right)^2 \right]$ D に於て: $f_1 = \frac{Pc_1^2}{3EJ} (l+c_1)$ A-C: $y_2 = \frac{Pc_1 l}{6EJ} x_2$	

No.	桁の種類及載荷方法	反力, 剪力	彎曲率	撓度
11		單桁の場合と同じ $R_A = -\frac{P}{2} \frac{c_1}{l}$ $R_B = pc_1 \left(1 + \frac{c_1}{2l}\right)$	單桁の場合と同じ $M_x = -\frac{P}{2} \frac{c_1^2 x}{l}$ $M_{x_1} = \frac{P}{2} (c_1 - x_1)^2$	A-B: 單桁の場合と同じ B-D: $y_1 = -\frac{Pabx_1}{6EJl} (2a+b)$ C-A: $y_2 = -\frac{Pabx_2}{6EJl} (a+2b)$
12		A-B: $S_x = -\frac{P}{2} \frac{c_1}{l}$ B-D: $S_{x_1} = p(c_1 - x_1)$	A-B: $M_x = -\frac{p}{2} \frac{c_1^2 x}{l}$ B-D: $M_{x_1} = \frac{p}{2} (c_1 - x_1)^2$	A-B: $y = -\frac{pc_1^2 l^2}{12EJ} \left(\frac{x}{l}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$ $\alpha = 0.577l$; $\max y = -\frac{pc_1^2 l^2}{18\sqrt{3}EJ}$ B-D: $y_1 = \frac{pc_1^2 x_1}{6EJ} \left[\frac{l}{c_1} + \frac{3}{2} \frac{x_1}{c_1} - \left(\frac{x_1}{c_1}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{x_1}{c_1}\right)^3\right]$ $f_1 = \frac{pc_1^3}{24EJ} (4l + 3c_1)$ A-C: $y_2 = -\frac{pc_1^2 l^2}{12EJ} x_2$

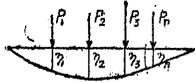
No.	桁の種類及載荷方法	反力, 剪力	彎曲率	撓度
13		單桁の場合と同じ $R_A = P \frac{b^2}{l^2} (2a+l)$ $R_B = P \frac{a^2}{l^2} (2b+l)$	單桁の場合と同じ $M_A = -P \frac{ab^2}{l^2}$ $M_B = -P \frac{a^2 b}{l^2}$ 載荷點に於て: $M_x = \frac{2Pa^2 b^2}{l^3}$	A-B: 單桁の場合と同じ B-D: $y_1 = -\frac{Pb^3}{24EJ} x_1$ A-C: $y_2 = -\frac{Pa^3}{24EJ} x_2$ $0 < x < a$: $y_1 = \frac{Pb^2 x^2}{6EJl^2} [3al - 3ax - bx]$ $a < x < l$: $y_2 = \frac{Pa^2 x^2}{6EJl^2} \left[\frac{l^2 (x-a)^2}{b^2 x^2} + 3al - 3ax - bx \right]$ $a < b$ の時 $x = \frac{2Pa^2 l^2}{3b+a}$; $\max y = \frac{2Pa^2 l^2}{3EJ(a+3b)^2}$
14		$R_A = R_B = \frac{Pl}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{Pl^2}{12}$ $M_x = \frac{Pl^2}{2} \left[\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$ $x = \frac{l}{2}$ に對して: $M = -\frac{Pl^2}{24}$	$y = \frac{Pl^4}{24EJ} \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$ $x = \frac{l}{2}$ に對して: 反曲點の位置: $x = \frac{l}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
15				

第 3 節 靜 定 桁

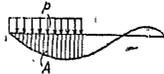
29. 概 説 静止の平衡條件 $\sum X=0, \sum Y=0, \sum M=0$ のみを以て反力を定め得る桁を**靜定桁**と云ふ。彎曲率及び剪力は支點反力を求むれば解析的にも圖式的にも解き得るのである。定荷重でなく動荷重に對しては影響線を求めることが最も便利である。



第 46 圖



第 47 圖



第 48 圖

$P=1$ なる荷重が桁の n 點に乗つた場合に、 m 點には一定の作用(彎曲率, 剪力, 支點反力等)を及ぼす。この作用は單位荷重が動くに従つて變化する。 $P=1$ によつて m 點に及ぼす作用を荷重の下にとり、桁の一端より他端に動かして此れを繼ぎ合せたものを m 點に對する**影響線**と云ひ、 η を**影響の大きさ**と云ふ(第 46 圖)。

單位荷重の代りに P_1, P_2, \dots が載せられたる場合に一定點に及ぼす總影響は(第 47 圖)

$$Z = \sum P\eta = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \dots + P_n\eta_n \dots (30)$$

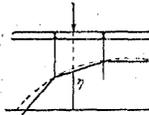
連續荷重が載せられたる場合には合影響の大きさは積分を以てあらはされ

$$Z = \int p\eta dx \dots (31)$$

もし之が等布荷重ならば $Z = p \int \eta dx = pA$

但し A は**影響面積**(第 48 圖)である。

影響線を用ふるときは獨立作用の原理の利用出来ること、及び載荷せらるゝ荷重の平行であることを假定する。影響線で $\eta=0$ の點を**境界點**と云ひ、此の點は正の影響、負の影響の分界點をなす。

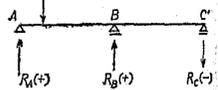


第 49 圖

間接荷重が載荷せられたる場合の影響線は間接支點の間にて直線的に變化する(第 49 圖)。

反力, 剪力及び彎曲率の正負の符號を次の如く約束する。すべて上向のものを正の反力とする(第 50 圖)。

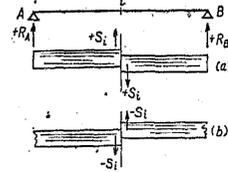
剪力は Ai 側の力が上向のものを正とす(従つて Bi



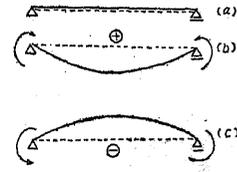
第 50 圖

側の剪力は下向のものが正である), 第 51 圖 (a) は正, (b) は負の剪力を示す。

桁に於ては下側に張力を生ぜしむる如き彎曲率を正とする, 第 52 圖 (b) は正 (c) は負を示す。本篇に於



第 51 圖



第 52 圖

ては特に斷りなき限り桁又は柱の傍に點線(第 52 圖 a)を施せる側に張力を生ぜしむる如き彎曲率を正とす。

30. 單 桁 1) 反力 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ の如く多くの集中荷重によつて與へられる反力は第 53 圖 (a) により

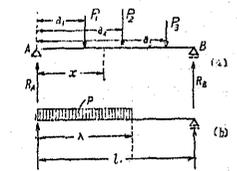
$$R_A = \frac{1}{l} \sum P(l-a), \quad R_B = \frac{1}{l} \sum Pu \dots (32)$$

等布荷重によるものは第 53 圖 (b) に依つて

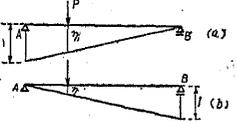
$$R_A = \frac{pl}{2l}(2l-\lambda), \quad R_B = \frac{pl}{2l} \dots (33)$$

滿載等布荷重に對して

$$R_A = R_B = \frac{pl}{2} \dots (34)$$



第 53 圖



第 54 圖

R_A 及び R_B の影響線は R_A に對しては第 54 圖 (a) の如く A の下に l なる縦距を有する三角形であり、 R_B に對しては第 54 圖 (b) の如くである。

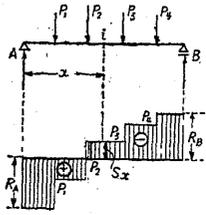
反力の決定は間接荷重の場合も直接荷重の場合も全く同一である。

2) 剪力 1) 解析解法 直接荷重の場合: 集中荷重が載荷せられたる場合 A 點より x だけ離れた i 點の剪力 S_i は

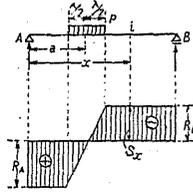
$$S_i = R_A - \sum P \dots (35)$$

にして第 55 圖に示す如く階段的の變化をなし、荷重の下に於て不連続になる。等布荷重によるものは第 57 圖の様に端縦距は反力に等しく $R_A = R_B = \frac{pl}{2}$ である。

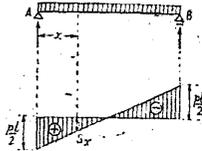
間接荷重の場合: 間接荷重の場合には圖式で求めるのが便利である。



第 55 圖



第 56 圖

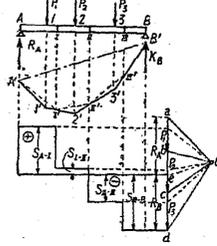


第 57 圖

2) 圖式解法 第58圖に於て P_1, P_2 及び P_3 なる荷重に對し極 O を撰びて $Oabcd$ なる力多角形を畫く...この力多角形に對し

$$aO \parallel A'I', \quad bO \parallel I'II', \quad cO \parallel II'III', \quad dO \parallel III'B'$$

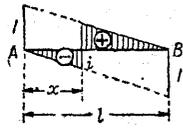
なる様に $A'I'II'III'B'$ なる索多角形を作り $A'B'$ を結び、それに平行に Oe を引き、 ad との交點を e とすれば $ea=R_A, de=R_B$ を表はす。縦桁の位置 I, II, III より索多角形に垂線を下し、 $I'II'III'$ に於いて交はらしめる、新しい索多角形 $A'I'II'III'B'$ を作り、 O より $I'A', II'I', III'II'$ に平行線を引き ad との交點より AB に平行線を引く。 e より AB に平行に引きたる線との距離が剪力を表はすことになる、 $S_{A-I}, S_{I-II}, S_{II-III}, S_{III-B}$ は夫々 I, II, III の下にて階段状になる。



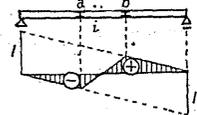
第 58 圖

3) 剪力の影響線 直接荷重の i 點 (A より x の距離) の剪力影響線は第59圖の如く支點 A 及び B の下に單位の長さを取り B 及び A に結び、 i 點を通る線にて切断せられたハッチを施せる三角形の部分である。 Ai の間に荷重があるときは負で、 iB の間に於ける荷重は正の剪力を與ふ。

間接荷重の場合には考へてある點 i のある徑間の間にて形を變へ (第60圖), a と b との間にて直線的に變化をなす。



第 59 圖



第 60 圖

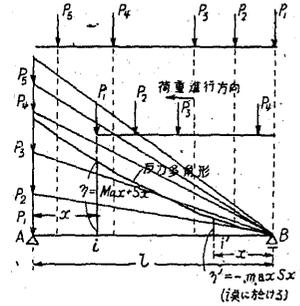
4) 反力多角形 移動する集中荷重群の與ふる最大剪力を求むるには影響線を用ひず反力多角形を用ひて直接に出すことを得。

集中荷重群 P_1, P_2, \dots, P_n が右より左に進行して來たる場合 i 點の最大正剪力は

最初の荷重 P_1 が i 點 (A 支點より x の距離) に來るときに與へらる。その量は R_A に等しくなり

$$\max S_x = R_A = \frac{1}{l} \sum P_n b_n \dots \dots \dots (I)$$

である。但し b_n は P_n の B より距離とす。之を圖式的に求むるには第61圖の如く荷重を逆にして載荷し P_1 が B 支點に乗つた場合を考へ、 A 點に桁 AB に載りうると考へらるる全部の荷重 P_1, P_2, \dots, P_n を順次下より上にとる。 B を極として極射線を引き力多角形を畫く。それに從つて B を通る索多角形を畫く。之を反力多角形と云ふ。 i 點



第 61 圖

に於て AB に垂線を立て反力多角形と挟む縦距 η が i 點に於ける正最大剪力を與ふ。何となれば

$$M_p^* = P_1 b_1 + P_2 b_2 + \dots + P_n b_n = \sum P_n b_n \quad (\text{第61圖にては } P_n = P_n)$$

又圖式力學の原理により

$$M_p = \eta \times (\text{力多角形の極と合力との距離}) = \eta l.$$

$$\therefore \eta l = \sum P_n b_n, \quad \eta = \frac{1}{l} \sum P_n b_n \dots \dots \dots (II)$$

依て (I) と (II) 式とを比較して、 $\max S_x = \eta$ 、又 P_1, P_2, \dots, P_n が左より右に進行して來る場合 i 點に於ける $-\max S_x$ は R_B に等しく

$$-\max S_x = R_B = \frac{1}{l} \sum P_n a_n \dots \dots \dots (III)$$

なり。最初の荷重が i 點に來る場合 (第62圖) にしてこの場合に $-S_x$ の圖式的解法は第61圖反力多角形を利用し得べく i 點に對稱的に B 點より x の距離にある點 i' に垂線を立て多角形との縦距 η' が $-\max S_x$ を與ふ。作圖に依り $\eta' = R_B = \frac{1}{l} \sum P_n a_n$ なる關係あればなり。



第 62 圖

間接荷重の場合は第58圖の如く $i-1$ と i との間に於て剪力は一定である。最初の荷重 P が i 點に來るときは $(i-1)$ (i) の間に最大正剪力を與へるのでこの場合

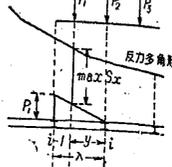
$$+\max S = R_A$$

* M_p は P_1, \dots, P_n が i 點に對する靜力率

であるが時としては (i-1) (i) 間の距離が荷重の距離より大なるときは第 2 荷重 P_2 又は第 3 荷重 P_3 が i 点に来るときに最大と與ふことがあるから比較して見なければならぬ。この場合は

$$+ \max S = R_A - \sum \frac{p_m l_m}{\lambda}$$

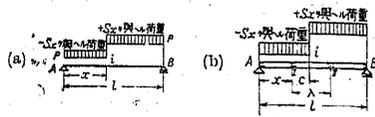
但し λ は (i-1) (i) 間の距離、 y_m は p_m の i 点よりの距離である。第 63 圖には $+ \max S = R_A - \frac{p_1 l_1}{\lambda}$ の場合を示してある。



第 63 圖

5) 等布荷重の場合の最大剪力 直接荷重を載荷したる場合: A 支點より x の距離にある i 点に於ける正最大剪力は第 64 圖(a)に依て iB 間に荷重のある場合でその値は R_A に等し

$$+ \max S_x = \frac{p(l-x)^2}{2l}$$



第 64 圖

負最大剪力は Ai 間に荷重のある場合で R_B に等しく $- \max S_x = \frac{px^2}{2l}$

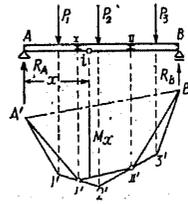
間接荷重の場合: 第 64 圖 (b) に於て縦桁 I, II の間では剪力は一定である。荷重が Bi 間にあれば正最大剪力を與へ、Ai 間にあれば負最大剪力を與ふ。かかる i の位置は第 60 圖影響線より計算すれば $c = \frac{\lambda x}{l-\lambda}$ を得。

$$+ \max S_x = R_A - \frac{p(\lambda-c)^2}{2\lambda} = \frac{p(l-\lambda-x)^2}{2(l-\lambda)}$$

$$- \max S_x = R_B - \frac{px^2}{2\lambda} = \frac{px^2}{2(l-\lambda)}$$

3) 彎曲率 1) P_1, P_2, \dots, P_n が載荷せらるゝ時 A 支點より x の距離にある点 i に於ける彎曲率は $M_x = R_A x - \sum_0^x P(x-a)$

直接載荷の場合: 圖式解法は第 65 圖の索多角形 $A'1'2'3'B'$ を用ひ得べく i 点の下に索多角形に挟まれた縦距が M_x を表はす。

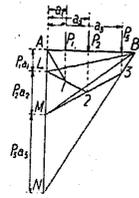


第 65 圖

間接載荷の場合: 第 65 圖の索多角形 $A'I'II'B'$ を用ふ。i 点の下に多角形に挟まれた縦距が M_x を表はす。g なる満載等布荷重を載荷せる場合の i 点の彎曲率は拋物線形をなす。

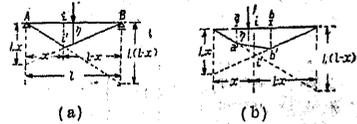
$$M_x = \frac{g}{2} x(l-x), \quad \max M_x = \frac{1}{8} gl^2 \quad (\text{中點に於て})$$

又第 66 圖の如く簡単に圖式解法を行ふ事を得。A 支點の下に $P_1 a_1, P_2 a_2, P_3 a_3$ をとり B 点と各点を結ぶ。 P_3 直下に BN 上に點 3 をとり 3 と M を結び P_2 の直下に點 2 をとり 2 と L を結び P_1 の直下に點 1 をとり 1A を結べば A 123B が所要の彎曲率圖である。



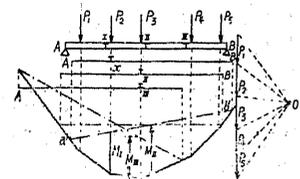
第 66 圖

2) 彎曲率の影響線 第 67 圖 (a) 及び (b) が直接及び間接荷重の場合の i 点の彎曲率の影響線である。A 支點の下に lx B 支點の下に $l(1-x)$ を切る様に $Ai'B$ を作れば宜し。直接載荷の場合には i 点に荷重が來る場合に i 点に最大彎曲率を與ふ。間接載荷の場合には a 又は b に荷重が乗つた場合に i 点に最大彎曲率を與ふ。



第 67 圖

3) 最大彎曲率 連続荷重が載荷せられたる場合に圖式的に最大彎曲率を求むる法: 直接載荷の場合 i 点の最大彎曲率はその点の上の一つの荷重が來る場合に起るのである。桁 AB に乗るだけの荷重を載荷しそれに対して索多角形を畫く。荷重を動かす代りに索多角形を固定して (從つて荷重を固定) 桁を動かし索多角形の尖端なる點に i 点を移し a'b' の閉合線を引き i 点の直下に於て多角形と閉合線に挟まれた長さの最大のものを撰ぶのである。第 68 圖は間接載荷の場合 I, II, III なる縦桁の點の最大彎曲率を求めてある。間接荷重の場合には縦桁の位置のみに起る彎曲率を調べれば宜し。例へば點 I の最大彎曲率 M_I を求むるには P_1, P_2, P_3, \dots の何れか λ 點 I の上に来るときに最大となる故に各の場合を比較して見るのである。

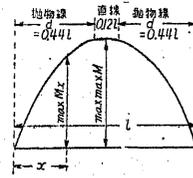


第 68 圖

各點の最大彎曲率を繼ぎ合せたものは第 69 圖の如き形をなす之を最大彎曲率圖と云ふ。この最大彎曲率圖は 2 つの拋物線と 1 つの直線とで出來てゐる。直線部分は $0.12l$ である。拋物線は次の式にて與へられる。

$$\max M_x = \frac{x \cdot 2(l-x)}{l^2} \text{ 絶對最大 } M$$

この式は獨逸國有鐵道の荷重規定より得たものである



第 69 圖

この式では實際の彎曲率より幾分大なる値を與ふるが略算には十分間に合ふものである。荷重が與へられたるときは先づ**絕對最大彎曲率** 絕對最大 M を算出し、それをを用ひて $\max M_D$ を計算するのであるが次の表を利用すれば便利である。

第 5 表 $\frac{\max M_D}{\text{絕對最大 } M} = \frac{x(2d-x)}{d^2}$ の表

$\frac{x}{l}$	$\frac{\max M_D}{\text{絕對最大 } M}$		$\frac{x}{l}$	$\frac{\max M_D}{\text{絕對最大 } M}$		$\frac{x}{l}$	$\frac{\max M_D}{\text{絕對最大 } M}$	
	$\max \max M$	$\Delta \frac{x}{l}$		$\max \max M$	$\Delta \frac{x}{l}$		$\max \max M$	$\Delta \frac{x}{l}$
0,00	0,0000		0,15	0,5656	2,94	0,30	0,8988	1,30
0,01	0,0449	4,49	0,16	0,5950	2,89	0,31	0,9127	1,29
0,02	0,0888	4,39	0,17	0,6235	2,75	0,32	0,9256	1,19
0,03	0,1317	4,20	0,18	0,6508	2,63	0,33	0,9375	1,08
0,04	0,1736	4,18	0,19	0,6772	2,53	0,34	0,9483	0,98
0,05	0,2144	4,08	0,20	0,7025	2,43	0,35	0,9582	0,88
0,06	0,2541	3,98	0,21	0,7268	2,32	0,36	0,9669	0,77
0,07	0,2929	3,87	0,22	0,7500	2,22	0,37	0,9747	0,67
0,08	0,3306	3,77	0,23	0,7722	2,12	0,38	0,9814	0,57
0,09	0,3673	3,67	0,24	0,7934	2,01	0,39	0,9871	0,46
0,10	0,4029	3,56	0,25	0,8135	1,91	0,40	0,9917	0,36
0,11	0,4375	3,46	0,26	0,8326	1,81	0,41	0,9954	0,26
0,12	0,4711	3,36	0,27	0,8507	1,70	0,42	0,9979	0,16
0,13	0,5036	3,25	0,28	0,8679	1,60	0,43	0,9995	0,05
0,14	0,5351	3,15	0,29	0,8838	1,50	0,44	1,0000	
0,15	0,5656	3,05	0,30	0,8988				

「絕對最大彎曲率の起る位置と合力 $R = \sum_1^n P$ の位置は桁の中心より等距離に在り」。多くの場合最大彎曲率の生ずべき位置は合力に隣れる荷重の下にある(第 70 圖)。例外として合力の隣以外の荷重の下に最大彎曲率を生ずる事もある。一般にその下に最大彎曲率を生ずべき荷重の位置は次によつて定めらる。

$$\sum_1^n P < \frac{l}{x} \sum_1^i P \quad \text{及び} \quad \sum_1^n P > \frac{l}{x} \sum_1^{i-1} P$$

i は求むる荷重の符號, x はその荷重までの近い支點より測れる距離で之は反對の支點より合力までの距離に等し。即ち最大彎曲率の生ずる點と合力の働く位置とは桁の中心によつて 2 等分せらる。



第 70 圖

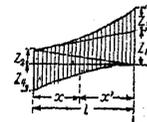
4) ω -法 荷重が三角, 矩形, 拋物線形にて與へられ

第 6 表 $\omega_R, \omega_D, \omega_p, \omega'_p$ の表

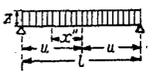
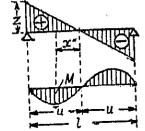
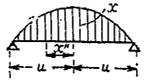
	$z_w = z$	$z_w = z \frac{x}{l}$	$z_w = c \frac{x^2}{l^2}$	$z_w = \frac{4z_1 x (l-x)}{l^2}$
$M =$	$R_A = R_B = \frac{z l}{2}$	$R_A = \frac{z l}{6}, R_B = \frac{z l}{3}$	$R_A = \frac{z l}{12}, R_B = \frac{z l}{4}$	$R_A = R_B = \frac{z l}{8}$
	$\omega_R = \frac{z l^2}{2}$	$\omega_D = \frac{z l^2}{6}$	$\omega_p = \frac{z l^2}{12}$	$\omega_p = \frac{z l^2}{3}$
$\frac{x}{l}$	$\omega_R = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}$	$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$	$\omega_p = \frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4}$	$\omega_p = \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}$ $= 2 \omega_D - \omega_p$ $= \omega_p (1 + \omega_R)$
0,05	0,0475	0,0499	0,0500	0,0498
0,10	0,0900	0,0900	0,0909	0,0981
0,15	0,1275	0,1466	0,1495	0,1498
0,20	0,1600	0,1920	0,1984	0,1856
0,25	0,1875	0,2344	0,2461	0,2227
0,30	0,2100	0,2730	0,2919	0,2541
0,35	0,2275	0,3071	0,3350	0,2793
0,40	0,2400	0,3360	0,3744	0,2976
0,45	0,2475	0,3589	0,4080	0,3088
0,50	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125
0,55	0,2475	0,3836	0,4685	0,3088
0,60	0,2400	0,3840	0,4704	0,2976
0,65	0,2275	0,3754	0,4715	0,2793
0,70	0,2100	0,3570	0,4599	0,2541
0,75	0,1875	0,3281	0,4336	0,2227
0,80	0,1600	0,2880	0,3904	0,1856
0,85	0,1275	0,2359	0,3280	0,1438
0,90	0,0900	0,1710	0,2439	0,0981
0,95	0,0475	0,0926	0,1355	0,0498
$\int_0^l M dx =$	$\frac{z l^3}{12}$	$\frac{z l^3}{24}$	$\frac{z l^3}{40}$	$\frac{z l^3}{15}$

$$M = \frac{z_1 l^2}{6} \omega_D + \frac{z_2 l^2}{6} \omega_D' + \frac{z_3 l^2}{12} \omega_p + \frac{z_4 l^2}{12} \omega_p'$$

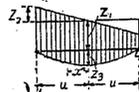
$$\omega_D' = \frac{x'}{l} - \frac{x'^3}{l^3} \quad \omega_p' = \frac{x'}{l} - \frac{x'^4}{l^4}$$



第 7 表 $\bar{\omega}_R, \bar{\omega}_D, \bar{\omega}_p$ の表

			
	$M = \frac{z l^2}{z} \bar{\omega}_R$	$M = \frac{z l^2}{6} \bar{\omega}_D$	$M = \frac{z l^2}{12} \bar{\omega}_p$
$\frac{x l}{u}$	$\bar{\omega}_R = 1 - \frac{x l^2}{u^2}$	$\bar{\omega}_D = \frac{x l}{u} - \frac{x l^3}{u^3} = \frac{x l}{u} \bar{\omega}_R$	$\bar{\omega}_p = 5 - 6 \frac{x l^2}{u^2} + \frac{x l^4}{u^4}$ $\bar{\omega}_p = \bar{\omega}_R (4 + \bar{\omega}_R)$
0	1	0	5
0.05	0.9975	0.0499'	4.9850
0.10	0.9900	0.0900	4.9401
0.15	0.9775	0.1406	4.8655
0.20	0.9600	0.1920	4.7616
0.25	0.9375	0.2344	4.6289
0.30	0.9100	0.2730	4.4681
0.35	0.8775	0.3071	4.2800
0.40	0.8400	0.3360	4.0656
0.45	0.7975	0.3589	3.8260
0.50	0.7500	0.3750	3.5625
0.55	0.6975	0.3836	3.2765
0.60	0.6400	0.3840	2.9696
0.65	0.5775	0.3750	2.6435
0.70	0.5100	0.3570	2.3001
0.75	0.4375	0.3281	1.9414
0.80	0.3600	0.2880	1.5696
0.85	0.2775	0.2359'	1.1870
0.90	0.1900	0.1710	0.7951
0.95	0.0975	0.0926	0.3995

$$M = \underbrace{\frac{z_1 l^2}{2} \bar{\omega}_R + \frac{z_2 l^2}{12} \bar{\omega}_p}_{\text{對稱}} + \underbrace{\frac{z_2 l^2}{6} \bar{\omega}_D}_{\text{非對稱}}$$



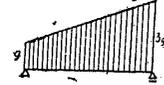
た場合単桁の任意點に起る彎曲率は第 6, 7 表を用ふれば求めらる。ω の表は桁の撓度及ラーメンの影響線を求めるに非常に役立つものである。

[計算例] 單桁に第 71 圖の如き梯形荷重が荷せられたる場合に最大彎曲率を與ふる位置及び大きさを計算せよ。ω 法を用ひ

$$M = \omega_R \frac{g l^2}{2} + \omega_D \frac{(2g) l^2}{6} = \frac{g l^2}{6} (3\omega_R + 2\omega_D)$$

第 6 表より $3\omega_R + 2\omega_D$ の最大のものを探むれば宜し

$\frac{x}{l}$	$3\omega_R + 2\omega_D$
0.50	0.7500 + 0.7500 = 1.5000
0.55	0.7425 + 0.7872 = 1.5097
0.60	0.7200 + 0.7680 = 1.4880



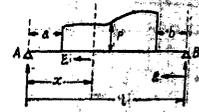
第 71 圖

故に $\frac{x}{l}$ が 0.55 の近くにて $3\omega_R + 2\omega_D$ が最大となる。 $\frac{x}{l} = 0.55$ の點の最大彎曲率は

$$M_{0.55} = 1.5097 \times \frac{g l^2}{6} = 0.2516 g l^2$$

4) 荷重、剪力及び彎曲率の關係 第 72' 圖の如く荷重せられたる桁に於て x を A 點より右を正にとり、ξ を考へてゐる點より左に計るを正とすれば A 點より x の點に於ける彎曲率 M_x は

$$M_x = R_A x - \int_0^{x-\alpha} p \xi d\xi$$



第 72 圖

之を微分して

$$\frac{dM_x}{dx} = R_A - \int_0^{x-\alpha} p d\xi = S_x$$

$$\therefore \frac{dM_x}{dx} = S_x \dots \dots \dots (36)$$

即ち彎曲率を一度微分すれば剪力を得べく、又剪力の 0 の點にて彎曲率の極大値を生ずと云ふ事が出来る。更に微分して

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{dS_x}{dx} = -p \dots \dots \dots (37)$$

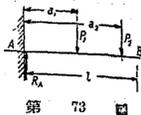
以上は $x < l - \alpha$ の場合なれども $x > l - \alpha$ の場合も同様の關係がある事を證明し得る。

31. 突 桁 1) 反力 突桁の反力を R_A とすれば第 73 圖に於て

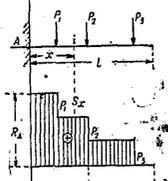
$$R_A = \sum_1^n P$$

R_A に対しては直接載荷の場合も間接載荷の場合も全く同一である。

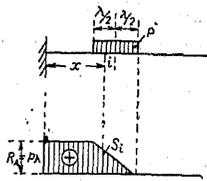
2) 剪力 支點 A より x の距離にある i 點の剪力は i 點より右即ち B 間の全荷重に等しく、集中荷重の場合は階段的に變化し等布荷重の場合は直線的に變化す (第 74 圖, 第 75 圖, 第 76 圖)。



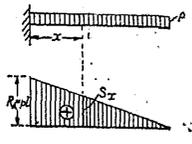
第 73 圖



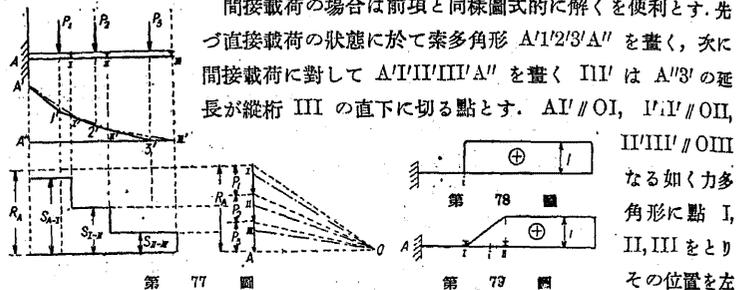
第 74 圖



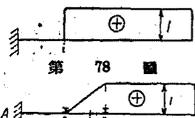
第 75 圖



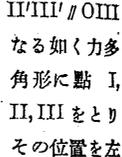
第 76 圖



第 77 圖



第 78 圖



第 79 圖

間接載荷の場合は前項と同様圖式的に解くを便利とす。先づ直接載荷の状態に於て索多角形 $\Delta A'1'2'3'A''$ を畫く、次に間接載荷に對して $\Delta A'1'1''/1'1''/1'1''A''$ を畫く $1'1''$ は $A'3'$ の延長が縦桁 III の直下に切る點とす。 $A1''//O1$, $1'1''//O1$, $1'1''//O1$ なる如く力多角形に點 I, II, III をとりその位置を左

に移して第 77 圖の如く S_{A-I} , S_{I-II} , S_{II-III} を得。

i 點の剪力影響線は直接載荷 (第 78 圖) 及間接載荷 (第 79 圖) 共に正を與へ i 點の左 (第 78 圖) 及縦桁 I (第 79 圖) の左の荷重は何等影響を與へず。

3) 彎曲率 考へてある點 i の左にある荷重は i 點に何等彎曲率を與へず

$$M_x = -P_2(a_2 - x) \quad (第 80 圖 a)$$

一般に i 點より右 (iB 間) にある荷重と i との距離を α とすれば

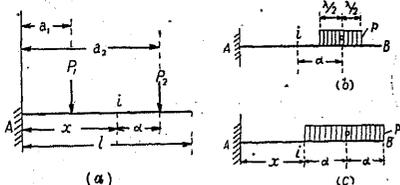
$$M_x = -\sum P\alpha$$

等布荷重の場合 (第 80 圖 b)

$$M_x = -\lambda p\alpha$$

iB 間に満載ならば (第 80 圖 c)

$$M_x = -\frac{(l-x)^2}{2} p$$



(a)

(c)

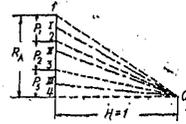
圖の如く圖式解法は第 81 P_1 ,

第 80 圖

P_1, P_2 をとり O を極として力多角形 $O1234$ を畫くそれに対して $\Delta 1'2'3'A''$ なる索多角形を畫けば i 點の彎曲率はこの索多角形に挟まれたる i 點の下の縦距 η を用ひて次の如く表はさる。

$$M_x = -\eta H$$

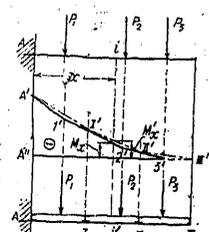
但し H は力多角形の極距であることは勿論である; H を單位に選ぶときは $M_x = -\eta$ となる。



第 81 圖

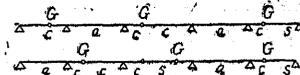
間接載荷の場合は縦桁 I, II, III の位置より $1'1''/1'1''/1'1''A''$ を直接載荷の場合に求めた索多角形上にとれば $\Delta 1'1''/1'1''/1'1''A''$ が間接載荷に對する索多角形である。

彎曲率の影響線 i 點の彎曲率影響線は第 82 圖 (a) 及び (b) の如くで常に負の彎曲率を生ず。直接載荷の場合は Ai 間の荷重は何等 i 點の彎曲率に影響なく又間接載荷の場合には Ai 間の荷重は何等影響を與へず。



第 82 圖

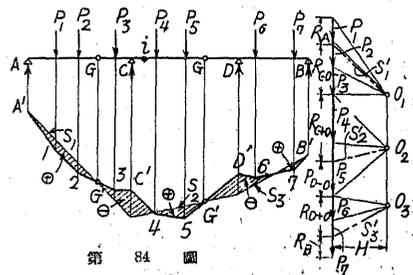
2. ゲルバー桁 1) 定義 連桁は不靜定構造に屬するものであるが途中に適當な數だけ鉸を挿入してこの鉸の點に於て $\sum M=0$ なる條件を用ひらる様にして靜定桁となすことを得、支點の數を n とすれば $n-2$ だけの鉸を挿入すれば靜定桁となる之をゲルバー桁と稱す。ゲルバー桁は 3 種類の部分の合成したるものである (第 83 圖)。即ち s を懸垂部, c を突桁部, a を錨定部と云ふ。



第 83 圖

鉸は一方より他方に彎曲率を傳達する事なく單に剪力のみを傳達す、懸垂部は單桁と同様に考ふる事を得。

2) 圖式解法 第 84 圖は P_1, P_2, \dots, P_7 を與へた場合の圖式解法である、各徑間毎に共通の極距 H を有する力多角形に對する索多角形を畫き閉合線 S_1, S_2, S_3 は桁の外端及び鉸點の彎曲率を 0 にする如くを引きたるものである、從



第 84 圖

つて陰影を施せる部分が彎曲率圖であり、支點反力は S_1', S_2', S_3' を閉合線 S_1, S_2, S_3 に平行に引く (點鎖線)。

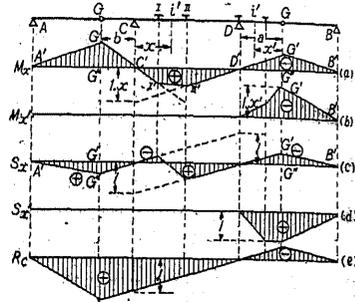
A 點の反力 = R_A , C 點の反力 = $R_C = R_{C-0} + R_{C+0}$
 B 點の反力 = R_B , D 點の反力 = $R_D = R_{D-0} + R_{D+0}$

剪力を求むるにはその點より左にあるすべての反力及び外力を加へ合すれば宜し。例へば第 84 圖に於て i 點の剪力を S_i とすれば

$$S_i = R_A + R_{C+0} + R_{C-0} - (P_1 + P_2 + P_3) \quad \text{である。}$$

3) 影響線 第 85 圖は外徑間に鉸を有する三連ゲルバー桁に対する影響線を示す。

(a) は中央桁鑄定部 i 點に對する彎曲率の影響線、(b) は外桁の突桁部 i' 點に對する彎曲率影響線、(c) は中央桁鑄定部 i 點に對する剪力影響線、(d) は外桁の突桁部 i' 點に對する剪力影響線、(e) は第 2 支點 C の反力 R_C の影響線である。懸垂部に對しては單桁と全く同じである。



第 85 圖

各影響線に就きて説明すれば

(a): GCDG は兩端に突桁を有する單桁と考へる事を得。この部分の i 點に對する彎曲率の影響線は $G'C/III/D'G'$ にて與へらる、AG, GB 間に荷重が來る場合に AG 及び BG を單桁と考へ G 點に及ぼす荷重の影響を考へれば宜し、荷重が A 及び B に來るときは G 點には何等影響なき故 $A'G', G'B'$ を結べば宜し、今左右突桁部の長さを $GC=b$ 及び $DG=a$ とすれば $G'G''$ の價は左に於て $\frac{(l-x)b}{l}$ 右に於て $\frac{ax}{l}$ である、但し l は徑間 CD の長さとする。

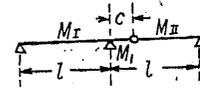
(b): 突桁部であるから DG 間は前項突桁に就ての影響線と同一で荷重が GB 間に來る場合にはその荷重の G 點に對する分力を考へれば宜し。荷重が B に來るときは G に及ぼす影響は 0 となる故、 $G'B'$ を直線にて結ぶ、D より左に荷重が來る場合 M_D' には何等關係なし。

(c): GCDG は突桁を有する單桁と考ふる事を得、AG 及 GB 間に載荷されたる場合は前と同様に荷重が G 點に及ぼす分力を考へれば宜し。 $G'G''$ の價は左に於て $\frac{b}{l}$ 右に於て $\frac{a}{l}$ である。

(d) 及び (e) は類推すべし。

4) 滿載等布荷重をうけたるゲルバー桁最大彎曲率 單位長さに付き g なる滿載等布荷重を荷したる場合に就き、等徑間ゲルバー桁の最大正負彎曲率を 1)~5) に示してある。鉸の位置を適當に撰定するとき外端部を除き最大正負彎曲率の絕對値を等しくすることを得。支點彎曲率 (負最大彎曲率) を M_I, M_2, M_3, \dots にて表はし、桁の中間彎曲率 (正最大彎曲率) を $M_I, M_{II}, M_{III}, \dots$ にて表はす。

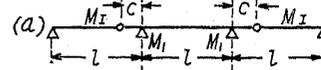
1) 2 徑間桁



$$C = 0.1716 l$$

$$M_I = M_I = M_{III} = 0.0858 gl^2.$$

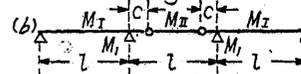
2) 3 徑間桁 (a) 外側徑間に鉸を有するもの:



$$C = 0.125 l$$

$$M_I = M_{III} = 0.0625 gl^2, \quad M_I = 0.0957 gl^2.$$

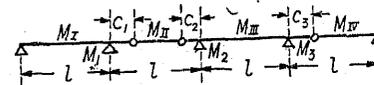
(b) 中央徑間に鉸を有するもの:



$$C = 0.220 l$$

$$M_I = M_I = 0.0858 gl^2, \quad M_{III} = 0.0392 gl^2.$$

3) 4 徑間桁

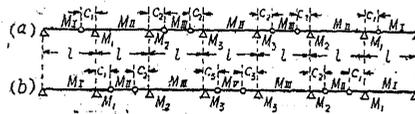


$$C_1 = 0.2035 l, \quad C_2 = 0.157 l, \quad C_3 = 0.125 l$$

$$M_I = M_I = 0.0858 gl^2, \quad M_2 = M_3 = M_{III} = 0.0625 gl^2$$

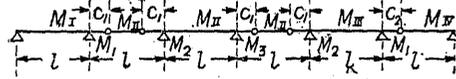
$$M_{III} = 0.0511 gl^2, \quad M_{IV} = 0.0957 gl^2.$$

4) 4 徑間以上ノ桁 (徑間數: 奇數)



- (a) の如き場合: $C_1 = 0.125 l, C_2 = 0.1465 l$
 $M_I = M_2 = M_3 = M_{II} = M_{III} = 0.0625 gl^2, M_{IV} = 0.0957 gl^2$
- (b) の如き場合: $C_1 = 0.2035 l, C_2 = 0.157 l, C_3 = 0.1465 l$
 $M_I = M_{II} = 0.0957 gl^2, M_{III} = 0.0511 gl^2$
 $M_3 = M_5 = M_{III} = M_{IV} = 0.0625 gl^2$

5) 4 徑間以上の桁 (徑間數: 偶數)



$C_1 = 0.1465 l, C_2 = 0.125 l$
 $M_I = M_2 = M_3 = M_{II} = M_{III} = 0.0625 gl^2, M_{IV} = M_{V} = 0.0957 gl^2$

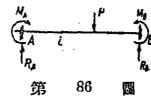
第 4 節 不 靜 定 桁

33. 定 義 静止の條件 $\sum X=0, \sum Y=0, \sum M=0$ のみだけでは反力全部を求め得ざる桁を不靜定桁と云ふ。不靜定反力の數に從て一次不靜定桁, 二次不靜定桁...と稱す。豫想し得る支點反力の數を s とし不定の次數を n とすれば $n = s - 3$(38)

34. 端力率による彎曲率, 剪力及び反力 不靜定量として支點彎曲率を撰び三彎曲率の定理を用ひて解くのが便利である。この不靜定量を外力の如く考へて桁を單桁として解きたるものに, 支點彎曲率による影響を加算すれば宜し。

第 86 圖の如き埋込桁に於て端力率を M_A 及び M_B とすれば, 端力率のみによる反力 R_A', R_B' は B 及び A に $\sum M=0$ の條件を用ひて

$R_A' = -\frac{M_A - M_B}{l}, R_B' = \frac{M_A - M_B}{l}$(39)



を得。端力率のみによる i 點に於ける Δi 側の彎曲率は

$M' = M_A + R_A'x = M_A - \frac{M_A - M_B}{l}x$(40)

端力率のみによる i 點に於ける Δi 側の剪力は

$S' = -\frac{M_A - M_B}{l}$(41)

故に支點力率のある桁に於て反力 彎曲率及び剪力を R, M 及び S とすれば

$R = R' + R'', S = S' + S'', M = M' + M''$(42)

茲に R', S', M' は支點力率のみによる反力, 剪力及び彎曲率, R'', S'', M'' は桁を單桁と考へたる場合の反力, 剪力及び彎曲率である。

35. 三彎曲率の定理 彈性線の式 $\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$ の M に (42) 式の値を代入し EJ = 常數 と假定して兩邊に x 及び $l-x$ を乘じ AB の間につき積分を行へば

$\int_0^l \frac{M}{EJ} x dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{l^2}{2} M_A - \frac{l^2}{3} (M_A - M_B) + \int_0^l M'' x dx \right]$
 $= -l \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_B + (\eta_B - \eta_A)$(I)

$\int_0^l \frac{M}{EJ} (l-x) dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{l^2}{2} M_A - \frac{l^2}{6} (M_A - M_B) + \int_0^l M'' (l-x) dx \right]$
 $= +l \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_A - (\eta_B - \eta_A)$(II)

(I) (II) を整理して

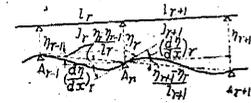
$\frac{l}{6EJ} \left[(M_A + 2M_B) + \frac{6}{l^2} \int_0^l M'' x dx \right] = -\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_B + \frac{\eta_B - \eta_A}{l}$(III)

$\frac{l}{6EJ} \left[(2M_A + M_B) + \frac{6}{l^2} \int_0^l M'' (l-x) dx \right] = \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_A - \frac{\eta_B - \eta_A}{l}$(IV)

今連続せる 2 徑間 l_r 及び l_{r+1} に夫々 (III),

(IV) 式を應用すれば

$\frac{l_r}{6EJ_r} \left[(M_{r-1} + 2M_r) + \frac{6}{l_r^2} \int_0^{l_r} M'' x dx \right] = -\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_r + \frac{\eta_r - \eta_{r-1}}{l_r}$



第 87 圖

$\frac{l_{r+1}}{6EJ_{r+1}} \left[(2M_r + M_{r+1}) + \frac{6}{l_{r+1}^2} \int_0^{l_{r+1}} M'' (l-x) dx \right] = \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_r - \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{l_{r+1}}$

或は $\frac{l_r'}{6EJ_c} \left\{ (M_{r-1} + 2M_r) + \frac{6}{l_r} \mathfrak{B}_r \right\} = -\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_r + \mathfrak{L}_r$

$$\frac{U_{r+1}}{6EJ_c} \left\{ (2M_r + M_{r+1}) + \frac{6}{l_{r+1}} \mathfrak{A}_{r+1} \right\} = \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_r - \mathfrak{e}_{r+1}$$

但し $U_r = l_r \frac{J_c}{J_r}$, $U_{r+1} = l_{r+1} \frac{J_c}{J_{r+1}}$

J_c は計算に都合よく任意に選ぶ事が出来る。 U を換算長と稱す。此の兩式より $\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_r$ を消去すれば

$$M_{r-1}U_r + 2M_r(U_r + U_{r+1}) + M_{r+1}U_{r+1} + 6\frac{U_r}{l_r}\mathfrak{B}_r + 6\frac{U_{r+1}}{l_{r+1}}\mathfrak{A}_{r+1} = 6EJ_c(\mathfrak{e}_r - \mathfrak{e}_{r+1}) \dots (43)$$

但し $\mathfrak{B}_r = \frac{1}{l_r} \int_0^{l_r} M''x dx$, $\mathfrak{A}_{r+1} = \frac{1}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M''(1-x) dx$,

$$\mathfrak{e}_r = \frac{\eta_r - \eta_{r-1}}{l_r}, \quad \mathfrak{e}_{r+1} = \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{l_{r+1}}$$

$\eta=0$ とすれば $\mathfrak{e}=0$ となり

$$M_{r-1}U_r + 2M_r(U_r + U_{r+1}) + M_{r+1}U_{r+1} + 6\frac{U_r}{l_r}\mathfrak{B}_r + 6\frac{U_{r+1}}{l_{r+1}}\mathfrak{A}_{r+1} = 0 \dots (44)$$

更に $l_r = l_{r+1} = l$, $J_r = J_{r+1} = J_c$ 即ち等徑連桁の場合には

$$M_{r-1}l + 4M_rl + M_{r+1}l + 6\mathfrak{B}_r + 6\mathfrak{A}_{r+1} = 0 \dots (45)$$

之を變形して $M_{r-1} + 4M_r + M_{r+1} + \frac{6}{l}\mathfrak{B}_r + \frac{6}{l}\mathfrak{A}_{r+1} = 0 \dots (45)'$

上式は相隣れる M_{r-1} , M_r , M_{r+1} の 3 個の支點彎曲率の間の關係を表はせるものでクラペイロンの三彎曲率の定理と稱す。

第 89 圖に示す如く各項の物理的の意味を説明すれば、 η_{r-1} , η_r , η_{r+1} は各支點 A_{r-1} , A_r , A_{r+1} の沈下。 $\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_r$ は A_r 支點に於ける桁の傾斜角。 $\frac{\eta_r - \eta_{r-1}}{l_r} = \mathfrak{e}_r$ は A_r 支點と A_{r-1} 支點の相對的角變化。 $\frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{l_r} = \mathfrak{e}_{r+1}$ は A_{r+1} 支點と A_r 支點の相對的角變化。 $\mathfrak{B}_r = \frac{1}{l_r} \int_0^{l_r} M''x dx$ は l_r 間を單桁と考へたる場合彎曲率を荷重の如く考へ右支點 A_r に起る反力。 $\mathfrak{A}_{r+1} = \frac{1}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M''(l-x) dx$ は l_{r+1} 間を單桁と考へたる場合彎曲率を荷重の如く考へ左支點 A_r に起る反力である。

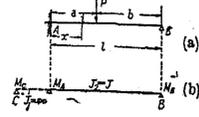
茲に \mathfrak{A} , \mathfrak{B} は荷重によつて定まつてしまふ項で、之を荷重項と稱す。桁に載る荷重の種類を種々假定して豫め之を計算して置けば算出に非常に便利である。荷 $\frac{6}{l}\mathfrak{A} = N^l$ 及び $\frac{6}{l}\mathfrak{B} = N^r$ として併せて表にして置けば更に便利である (第 8 表参照)。

第 8 表 \mathfrak{A} , \mathfrak{B} 及 $\frac{6}{l}\mathfrak{A}$, $\frac{6}{l}\mathfrak{B}$ の表

載荷状態	\mathfrak{A}	\mathfrak{B}	$N^l = \frac{6}{l}\mathfrak{A}$	$N^r = \frac{6}{l}\mathfrak{B}$
	$\frac{1}{16}Pl^2$	"	$\frac{3}{8}Pl$	同左
	$\frac{1}{9}Pl^2$	同左	$\frac{2}{3}Pl$	"
	$\frac{1}{2}Pa(l-a)$	"	$3Pa\frac{(l-a)}{l}$	"
	$\frac{5}{32}Pl^2$	"	$\frac{15}{16}Pl$	"
	$\frac{n^2-1}{24n}Pl^2$	"	$\frac{n^2-1}{4n}Pl$	"
	$\frac{Pab(l+b)}{6l}$	$\frac{Pab(l+a)}{6l}$	$\frac{Pab(l+b)}{l^2}$	$\frac{Pab(l+a)}{l^2}$
	$\frac{1}{24}Wl^2$	"	$\frac{1}{4}Wl$	"
	$\frac{W}{48}(3l^2-4m^2)$	"	$\frac{W}{8l}(3l^2-4m^2)$	"
	$\frac{Wm}{12}(3l-2m)$	"	$\frac{Wm}{2l}(3l-2m)$	"
	$\frac{Wb}{6}(l^2-b^2-m^2)$	$\frac{Wa}{6}(l^2-a^2-m^2)$	$Wb\frac{l^2-b^2-m^2}{l^2}$	$Wa\frac{l^2-a^2-m^2}{l^2}$
	$\frac{M}{6l}(l^2-3b^2)$	$\frac{M}{6l}(3a^2-l^2)$	$\frac{M(l^2-3b^2)}{l^2}$	$\frac{M(3a-l^2)}{l^2}$
	$\frac{7Wl^2}{180}$	$\frac{8Wl^2}{180}$	$\frac{7}{30}Wl$	$\frac{8}{30}Wl$

茲に $\mathfrak{A} = \frac{1}{l} \int_0^l M''(l-x) dx$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{l} \int_0^l M''x dx$.

36. 一端埋込他端單支持の桁 第 88 圖 (a) の如き桁に三彎曲率の定理を用ふるには、A 端に於て地球に剛結してゐると考へて解く。地球の惰性率を無限大にとり $J_c = J_2$ にとれば AC 間に就て $l'_1 = l_1 \frac{J_2}{J_c} = 0$ 。又 AC 間には荷重なく B 點は單支承なる故に $\mathfrak{B}_A = 0$ 、又 $M_B = 0$ 。(44) 式を用ひて



第 88 圖

$$M_C \times 0 + 2M_A(0+l) + 0 \times l + 6\mathfrak{A}_A = 0 \quad \therefore M_A = -3\mathfrak{A}_A/l$$

即ち M_A はその AB 間に於ける荷重が與へられさへすれば表より直ちに計算する事を得べし。(a) 圖の如く集中荷重の場合は先づ M_A を求めこれを用ひて反力及び i 點に於ける A_i 側の彎曲率、剪力を求めれば

$$\mathfrak{A}_A = \frac{Pab(a+2b)}{6l} \quad \therefore M_A = -\frac{Pab}{2l^2}(a+2b)$$

$$R_A = \frac{1}{2l^3} Pb(3a^2 + 6ab + 2b^2), \quad R_B = \frac{1}{2l^3} Pa^2(2a + 3b)$$

$$M_x = \frac{1}{2l^3} P(l-a) \left\{ \begin{array}{l} (2l^2 + 2la - a^2)x - la(2l-a) \quad [x < a] \\ (3l-a)(l-x) \quad [x > a] \end{array} \right\} \quad \dots (46)$$

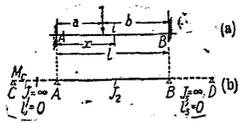
$$S_x = \frac{1}{2l^3} P \left\{ \begin{array}{l} (2l^2 - 3la^2 + a^3) \quad [x < a] \\ -\frac{1}{2l^3} Pa^2(3l-a) \quad [x > a] \end{array} \right\}$$

集中荷重が數多あるときは各荷重につき計算せる結果を加へ合すべし。滿載等布荷重の場合には $\mathfrak{A}_A = \frac{1}{24} ql^2$ となり

$$M_A = -\frac{1}{8} ql^2, \quad R_A = \frac{5}{8} ql, \quad R_B = \frac{3}{8} ql$$

$$M_x = \frac{q}{8l} (5l^2x - 4lx^2 - l^3), \quad S_x = \frac{5}{8} q(l-x) \quad \dots (47)$$

37. 兩端埋込の桁 前題と同様第 89 圖 (a) を (b) の如く兩端に於て惰性率無限大の地球と剛結せりと考ふ。



第 89 圖

$$J_1 = \infty, \quad l'_1 = 0, \quad J_2 = \infty, \quad l'_2 = 0, \quad J_c = J_2 = J$$

$$\mathfrak{A}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}_1 = 0, \quad \mathfrak{A}_2 = 0, \quad \mathfrak{B}_2 = 0.$$

(CAB に就て) $2M_A l + M_B l + 6\mathfrak{A}_2 = 0 \quad \dots (I)$

(ABD に就て) $M_A l + 2M_B l + 6\mathfrak{B}_2 = 0 \quad \dots (II)$

(I) (II) を解きて

$$M_A = -\frac{2(2\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2)}{l}, \quad M_B = -\frac{-2(\mathfrak{A}_2 + 2\mathfrak{B}_2)}{l}$$

第 88 圖の如く集中荷重のある場合は

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{Pab(a+2b)}{6l}, \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{Pab(2a+b)}{6l}$$

$$\therefore M_A = -P \frac{ab^2}{l^2}, \quad M_B = -P \frac{a^2 b}{l^2} \quad \dots (48)$$

これを用ひて次の如く反力及び i 點に於ける A_i 側の彎曲率及び剪力を求むる事を得。

$$R_A = \frac{1}{l^3} Pb^2(3a+b), \quad R_B = \frac{1}{l^3} Pa^2(a+3b)$$

$$M_x = \frac{1}{l^3} P(l-a)^2 \left\{ \begin{array}{l} -la + (l-2a)x \quad [x < a] \\ l(2l-a) - (3l-2a)x \quad [x > a] \end{array} \right\} \quad \dots (49)$$

$$S_x = \frac{1}{l^3} P \left\{ \begin{array}{l} (l^3 - 3la^2 + 2a^3) \quad [x < a] \\ -\frac{1}{l^3} P(3la^2 - 2a^3) \quad [x > a] \end{array} \right\}$$

滿載等布荷重の場合には $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{24} ql^2$ なる故に

$$M_A = M_B = -\frac{1}{12} ql^2, \quad R_A = R_B = \frac{1}{2} ql$$

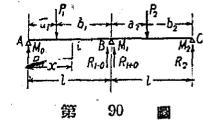
$$M_x = -\frac{1-6\left(\frac{x}{l}\right)+6\left(\frac{x}{l}\right)^2}{12} ql^2, \quad S_x = \frac{1-2\left(\frac{x}{l}\right)}{2} ql \quad \dots (50)$$

38. 等徑二連桁 左徑間に關する項を 1, 右徑間に關する項を 2 の指數を以て表はし M 及び R を第 90 圖に示す通りとすれば等徑

二連桁なる故に $l_1 = l_2 = l, J_1 = J_2 = J$ とす。(45) より

$$M_0 l + 4M_1 l + M_2 l + 6\mathfrak{B}_1 + 6\mathfrak{A}_2 = 0,$$

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = -\frac{1}{4} \frac{6}{l} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2)$$



第 90 圖

第 90 圖の如く集中荷重の場合には

$$\frac{6}{l} \mathfrak{B}_1 = \frac{P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1)}{l^2}, \quad \frac{6}{l} \mathfrak{A}_2 = \frac{P_2 a_2 b_2 (a_2 + 2b_2)}{l^2}$$

$$\text{なる故に } M_1 = -\frac{1}{4l^2} \left\{ P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1) + P_2 a_2 b_2 (a_2 + 2b_2) \right\} \dots\dots\dots (51)$$

之を用ひ反力を求めれば

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= -\frac{1}{4l^2} \left\{ P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1) + P_2 a_2 b_2 (a_2 + 2b_2) \right\} + \frac{P_1 b_1}{l} \\ &= +\frac{1}{4l^2} \left\{ +P_1 b_1 (2a_1^2 + 7a_1 b_1 + 4b_1^2) - P_2 a_2 b_2 (a_2 + 2b_2) \right\} \\ R_{1-0} &= \frac{1}{4l^2} \left\{ P_1 a_1 (4a_1^2 + 10a_1 b_1 + 5b_1^2) + P_2 a_2 b_2 (a_2 + 2b_2) \right\} \\ R_{1+0} &= \frac{1}{4l^2} \left\{ P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1) + P_2 a_2 (5a_2^2 + 10a_2 b_2 + 4b_2^2) \right\} \\ R_1 &= R_{1-0} + R_{1+0} \\ R_2 &= \frac{1}{4l^2} \left\{ -P_1 a_1 (2a_1 + b_1) + P_2 a_2 (4a_2^2 + 7a_2 b_2 + 2b_2^2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (52)$$

第 1 徑間の i 點に於ける Ai 側の彎曲率は

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{4l^2} \left\{ P_1 (l-a_1) (4l^2 - la_1 - a_1^2) x - P_2 a_2 (2l^2 - 3la_2 + a_2^2) x \right\}; [x < a_1] \\ &= \frac{1}{4l^2} \left\{ P_1 a_1 \{ 4l^2 - (5l^2 - a_1^2) x \} - P_2 a_2 \{ 2l^2 - 3la_2 + a_2^2 \} x \right\}; [x > a_1] \end{aligned} \right\} \dots\dots (53)$$

第 2 徑間の任意の點の彎曲率は (53) を工夫すればそのまま用ふる事を得。即ち x を右端より計り u₁ と b₂, b₁ と a₂, P₁ と P₂ を入れ換ふれば可なり。第 1 徑間の i 點に於ける剪力は

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \frac{1}{4l^2} \left\{ P_1 (l-a_1) (4l^2 - la_1 - a_1^2) - P_2 a_2 (2l^2 - 3la_2 + a_2^2) \right\}; [x < a_1] \\ &= -\frac{1}{4l^2} \left\{ P_1 a_1 (5l^2 - a_1^2) + P_2 a_2 (2l^2 - 3la_2 + a_2^2) \right\}; [x > a_1] \end{aligned} \right\} \dots\dots (54)$$

満載等布荷重に對しては

$$\left. \begin{aligned} \frac{6}{l} \mathfrak{B}_1 &= \frac{6}{l} \mathfrak{A}_2 = \frac{ql^2}{4} \text{ なる故に} \\ M_1 &= -\frac{1}{4} \frac{6}{l} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2) = -\frac{ql^2}{8} \\ R_0 &= \frac{3}{8} ql, \quad R_{1-0} = \frac{5}{8} ql, \quad R_{1+0} = \frac{5}{8} ql \\ \therefore R_1 &= R_{1-0} + R_{1+0} = \frac{10}{8} ql \quad R_2 = \frac{3}{8} ql \\ M_x &= \frac{\left\{ 3 - 4 \left(\frac{x}{l} \right) \right\} \left(\frac{x}{l} \right)}{8} ql^2, \quad S_x = \frac{3 - 8 \left(\frac{x}{l} \right)}{8} ql \end{aligned} \right\} \dots\dots (55)$$

39. 等徑三連桁 等徑三連桁なる故に

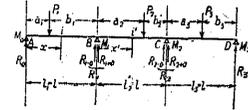
$$l_1 = l_2 = l_3 = l, \quad J_1 = J_2 = J_3 = J$$

(45)' により ABC 及び BCD 間に三彎曲率の

定理を用ひ

$$M_0 + 4M_1 + M_2 + \frac{6}{l} \mathfrak{B}_1 + \frac{6}{l} \mathfrak{A}_2 = 0 \dots\dots (I)$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 + \frac{6}{l} \mathfrak{B}_2 + \frac{6}{l} \mathfrak{A}_3 = 0 \dots\dots (II)$$



第 91 圖

M₀ = M₃ = 0 なる故 (I) (II) を解きて

$$M_1 = -\frac{1}{15} \left\{ 4 \left(\frac{6}{l} \mathfrak{B}_1 + \frac{6}{l} \mathfrak{A}_2 \right) - \left(\frac{6}{l} \mathfrak{B}_2 + \frac{6}{l} \mathfrak{A}_3 \right) \right\}$$

$$M_2 = -\frac{1}{15} \left\{ - \left(\frac{6}{l} \mathfrak{B}_1 + \frac{6}{l} \mathfrak{A}_2 \right) + 4 \left(\frac{6}{l} \mathfrak{B}_2 + \frac{6}{l} \mathfrak{A}_3 \right) \right\}$$

第 91 圖の如く集中荷重が載荷されたる場合には

$$\frac{6}{l} \mathfrak{B}_1 = \frac{P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1)}{l^2}, \quad \frac{6}{l} \mathfrak{A}_2 = \frac{P_2 a_2 b_2 (a_2 + 2b_2)}{l^2}$$

$$\frac{6}{l} \mathfrak{B}_2 = \frac{P_2 a_2 b_2 (2a_2 + b_2)}{l^2}, \quad \frac{6}{l} \mathfrak{A}_3 = \frac{P_3 a_3 b_3 (a_3 + 2b_3)}{l^2}$$

なる故に M₀ = 0

$$M_1 = -\frac{1}{15l^2} \left\{ 4P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1) + P_2 a_2 b_2 (2a_2 + 7b_2) - P_3 a_3 b_3 (a_3 + 2b_3) \right\}$$

$$M_2 = -\frac{1}{15l^2} \left\{ -P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1) + P_2 a_2 b_2 (7a_2 + 2b_2) + 4P_3 a_3 b_3 (a_3 + 2b_3) \right\}$$

$$M_3 = 0$$

反力は次の如くなる。

$$R_0 = \frac{1}{15l^2} \left\{ P_1 b_1 (7a_1^2 + 26a_1 b_1 + 16b_1^2) - P_2 a_2 b_2 (2a_2 + 7b_2) + P_3 a_3 b_3 (a_3 + 2b_3) \right\}$$

$$R_{1-0} = \frac{1}{15l^2} \left\{ P_1 a_1 (15a_1^2 + 38a_1 b_1 + 19b_1^2) + P_2 a_2 b_2 (2a_2 + 7b_2) - P_3 a_3 b_3 (a_3 + 2b_3) \right\}$$

$$R_{1+0} = \frac{1}{3l^2} \left\{ P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1) + P_2 b_2 (2a_2^2 + 7a_2 b_2 + 3b_2^2) - P_3 a_3 b_3 (a_3 + 2b_3) \right\}$$

$$R_1 = R_{1-0} + R_{1+0}$$

$$R_{2-0} = \frac{1}{3l^2} \left\{ -P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1) + P_2 a_2 (3a_2^2 + 7a_2 b_2 + 2b_2^2) + P_3 a_3 b_3 (a_3 + 2b_3) \right\}$$

$$R_{2+0} = \frac{1}{15l^2} \left\{ -P_1 a_1 b_1 (2a_1 + b_1) + P_2 a_2 b_2 (7a_2 + 2b_2) + P_3 b_3 (19a_3^2 + 38a_3 b_3 + 15b_3^2) \right\}$$

$$R_2 = R_{2-0} + R_{2+0}$$

(57)

第 1 徑間 i 點に於ける A_i 側の彎曲率は

$$M_x = \frac{1}{15l^2} \left\{ P_1(l-a_1)(15l^2-4la_1-4a_1^2)x - P_2a_2(7l^2-12la_2+5a_2^2)x + P_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2)x \right\}; \quad [x < a_1]$$

$$= \frac{1}{15l^2} \left[P_1a_1 \left\{ 15l^3 - (19l^2 - 4a_1^2)x \right\} - P_2a_2(7l^2 - 12la_2 + 5a_2^2)x + P_3a_3(2l^2 - 3la_3 + a_3^2)x \right]; \quad [x > a_1]$$

第 2 徑間 i' 點に於ける Bi' 側の彎曲率は

$$M_{x'} = -\frac{1}{15l^2} \left[P_1a_1(l^2-a_1^2)(4l-5x') + P_2(l-a_2) \left\{ la_2(7l-5a_2) - 5(3l^2+la_2-2a_2^2)x' \right\} - P_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2)(l-5x') \right]; \quad [x' < a_2]$$

$$= -\frac{1}{15l^2} \left[P_1a_1(l^2-a_1^2)(4l-5x') - P_2a_2 \left\{ l(8l^2+12la_2-5a_2^2) - 5(2l^2+3la_2-2a_2^2)x' \right\} - P_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2)(l-5x') \right]; \quad [x' > a_2]$$

i 點の A_i 側の剪力は (第 1 徑間)

$$S_x = \frac{1}{15l^2} \left\{ P_1(l-a_1)(15l^2-4la_1-4a_1^2) - P_2a_2(7l^2-12la_2+5a_2^2) + P_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2) \right\}; \quad [x < a_1]$$

$$= -\frac{1}{15l^2} \left\{ P_1a_1(19l^2-4a_1^2) + P_3a_3(7l^2-12la_2+5a_2^2) - P_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2) \right\}; \quad [x > a_1]$$

i' 點の Bi' 側の剪力は (第 2 徑間)

$$S_{x'} = \frac{1}{3l^2} \left\{ P_1a_1(l^2-a_1^2) + P_2(l-a_2)(3l^2+la_2-2a_2^2) - P_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2) \right\}; \quad [x' < a_2]$$

$$= \frac{1}{3l^2} \left\{ P_1a_1(l^2-a_1^2) - P_2a_2(2l^2+3la_2-2a_2^2) - P_3a_3(2l^2-3la_3+a_3^2) \right\}; \quad [x' > a_2]$$

又満載等布荷重の場合は

$$\frac{6}{l} \mathfrak{B}_1 = \frac{6}{l} \mathfrak{B}_2 = \frac{6}{l} \mathfrak{B}_3 = \frac{6}{l} \mathfrak{B}_4 = \frac{ql^2}{4}$$

なる故に M_1, M_2 を計算して次の如く反力, 彎曲率及剪力を求む.

$$M_0=0, \quad M_1=M_2=\frac{1}{10}ql^2, \quad M_3=0$$

$$R_{0-0}=\frac{4}{10}ql, \quad R_{1-0}=\frac{6}{10}ql, \quad R_{1+0}=R_{2-0}=\frac{5}{10}ql$$

$$R_{2+0}=\frac{6}{10}ql, \quad R_3=\frac{4}{10}ql$$

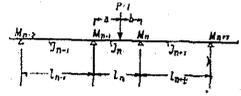
$$i \text{ 點に於ける } A_i \text{ 側の彎曲率} = M_x = \left\{ \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right) \right\} \left(\frac{x}{l} \right) ql^2 \quad (60)$$

$$i' \text{ 點に於ける } Bi' \text{ 側の彎曲率} = M_{x'} = \left\{ -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right\} ql^2$$

$$i \text{ 點に於ける } A_i \text{ 側の剪力} = S_x = \left\{ \frac{2}{5} - \left(\frac{x}{l} \right) \right\} ql$$

$$i' \text{ 點に於ける } Bi' \text{ 側の剪力} = S_{x'} = \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{x}{l} \right) \right\} ql$$

40. 連續桁影響線 第 92 圖の如き連續桁の l_n の徑間に集中荷重 $P=1$ を載せたる場合に M_{n-2}, M_{n-1}, M_n 及び M_{n-1}, M_n, M_{n+1} 間の關係は三彎曲率の定理により



$$M_{n-2}l'_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l'_n + l_n b \left(1 - \frac{b^2}{l_n^2} \right) = 0$$

$$M_{n-1}l'_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l'_{n+1} + l_n a \left(1 - \frac{a^2}{l_n^2} \right) = 0 \quad \dots\dots(61)$$

今 $f_r = \left(\frac{b}{l_n} \right) \left(1 - \frac{b^2}{l_n^2} \right), \quad f_l = \left(\frac{a}{l_n} \right) \left(1 - \frac{a^2}{l_n^2} \right) \dots\dots(62)$

と置けば f_r, f_l は $b/l, a/l$ なる比の函数となり徑間の長さには無關係にして P の位置にのみ支配される値をとる. 此 f_r, f_l を根幹函数と云ふ. f_r, f_l を用ひて (61) を書き換ふれば

$$M_{n-2}l'_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l'_n = -l_n f_r$$

$$M_{n-1}l'_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l'_{n+1} = -l_n f_l \quad \dots\dots(63)$$

一般に徑間の數が n 個ある場合に三彎曲率の定理は $(n-1)$ 個だけ立てることを得, 従て未知の支點力率と同數の方程式を得. 今左より順次に三彎曲率の定理を用ひ荷重に關する項を順次 $N_1, N_2, N_3, \dots, N_{n-1}$ と置き任意の支點彎曲率につき解けば一般に

$$M_k = C_{k1} N_1 + C_{k2} N_2 + C_{k3} N_3 + \dots + C_{k,n-1} N_{n-1}; \quad k=1, 2, 3, \dots, n-1$$

此の N の値は $P=1$ の位置に依り異り,

第 1 徑間に $P=1$ のある時 $N_1 = -f_1 l_1 U_1, N_2 = 0, N_3 = 0 \dots$
 第 2 徑間 ,, $N_1 = -f_2 l_2 U_2, N_2 = -f_2 l_2 U_2, N_3 = 0 \dots$
 第 3 徑間 ,, $N_1 = 0, N_2 = -f_3 l_3 U_3, N_3 = -f_3 l_3 U_3, N_4 = 0 \dots$

 第 i 徑間 ,, $N_1 = 0, \dots, N_{i-2} = 0, N_{i-1} = -f_i l_i U_i$
 $N_i = -f_i l_i U_i, N_{i+1} = 0 \dots$

故に M_k に対しては $(i-1)$ 及び i 支點間にある荷重の影響は

$$M_k^{(i)} = C_{k,i-1} f_r + C_{k,i} f_l$$

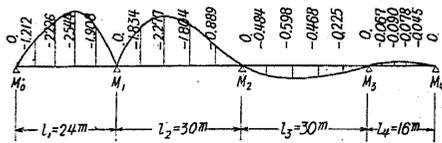
を以て表はさるべし。支點彎曲率の影響線は根幹函数の表を用ひて計算すれば便利である。

第 9 表 根幹函数 f_r, f_l

a/l	f_r	f_l	a/l	f_r	f_l
0.05	0.0926	0.0499	0.55	0.3589	0.3836
0.10	0.1710	0.0990	0.60	0.3360	0.3840
0.15	0.2359	0.1466	0.65	0.3071	0.3754
0.20	0.2880	0.1920	0.70	0.2730	0.3570
0.25	0.3281	0.2344	0.75	0.2344	0.3281
0.30	0.3570	0.2730	0.80	0.1920	0.2880
0.35	0.3754	0.3071	0.85	0.1466	0.2359
0.40	0.3840	0.3360	0.90	0.0990	0.1710
0.45	0.3836	0.3589	0.95	0.0499	0.0926
0.50	0.3750	0.3750	1.00	0	0

【計算例】 圖の如き徑間の 4 徑間連続桁の支點彎曲率の影響線を求む。

但し $J_1 = J_4, \frac{J_2}{J_1} = \frac{J_3}{J_1} = \frac{4}{3}$ とす。



$J_2 = J_1 = J_4$ に換へば $l_1' = l_1 = 24m, l_2' = l_3' = l_2 \frac{J_1}{J_2} = 22.5m, l_4' = l_4 = 16m.$

$$\left. \begin{aligned} 2(24 + 22.5) M_1 + 22.5 M_2 &= N_1 \\ 22.5 M_1 + 2(22.5 + 22.5) M_2 + 22.5 M_3 &= N_2 \\ 22.5 M_2 + 2(22.5 + 16) M_3 &= N_3 \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

M の値は (I) より各支點彎曲率を解きて

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 0.01150 N_1 - 0.00310 N_2 + 0.00091 N_3 \\ M_2 &= -0.00310 N_1 + 0.01282 N_2 - 0.00375 N_3 \\ M_3 &= 0.00091 N_1 - 0.00375 N_2 + 0.01408 N_3 \end{aligned} \right\} \dots (II)$$

一例として M_1 の影響線を求むれば。

荷重: 第 1 徑間 $N_1 = -24 \times 24 f_l, N_2 = 0, N_3 = 0;$
 ,, 第 2 ,, $N_1 = -22.5 \times 30 f_r, N_2 = -22.5 \times 30 f_l, N_3 = 0;$
 ,, 第 3 ,, $N_1 = 0, N_2 = -22.5 \times 30 f_r, N_3 = -22.5 \times 30 f_l;$
 ,, 第 4 ,, $N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = -16 \times 16 f_r.$
 荷重: 第 1 徑間 $M_1 = -6.624 f_l,$
 ,, 第 2 ,, $M_1 = -7.763 f_r + 2.093 f_l,$
 ,, 第 3 ,, $M_1 = 2.093 f_r - 0.614 f_l,$
 ,, 第 4 ,, $M_1 = -0.233 f_r.$

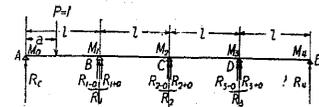
従て次表を得。

M_1 の影響線

$\frac{a}{l}$	荷重第 1 徑間にある場合	荷重第 2 徑間にある場合	荷重第 3 徑間にある場合	荷重第 4 徑間にある場合	$\frac{a}{l}$
0	0	0	0	0	0
0.20	-1.212	-1.834	+0.484	-0.067	0.20
0.40	-2.226	-2.277	+0.598	-0.090	0.40
0.60	-2.544	-1.804	+0.468	-0.078	0.60
0.80	-1.908	-0.889	+0.225	-0.045	0.80
1.00	0	0	0	0	1.00

41. 等徑間二、三及び四連桁の支點彎曲率、反力、彎曲率及び剪力の影響線

第 93 圖に示す如く左の支點より $M_0, M_1, M_2 \dots R_0, R_1, R_2, \dots$ を夫々支點彎曲率及び反力とし M_x, S_x を考へてゐる徑間の左支點より x の距離の點の彎曲率及び剪力とし等徑間四連続桁までの各種影響線



第 93 圖

を掲ぐ。荷重の位置は a/l を以て表はし a は載荷されたる徑間の左支點より荷重迄の距離とす。

1) 等徑二連桁

1) 支點彎曲率影響線

$-M_1$ [係数: 1]					
$\frac{a}{l}$	第 1 徑間に荷重ある場合	第 2 徑間に荷重ある場合	a/l	第 1 徑間に荷重ある場合	第 2 徑間に荷重ある場合
0.00	0	0			
0.05	0.0125	0.0232	0.55	0.0959	0.0897
0.10	0.0248	0.0428	0.60	0.0960	0.0840
0.15	0.0367	0.0590	0.65	0.0939	0.0768
0.20	0.0480	0.0720	0.70	0.0892	0.0638
0.25	0.0586	0.0820	0.75	0.0820	0.0566
0.30	0.0683	0.0892	0.80	0.0720	0.0480
0.35	0.0768	0.0939	0.85	0.0590	0.0367
0.40	0.0840	0.0960	0.90	0.0428	0.0248
0.45	0.0897	0.0959	0.95	0.0232	0.0125
0.50	0.0938	0.0938	1.00	0	0

2) 第 1 支點反力影響線

$\frac{a}{l}$	R_0	
	第 1 荷間に 荷重ある場合	第 2 荷間に 荷重ある場合
0	1.0000	0
0.05	0.9975	-0.0232
0.10	0.9752	-0.0428
0.15	0.8133	-0.0590
0.20	0.7520	-0.0720
0.25	0.6914	-0.0820
0.30	0.6317	-0.0892
0.35	0.5732	-0.0939
0.40	0.5160	-0.0960
0.45	0.4603	-0.0959
0.50	0.4062	-0.0938
0.55	0.3541	-0.0897
0.60	0.3040	-0.0840
0.65	0.2561	-0.0768
0.70	0.2108	-0.0683
0.75	0.1680	-0.0586
0.80	0.1280	-0.0480
0.85	0.0910	-0.0367
0.90	0.0572	-0.0248
0.95	0.0268	-0.0125
1.00	0	0

3) 第 2 支點反力影響線

$\frac{a}{l}$	R_{1-e} (支點左側)		R_{1+e} (支點右側)		$R_1 = R_1 - e + R_2 + e$	
	第 1 荷間に 荷重ある場合	第 2 荷間に 荷重ある場合	第 1 荷間に 荷重ある場合	第 2 荷間に 荷重ある場合	第 1 荷間に 荷重ある場合	第 2 荷間に 荷重ある場合
0	0	0	0	1.0000	0	1.0000
0.05	0.0235	0.0232	0.0125	0.9732	0.0760	0.9964
0.10	0.1248	0.0428	0.0248	0.9428	0.1496	0.8355
0.15	0.1867	0.0590	0.0367	0.9090	0.2284	0.6880
0.20	0.2480	0.0720	0.0480	0.8720	0.2960	0.5440
0.25	0.3086	0.0820	0.0586	0.8320	0.3672	0.4140
0.30	0.3683	0.0892	0.0683	0.7892	0.4366	0.3164
0.35	0.4268	0.0939	0.0768	0.7439	0.5036	0.2375
0.40	0.4840	0.0960	0.0840	0.6960	0.5680	0.1720
0.45	0.5397	0.0959	0.0897	0.6459	0.6294	0.1148
0.50	0.5938	0.0938	0.0938	0.5938	0.6876	0.0680
0.55	0.6459	0.0897	0.0959	0.5397	0.7418	0.0294
0.60	0.6960	0.0840	0.0960	0.4840	0.7920	0.0080
0.65	0.7439	0.0768	0.0939	0.4268	0.8378	0.0036
0.70	0.7892	0.0683	0.0892	0.3683	0.8784	0.0066
0.75	0.8320	0.0586	0.0820	0.3086	0.9140	0.0072
0.80	0.8720	0.0480	0.0720	0.2480	0.9440	0.0060
0.85	0.9090	0.0367	0.0590	0.1867	0.9680	0.0034
0.90	0.9428	0.0248	0.0428	0.1248	0.9856	0.0016
0.95	0.9732	0.0125	0.0232	0.0625	0.9964	0.0070
1.00	1.0000	0	0	0	1.0000	0

4) 剪力影響線

$\frac{a}{l}$	S_x	
	x 點より左	x 點より右
0	0	1.0000
0.05	-0.0625	0.9975
0.10	-0.1248	0.8752
0.15	-0.1867	0.8133
0.20	-0.2480	0.7520
0.25	-0.3086	0.6914
0.30	-0.3683	0.6317
0.35	-0.4268	0.5732
0.40	-0.4840	0.5160
0.45	-0.5397	0.4603
0.50	-0.5938	0.4062
0.55	-0.6459	0.3541
0.60	-0.6960	0.3040
0.65	-0.7439	0.2561
0.70	-0.7892	0.2108
0.75	-0.8320	0.1680
0.80	-0.8720	0.1280
0.85	-0.9090	0.0910
0.90	-0.9428	0.0572
0.95	-0.9732	0.0268
1.00	-1.0000	0

5) 徑間彎曲率影響線 ($x =$ 第 1 支點より距離)

$\frac{a}{l}$	M_c [係數: l]					
	$x = 0.4l$		$x = 0.5l$		$x = 0.6l$	
x	第 1 荷間に 荷重ある 場合		第 2 荷間に 荷重ある 場合		第 1 荷間に 荷重ある 場合	
	第 1 荷間に 荷重ある 場合	第 2 荷間に 荷重ある 場合	第 1 荷間に 荷重ある 場合	第 2 荷間に 荷重ある 場合	第 1 荷間に 荷重ある 場合	第 2 荷間に 荷重ある 場合
0	0	0	0	0	0	0
0.05	0.0250	0.0093	0.0187	0.0116	0.0125	0.0140
0.10	0.0601	0.0171	0.0376	0.0214	0.0251	0.0257
0.15	0.0753	0.0236	0.0566	0.0286	0.0380	0.0354
0.20	0.1080	0.0288	0.0760	0.0360	0.0512	0.0432
0.25	0.1266	0.0328	0.0957	0.0410	0.0648	0.0492
0.30	0.1527	0.0357	0.1158	0.0446	0.0790	0.0535
0.35	0.1793	0.0376	0.1366	0.0470	0.0940	0.0568
0.40	0.2064	0.0384	0.1580	0.0480	0.1096	0.0576
0.45	0.1841	0.0384	0.1801	0.0480	0.1262	0.0575
0.50	0.1625	0.0375	0.2031	0.0469	0.1437	0.0563
0.55	0.1416	0.0359	0.1770	0.0449	0.1637	0.0538
0.60	0.1216	0.0336	0.1520	0.0420	0.1824	0.0504
0.65	0.1024	0.0307	0.1280	0.0384	0.1937	0.0460
0.70	0.0843	0.0273	0.1054	0.0342	0.1965	0.0410
0.75	0.0672	0.0234	0.0840	0.0283	0.1908	0.0352
0.80	0.0512	0.0193	0.0640	0.0240	0.0768	0.0288
0.85	0.0364	0.0147	0.0455	0.0184	0.0546	0.0220
0.90	0.0229	0.0099	0.0286	0.0124	0.0348	0.0149
0.95	0.0107	0.0050	0.0134	0.0068	0.0161	0.0075
1.00	0	0	0	0	0	0

2) 等 復 三 連 桁

1) 支 點 彎 曲 率 影 響 線

$\frac{a}{l}$	$-M_1$ (係數 $\cdot l$)		
	第 1 徑間に荷重がある場合	第 2 徑間に荷重がある場合	第 3 徑間に荷重がある場合
0	0	0	0
0.05	0.0133	0.0215	-0.0062
0.10	0.0264	0.0330	-0.0114
0.15	0.0391	0.0531	-0.0157
0.20	0.0512	0.0640	-0.0192
0.25	0.0925	0.0719	-0.0219
0.30	0.0727	0.0770	-0.0238
0.35	0.0819	0.0796	-0.0251
0.40	0.0896	0.0800	-0.0256
0.45	0.0937	0.0788	-0.0256
0.50	0.1000	0.0750	-0.0250
0.55	0.1023	0.0702	-0.0240
0.60	0.1024	0.0640	-0.0224
0.65	0.1001	0.0569	-0.0205
0.70	0.0952	0.0490	-0.0182
0.75	0.0875	0.0406	-0.0156
0.80	0.0768	0.0320	-0.0128
0.85	0.0629	0.0234	-0.0098
0.90	0.0456	0.0150	-0.0066
0.95	0.0247	0.0071	-0.0033
1.00	0	0	0

2) 第 1 支 點 反 力 影 響 線

$\frac{a}{l}$	R_0		
	第 1 徑間に荷重がある場合	第 2 徑間に荷重がある場合	第 3 徑間に荷重がある場合
0	1.0000	0	0
0.05	0.9367	-0.0215	0.0062
0.10	0.8736	-0.0390	0.0114
0.15	0.8109	-0.0581	0.0157
0.20	0.7488	-0.0640	0.0192
0.25	0.6875	-0.0719	0.0219
0.30	0.6273	-0.0770	0.0238
0.35	0.5681	-0.0796	0.0251
0.40	0.5104	-0.0800	0.0256
0.45	0.4543	-0.0788	0.0256
0.50	0.4000	-0.0750	0.0250
0.55	0.3477	-0.0702	0.0240
0.60	0.2976	-0.0640	0.0224
0.65	0.2499	-0.0569	0.0205
0.70	0.2048	-0.0490	0.0182
0.75	0.1625	-0.0406	0.0156
0.80	0.1232	-0.0320	0.0128
0.85	0.0871	-0.0234	0.0098
0.90	0.0544	-0.0150	0.0066
0.95	0.0253	-0.0071	0.0033
1.00	0	0	0

3) 第 2 支 點 反 力 影 響 線

$\frac{a}{l}$	R_{1-0} (支 點 左 側)			R_{1+0} (支 點 右 側)		
	第 1 徑間に荷重がある場合	第 2 徑間に荷重がある場合	第 3 徑間に荷重がある場合	第 1 徑間に荷重がある場合	第 2 徑間に荷重がある場合	第 3 徑間に荷重がある場合
0	0	0	0	0	0	0
0.05	0.0653	0.0215	-0.0062	0.0166	-0.0303	-0.0871
0.10	0.1264	0.0390	-0.0114	0.0330	-0.0570	-0.0684
0.15	0.1891	0.0531	-0.0157	0.0489	-0.0786	-0.0943
0.20	0.2512	0.0640	-0.0192	0.0640	-0.0960	-0.1152
0.25	0.3125	0.0719	-0.0219	0.7813	-0.1094	-0.1313
0.30	0.3727	0.0770	-0.0238	0.7280	-0.1190	-0.1428
0.35	0.4319	0.0796	-0.0251	0.1024	-0.1292	-0.1500
0.40	0.4906	0.0800	-0.0256	0.1120	-0.1280	-0.1536
0.45	0.5437	0.0788	-0.0256	0.1197	-0.1279	-0.1535
0.50	0.6000	0.0750	-0.0250	0.1250	-0.1250	-0.1536
0.55	0.6523	0.0702	-0.0240	0.1279	-0.1197	-0.1500
0.60	0.7024	0.0640	-0.0224	0.1280	-0.1120	-0.1487
0.65	0.7501	0.0569	-0.0205	0.1252	-0.1024	-0.1344
0.70	0.7962	0.0490	-0.0182	0.1190	-0.0909	-0.1229
0.75	0.8375	0.0406	-0.0156	0.1064	-0.0781	-0.1091
0.80	0.8768	0.0320	-0.0128	0.0920	-0.0640	-0.0987
0.85	0.9129	0.0234	-0.0098	0.0786	-0.0489	-0.0887
0.90	0.9454	0.0150	-0.0066	0.0570	-0.0350	-0.0796
0.95	0.9747	0.0071	-0.0033	0.0309	-0.0166	-0.0719
1.00	0	0	0	0	0	0

3) 等徑四邊形 1) 第 2 支點彎曲率影響線

$\frac{a}{l}$	M_x [数値: l]				$-M_1$ [数値: l]							
	$x=0.4l$		$x=0.5l$		第 1 種間に荷重がある場合		第 2 種間に荷重がある場合		第 3 種間に荷重がある場合		第 4 種間に荷重がある場合	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	-0.0066	0.0143	-0.0062	0.0107	-0.0063	0.0107	-0.0063	0.0221	-0.0087	0.0104	-0.0017	0.0017
0.10	-0.0132	0.0306	-0.0114	0.0230	-0.0100	0.0230	-0.0100	0.0404	-0.0104	0.0104	-0.0031	0.0031
0.15	-0.0195	0.0488	-0.0157	0.0368	-0.0146	0.0368	-0.0146	0.0550	-0.0142	0.0142	-0.0042	0.0042
0.20	-0.0256	0.0688	-0.0192	0.0520	-0.0192	0.0520	-0.0192	0.0663	-0.0172	0.0172	-0.0051	0.0051
0.25	-0.0313	0.0906	-0.0219	0.0688	-0.0224	0.0688	-0.0224	0.0744	-0.0192	0.0192	-0.0059	0.0059
0.30	-0.0368	0.1143	-0.0238	0.0870	-0.0256	0.0870	-0.0256	0.0797	-0.0206	0.0206	-0.0064	0.0064
0.35	-0.0409	0.1385	-0.0251	0.1068	-0.0287	0.1068	-0.0287	0.0824	-0.0213	0.0213	-0.0067	0.0067
0.40	-0.0443	0.1664	-0.0256	0.1280	-0.0306	0.1280	-0.0306	0.0833	-0.0214	0.0214	-0.0069	0.0069
0.45	-0.0478	0.1990	-0.0256	0.1508	-0.0328	0.1508	-0.0328	0.0824	-0.0214	0.0214	-0.0069	0.0069
0.50	-0.0500	0.2350	-0.0250	0.1750	-0.0343	0.1750	-0.0343	0.0774	-0.0201	0.0201	-0.0067	0.0067
0.55	-0.0511	0.2666	-0.0240	0.1990	-0.0353	0.1990	-0.0353	0.0723	-0.0187	0.0187	-0.0064	0.0064
0.60	-0.0512	0.2936	-0.0224	0.2280	-0.0353	0.2280	-0.0353	0.0659	-0.0171	0.0171	-0.0060	0.0060
0.65	-0.0500	0.3170	-0.0205	0.2567	-0.0343	0.2567	-0.0343	0.0585	-0.0152	0.0152	-0.0055	0.0055
0.70	-0.0470	0.3368	-0.0182	0.2800	-0.0328	0.2800	-0.0328	0.0503	-0.0131	0.0131	-0.0049	0.0049
0.75	-0.0437	0.3520	-0.0156	0.3000	-0.0306	0.3000	-0.0306	0.0417	-0.0108	0.0108	-0.0042	0.0042
0.80	-0.0384	0.3636	-0.0128	0.3150	-0.0287	0.3150	-0.0287	0.0327	-0.0086	0.0086	-0.0034	0.0034
0.85	-0.0315	0.3715	-0.0098	0.3216	-0.0256	0.3216	-0.0256	0.0234	-0.0063	0.0063	-0.0023	0.0023
0.90	-0.0228	0.3154	-0.0068	0.3230	-0.0214	0.3230	-0.0214	0.0153	-0.0040	0.0040	-0.0018	0.0018
0.95	-0.0123	0.0071	-0.0033	0.0107	-0.0062	0.0107	-0.0062	0.0073	-0.0019	0.0019	-0.0009	0.0009
1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6) 第 2 種間彎曲率影響線 (x =第 2 支點よりの距離)

2) 第 3 支點彎曲率影響線

$\frac{a}{l}$	$-M_2$ [数値: l]				$R_0 = R_0 + R_0' = \frac{M_1}{l} + \frac{l-a}{l}$			
	第 1 種間に荷重がある場合		第 2 種間に荷重がある場合		第 3 種間に荷重がある場合		第 4 種間に荷重がある場合	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	-0.0086	0.0077	0.0229	-0.0066	-0.0221	0.0097	-0.0017	0.0097
0.10	-0.0071	0.0161	0.0418	-0.0122	-0.0404	0.0104	-0.0081	0.0104
0.15	-0.0105	0.0251	0.0569	-0.0168	-0.0550	0.0142	-0.0042	0.0142
0.20	-0.0137	0.0343	0.0686	-0.0206	-0.0663	0.0172	-0.0051	0.0172
0.25	-0.0167	0.0436	0.0770	-0.0234	-0.0744	0.0192	-0.0059	0.0192
0.30	-0.0195	0.0525	0.0825	-0.0255	-0.0797	0.0206	-0.0064	0.0206
0.35	-0.0219	0.0600	0.0857	-0.0264	-0.0827	0.0213	-0.0067	0.0213
0.40	-0.0240	0.0686	0.0871	-0.0274	-0.0831	0.0214	-0.0069	0.0214
0.45	-0.0256	0.0751	0.0870	-0.0274	-0.0774	0.0201	-0.0067	0.0201
0.50	-0.0268	0.0803	0.0843	-0.0268	-0.0723	0.0187	-0.0064	0.0187
0.55	-0.0274	0.0840	0.0751	-0.0256	-0.0659	0.0171	-0.0060	0.0171
0.60	-0.0274	0.0857	0.0686	-0.0240	-0.0585	0.0152	-0.0055	0.0152
0.65	-0.0268	0.0854	0.0600	-0.0219	-0.0503	0.0131	-0.0049	0.0131
0.70	-0.0255	0.0825	0.0525	-0.0195	-0.0417	0.0108	-0.0042	0.0108
0.75	-0.0234	0.0770	0.0436	-0.0167	-0.0327	0.0086	-0.0034	0.0086
0.80	-0.0206	0.0686	0.0343	-0.0105	-0.0234	0.0063	-0.0023	0.0063
0.85	-0.0168	0.0569	0.0251	-0.0071	-0.0153	0.0040	-0.0018	0.0040
0.90	-0.0122	0.0418	0.0161	-0.0071	-0.0073	0.0019	-0.0009	0.0019
0.95	-0.0066	0.0229	0.0077	-0.0036	-0.0019	0	0	0
1.00	0	0	0	0	0	0	0	0

4) 第 2 支點反力影響線

$\frac{a}{l}$	$R_{1-0} = R_{1-0} + R_{1-0}'' = -\frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{a}{l}$ (支點左側)				$R_{1+0} = R_{1+0} + R_{1+0}'' = -\frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{l-a}{l}$ (支點右側)				$R_1 = R_{1-0} + R_{1+0}$							
	第 1 徑間 に荷重が ある場合	第 2 徑間 に荷重が ある場合	第 3 徑間 に荷重が ある場合	第 4 徑間 に荷重が ある場合	第 1 徑間 に荷重が ある場合	第 2 徑間 に荷重が ある場合	第 3 徑間 に荷重が ある場合	第 4 徑間 に荷重が ある場合	第 1 徑間 に荷重が ある場合	第 2 徑間 に荷重が ある場合	第 3 徑間 に荷重が ある場合	第 4 徑間 に荷重が ある場合	第 1 徑間 に荷重が ある場合	第 2 徑間 に荷重が ある場合	第 3 徑間 に荷重が ある場合	第 4 徑間 に荷重が ある場合
0	0	0	0	0	0	1.0000	0	0	1.0000	0	0	0	1.0000	0	0	0
0.05	0.0639	0.0221	-0.0037	0.0017	0.0175	0.9644	-0.0236	0.0063	0.0314	0.9655	-0.0343	0.0083	0.0314	0.9655	-0.0343	0.0100
0.10	0.1275	0.0404	-0.0104	0.0031	0.0346	0.9243	-0.0522	0.0153	0.0621	0.9243	-0.0522	0.0153	0.0621	0.9243	-0.0522	0.0184
0.15	0.1907	0.0550	-0.0142	0.0042	0.0512	0.8799	-0.0711	0.0210	0.0910	0.8799	-0.0711	0.0210	0.0910	0.8799	-0.0711	0.0252
0.20	0.2533	0.0663	-0.0172	0.0051	0.0670	0.8320	-0.0853	0.0237	0.1203	0.8320	-0.0853	0.0237	0.1203	0.8320	-0.0853	0.0308
0.25	0.3151	0.0744	-0.0192	0.0059	0.0818	0.7808	-0.0962	0.0263	0.1496	0.7808	-0.0962	0.0263	0.1496	0.7808	-0.0962	0.0352
0.30	0.3758	0.0797	-0.0206	0.0064	0.0953	0.7272	-0.1091	0.0319	0.1781	0.7272	-0.1091	0.0319	0.1781	0.7272	-0.1091	0.0383
0.35	0.4353	0.0824	-0.0213	0.0067	0.1072	0.6715	-0.1071	0.0385	0.2061	0.6715	-0.1071	0.0385	0.2061	0.6715	-0.1071	0.0412
0.40	0.4933	0.0827	-0.0214	0.0069	0.1173	0.6141	-0.1050	0.0433	0.2346	0.6141	-0.1050	0.0433	0.2346	0.6141	-0.1050	0.0422
0.45	0.5497	0.0810	-0.0210	0.0069	0.1253	0.5553	-0.1004	0.0485	0.2621	0.5553	-0.1004	0.0485	0.2621	0.5553	-0.1004	0.0402
0.50	0.6042	0.0774	-0.0201	0.0067	0.1310	0.4971	-0.1004	0.0535	0.2896	0.4971	-0.1004	0.0535	0.2896	0.4971	-0.1004	0.0384
0.55	0.6566	0.0723	-0.0187	0.0064	0.1340	0.4383	-0.0958	0.0585	0.3171	0.4383	-0.0958	0.0585	0.3171	0.4383	-0.0958	0.0360
0.60	0.7067	0.0659	-0.0171	0.0060	0.1341	0.3802	-0.0857	0.0635	0.3446	0.3802	-0.0857	0.0635	0.3446	0.3802	-0.0857	0.0329
0.65	0.7543	0.0585	-0.0152	0.0055	0.1311	0.3231	-0.0761	0.0674	0.3721	0.3231	-0.0761	0.0674	0.3721	0.3231	-0.0761	0.0298
0.70	0.7992	0.0503	-0.0131	0.0049	0.1247	0.2678	-0.0656	0.0709	0.3996	0.2678	-0.0656	0.0709	0.3996	0.2678	-0.0656	0.0265
0.75	0.8411	0.0417	-0.0108	0.0042	0.1145	0.2147	-0.0544	0.0741	0.4271	0.2147	-0.0544	0.0741	0.4271	0.2147	-0.0544	0.0231
0.80	0.8800	0.0327	-0.0086	0.0034	0.1006	0.1641	-0.0429	0.0771	0.4546	0.1641	-0.0429	0.0771	0.4546	0.1641	-0.0429	0.0205
0.85	0.9155	0.0234	-0.0063	0.0026	0.0823	0.1165	-0.0314	0.0791	0.4821	0.1165	-0.0314	0.0791	0.4821	0.1165	-0.0314	0.0177
0.90	0.9475	0.0153	-0.0040	0.0018	0.0597	0.0735	-0.0201	0.0809	0.5096	0.0735	-0.0201	0.0809	0.5096	0.0735	-0.0201	0.0150
0.95	0.9757	0.0073	-0.0019	0.0009	0.0323	0.0344	-0.0086	0.0845	0.5371	0.0344	-0.0086	0.0845	0.5371	0.0344	-0.0086	0.0122
1.00	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5) 第 3 支點反力影響線

$\frac{a}{l}$	$R_{2-0} = R_{2-0} + R_{2-0}'' = -\frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{a}{l}$ (支點左側)				$R_{2+0} = R_{2+0} + R_{2+0}'' = -\frac{M_2 - M_3}{l}$ (支點右側)				$R_2 = R_{2-0} + R_{2+0}$							
	第 1 徑間 に荷重が ある場合	第 2 徑間 に荷重が ある場合	第 3 徑間 に荷重が ある場合	第 4 徑間 に荷重が ある場合	第 1 徑間 に荷重が ある場合	第 2 徑間 に荷重が ある場合	第 3 徑間 に荷重が ある場合	第 4 徑間 に荷重が ある場合	第 1 徑間 に荷重が ある場合	第 2 徑間 に荷重が ある場合	第 3 徑間 に荷重が ある場合	第 4 徑間 に荷重が ある場合	第 1 徑間 に荷重が ある場合	第 2 徑間 に荷重が ある場合	第 3 徑間 に荷重が ある場合	第 4 徑間 に荷重が ある場合
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	-0.0175	0.0356	0.0236	-0.0083	-0.0083	0.0757	0.0522	0.0153	-0.0153	-0.0083	0.0221	0.0100	-0.0220	0.0452	0.0932	-0.0406
0.10	-0.0346	0.0757	0.0522	-0.0153	-0.0153	0.0757	0.0522	-0.0153	-0.0310	-0.0153	0.0221	0.0100	-0.0310	0.0452	0.0932	-0.0750
0.15	-0.0512	0.1201	0.0711	-0.0210	-0.0210	0.0512	0.0257	-0.0257	-0.0478	-0.0210	0.0314	0.0385	-0.0478	0.0452	0.0932	-0.1033
0.20	-0.0670	0.1680	0.0853	-0.0257	-0.0257	0.0346	0.0086	-0.0086	-0.0644	-0.0257	0.0429	0.0559	-0.0644	0.0452	0.0932	-0.1293
0.25	-0.0818	0.2192	0.0962	-0.0293	-0.0293	0.0244	0.0002	0.0002	-0.0810	-0.0293	0.0544	0.0753	-0.0810	0.0452	0.0932	-0.1438
0.30	-0.0953	0.2728	0.1031	-0.0319	-0.0319	0.0244	0.0002	0.0002	-0.0943	-0.0319	0.0656	0.0823	-0.0943	0.0452	0.0932	-0.1566
0.35	-0.1072	0.3285	0.1057	-0.0335	-0.0335	0.0274	0.0002	0.0002	-0.1072	-0.0335	0.0761	0.0896	-0.1072	0.0452	0.0932	-0.1646
0.40	-0.1173	0.3859	0.1071	-0.0343	-0.0343	0.0274	0.0002	0.0002	-0.1197	-0.0343	0.0867	0.0932	-0.1197	0.0452	0.0932	-0.1684
0.45	-0.1253	0.4441	0.1050	-0.0335	-0.0335	0.0244	0.0002	0.0002	-0.1310	-0.0335	0.0967	0.0932	-0.1310	0.0452	0.0932	-0.1684
0.50	-0.1310	0.5029	0.1004	-0.0335	-0.0335	0.0244	0.0002	0.0002	-0.1438	-0.0335	0.1067	0.0896	-0.1438	0.0452	0.0932	-0.1646
0.55	-0.1343	0.5617	0.0933	-0.0320	-0.0320	0.0244	0.0002	0.0002	-0.1566	-0.0320	0.1165	0.0853	-0.1566	0.0452	0.0932	-0.1573
0.60	-0.1341	0.6198	0.0857	-0.0300	-0.0300	0.0244	0.0002	0.0002	-0.1684	-0.0300	0.1261	0.0809	-0.1684	0.0452	0.0932	-0.1473
0.65	-0.1311	0.6769	0.0761	-0.0274	-0.0274	0.0244	0.0002	0.0002	-0.1810	-0.0274	0.1359	0.0761	-0.1810	0.0452	0.0932	-0.1347
0.70	-0.1247	0.7322	0.0656	-0.0244	-0.0244	0.0244	0.0002	0.0002	-0.1938	-0.0244	0.1457	0.0656	-0.1938	0.0452	0.0932	-0.1205
0.75	-0.1145	0.7853	0.0514	-0.0210	-0.0210	0.0244	0.0002	0.0002	-0.2061	-0.0210	0.1555	0.0514	-0.2061	0.0452	0.0932	-0.1063
0.80	-0.1006	0.8359	0.0429	-0.0171	-0.0171	0.0244	0.0002	0.0002	-0.2184	-0.0171	0.1653	0.0429	-0.2184	0.0452	0.0932	-0.0921
0.85	-0.0823	0.8835	0.0314	-0.0131	-0.0131	0.0244	0.0002	0.0002	-0.2307	-0.0131	0.1751	0.0314	-0.2307	0.0452	0.0932	-0.0779
0.90	-0.0597	0.9265	0.0201	-0.0089	-0.0089	0.0244	0.0002	0.0002	-0.2430	-0.0089	0.1849	0.0201	-0.2430	0.0452	0.0932	-0.0637
0.95	-0.0323	0.9656	0.0083	-0.0045	-0.0045	0.0244	0.0002	0.0002	-0.2553	-0.0045	0.1947	0.0083	-0.2553	0.0452	0.0932	-0.0495
1.00	0	1.0000	0	0	0	0	0	0	-0.2676	0	0	0	-0.2676	0	0	0

6) 剪力影響線

$\frac{a}{l}$	$S_t = S_t' + S_t''$ (第 1 種間)				$S_t = S_t' + S_t''$ (第 2 種間)			
	第 1 種間に荷重がある場合		第 2 種間に荷重がある場合		第 3 種間に荷重がある場合		第 4 種間に荷重がある場合	
	x 點の左	x 點の右	荷重がある場合	荷重がある場合	荷重がある場合	x 點の左	x 點の右	荷重がある場合
0	0	1.0000	0	0	0	0	1.0000	0
0.05	-0.0689	0.9361	-0.0057	-0.0017	0.0175	-0.0356	0.9644	-0.0286
0.10	-0.1275	0.8725	-0.0104	-0.0031	0.0346	-0.0737	0.9243	-0.0522
0.15	-0.1907	0.8093	-0.0142	-0.0042	0.0512	-0.1201	0.8739	-0.0711
0.20	-0.2533	0.7467	-0.0163	-0.0051	0.0670	-0.1680	0.8220	-0.0858
0.25	-0.3151	0.6849	-0.0172	-0.0059	0.0818	-0.2162	0.7808	-0.0962
0.30	-0.3758	0.6242	-0.0176	-0.0064	0.0953	-0.2728	0.7415	-0.1031
0.35	-0.4353	0.5647	-0.0165	-0.0067	0.1072	-0.3285	0.6715	-0.1067
0.40	-0.4933	0.5057	-0.0142	-0.0069	0.1173	-0.3859	0.6141	-0.1071
0.45	-0.5497	0.4503	-0.0109	-0.0069	0.1253	-0.4441	0.5559	-0.1050
0.50	-0.6042	0.3953	-0.0067	-0.0067	0.1310	-0.5029	0.4971	-0.1004
0.55	-0.6566	0.3434	-0.0023	-0.0054	0.1340	-0.5617	0.4363	-0.0988
0.60	-0.7037	0.2933	0.0017	-0.0040	0.1341	-0.6198	0.3802	-0.0957
0.65	-0.7543	0.2457	0.0052	-0.0025	0.1311	-0.6769	0.3231	-0.0761
0.70	-0.8411	0.1539	0.0108	-0.0014	0.1145	-0.7322	0.2678	-0.0656
0.75	-0.8800	0.1200	0.0086	-0.0004	0.1066	-0.7863	0.2147	-0.0544
0.80	-0.9155	0.0845	0.0063	0.0002	0.0923	-0.8359	0.1641	-0.0429
0.85	-0.9475	0.0525	0.0040	0.0018	0.0785	-0.8835	0.1165	-0.0314
0.90	-0.9757	0.0243	0.0019	-0.0009	0.0623	-0.9285	0.0735	-0.0201
1.00	-1.0000	0	0	-0.0009	0.0323	-0.9656	0.0344	-0.0096

7) 第 1 種間彎曲率影響線 (x = 第 1 支點よりの距離)

$\frac{a}{l}$	$M_x = M_x' + M_x'' = \frac{M_1}{l} x + \frac{x}{l} (l-x)$ (係數: 1)				$M_x = M_x' + M_x'' = \frac{M_1}{l} x + \frac{x}{l} (l-x)$ (係數: 1)			
	第 1 種間に荷重がある場合		第 2 種間に荷重がある場合		第 3 種間に荷重がある場合		第 4 種間に荷重がある場合	
	x 點の左	x 點の右	荷重がある場合	荷重がある場合	荷重がある場合	荷重がある場合	荷重がある場合	荷重がある場合
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	0.0244	-0.0038	0.0223	-0.0007	0.0180	-0.0111	0.0029	-0.0009
0.10	0.0490	-0.0162	0.0442	-0.0012	0.0362	-0.0202	0.0052	-0.0016
0.15	0.0737	-0.0290	0.0657	-0.0017	0.0545	-0.0275	0.0071	-0.0021
0.20	0.0987	-0.0416	0.0869	-0.0020	0.0733	-0.0332	0.0086	-0.0026
0.25	0.1240	-0.0539	0.1077	-0.0024	0.0924	-0.0372	0.0096	-0.0030
0.30	0.1497	-0.0659	0.1282	-0.0026	0.1121	-0.0399	0.0103	-0.0032
0.35	0.1759	-0.0780	0.1485	-0.0027	0.1323	-0.0412	0.0107	-0.0034
0.40	0.2024	-0.0891	0.1686	-0.0028	0.1533	-0.0414	0.0105	-0.0035
0.45	0.2290	-0.0994	0.1884	-0.0028	0.1751	-0.0405	0.0105	-0.0035
0.50	0.2560	-0.1090	0.2080	-0.0027	0.1979	-0.0387	0.0101	-0.0034
0.55	0.2834	-0.1179	0.2284	-0.0026	0.2217	-0.0362	0.0094	-0.0032
0.60	0.3113	-0.1264	0.2485	-0.0024	0.2466	-0.0330	0.0096	-0.0030
0.65	0.3398	-0.1345	0.2681	-0.0022	0.2723	-0.0293	0.0096	-0.0028
0.70	0.3689	-0.1421	0.2874	-0.0020	0.3000	-0.0252	0.0096	-0.0025
0.75	0.3986	-0.1494	0.3064	-0.0017	0.3294	-0.0209	0.0094	-0.0021
0.80	0.4289	-0.1563	0.3251	-0.0014	0.3600	-0.0164	0.0093	-0.0017
0.85	0.4598	-0.1629	0.3435	-0.0010	0.3922	-0.0117	0.0082	-0.0013
0.90	0.4913	-0.1691	0.3616	-0.0007	0.4262	-0.0077	0.0070	-0.0009
0.95	0.5235	-0.1750	0.3794	-0.0004	0.4619	-0.0037	0.0050	-0.0005
1.00	0.5564	-0.1806	0.3969	0	0.5000	0	0	0

第 5 章 平面結構

43. 概説 平面上に棒を繼いで出來た構造を平面結構と云ふ。棒は直壓力又は直張力のみを支ふ、結合點(格點)は鉸の如く自由に廻轉し得るものとし、荷重はすべて結合點のみに働くものと思ふ。斯の如き平面結構は結合點の數を n とすれば、少くとも $m = 2n - 3$ 個以上の棒の數がなければ形を保持出來ない。 m 個の棒を組合せる結構を單結構、 m 個以上の棒をもつものを冗材をもつ結構と呼ぶ。

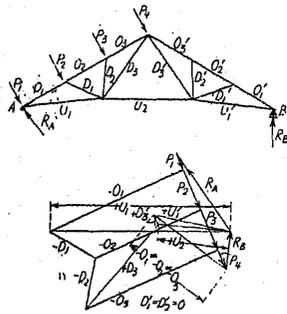
第 1 節 靜荷重をうけたる平面結構

44. クレモナの圖式解法 靜荷重載荷の場合の平面結構の解き方は主として圖式解法による事多く、解析的に解く事稀なり。

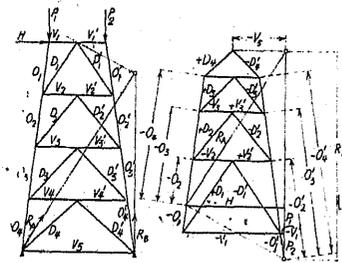
三角形結構の場合は力圖を畫く事に依つて解き得らる。力圖は次の如き條件の下に畫く。 1) 結構は基本となるべき三角形より始まり各格點は既に形成せられたる三角網に順次 2 本の棒にて閉ぢられたるもので従つてどの 2 つの棒も切りちがふ事がない。 2) 外力(荷重及反力)は格點にのみに働く。

結構の部材應力を求めるには先づ反力を求める、之も圖式的に行ふ。 1 つの結合點に於て 2 個以外の棒の力が知られてゐれば未知の 2 個は力多角形を閉多角形とすることから其の大き及び方向が判る。力多角形は 2 個の棒の集る結合點より始め棒の應力を求め、順次に隣の結合點に進んで行く。

この解法には結構網は出來るだけ大きく畫き力圖は出來るだけ小さく畫く。第 94 圖及第 95 圖には 2 つの例題を解いてある、[+] は應張力 [-] は應壓力を表はす。

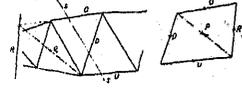


第 94 圖



第 95 圖

45. クルマンの圖式解法 第 96 圖に於て s-s なる斷面を施し 3 つの部材 O, D, U を切り、未知の部材應力 O, D, U とで平衡四邊形を畫く、之をクルマンの四邊形と云ふ。 R は斷面 s-s の左に働く外力の合力である。先づ O と R との交りを求め R を O と ρ とに分解する。次に ρ を D 及び U に分解する、かくて O, D, U を求むる事を得。 O, D, U の方向は R の方向を知られば四邊形を閉合せせる様にとれば求めらる。第 96 圖に於ては O, D は壓力, U は張力を受く。

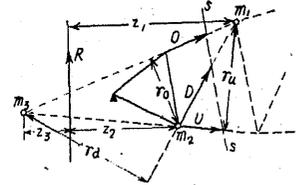


第 96 圖

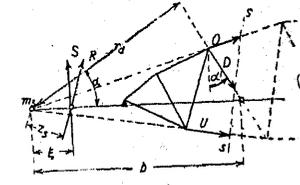
46. リッターの切斷法 三つの部材を s-s にて切斷する。 3 つの部材 O, D 及び U の各 2 個宛の交點 m_1, m_2, m_3 を求める。此の點をリッターの力率點と稱す。斷面の左の外力の總べての合力を R とし、交點よりこの合力までの距離を夫々 z_1, z_2, z_3 とする。各力率點に力率をとれば (第 97 圖),

$$Rz_1 - Ur_u = 0, \quad Rz_2 + Or_o = 0, \quad -Rz_3 - Dr_d = 0$$

之れより部材應力 O, D, U を求むる事を得 (O, D, U を始め張力と假定して式を立てる)。即ち



第 97 圖



第 98 圖

$$U = R \frac{z_1}{r_u}, \quad O = -R \frac{z_2}{r_o}, \quad D = -R \frac{z_3}{r_d} \dots \dots \dots (1)$$

茲に U は張力, O 及び D は壓力を表はす。

今 $Rz_1 = M_o =$ (下弦 U に對するリッターの力率點 m_1 に對する外力の力率) と置き更に $Rz_2 = M_u =$ (上弦 O に對するリッターの力率點 m_2 に對する外力の力率) と置けば (第 98 圖),

$$U = \frac{M_o}{r_u}, \quad O = -\frac{M_u}{r_o} \dots \dots \dots (2)$$

又斜材 (又は垂直材) に對しては第 98 圖の如く

$$Rz_3 = S\xi, \quad D = \frac{S\xi}{r_d}$$

茲に S は $s-s$ 断面の剪力である。 $r_a = b \cos \alpha$ なる故に

$$Q = \frac{S}{\cos \alpha} \frac{\xi}{b}$$

若し切断面に於て上、下兩弦が平行ならば m_0 は無限大の距離に追ひやられ

$\frac{\xi}{b} = 1$ となる故

$$D = \frac{S}{\cos \alpha}$$

茲に S は合力 R の弦材に垂直なる方向の分力である。

第 2 節 移動荷重 (影響線)

結構桁の影響線の一般的の求め方を説明する事は仲々厄介である。桁の形状種類と配置等 (ゲルバー構, 三絞拱, 單構等) に依つて一々その場合のものを求めなければならぬ。單構の場合の部材の最大應力を求むるに影響線を用ふるより反力多角形を用ふる方が便利である。

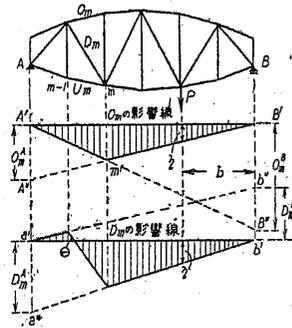
47. 二支點單構 1) ミューラー-プレスラウの方法 弦部材の應力は (2) により

$$U = \frac{M_0}{r_u}, \quad O = -\frac{M_u}{r_o}$$

なる故に彎曲率の影響線を r にて割りたるものを求むれば宜し。第 99 圖には O_m の影響線を示す、即ち部材 D_m と部材 U_m との交點 m の彎曲率の影響線を m 點より上弦 O_m 迄の距離にて割りたるものなり。又次の如くミューラー-プレスラウの方法もある。 m 點より右に荷重を乗せ $R_A = 1$ なる如き反力を生ぜしむる様になしその場合の上弦 O_m に生ずる應力を O_m^A とし $A'A'' = O_m^A$

にとり $A''B'$ を結ぶ。次に $(m-1)$ 點の左に荷重を乗せ $R_B = 1$ なる如き反力を生ぜしむる様になし上弦 O_m に生ずる應力を O_m^B とし、 B の直下に $B'B'' = O_m^B$ にとり $A'B''$ を結ぶ。然らば $A'm'B'$ が求むる影響線となるべし。何となれば今右支點より b の距離に荷重が來る場合には左支點の反力は $R_A = \frac{P}{l} b$ で m 點の左には外力としては R_A のみなる故に上弦 O_m の應力は $O_m = R_A O_m^A$ である。即ち

$$O_m = R_A O_m^A = P \frac{b}{l} O_m^A$$



第 99 圖

となる。然るに P の直下に於て $A'B'$ 及び $A''B'$ に挟まれたる長さ η は $\eta = \frac{b}{l} O_m^A$ なるを以て $O_m = P\eta$ となる。

腹部材 D_m の影響線も之と全く同様にして求むる事を得。 m 點の右に載荷し $R_A = 1$ を生ずべき様になしたる時斜材 D_m の應力を D_m^A 、 $(m-1)$ 點より左に載荷し $R_B = 1$ を生ずべき様になしたる時斜材 D_m の應力を D_m^B とし、 $D_m^A = a'a''$ 、 $D_m^B = b'b''$ にとり所要の影響線を第 99 圖の如く求むる事を得。

2) 反力多角形用ふる直接解法 弦部材の最大應力を $\max G$ とすればその弦に對する他の部材の交點 m に對する最大彎曲率を求むれば直ちに次の式にて最大應力を求むる事を得。

$$\max G = \frac{\max M}{r}$$

r は考へてゐる弦材と交點 m との距離である。若し構桁の上、下弦が平行ならば $r = h =$ 構桁の高さ となる。

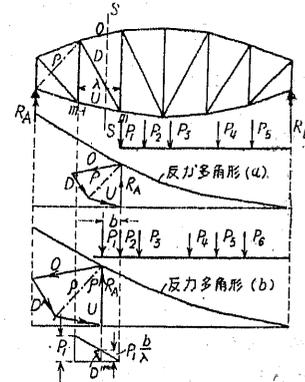
腹部材の應力は次の如く求むる事を得。 30. 2) 4) に説明せる反力多角形を用ふ。第 100 圖 (a) に示す如く反力 R_A を求む。此の點に於てクルマンの四邊形に依り力の分解をなし斜材の應力 D 又は垂直材の應力 V を求む。 P_1 が m 點より b だけ左に進行し、考へてゐる徑間 $(m-1) \sim m$ の間迄達したる場合には (b) 圖の如く R_A より D' を求む。然し P_1 の分力が $(m-1)$ 點に R_A と反對方向に作用する故に、この $P_1 \frac{b}{\lambda}$ による影響を差引かなければならぬ。之を D'' とすれば

$$\max D = D' - D''$$

となる。かくして 絕對最大 D を求むる事を得。

平行構桁ならば腹部材の應力は $\max D = R_A \sec \phi$ であるから $\max R_A$ を求むれば直ちに $\max D$ を求むる事を得。但し ϕ は腹部材と鉛直線との挟む角である。故に垂直材の應力 V は $V = R_A$ である。

48. ゲルバー-結構。ゲルバー-結構に於て動荷重に依て起る最大部材應力を求むるには影響線を利用する事が便利である。平行弦の場合には部材應力の影響線は直ちに彎曲率及び剪力の影響線より求むる事を得、即ち h を結構の高さとすれば弦材の應力は M/h にて表はされ、又 ϕ を斜材の鉛直線となす角とすれば腹部材の應力は $S \sec \phi$ にて表はさる。



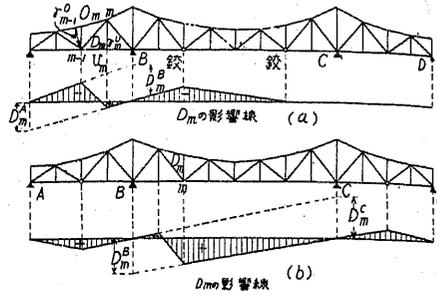
第 100 圖

平行弦でない場合には各弦材の應力は

$$O_m = M_{m-1} / r_{m-1}^0,$$

$$U_m = M_m / r_m^0$$

にて表はさる故に彎曲率の $1/r$ 倍の影響線を求めれば可なり。腹部材の應力 D 及び V は次の如くにして求む。第 101 圖 (a) の如く鉸が中間にある場合に AB

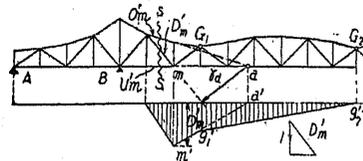


第 101 圖

間に $P=1$ が動く場合は、斜材 D_m の應力は AB を 2 支點單樑と見なして求め得べく第 99 圖と同様に求められる。 $P=1$ が BC 徑間に移動して來た場合影響線は鉸の下にて頂點となる様な三角形を畫く (ゲルバー桁影響線参照)。 150 頁と同様にして鉸が外徑間にある場合にも (b) 圖の如く解く事を得、 D_m^B 及び D_m^C を B 及び C の下にとる即ち BC を單樑と考へる。荷重が外側の徑間に移動せる場合は鉸の下にて頂點を持つ様な三角形を圖の様に作圖すれば宜し。

突桁部に於ける D_m' は第 102 圖の如く求むる事を得、即ち O_m' と U_m' とを延長した交點 a (リッターの力率點) を求める。 m 點に $P=1$ なる荷重來るとき $P=1$ を斜材 D_m' の方向に分解して應力 D_m' を得。更に $P=1$ が右に移動すれば荷重の位置と a との距離を x とすればその P の位置に於ける斜材應力 D_m' は

$$D_m' = \frac{Px}{r_a} = \frac{x}{r_a}$$



第 102 圖

にて與へられる故 m/a' なる影響線の一部を得。然るに荷重が鉸を越して $G_1 G_2$ 徑間に移れば G_1 に與ふる分力をとれば宜しく $g_1' g_2'$ なる一部分を得べし。

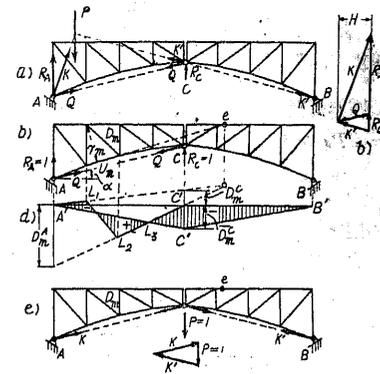
49. 三鉸拱結構 三鉸拱構の弦材の應力の影響線は彎曲率影響線より直ちに次式を利用すれば求められる。

$$O_m \text{ 又は } U_m = M_m / r_m$$

腹部材の應力影響線は次の如くして求められる。今鉸の左の一斜材應力 D_m を求むるに荷重 P が鉸の左にある場合は第 103 圖 (a) (b) の如く反力として K 及び

K' を得 (第 8 章第 2 節), K' は BC の方向に働く。今 K' を C 點に働くものと考へれば結構 AC は外力 P に対して A 點に K 及び C 點に K' なる反力を生じて平衡を保つと考へることを得べし。今 K 及び K' を垂直反力 R_A, R_C 及び互に等しく且つ方向全く反對の反力 Q (AC の方向) に分解すれば求むる

斜材應力 D_m は AC を單樑と考へたる場合に生ずる應力に Q による應力を加算すれば可なる事を知る。 $\max Q$ を與ふる荷重の位置は P が鉸 C 上に来る場合にしてこのとき $Q=K$ となるべし、更に P が順次右に移動し遂に鉸 C を越したる場合には A 點に起る反力 K は常に AC の方向に働き、部材應力 D_m を決定すべき外力としては K のみを考へれば可なり。



第 103 圖

AC を單樑と考へたる場合には前述の方法により (單樑参照), $R_A=1, R_C=1$ の場合に對するクレモナの力多角形より D_m^A 及び D_m^C を求め水平に引いた $A'C'B'$ 線に對し A' 及び C' の處に D_m^A 及び D_m^C をとり $A'L_1L_2C'$ を得。 Q の影響は $Q=H \sec \alpha$ (α は AC 線の水平に對する傾斜角) にして Q に比例する應力は又 H に比例する故に、 Q による應力 D_m の影響線は H のそれの如く C 點の下に頂角を有する三角形なるべし (三鉸拱の H の影響線参照)。 C 點に $P=1$ を荷重させた場合 $\max Q=K$ となり (e 圖) これに對する斜材 D_m の應力をクレモナの多角形より求め $\overline{D_m^C}$ とし $C'C''=\overline{D_m^C}$ として $A'C''B'$ を作れば之が所要の Q による D_m の影響線となるべし。依て前に述べた $A'L_1L_2C'$ と互に符號を考慮して加へ合すれば可なり (第 103 圖 d に於ては Q による D_m は負なり)。故に三鉸拱構斜材 D_m の影響線は第 103 圖 (d) の $A'L_1L_2L_3C''B''L_4A'$ である。應力 D_m の正負の判定はリッターの力率點 e を利用するが便利である。

鉸の右の腹部材の應力影響線は $R_C=1, R_B=1$ の状態に對するクレモナの多角形を用ひて D_m^C, D_m^B を求めて上記の方法を繰返せば可なり。對稱拱の場合は勿論片側だけに就て求むれば足る。

第 6 章 長 柱

第 1 節 オイラーの長柱式

50. 両端鉸支持の長柱 第 104 圖の如き両端鉸支持の長柱の將に挫折せんと

する限界荷重 P は $\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$ の M に C に於ける彎曲率 $M = \pm P\eta$ を入れて得られる。

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = \pm \alpha^2 \eta \quad \text{但し } \alpha^2 = \frac{P}{EJ} \dots\dots (1)$$

棒の剛度 EJ を定數とすれば即ち斷面不變なれば α^2 は x に無關係なる正常數である。故に (1) の解は

$$\eta = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

$$\text{又は } \eta = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \dots\dots (2) \quad \text{第 104 圖}$$

但し A, B は積分常數である。

$x=0$ 及び $x=l$ に於て $\eta=0$ なる條件を満足し、然も A, B 同時に 0 とならざる爲めには (2) 式をとり

$$\sin \alpha l = 0 \quad \text{又は } \alpha l = n\pi \quad \text{但し } n=1, 2, 3 \dots\dots (3)$$

故に
$$P = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EJ \dots\dots (4)$$

$$\eta = B \sin \frac{n\pi}{l} x \dots\dots (5)$$

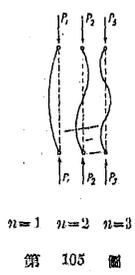
P をオイラーの限界荷重といふ。

今 n に 1, 2, 3 を與へれば

$$n=1: P_1 = \frac{\pi^2}{l^2} EJ,$$

$$n=2: P_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} EJ,$$

$$n=3: P_3 = \frac{9\pi^2}{l^2} EJ.$$



第 105 圖

の如き色々な形で挫折するときの限界荷重を得 (第 105 圖)。

51. 一端自由他端埋込の長柱 第 106 圖に於て $x=0$ で $\eta=0$, 及び $x=l$ で

$$\frac{d\eta}{dx} = 0 \quad \text{故に } \eta = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad \text{に於て}$$

$$\cos \alpha l = 0, \quad \text{又は } \alpha l = (2n-1) \frac{\pi}{2} \dots\dots (6)$$

即ち
$$P = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4 l^2} EJ \dots\dots (7)$$

$$\eta = B \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x \dots\dots (8)$$

今 n に 1, 2, 3 を與へれば (第 107 圖),

$$n=1: P_1 = \frac{\pi^2}{4l^2} EJ, \quad n=2: P_2 = \frac{9\pi^2}{4l^2} EJ,$$

$$n=3: P_3 = \frac{25\pi^2}{4l^2} EJ$$

B に於ける η を η_0 とすれば

$$M_B = P\eta_0 \dots\dots (9)$$

52. 両端埋込の長柱 第 108 圖に於て C 點の彎曲率

$M = -P\eta + M_A$ を (1) に入れて

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \alpha^2 \left(\eta - \frac{M_A}{P} \right) = 0, \quad \text{但し } \alpha^2 = \frac{P}{EJ} \dots\dots (10)$$

故に
$$\eta - \frac{M_A}{P} = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \dots\dots (11)$$

$$x=0 \quad \text{に於て } \eta=0 \quad \text{及び } \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad \text{なる故 } A = -\frac{M_A}{P}, \quad B=0$$

$$x=l \quad \text{に於て } \eta=0 \quad \text{及び } \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad \text{なる故}$$

$$\cos \alpha l = 1, \quad \sin \alpha l = 0 \quad \text{又は } \alpha l = 2n\pi \dots\dots (12)$$

$$\therefore P = \frac{4n^2 \pi^2}{l^2} EJ \dots\dots (13)$$

$$\eta = \frac{M_A}{P} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x \right) \dots\dots (14)$$

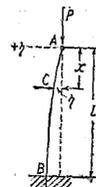
(13) で n に 1, 2, 3 を入れると (第 109 圖)

$$n=1: P_1 = \frac{4\pi^2}{l^2} EJ, \quad n=2: P_2 = \frac{16\pi^2}{l^2} EJ,$$

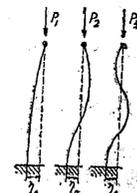
$$n=3: P_3 = \frac{36\pi^2}{l^2} EJ$$

M_A は (14) に於て $x=l/4n$ の點に於ける η の値を η_0 とすれば

$$M_A = P\eta_0 \dots\dots (15)$$



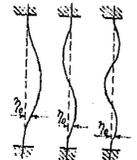
第 106 圖



第 107 圖



第 108 圖



第 109 圖

53. 離心荷重をもつ長柱 第 110 圖の如く P が棒の軸心より a 丈それである場合は

$$M = -P(a + \eta)$$

故に $\frac{d^2\eta}{dx^2} + \alpha^2(a + \eta) = 0$, 但し $\alpha' = \frac{P}{EJ}$ (16)

故に $\eta + a = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ (17)

$x=0, x=l$ で $\eta=0$ なる故 $A=1, a(1 - \cos \alpha l) = B \sin \alpha l$

従つて (17) は $\eta = a \left(\tan \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha x + \cos \alpha x - 1 \right)$ (18)

η の最大値は $\frac{d\eta}{dx} = 0$ より $\tan \alpha x = \tan \frac{\alpha l}{2}$ 又は $x = \frac{l}{2}$

で與へられる。即ち $\max \eta = a \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right)$

此式で分母=0の時 即ち $\alpha l = (2n-1)\pi$ (19)

の時 η は無限大となる。故にオイラーの限界荷重は下の如し。

$$P = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{l^2} EJ$$
 (20)



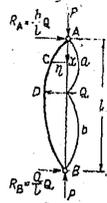
第 110 圖

54. 横より荷重を受けた長柱 第 111 圖の C 點に於ける彎曲率

$$\begin{aligned} M &= -P\eta - \frac{b}{l} Qx & [x < a] \\ &= -P\eta - \frac{b}{l} Qx + Q(x-a) & [x > a] \end{aligned}$$

を (1) に入れて

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^2\eta}{dx^2} &= -P \left\{ \eta + \frac{Qb}{Pl} x \right\} & [x < a] \\ &= -P \left\{ \eta - \frac{Q}{P} \left(x - a - \frac{b}{l} x \right) \right\} & [x > a] \end{aligned}$$
 (21)



第 111 圖

(21) 式の解は $\eta = -\frac{Qb}{Pl} + A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$, 但し $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$

$x=0$ に於て $\eta=0$ なる故 $A=0$ 従て $\eta = -\frac{Qb}{Pl} x + B \sin \alpha x$

上式より同様に $\eta = -\frac{Qa}{Pl}(l-x) + B' \sin \alpha(l-x)$

此の兩式は $x=a$ に於て η 及び $\frac{d\eta}{dx}$ が相等しい

$$\therefore B \sin \alpha a - B' \sin \alpha a = 0, \quad \alpha \left\{ B \cos \alpha a + B' \cos \alpha b \right\} = \frac{Q}{P}$$

これより B, B' を定め

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q}{P} \left\{ \frac{\sin \alpha b \sin \alpha x}{\alpha \sin \alpha l} - \frac{b}{l} x \right\} & [x < a] \\ &= \frac{Q}{P} \left\{ \frac{\sin \alpha a \sin \alpha(l-x)}{\alpha \sin \alpha l} - \frac{a}{l}(l-x) \right\} & [x > a] \end{aligned}$$
 (22)

故にオイラーの限界荷重は

$$\sin \alpha l = 0 \quad \text{又は} \quad \alpha l = n\pi$$
 (23)

で與へられ (3) 式即ち横荷重 Q のなき場合と同一である。

55. オイラーの長柱式の缺點 オイラーによる最小の限界荷重は要するに下式で與へられる。

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$
 (24)

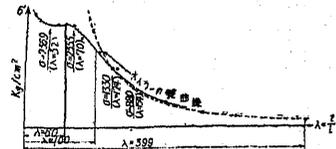
但し此の式で兩端鉸支持の長柱の長さを l とすれば一端定端他端自由のときは l の代りに $2l$ を用ひ兩端定端のときは l の代りに $l/2$ を用ふればよい。(24) 式から限界壓應力を出すとき

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2}$$
 (25)

但し i は柱断面の迴轉半徑

i/i を撓弱率といひ λ にて表はす。(25) は σ と l/i とを座標軸にとれば一種の雙曲線をなすを以つてこれをオイラーの雙曲線といふ。(第 112 圖)。

元來オイラー長柱式は柱が充分に細いものと考へて誘導したものであるから l/i が大きくなければ當てはまらない。例へば鋼柱に於て實驗せる結果は第 112 圖に示す點の如く l/i が充分小さくなれば (凡そ $l/i < 40$) 勿論直應力の場合となつて、もはや長柱の範圍ではないがそれ程小さくなくとも $l/i < 105$ ではオイラー式が適合しないのである。



第 112 圖

第 2 節 長柱の實用式

56. テトマイヤーの實用長柱式 第 112 圖の實驗圖よりテトマイヤーは l/i

が或る値以下の時はオイラーの雙曲線よりも一つの直線式の方が實驗とよく適合する事を發見した。

$$\sigma = a - b(l/i) \dots \dots \dots (26)$$

即ちこれをテトマイヤーの直線式と云ふ。テトマイヤーは(26)式とオイラー式とを併用して長柱断面の凡ての大きさに適用することとした。テトマイヤーは實驗的に各材料につき常數 a, b を定めた。

第 11 表 テトマイヤー實用長柱式

材料	織 弱 率	σ_d は 應 壓 破 壊 強 度. σ_k 長 柱 強 度.
軟 鋼	$l/i < 10$	$\sigma_d = 3.8 \text{ t/cm}^2$
	$l/i = 10 \sim 105$	$\sigma_k = 3.1 - 0.0114 (l/i) \text{ t/cm}^2$
	$l/i > 105$ (オイラーの式)	$\sigma_k = 21220 (i/l)^2 \text{ t/cm}^2$
硬 鋼	$l/i < 10$	$\sigma_d = 6.0 \text{ t/cm}^2$
	$l/i = 10 \sim 90$	$\sigma_k = 3.35 - 0.0062 (l/i) \text{ t/cm}^2$
	$l/i > 90$ (オイラーの式)	$\sigma_k = 22210 (i/l)^2 \text{ t/cm}^2$
鼠 色 鑄 鐵	$l/i < 10$	$\sigma_d = 8.0 \text{ t/cm}^2$
	$l/i = 10 \sim 80$	$\sigma_k = 7.76 - 0.12l/i + 0.00053 (l/i)^2 \text{ t/cm}^2$
	$l/i > 80$ (オイラーの式)	$\sigma_k = 9870 (i/l)^2 \text{ t/cm}^2$
木 材	$l/i < 10$	$\sigma_d = 0.28 \text{ t/cm}^2$
	$l/i = 10 \sim 100$	$\sigma_k = 0.293 - 0.00194 (l/i) \text{ t/cm}^2$
	$l/i > 100$ (オイラーの式)	$\sigma_k = 3530 (i/l)^2 \text{ t/cm}^2$
シマールメチン鋼	$l/i < 10$	$\sigma_d = 6.8 \text{ t/cm}^2$
	$l/i = 10 \sim 91$	$\sigma_k = 3.84 - 0.0136 (l/i) \text{ t/cm}^2$
	$l/i > 91$	$\sigma_k = 21420 (i/l)^2 \text{ t/cm}^2$

次に軟鋼、鑄鋼及び木材につき第11表の式を表にせるものを掲げ、それを使用しての長柱の設計法2種を示す。

第 12 表 テトマイヤー長柱強度*

* プライヒ-メランに依る。

材料	軟			鋼		
	l/i	σ_k	$1/\alpha$	l/i	σ_k	$1/\alpha$
10	2,986	1,273				
11	2,975	1,278	C1	2,405	1,580	111
12	2,963	1,282	O2	2,333	1,588	112
13	2,952	1,287	O3	2,332	1,595	113
14	2,940	1,292	64	2,270	1,603	114
15	2,929	1,297	65	2,359	1,611	115
16	2,918	1,302	66	2,348	1,619	116
17	2,906	1,308	67	2,336	1,627	117
18	2,895	1,313	68	2,325	1,635	118
19	2,883	1,318	69	2,313	1,643	119
20	2,872	1,322	70	2,302	1,651	120
21	2,861	1,328	71	2,291	1,659	121
22	2,849	1,334	72	2,279	1,667	122
23	2,838	1,339	73	2,268	1,676	123
24	2,826	1,345	74	2,256	1,684	124
25	2,815	1,350	75	2,245	1,693	125
26	2,804	1,355	76	2,234	1,701	126
27	2,792	1,361	77	2,222	1,710	127
28	2,781	1,366	78	2,211	1,719	128
29	2,769	1,372	79	2,199	1,728	129
30	2,758	1,378	80	2,188	1,737	130
31	2,747	1,384	81	2,177	1,746	131
32	2,735	1,389	82	2,165	1,755	132
33	2,724	1,395	83	2,154	1,764	133
34	2,712	1,401	84	2,142	1,774	134
35	2,701	1,407	85	2,131	1,783	135
36	2,690	1,413	86	2,120	1,793	136
37	2,678	1,419	87	2,108	1,803	137
38	2,667	1,425	88	2,097	1,812	138
39	2,655	1,431	89	2,085	1,822	139
40	2,644	1,437	90	2,074	1,832	140
41	2,633	1,443	91	2,063	1,842	141
42	2,621	1,450	92	2,051	1,853	142
43	2,610	1,456	93	2,040	1,863	143
44	2,598	1,462	94	2,028	1,873	144
45	2,587	1,469	95	2,017	1,884	145
46	2,576	1,475	96	2,006	1,895	146
47	2,564	1,482	97	1,994	1,906	147
48	2,553	1,489	98	1,983	1,917	148
49	2,541	1,495	99	1,971	1,928	149
50	2,530	1,502	100	1,960	1,939	150
51	2,519	1,509	101	1,949	1,950	151
52	2,507	1,516	102	1,937	1,962	152
53	2,496	1,523	103	1,926	1,973	153
54	2,484	1,530	104	1,914	1,985	154
55	2,473	1,537	105	1,903	1,997	155
56	2,462	1,544	106	1,889	2,012	156
57	2,450	1,551	107	1,853	2,050	157
58	2,439	1,558	108	1,819	2,089	158
59	2,427	1,566	109	1,786	2,128	159
60	2,416	1,573	110	1,754	2,167	160
						161
						162
						163
						164
						165
						166
						167
						168
						169
						170
						171
						172
						173
						174
						175
						176
						177
						178
						179
						180
						181
						182
						183
						184
						185
						186
						187
						188
						189
						190
						191
						192
						193
						194
						195
						196
						197
						198
						199
						200
						201
						202
						203
						204
						205
						206
						207
						208
						209
						210
						4,642
						4,700
						4,758
						4,816
						4,875
						4,935
						4,994
						5,054
						5,115
						5,175
						5,236
						5,298
						5,360
						5,422
						5,484
						5,547
						5,610
						5,674
						5,738
						5,802
						5,867
						5,932
						5,997
						6,063
						6,129
						6,195
						6,262
						6,329
						6,397
						6,465
						6,533
						6,602
						6,670
						6,740
						6,809
						6,879
						6,950
						7,021
						7,092
						7,163
						7,235
						7,307
						7,380
						7,452
						7,526
						7,599
						7,673
						7,748
						7,822
						7,897

材料	$\frac{l}{i}$	σ_k			α			$\frac{l}{i}$	σ_k			α						
		σ_k	α	σ_k	α	σ_k	α		σ_k	α	σ_k	α	σ_k	α				
鼠色鑄鐵	10	6,613	0,827	47½	3,256	0,407	82½	1,450	0,181	135	0,542	0,068						
	12½	6,343	0,793	50	3,085	0,386	85	1,366	0,171	140	0,504	0,063						
	15	6,079	0,760	52½	2,921	0,365	87½	1,289	0,161	145	0,470	0,059						
	17½	5,822	0,728	55	2,763	0,345	90	1,218	0,152	150	0,439	0,055						
	20	5,572	0,697	57½	2,612	0,327	92½	1,154	0,144	155	0,411	0,051						
	22½	5,328	0,666	60	2,468	0,309	95	1,094	0,137	160	0,386	0,048						
	25	5,091	0,636	62½	2,330	0,291	97½	1,038	0,130	165	0,363	0,045						
	27½	4,861	0,608	65	2,199	0,275	100	0,987	0,123	170	0,342	0,043						
	30	4,637	0,580	67½	2,075	0,259	105	0,895	0,112									
	32½	4,420	0,553	70	1,957	0,245	110	0,816	0,102									
35	4,209	0,526	72½	1,846	0,231	115	0,746	0,093										
37½	4,005	0,501	75	1,741	0,218	120	0,688	0,086										
40	3,808	0,476	77½	1,643	0,205	125	0,632	0,079										
42½	3,617	0,452	80	1,552	0,194	130	0,584	0,073										
45	3,433	0,429																
木	10	274	0,979	47½	201	0,718	85	128	0,457	145	47	0,168						
	12½	269	0,961	50	196	0,700	87½	123	0,439	150	44	0,167						
	15	264	0,943	52½	191	0,682	90	118	0,421	155	41	0,166						
	17½	259	0,925	55	186	0,664	92½	114	0,405	160	38	0,166						
	20	254	0,907	57½	181	0,646	95	109	0,387	165	36	0,129						
	22½	249	0,889	60	177	0,628	97½	104	0,371	170	34	0,121						
	25	244	0,871	62½	172	0,614	100	99	0,353	175	32	0,114						
	27½	240	0,857	65	167	0,596	105	90	0,321	180	30	0,107						
	30	235	0,839	67½	162	0,578	110	82	0,292	185	29	0,104						
	32½	230	0,821	70	157	0,561	115	75	0,268	190	27	0,096						
材	35	225	0,804	72½	152	0,543	120	69	0,246	195	26	0,093						
	37½	221	0,787	75	147	0,525	125	63	0,225	200	25	0,089						
	40	216	0,771	77½	143	0,511	130	58	0,207									
	42½	211	0,754	80	138	0,493	135	54	0,193									
	45	206	0,736	82½	133	0,475	140	50	0,179									

即ち 1) 與へられる荷重に對して先づ斷面を假定しその斷面の耐へ得る長柱強度を求め、それを安全率で割りたるものが平均壓力(與へられたる荷重を假定斷面にて割りたるもの)より大なる如く設計するのである。即ち P =與へられたる荷重、 l =挫折長、 A =假定せる斷面、 i =假定斷面の最小迴轉半径、 n =安全率とすれば表より l/i に相當する σ_k を求め

$$\sigma = P/A < \sigma_k/n$$

なる如く斷面を定むるのである。

2) σ_a を材料の應壓破壊強度とすればこれは材料につき一定値を有す。又 σ_k は長柱強度で l/i によつて決定される。 σ_k/σ_a は l/i の函數である。今 $\sigma_k/\sigma_a = \alpha$ と置き σ_c を許容應壓強度とすれば $\alpha\sigma_c$ は安全率を含んだ長柱の耐へ得る壓力強度である。

$$\frac{P}{A} \geq \alpha\sigma_c \quad \text{即ち} \quad \frac{1}{\alpha} \frac{P}{A} \geq \sigma_c$$

なる如き長柱は安全である。 $1/\alpha$ を挫折係數と稱す。この方法は挫折係數を用ふるもので、先づ斷面を與へて A 及び l/i を求め l/i に相等すべき $1/\alpha$ の價を表より求め $\frac{1}{\alpha} \frac{P}{A}$ を計算して、材料の許容壓力と比較して小なる事を確むるのである。この方法は短柱の設計とよく似てゐる、唯係數を乗ずる事のみ異なる。

57. エングツセル及びカルマンの長柱式 エングツセル及びカルマンはあまり長からざる柱は挫折する際には大なる彎曲をなし、且つ應力は既に弾性限を超

えておるといふ新見地より弾性係數 E の代りに縁維應力に應ずる點の接線係數を用ひ、伸張部に於て T_1 壓縮部に於て T_2 として下の式を出した(第 113 圖)。

$$(T_1 J_1 + T_2 J_2) \frac{d^2 \eta}{dx^2} = M \dots (27)$$

但し J_1, J_2 は柱の斷面の中立軸

についての伸張部及び壓縮部の惰性率である(第 114 圖)。

或は $T_1 J_1 + T_2 J_2$ を柱の全斷面の中立軸に對する惰性率 J で除して

$$T_1 \frac{J_1}{J} + T_2 \frac{J_2}{J} = T \dots (28)$$

T を挫折係數と呼ぶことがある。又は

$$T/E = \tau \dots (29)$$

と置き τ を挫折係數ともいふ。 T 又は τ を用ひて (28) 式を書けば

$$TJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} = M \quad \text{又は} \quad \tau EJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} = M \dots (30)$$

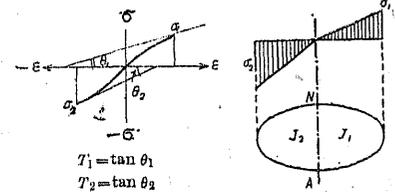
となる。故にオイラーの長柱式に於て EJ の代りに τEJ を用ひればエングツセル及びカルマンの式を得。此の τ は斷面の形狀大さ及び σ_1, σ_2 の値によつて變る(第 115 圖)。故に限界應力 σ と縁弱率 l/i とを兩軸とする曲線も複雑なる形をなす(第 116 圖)。

此の曲線は l/i の大なる値では勿論オイラーの雙曲線と一致する。

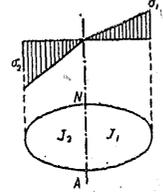
第 7 章 剛 構

第 1 節 假想働の原理及び相互反作用の定理

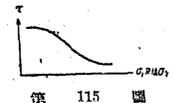
58. 假想働の原理 彈性體に任意の假想外力 \bar{Q} を加へ平衡を保たしむる時、彈性體に $\bar{\sigma}$ なる應力が起る。力 \bar{Q} の作用點に起る變位を δ とし彈性體の彈性變位を ϵ とする、 δ と ϵ とは彈性體の可能なる變位であると云ふ條件に支配さ



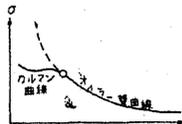
第 113 圖



第 114 圖



第 115 圖



第 116 圖

れる以外全く任意(假想的)である。依て假想働の原理として次式が成立する。

$$\sum \bar{Q}\delta = \int \bar{\sigma}\epsilon dv \dots\dots\dots (1)$$

\sum は外力すべてに就て加へ合すべきことを示し、積分の符號は彈性體全部に及ぼすべきを示す。

$\sum \bar{Q}\delta$ を外力に依る假想働, $\int \bar{\sigma}\epsilon dv$ を内力に依る假想働(又は假想變形働)と云ふ。(1)式は次の如く云ふことを得。平衡が保たれるならば外力に依る假想働は内力に依る假想働に等し。 $\bar{Q}, \bar{\sigma}$ は δ 及び ϵ と全く無關係に採ることが出来る。 $\bar{Q}, \bar{\sigma}$ は適當なる平衡力群を形成する假想荷重に採り、 δ と ϵ とは實際の荷重及び溫度變化に依つて起される實際變位と考へてよい。

結構の如く部材は全部鉸節と考へられ部材は單に張力又は壓力のみを受くる場合には

$$\sum \bar{Q}\delta = \int \bar{\sigma}\epsilon dv = \sum \frac{\bar{S}s_s}{EA} + \sum \bar{S}\alpha_t t_s \dots\dots\dots (2)$$

茲に E =彈性係數、 s =部材長、 A =部材斷面積、 \bar{S} =部材の \bar{Q} により起されたる假想壓力又は張力、 S =實際の荷重により起されたる部材の壓力又は張力、 α_t =溫度膨張係數、 t =溫度變化。

之は $\bar{\sigma} = \bar{S}/A, \epsilon = S/(AE) + \alpha_t t, dv = A ds$ なる故に $\int \bar{\sigma}\epsilon dv$ より直ちに右邊を得るのである。

又拱の如く \bar{M}, \bar{N} を假想外力 \bar{Q} によつて起されたる假想彎曲率及び假想軸壓力、 M, N を實際に起る彎曲率及び軸壓力とし剪力の影響を無視するときは假想働の原理によつて

$$\int \bar{\sigma}\epsilon dv = \int \frac{\bar{N}N}{EA} ds + \int \frac{\bar{M}M}{EJ} ds + \int \bar{N}\alpha_t t ds.$$

を得。之は

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{A} + \frac{\bar{M}\eta}{J}, \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_t t = \frac{N}{E}\left(\frac{N}{A} + \frac{M\eta}{J}\right) + \alpha_t t, \quad dv = A ds$$

なる關係を知れば左邊より直ちに右邊を得。

依て (1) 式は次の如く書き換ふことを得。

$$\sum \bar{Q}\delta = \int \frac{\bar{N}N}{EA} ds + \int \frac{\bar{M}M}{EJ} ds + \int \bar{N}\alpha_t t ds \dots\dots\dots (3)$$

但し J は斷面の慣性率其の他は (2) に同じ。

59. 單位載荷 1 δ_m なる仕事をなすに必要な荷重群を δ_m なる變位の單位載荷と云ふ。 δ_m は 1 點の變位、2 點間の距離變化、直線の回轉又は 1 對の直線

の挟む角の變化等と考ふことを得(第 117 圖)。

1) 一點の單位載荷 (a): δ_m は m 點が mm' の方向に於ける變位。2) 一對の點の單位載荷 (b):

δ_m は m 及び m' の距離變化。3) 直線の單位載荷 (c): δ_m は直線 mm' の廻轉されたる角度(弧長)。

4) 一對の直線の單位載荷 (d):

δ_m は mm' 及び nn' なる 2 直線の挟む角 ϕ の變化を表はす。

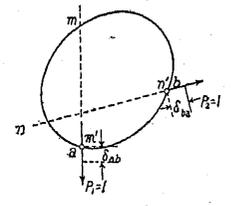


δ には通常 2 つの添字を附し例へば δ_{mn} は n 點に於ける荷重によつて m 點に起されたる變位(伸長、廻轉等)を示す。 δ_{mt} は溫度變化 t によつて m 點に起されたる變位(伸長、廻轉等)を示す。

60. 相互作用の定理 第 118 圖に於て b 點に nn' の方向に作用する單位載荷によつて a 點に起る mm' の方向の變位は a 點に mm' の方向に單位荷重を加へた場合 b 點に起る nn' の方向の變位に等し。即ち

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \dots\dots\dots (4)$$

之をマックスウェル-ベティの相互作用の原理と云ふ。



第 2 節 假想働の原理による剛構の解法

61. 概説 n 次の不靜定構造物の n 個の不靜定量を X_1, X_2, \dots, X_n とす。その不靜定量の撰擇はそれを 0 に置くことによつて残りの量にて安定且靜定なる構造を形成するものを以てする。

C, M, N, S を不靜定構造物の反力、彎曲率、軸壓力(又は張力)、及び剪力。 C_0, M_0, N_0, S_0 を不靜定量全部を 0 と置き残りの靜定構造に於て外力(荷重) P によつて定まる靜定反力、彎曲率、軸壓(張)力及び剪力。 C_k, M_k, N_k, S_k を $P=0$ にして $X_k = -1$ のみか作用せる場合の反力、彎曲率、軸力及び剪力とす。

獨立作用の原理により

$$\left. \begin{aligned} C &= C_0 - C_1 X_1 - C_2 X_2 \dots - C_k X_k \dots - C_n X_n, \\ M &= M_0 - M_1 X_1 - M_2 X_2 \dots - M_k X_k \dots - M_n X_n, \\ N &= N_0 - N_1 X_1 - N_2 X_2 \dots - N_k X_k \dots - N_n X_n, \\ S &= S_0 - S_1 X_1 - S_2 X_2 \dots - S_k X_k \dots - S_n X_n. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

第 13 表 M_i 及び M_k の彎曲率圖

番 號	彎 曲 率 圖	番 號	彎 曲 率 圖	番 號	彎 曲 率 圖
(1)		(6)		(11)	
(2)		(7)		(12)	
(3)		(8)		(13)	
(4)		(9)		(14)	
(5)		(10)		(15)	
				(16)	
				(17)	

第 14 表 $\int M_i M_k ds$ 表

(i) (k)	$\int M_i M_k ds$	(i) (k)	$\int M_i M_k ds$
(1) (1)	$\frac{l}{3}(a^2 + ab + b^2) = l\left(h^2 + \frac{d^2}{3}\right)$	(1) (5)	$\frac{la_2}{6}(b-a)$
(1) (2)	$\frac{l}{6}[\alpha(2a_1 + b_1) + b(2b_1 + a_1)]$ $= \frac{l}{6}[a_1(2a + b) + b_1(2b + a)]$ $= l\left(hh_1 + \frac{da_1}{3}\right)$ $= \frac{l}{6}(aa_1 + 4hh_1 + bb_1)$	(1) (6)	$-\frac{lb_2}{6}(b-a)$
		(1) (7)	$\frac{h_1}{2}\left(lh - \frac{2de}{3}\right)$ $= \frac{h_1}{6}[a(l+w) + b(l+v)]$
		(1) (8)	$\frac{hh_2l}{2}$

(i) (k)	$\int M_i M_k ds$	(i) (k)	$\int M_i M_k ds$
(1) (9)	$\frac{2fhl}{3}$	(3) (10)	$\frac{cl\alpha_2}{12}$
(1) (10)	$\frac{cl}{12}(3b + a)$	(3) (11)	$\frac{c_1la_2}{4}$
(1) (11)	$\frac{c_1l}{12}(3a + b)$	(3) (12)	$\frac{la_2}{6}(a + 2h)$
(1) (13)	$l\left(hh_1 + \frac{da_1 - f_1h}{3}\right)$	(3) (14)	$\frac{a_2l}{3}(a_1 + f)$
	$= \frac{l}{6}(aa_1 + 4hh_1 + bb_1)$	(3) (15)	$\frac{a_2fl}{4}$
(1) (14)	$\frac{l}{6}[a_1(2a + b) + 4f_1h]$	(3) (17)	$\frac{a_2c_2l}{5}$
(1) (15)	$\frac{fl}{6}(b + 3h) = \frac{fl}{12}(3a + 5b)$	(4) (7)	$\frac{h_1b_2}{6}(l + v)$
(1) (16)	$\frac{kv}{2}\left(a + \frac{2vd}{3l}\right)$	(4) (12)	$\frac{lb_2}{6}(b + 2h)$
(1) (17)	$\frac{c_2l}{2}(4a + b)$	(4) (14)	$\frac{lb_2}{6}(a_1 + 2f)$
(3) (3)	$\frac{la_2^2}{3}$	(4) (15)	$\frac{5b_2fl}{12}$
(3) (4)	$\frac{la_2b_2}{6}$	(4) (16)	$\frac{kb_2r^2}{6l}$
(3) (5)	$\frac{la_2a_3}{6}$	(4) (17)	$\frac{b_2c_2l}{20}$
(3) (6)	$-\frac{la_2b_2}{6}$	(5) (5)	$\frac{1}{3}a_2^2l$
(3) (7)	$\frac{h_1a_2}{6}(l + w)$	(5) (6)	$-\frac{a_2b_2l}{3}$
(3) (8)	$\frac{h_2a_2l}{4}$	(5) (7)	$\frac{a_2h_2c}{3}$
(3) (9)	$\frac{fa_2l}{3}$		

(i) (k)	$\int M_i M_k ds$	(i) (k)	$\int M_i M_k ds$
(5) (10)	$-\frac{la_0 c}{6}$	(9) (10)	$\frac{cfl}{5}$
(5) (15)	$-\frac{la_0 f}{6}$	(9) (16)	$\frac{f k v^2}{3l^2} (l+v)$
(5) (17)	$\frac{3la_0 c_2}{20}$	(10) (10)	$\frac{c^2 l}{5}$
(7) (7)	$\frac{h_1^2 l}{3}$	(10) (11)	$\frac{c c_1 l}{30}$
(7) (8)	$\frac{h_1 h_2 l}{2v} \left(\frac{l}{2} - \frac{2v^2}{3l} \right)$	(10) (16)	$\frac{c k v^2}{12l^2}$
(7) (9)	$\frac{l f h_1}{3} \left(1 + \frac{v v}{l^2} \right)$	(11) (16)	$\frac{k v c_1}{12l^2} (6l^2 - 4lv + v^2)$
(7) (10)	$\frac{h_1 c}{12} \left(3v + \frac{v^2}{l} \right)$	(12) (12)	$l \left[h^2 + \frac{d^2 - 2fh}{3} + \frac{f^2}{5} \right]$
(7) (15)	$\frac{h_1 f}{12} \left(3l + 3v - \frac{v^2}{l} \right)$	(12) (13)	$l \left[h h_1 + \frac{d d_1 - f h_1 - f_1 h}{3} + \frac{f f_1}{5} \right]$
(8) (9)	$\frac{5f h_2 l}{12}$	(12) (17)	$\frac{c_2 l}{5} \left(a + \frac{b}{4} + \frac{2f}{3} \right)$
(9) (9)	$\frac{8f^2 l}{15}$	(17) (17)	$\frac{c_2^2 l}{7}$

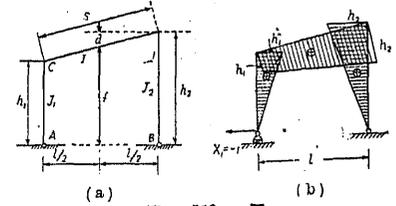
62. 鉸支點の門構 1) 一般式 1次の不静定構造物である (第119圖參照).

今 A 支點の水平反力を不静定量 X_1 に選びこの X_1 を求むれば宜し. X_1 の 1 次式として假想働の原理より次式を得.

$$\delta_1 + \sum C_1 \Delta c = \left[\int \frac{M_0 M_1}{EJ} ds + \int \frac{N_0 N_1}{EA} ds + \int N_1 \alpha_t ds \right] - X_1 \left[\int \frac{M_1^2}{EJ} ds + \int \frac{N_1^2}{EA} ds \right]$$

M_0 及び M_1 は (b) 圖の如き静定構造に於て夫々荷重及び $X_1 = -1$ のみ作用せ

る場合の彎曲率である. 温度變化なく又軸力の影響を無視すれば右邊は簡單になる. 左邊は支點は移動せざる故當然 0 となるべきにより X_1 の式として



$$X_1 = \frac{\int \frac{M_0 M_1}{EJ} ds}{\int \frac{M_1^2}{EA} ds}$$

今任意の J_c を撰び右邊の分母子を計算すれば

$$\int \frac{M_0 M_1}{EJ} ds = \int \frac{M_0 M_1}{EJ_c} \frac{J_c}{J} ds = \frac{1}{EJ_c} \int M_0 M_1 ds' = \frac{1}{EJ_c} \delta_{01} *$$

$$\int \frac{M_1^2}{EJ} ds = \int \frac{M_1^2}{EJ_c} \frac{J_c}{J} ds = \frac{1}{EJ_c} \int M_1^2 ds' = \frac{1}{EJ_c} \delta_{11} *$$

但し $ds' = ds \frac{J_c}{J}$ 従て一般に $s' = s \frac{J_c}{J}$, $h' = h \frac{J_c}{J}$, $v' = v \frac{J_c}{J}$ である.

従て
$$X_1 = \frac{\int M_0 M_1 ds'}{\int M_1^2 ds'}$$

δ_{01} は荷重が與へられれば計算出来る. δ_{11} は荷重には無關係にして (b) 圖より第14表を用ひて計算するのである. (b) 圖は (a) 圖を静定構造と考へ $X_1 = -1$ なる外力のみを加へた場合の彎曲率分布圖である.

$$\delta_{11} = \frac{h_1^2}{3} h_1' \dots \dots \dots \text{[左柱に對して表の (3)(3)]}$$

$$+ \frac{8}{3} (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \dots \dots \dots \text{[桁に對して表の (1)(1)]}$$

$$+ \frac{h_2^2}{3} h_2' \dots \dots \dots \text{[右柱に對して表の (3)(3)]}$$

但し $h_1' = h_1 \frac{J}{J_1}$, $h_2' = h_2 \frac{J}{J_2}$, (J_c として桁の惰性率 J を撰ぶ).

又
$$\delta_{11} = S \left(f^2 + \frac{d^2}{3} \right) + \frac{h_1^2 h_1'}{3} + \frac{h_2^2 h_2'}{3}$$

* 本例題に於て $\delta_{01} = \int M_0 M_1 ds'$, $\delta_{11} = \int M_1^2 ds'$ とおきたる故に δ_{01} , δ_{11} は變位の EJ_c 倍を表はす.

2) 特種荷重の場合 次に各種の荷重を與へて

δ_{01} を解く.

1) 右の突桁に P なる集中荷重を荷せる場合には第 120 圖の如き彎曲率分布をなす.

$\delta_{01} = 0 \dots \dots \dots$ [左の柱に對して]

$-\frac{Pes}{6}(2h_2+h_1)$ [桁に對して表の (1)(3)]

$-\frac{h_2'}{3}P_w h_2^2 \dots$ [右の柱に對して表の (1)(3)]

に於て $b=0$ とせる場合]

$\therefore X_1 = \frac{\delta_{01}}{\delta_{11}} = \frac{-\left[\frac{Pes}{6}(2h_2+h_1) + \frac{h_2'}{3}h_2^2 P_w\right]}{S\left(f^2 + \frac{d^2}{3}\right) + \frac{h_1^2 h_1'}{3} + \frac{h_2^2 h_2'}{3}}$

但し $f = \frac{h_1+h_2}{2}$

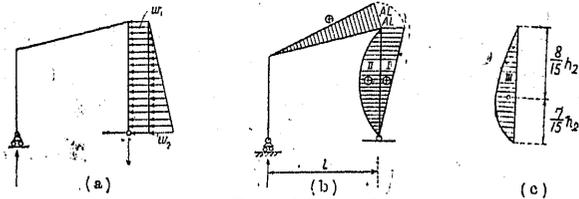
X_1 を知れば各端力率は

$M_C = -X_1 h_1$

桁に對して $M_D = -Pe - X_1 h_2$

柱に對して $M_D = (P_w - X_1) h_2$

2) 右の柱に $w_1 h_2$ なる等布荷重及び $1/2 w_2 h_2$ なる三角荷重を荷したる場合



第 121 圖

(第 121 圖) は M_0 は (b) 圖の如き分布をなす.

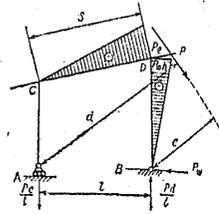
$\delta_{01} = \int M_0 M_1 ds'$

$= 0 \dots \dots \dots$ [左の柱に對して]

$+\frac{s}{6}Al(2h_2+h_1) \dots \dots \dots$ [桁に對して表の (1)(2) $a_1=0$ の場合]

$+\frac{h_2'}{3}h_2\left(Al+w_1\frac{h_2^2}{8}\right) \dots \dots \dots$ [右の柱に對して I 及び II. 表の (3)(14)]

$+\int_0^{h_2} M_0 M_1 ds' \dots \dots \dots$ [右の柱に對して III]



第 120 圖

最後の式は表になき故計算すれば

$\int_0^{h_2} M_0 M_1 ds' = \int_0^{h_2} M_0 y \frac{J}{J_2} dy = \frac{J}{J_2} \int_0^{h_2} y dA = \frac{J}{J_2} G$

但し $M_0 dy = dA$, G は M_0 が AB に對する静力率である.

M_0 の面積は $\frac{1}{24}w_2 h_2^3$, 重心は B より $\frac{7}{15}h_2$ の位置にある故に

$\int_0^{h_2} M_0 M_1 ds' = \frac{J}{J_2} \frac{1}{24}w_2 h_2^3 \frac{7}{15}h_2 = \frac{7}{24 \times 15}h_2' w_2 h_2^3$

$\therefore \delta_{01} = \frac{s}{6}Al(2h_2+h_1) + \frac{h_2'}{3}h_2 Al + \frac{h_2'}{24}w_1 h_2^3 + \frac{7}{24 \times 15}h_2' w_2 h_2^3$

今 $\nu = \frac{3\delta_{11}}{Sf^2}$ (但し $f = \frac{h_1+h_2}{2}$) と置き w_1 及び w_2 の影響に就て別々に

X_1 を求むれば次の如し.

$X_1 = \frac{w_1 h_2^2}{4\nu f^2} \left(2h_2+h_1+2.5h_2 \frac{h_2'}{S}\right) \dots \dots \dots$ [w_1 のみによる.]

$X_1 = \frac{w_2 h_2^2}{12\nu f^2} \left(\frac{2h_2+h_1}{3}+0.9h_2 \frac{h_2'}{S}\right) \dots \dots \dots$ [w_2 のみによる.]

3) X_1 の影響線 桁の上に $P=1$ が荷せられたる場合に X_1 の影響線を求めれば

$X_1 = \frac{\frac{1}{EJ_c} \int M_0 M_1 ds'}{\frac{1}{EJ_c} \int M_1^2 ds'} = \frac{\int M_0 M_1 ds'}{\int M_1^2 ds'} = \frac{\delta_{01}}{\delta_{11}}$

なる式に於て分母の δ_{11} は荷重に無關係の量である. δ_{01} は $P=1$ によつて X_1 の作用點に於ける $X_1 = -1$ の方向への EJ_c 倍の變位である. 相反作用の原理に依つて δ_{01} は $X_1 = -1$ によつて $P=1$ の作用點に於て P の方向に於ける EJ_c 倍の變位と考ふことを得. 従て $X_1 = -1$ によつて桁に起る彎曲率圖を求め之を荷重と考へて更に彎曲率を求むればモールの定理 (第 132 頁) によつて δ_{01} となる. 第 122 圖に於て剛構に陰影を施せる部分が彎曲率圖である.

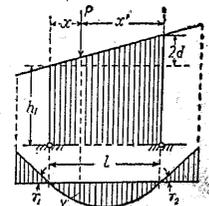
$X_1 = \frac{\delta_{01}}{\delta_{11}} = \frac{ls}{\delta_{11}} \left(\omega_R \frac{h_1}{2} + \omega_D \frac{d}{3}\right) \dots \dots \dots$ (a)

但し $\omega_R = \frac{\pi}{l} - \frac{\pi^2}{l^2}$ 矩形部分の影響. $\omega_D = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{l^3}$ 三角部分の影響

A 及び B に於て影響線の撓角 γ_1 及び γ_2 は

$\tan \gamma_1 = \frac{s}{\delta_{11}} \left(\frac{h_1}{2} - \frac{d}{3}\right)$, $\tan \gamma_2 = \frac{s}{\delta_{11}} \left(\frac{h_1}{2} - \frac{2d}{3}\right)$

桁が水平ならば $X_1 = \frac{l^2}{\delta_{11}} \left(\omega_R \frac{h_1}{2}\right)$



第 122 圖

X_1 は (a) 式を計算して又次の如く書くことを得.

$$X_1 = \frac{x(l-x)}{2h_1 l \nu} \left[k \left(1 + \frac{x}{l} \right) + \left(2 - \frac{x}{l} \right) \right]$$

但し $\nu = 1 + k + k^2 + \frac{J}{J_1} \frac{h_1}{s} + k^2 \frac{J}{J_2} \frac{h_2}{s}$, $k = \frac{h_2}{h_1}$.

63. 鉸支點の丁字型剛構 (第 123 圖) (a) 圖の如き剛構に K_1 及び K_2 なる力を加へたる場合に不静定量を解く. 2 次の不静定構であるから未知量 X_1 及び X_2 とし A 點の垂直反力及び B 點の水平反力をとる. 不静定量 $X_1=0$ $X_2=0$ とせる場合は (b) 圖となり, このときの彎曲率圖は (c) 圖となる. $K_1=K_2=0$ 及び $X_2=0$ とし $X_1=-1$ のみを考へた場合の彎曲率圖は (d) 圖となる. 又 $K_1=K_2=0$ $X_1=0$ とし $X_2=-1$ のみを考へた場合の彎曲率圖は (e) 圖となる. 今

$$EJ_c \int \frac{M_0 M_1}{EJ} ds = \int M_0 M_1 ds' = \delta_{01}$$

$$EJ_c \int \frac{M_0 M_2}{EJ} ds = \int M_0 M_2 ds' = \delta_{02}$$

$$EJ_c \int \frac{M_1^2}{EJ} ds = \int M_1^2 ds' = \delta_{11}$$

$$EJ_c \int \frac{M_2^2}{EJ} ds = \int M_2^2 ds' = \delta_{22}$$

$$EJ_c \int \frac{M_1 M_2}{EJ} ds = \int M_1 M_2 ds' = \delta_{12}$$

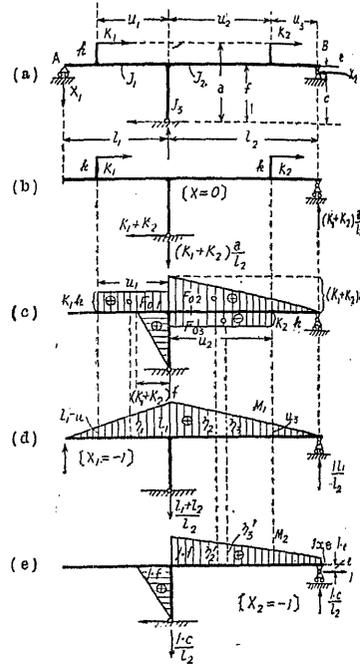
但し $ds' = ds \frac{J_c}{J}$ $s' = s \frac{J_c}{J}$

とすれば (8) 式より (左邊は 0),

$$0 = \frac{1}{EJ_c} \left\{ \delta_{01} - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12} \right\}, \quad 0 = \frac{1}{EJ_c} \left\{ \delta_{02} - X_1 \delta_{12} - X_2 \delta_{22} \right\}$$

$$\therefore \delta_{01} = X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} \quad \text{及び} \quad \delta_{02} = X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22}$$

$$\therefore X_1 = \beta_{11} \delta_{01} + \beta_{12} \delta_{02} \quad \text{及び} \quad X_2 = \beta_{21} \delta_{01} + \beta_{22} \delta_{02} \dots \dots \dots (I)$$



第 123 圖

但し $\beta_{11} = \frac{\delta_{22}}{D}$, $\beta_{22} = \frac{\delta_{11}}{D}$, $\beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\delta_{12}}{D}$ $D = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2$

(d) 圖及び第 14 表 (3)(3) より δ_{11} は

$$\delta_{11} = l_1' \frac{l_1^2}{3} + l_2' \frac{l_2^2}{3} = \frac{J_c}{J_1} \frac{l_1^3}{3} + \frac{J_c}{J_2} \frac{l_2^3}{3}$$

(e) 圖及び第 14 表 (3)(3) (1) より

$$\delta_{22} = l_2' \frac{1}{3} (f^2 + fe + e^2) + f' \frac{f^2}{3} = \frac{J_c}{J_2} \frac{l_2}{3} (f^2 + fe + e^2) + \frac{J_c}{J_1} \frac{f^3}{3}$$

(d) 圖, (e) 圖及び第 14 表 (1)(3) より

$$\delta_{12} = \frac{l_2'}{6} l_1 (2f + e) = \frac{J_c}{J} \frac{l_1 l_2}{6} (2f + e)$$

(c) 圖, (d) 圖及び第 14 表より δ_{01} を求むるに l_1 に對して

$$\int M_0 M_1 ds' = \frac{u'}{2} K_1 k (l_1 + \overline{l_1 - u})$$

然るに

$$u' K_1 k = \frac{J_c}{J_1} u K_1 k = \frac{J_c}{J_1} F_{01}$$

$$\frac{l_1 + \overline{l_1 - u}}{2} = \eta_1 = (F_{01} \text{ の重心の眞下にとれる } M_1 \text{ の縦距})$$

故に l_1 に對して

$$\int M_0 M_1 ds' = \frac{J_c}{J_1} F_{01} \eta_1$$

依て

$$\delta_{01} = F_{01} \eta_1 \frac{J_c}{J_1} + (F_{02} \eta_2 + F_{03} \eta_3) \frac{J_c}{J_2}$$

同様にして

$$\delta_{02} = (F_{02} \eta_2' + F_{03} \eta_3') \frac{J_c}{J_2} + (K_1 + K_2) \frac{f^3}{3} \frac{J_c}{J_1}$$

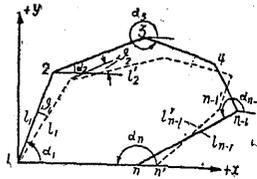
此等 δ の値を (I) 式に代入して X_1 及び X_2 を解くことを得.

第 3 節 三彎曲率の定理に依る剛構の解法

64. 角方程式 三彎曲率及び四彎曲率の定理を用ひて剛構を解く場合には, 相對角變化 θ を求めなければならぬ. 對稱構造に對稱荷重の載荷せられたる場合には部材の水平移動を考へる必要なきも一般に偏垂直荷重, 左右不等なる水平荷重の荷せられたる場合には剛構は水平移動を生ず. この角變化に就ては次の條件式を用ふるが便利である.

第 124 圖に於て實線が變形前の剛構を示し點線が變形後の位置を示す.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: 構材の變形前の方向を示す. 各 α は反時計方向に迴轉するを正とす.
 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$: 構材の變形後の方向を示す.
 l_1, l_2, \dots, l_n : 構材の變形前の長さ.
 l'_1, l'_2, \dots, l'_n : 構材の變形後の長さ.
 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$: 剛構の變形の爲に付の受くべき角變化 ρ は剛節點に對して同一名稱の構材が時計の迴轉方向に測りたるものを正とす.



第 124 圖

一般に $\sum l \cos \alpha = 0 \quad \sum l \sin \alpha = 0$

$\sum l' \cos \alpha' = 0 \quad \sum l' \sin \alpha' = 0$

尚 $l' = l + \Delta l, \quad \alpha' = \alpha - \rho$ なる故に

$l' \cos \alpha' = (l + \Delta l) \cos(\alpha - \rho) = l \cos \alpha + \Delta l \cos \alpha + \rho l \sin \alpha.$

$l' \sin \alpha' = (l + \Delta l) \sin(\alpha - \rho) = l \sin \alpha + \Delta l \sin \alpha - \rho l \cos \alpha.$

故に $\sum l \cos \alpha + \sum \Delta l \cos \alpha + \sum \rho l \sin \alpha = 0$

$\sum l \sin \alpha + \sum \Delta l \sin \alpha - \sum \rho l \cos \alpha = 0$

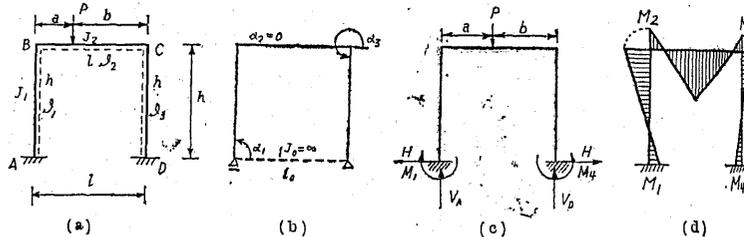
故に $\left. \begin{aligned} \sum \Delta l \cos \alpha + \sum \rho l \sin \alpha &= 0 \\ \sum \Delta l \sin \alpha - \sum \rho l \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$

構材が直線ならば構材の長さの變化を無視する事を得るを以て

$\sum \rho l \sin \alpha = 0, \quad - \sum \rho l \cos \alpha = 0 \dots \dots \dots (12)$

(11) 式及び (12) 式を角方程式と云ふ.

65. 門 構 第 115 圖(a) の如き門構は A 及び D に於て地面に剛結してゐる故 (b) 圖の如く $J_0 = \infty$ なる如き構材を假定して解く.



第 125 圖

$\sum \rho l \sin \alpha = 0$ より $\rho_1 h + 0 - \rho_3 l = 0$
 $\therefore \rho_1 = \rho_3$ (B は A に對し水平に動く)

$\sum \rho l \cos \alpha = 0$ より $\rho_2 l = 0$
 $\therefore \rho_2 = 0$ (C は B に對し垂直に動かず)

A B C D 各剛節點に三彎曲率の定理を用ふ.

今 $J_0 = J_1$ とすれば $l'_0 = l_0 \frac{J_0}{J_0} = 0, \quad l_1 = l_1, \quad l'_2 = l_2 \frac{J_0}{J_2} = l_2 \frac{J_1}{J_2}$

A 點に對し $-6EJ_1 \rho_1 = 2M_1 l_1 + M_2 l_1$

B 點に對し $-6EJ_1 (\rho_1 - \rho_2) = M_1 l_1 + 2M_3 \left(l_1 + l_2 \frac{J_1}{J_2} \right) + M_3 l_2 \frac{J_1}{J_2} - 6 \mathfrak{Q}_2 \frac{J_1}{J_2}$

C 點に對し $-6EJ_1 (\rho_2 - \rho_3) = M_2 l_2 \frac{J_1}{J_2} + 2M_3 \left(l_2 \frac{J_1}{J_2} + l_1 \right) + M_4 l_1 - 6 \mathfrak{Q}_2 \frac{J_1}{J_2}$

D 點に對し $-6EJ_1 \rho_3 = M_3 l_1 + 2M_4 l_1$

更に (c) 圖の如く未知反力を假定しその間の關係式として

$M_2 = M_1 + Hh, \quad M_3 = M_4 + Hh$

之等を解きて

$M_1 = + \frac{1}{l} \left[\mathfrak{Q}_2 (\eta - 3\lambda) + \mathfrak{Q}_3 (\eta + 3\lambda) \right]$

$M_2 = - \frac{1}{l} \left[\mathfrak{Q}_2 (2\eta + 3\lambda) + \mathfrak{Q}_3 (2\eta - 3\lambda) \right]$

$M_3 = - \frac{1}{l} \left[\mathfrak{Q}_2 (2\eta - 3\lambda) + \mathfrak{Q}_3 (2\eta + 3\lambda) \right]$

$M_4 = + \frac{1}{l} \left[\mathfrak{Q}_2 (\eta + 3\lambda) + \mathfrak{Q}_3 (\eta - 3\lambda) \right]$

$H = \frac{3\eta}{hl} (\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3)$

但し $\eta = \frac{1}{2+k}, \quad k = \frac{hJ_2}{LJ_1}, \quad \lambda = \frac{1}{1+6k}.$

以上は部材 BC に垂直に任意の荷重を荷せる場合の解にして (a) 圖の如き集中荷重がある場合には

* この條件式は 69. にて復述する平衡條件 2) (柱脚部の水平反力の總和はその脚部より上部に働く水平外力の總和に等し), 又は第 132 圖の説明參照の事.

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{Pab(l+b)}{6l}, \quad \mathfrak{X}_3 = \frac{Pab(l+a)}{6l}$$

なるを以て

$$M_1 = \frac{1}{2l^2} Pab [l\eta + (a-b)\lambda]$$

$$M_4 = \frac{1}{2l^2} Pab [l\eta + (b-a)\lambda]$$

$$H = -\frac{3}{2hl} Pab\eta$$

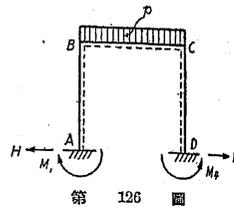
若し BC の中點に P が荷せらるるならば, $a=b$ なる故に

$$M_1 = M_4 = \frac{1}{8} pl\eta, \quad H = -\frac{3}{8h} pl\eta$$

第 126 圖の如く $p \text{ kg/m}$ の滿載等布荷重が部材 BC に荷せられたる場合には $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_3 = -\frac{pl^2}{24}$ なる故に

$$M_1 = \frac{1}{12} pl\eta, \quad \text{但し } \eta = \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2 + \frac{h}{l} \frac{J_2}{J_1}}$$

$$H = -\frac{1}{4h} pl^2\eta$$



66. 鉸脚屋根形構 (第 127 圖) 三彎曲率の式より

$$\left. \begin{aligned} 2h'M_B + 2s'M_B + s'M_C + s'N_2^B &= 6EJ_c(\rho_1 - \rho_2) \\ s'M_B + 4s'M_C + s'M_D + s'N_2^B &= 6EJ_c(\rho_2 - \rho_3) \\ s'M_C + 2(s+h)M_D &= 6EJ_c(\rho_3 - \rho_4) \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

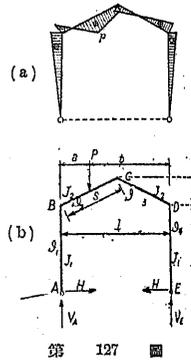
角方程式より

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 h + \rho_2 h - \rho_3 f - \rho_4 h &= 0 \\ \rho_3 &= -\rho_2 \end{aligned} \right\} \dots (II)$$

次に脚部の反力を夫々 H (未知量), V_A, V_E (静的条件より求まる) とし, 之を用ひて平衡条件を立てれば

$$\left. \begin{aligned} M_B = M_D = Hh, \quad M_C = H(h+f) + V_E \frac{l}{2} \\ \text{但し } V_E = -\frac{P}{l} a \end{aligned} \right\} \dots (III)$$

未知数 8 個に對し方程式 (I)(II)(III) の数 8 個ある故之を解きて



$$H = \frac{Pa}{4l^2} \frac{6hbl + f(3l^2 - 4a^2)}{h^2(k+3) + f(3h+f)}$$

$$M_B = M_D = -Hh, \quad M_C = \frac{Pa}{2} - H(h+f)$$

但し $k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{s}$

67. 函 構 1) 内側より等布荷重を受けたる函構 静水壓の如く一樣なる壓力を内側から受ける函構は對稱形なるときは次の關係あり.

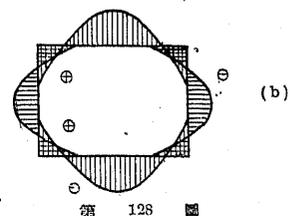
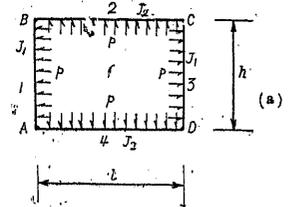
$$\left. \begin{aligned} M_A = M_B = M_C = M_D \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

ABC 間に三彎曲率の式を立てれば $h'M_A + 2h'M_B + 2h'M_C + V'M_C - \frac{h'}{h}N_1^B - \frac{V'}{l}N_2^B = 0$ $\dots (II)$

但し N は荷重項にして $N_1^B = \frac{ph^2}{4}, N_2^B = \frac{pl^2}{4}$

(I) の關係を用ひて之を解けば

$$M_A = \frac{p}{12} \frac{l^2 + h^2k}{k+1} \quad \text{但し } k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l} \text{ とす.}$$



2) 緊張棒を有する函構 静水壓の如き一樣なる壓力を内側より受けたる矩形函構に緊張棒を挿入せる場合は對稱剛構ならば

$$\left. \begin{aligned} M_A = M_A' = M_B = M_B' \\ M_C = M_D, \quad \rho_n = 0. \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

A, B, D 間に三彎曲率の定理を用ひ

$$h'M_A + 2h'M_B + 2h'M_D + V'M_D - \frac{h'}{h}N_1^B - \frac{V'}{l}N_2^B = 0 \quad \dots (II)$$

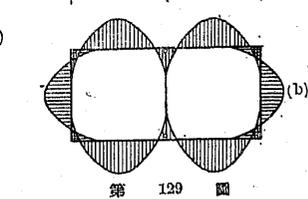
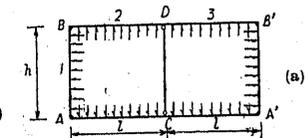
B, D, B' 間に三彎曲率の定理を用ひ

$$M_B + 4M_D + M_C - \frac{1}{h}N_2^D - \frac{1}{l}N_3^D = 0 \quad \dots (III)$$

之を解きて

$$M_A = M_B = M_A' = M_B' = \frac{p}{12} \frac{l^2 + 2kh^2}{2k+1}$$

$$M_C = M_D = \frac{p}{12} \frac{l^2 + (3l^2 - h^2)k}{2k+1}$$



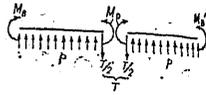
第 129 圖

緊張棒の張力 T は剛構を B, D 及び B' 點に於て切斷して(第 130 圖) M_B , M_D , $M_{B'}$, Pl 及び $T/2$ との平衡條件より求むること

を得. $M_B = M_{B'}$ なることを考へて解けば

$$\text{端力率による張力} = \frac{1}{l}(M_D - M_B)$$

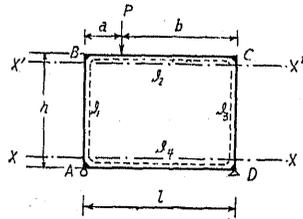
$$\text{荷重による張力} = \frac{1}{2}pl$$



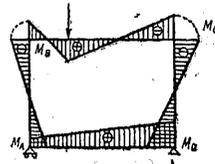
第 130 圖

$$\text{故に } T = 2 \left\{ \frac{1}{l}(M_D - M_B) + \frac{1}{2}pl \right\} = \frac{p}{2l} \frac{2l^2 + (5l^2 - l^2)k}{2k + 1}$$

3) 二支點を有する函構 三彎曲率の定理を用ひ (第 131 圖)



(a)



(b)

第 131 圖

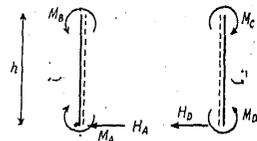
$$\left. \begin{aligned} \text{(ABC)} \quad hM_A + 2hM_B + vM_C + vM_D + \frac{v}{l}N_2^2 &= 6EJ_c(\rho_1 - \rho_2) \\ \text{(BCD)} \quad vM_B + 2vM_C + 2hM_D + hM_A + \frac{v}{l}N_2^2 &= 6EJ_c(\rho_2 - \rho_3) \\ \text{(CDA)} \quad hM_C + 2hM_D + 2vM_A + vM_B &= 6EJ_c(\rho_3 - \rho_4) \\ \text{(DAB)} \quad vM_D + 2vM_A + 2hM_B + hM_C &= 6EJ_c(\rho_4 - \rho_1) \end{aligned} \right\} \dots \text{(I)}$$

$$\text{但し } h' = h \frac{J_c}{J_h}, \quad v' = l \frac{J_c}{J_h}, \quad N_2^2 = \frac{Pab(l+b)}{l^2}, \quad N_2'^2 = \frac{Pab'(l+a)}{l^2}$$

$$\text{角方程式は } \left. \begin{aligned} \rho_1 h + 0 - \rho_2 h + 0 &= 0 \quad \therefore \rho_1 = \rho_2 \\ 0 + \rho_2 l - 0 - \rho_3 l &= 0 \quad \therefore \rho_2 = \rho_3 \end{aligned} \right\} \dots \text{(II)}$$

更に一つの條件式を導く. 今 AD に極めて接近して X-X, BC に接近して X'-X' なる断面を考へる. A 點及び D 點に於ける水平反力を夫々 H_A 及び H_D とすれば(第 132 圖), H_A は M_B により $+\frac{1}{h}M_B$, M_A によ

り $-\frac{1}{h}M_A$, 又 H_D は M_C により $-\frac{1}{h}M_C$, M_D により $+\frac{1}{h}M_D$ を生ずることになる. 然



第 132 圖

るに水平外力は無き故に $H_A + H_D = 0$ なる平衡條件を必要とす. 依て

$$M_B - M_A + M_D - M_C = 0 \dots \text{(III)}$$

$$\text{(I)(II)(III)を解きて } M_A = + \frac{Pab}{l} \left[\frac{k}{2(k+3)(k+1)} - \frac{b-a}{4l(3k+1)} \right]$$

$$M_B = - \frac{Plb}{l} \left[\frac{2k+3}{2(k+3)(k+1)} + \frac{b-a}{4l(3k+1)} \right]$$

$$M_C = - \frac{Pub}{l} \left[\frac{2k+3}{2(k+3)(k+1)} - \frac{b-a}{4l(3k+1)} \right]$$

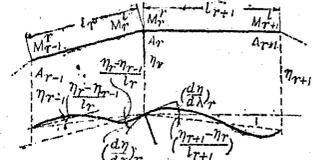
$$M_D = \frac{Pab}{l} \left[\frac{k}{2(k+3)(k+1)} + \frac{b-a}{4l(3k+1)} \right]$$

第 4 節 四彎曲率の定理による剛構の解法

68. 四彎曲率の定理 剛構格點に集る部材の数が 3 個以上あるときは四彎曲率の定理を用ふ.

第 133 圖に於て A_{r-1} , A_r に就て三彎曲率定理の項に述べたる式を應用すれば

$$-6EJ_c \left\{ \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_r - \rho_{r-1} \right\} = l_r' (M_{r-1}' + 2M_r') + \frac{6l_r'}{l_r} \mathfrak{B}_r \dots \text{(I)}$$



第 133 圖

$$\text{但し } \rho_{r-1} = \frac{\eta_r - \eta_{r-1}}{l_r} \quad \text{即ち支點 } A_r \text{ が } A_{r-1} \text{ に對する相對角變化}$$

$$\mathfrak{B}_r = \frac{1}{l_r} \int_0^{l_r} M_r'' x dx, \quad l_r' = l_r \frac{J_c}{J_r} = \text{換算長, } (J_r \text{ は任意の大きさに選ぶ得})$$

$$M_{r-1}' = \text{支點 } A_{r-1} \text{ の右側の彎曲率, } M_r' = \text{支點 } A_r \text{ の左側の彎曲率}$$

又 A_r, A_{r+1} 就て

$$-6EJ_c \left\{ - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_r + \rho_{r+1} \right\} = l_{r+1}' (M_r' + 2M_{r+1}') + \frac{6l_{r+1}'}{l_{r+1}} \mathfrak{B}_{r+1} \dots \text{(II)}$$

$$\text{但し } \rho_{r+1} = \frac{\eta_{r+1} - \eta_r}{l_{r+1}} = \text{支點 } A_{r+1} \text{ が } A_r \text{ に對する相對角變化}$$

$$\mathfrak{B}_{r+1} = \frac{1}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M_{r+1}'' (l-x) dx, \quad l_{r+1}' = l_{r+1} \frac{J_c}{J_{r+1}}$$

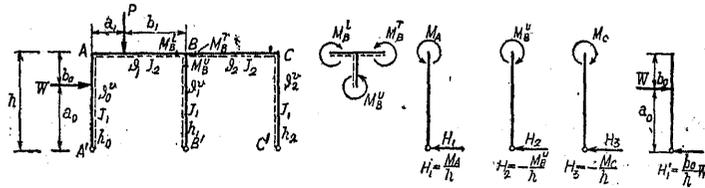
$$M_r' = \text{支點 } A_r \text{ の右側の彎曲率, } M_{r+1}' = \text{支點 } A_{r+1} \text{ の左側の彎曲率}$$

(I) (II) の式より $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_r$ を消去すれば

$$6EJ_c(\rho_{r-1} - \rho_{r+1}) = l_r' M_{r-1}^r + 2l_r' M_r^r + 2l_{r+1}' M_{r+1}^r + l_{r+1}' M_{r+1}^r + 6\left(\frac{l_r'}{l_r} \mathfrak{B}_r + \frac{l_{r+1}'}{l_{r+1}} \mathfrak{B}_{r+1}\right) \dots \dots \dots (13)$$

此は $M_{r-1}^r, M_r^r, M_{r+1}^r, M_{r+1}^r$ なる 4 つの相隣れる彎曲率の間の關係を式に表せるもので四彎曲率の定理と云ふ。剛結點に 3 つ以上の部材が集るときには一般に M_r^r と M_r^r とは等しくないのである。若し A_r 點に集る部材が 2 個以外になければ上式に $M_r^r = M_r^r$ とおきて三彎曲率の式を得るのである。

69. 鉸脚二連剛構 各剛結點に就て四彎曲率の方程式を立てれば



第 134 圖

(A'AB) に對し

$$2h_0' M_A + 2l_1' M_A + l_1' M_B^A + 6\left(\frac{l_0'}{h_0} \mathfrak{B}_0 + \frac{l_1'}{l_1} \mathfrak{B}_1\right) = 6EJ_c(\rho_0^A - \rho_1)$$

(ABC) に對し

$$l_1' M_A + 2l_1' M_B^A + 2l_2' M_B^C + l_2' M_C + 6\frac{l_1'}{l_1} \mathfrak{B}_1 = 6EJ_c(\rho_1 - \rho_2)$$

(ABB') に對し

$$l_1' M_A + 2l_1' M_B^A + 2l_1' M_B^B + 6\frac{l_1'}{l_1} \mathfrak{B}_1 = 6EJ_c(\rho_1 - \rho_1^B)$$

(BCC') に對し

$$l_2' M_B^C + 2l_2' M_C + 2h_2' M_C = 6EJ_c(\rho_2 - \rho_2^C)$$

角方程式より各相對角變化に關する條件式は

(A'ABB') に對して $\rho_0^A = \rho_1^B$ $\rho_1 = 0$

(B'BCC') ,, $\rho_1^B = \rho_2^C$ $\rho_2 = 0$ } $\dots \dots \dots$ (II)

即ち方程式の数は (I) (II) 合せて 8 個。然るに未知量として $M_A, M_B^A, M_B^B, M_B^C, M_C$ 及び $\rho_0^A, \rho_1^B, \rho_2^C, \rho_1, \rho_2$ 合計 10 個あり 2 個の條件不足す。之を補ふべき式は次の平衡條件より求む。

平衡條件 1) 桁の各剛結點に作用する彎曲率の總和は 0 なり。

平衡條件 2) 柱の脚部の水平反力の總和はその脚部より上部に働く水平外力の總和に等し。

條件 1) は B 點の如く 3 個以上の部材の集る點に 1 個宛用ひられ 條件 2) は各階につき 1 個宛用ひることを得。1) を剛結點條件, 2) を階條件と云ふ。

平衡條件 1) より $M_B^A - M_B^B - M_B^C = 0 \dots \dots \dots$ (III)

平衡條件 2) より $W = H_1 + H_1' + H_2 + H_3$

但し H_1, H_2, H_3 は夫々 A', B', C' 點に於ける彎曲率による水平反力。 H_1' は W による A' の水平反力なり。

$$W = \frac{1}{h}(M_A - M_B^A - M_C) + \frac{(l - a_0)}{h} W$$

即ち $\therefore W a_0 = M_A - M_B^A - M_C \dots \dots \dots$ (IV)

之を解くに (II) より

$$\rho_0^A = \rho_1^B = \rho_2^C = \rho, \quad \rho_1 = \rho_2 = 0 \dots \dots \dots$$
 (V)

今簡單のため桁の長さ相等しとし

$$k = \frac{h J_2}{l J_1} \quad h' = h \frac{J_c}{J_1} = h \quad J_c = J_1$$

と置けば $l' = l \frac{J_c}{J_2} = \frac{h}{k}$ (V) を (I) に用ひて ρ を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} (2k+3)M_A + 3M_B^A + 2kM_B^B + 6\left(\frac{k}{h}\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_1\right) &= 0 \\ M_A + 2M_B^A + 2M_B^B + M_C + 6\mathfrak{B}_1 &= 0 \\ 2(k+1)M_A + M_B^A + M_B^B + 2(k+1)M_C + 6\left(\frac{k}{h}\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots$$
 (VI)

(III), (IV), (VI) より各彎曲率を解けば

$$M_A = -\frac{C_{BC}(0k+9) + C_{CB}(4k+3)}{4(k+1)(4k+3)} - \frac{2kH_{BA}(16k+15) - W a_0(4k+3)^2}{12(k+1)(4k+3)}$$

$$M_B^A = -\frac{(2k+3)[C_{BC}(2k+1) + C_{CB}(4k+3)]}{4(k+1)(4k+3)} + \frac{(2k+3)[2kH_{BA} - W a_0(4k+3)]}{12(k+1)(4k+3)}$$

$$M_B^B = -\frac{C_{BC} + C_{CB}}{2(k+1)} - \frac{2kH_{BA} + W a_0(2k+3)}{6(k+1)}$$

$$M_B^C = -\frac{C_{BC}(4k^2-3) + C_{CB}(4k+3)(2k+1)}{4(k+1)(4k+3)}$$

$$+ \frac{2kH_{BA}(10k+9) + W a_0(4k+3)(2k+3)}{12(k+1)(4k+3)}$$

$$M_C = -\frac{C_{BC}(2k+3) + C_{CB}(4k+3)}{4(k+1)(4k+3)} - \frac{2kH_{BA}(8k+9) + W a_0(4k+3)^2}{12(k+1)(4k+3)}$$

但し $k = \frac{J_2 h}{J_1 l}$, $C_{BC} = \frac{P_1 \alpha_0 b_1^2}{l^2}$, $C_{CB} = \frac{P_1 \alpha_0^2 b_1}{l^2}$,

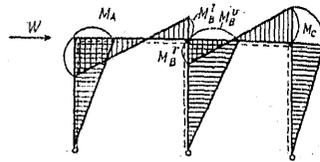
$H_{BA} = \frac{W_1 b_0 (h + \alpha_0)}{h^2}$ とす。

即ち C_{BC} , C_{CB} を含む項は P_1 によるもので H_{BA} , W を含む項は水平荷重 W によるものなり。

$P_1 = 0$ にして W が A 點に荷せられたる場合には (第 135 圖),

$C_{BC} = C_{CB} = H_{BA} = 0$, $\alpha_0 = h$ となり

$M_A = -M_C = \frac{Wh}{12} \frac{4k+3}{k+1}$
 $M_B^* = -M_B^* = -\frac{Wh}{12} \frac{2k+3}{k+1}$
 $M_B^* = 2M_B^* = -\frac{Wh}{6} \frac{2k+3}{k+1}$

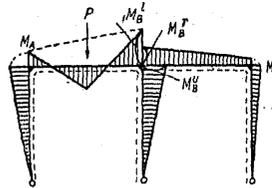


第 135 圖

又水平荷重 $W=0$ にして P_1 が桁の中點

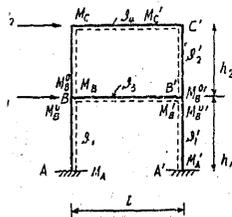
に荷せられたる場合には (第 136 圖), $H_{BA} = 0$, $C_{BC} = C_{CB} = \frac{Pl}{8}$ となり,

$M_A = -\frac{Pl}{16} \frac{7k+6}{(k+1)(4k+3)}$
 $M_B^* = -\frac{Pl}{16} \frac{(2k+3)(3k+2)}{(k+1)(4k+3)}$
 $M_B^* = -\frac{Pl}{16} \frac{2}{k+1}$
 $M_B^* = -\frac{Pl}{16} \frac{k(6k+5)}{(k+1)(4k+3)}$
 $M_C = -\frac{Pl}{16} \frac{3(k+1)}{(k+1)(4k+3)}$

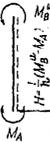
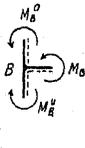


第 136 圖

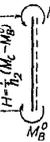
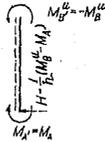
70. 二階剛構 1) 水平荷重を受けたる場合 (第 137, 138, 139, 140 圖)



第 137 圖



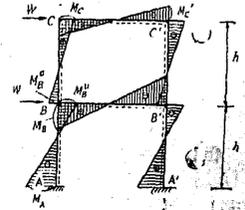
第 138 圖



第 139 圖

對稱構造なときは

$M_A = -M_A'$ $M_B^* = -M_B^*$
 $M_B = -M_B'$ $M_B^* = -M_B^*$
 $M_C = -M_C'$



第 140 圖

なる關係あり。四彎曲率の式を立てれば

A 點に對して $2h_1' M_A + h_1' M_B^* = -6EJ_c \rho_1$
 B 點に對して $h_1' M_A + 2h_1' M_B^* + 2U M_B^* - U M_B = 6EJ_c (\rho_1 - \rho_3)$
 ” ” $h_1' M_A + 2h_1' M_B^* + 2h_2' M_B^* + h_2' M_C = 6EJ_c (\rho_1 - \rho_2)$
 C 點に對して $h_2' M_B^* + 2h_2' M_C + 2U M_C - U M_C' = 6EJ_c (\rho_2 - \rho_4)$

角方程式より $\rho_3 = \rho_4 = 0$ (II)

(II) の關係を用ひ (I) より ρ を消去すれば

$3h_1' M_A + 3h_1' M_B^* + U M_B = 0$
 $3h_1' M_A + 3h_1' M_B^* + 3h_2' M_B^* + 3h_2' M_C + U M_C' = 0$ (III)

平衡條件 1) より $M_B^* - M_B - M_B^* = 0$ (IV)

平衡條件 2) より第 2 階に對して

$W_2 = 2 \frac{1}{h_2} (M_C - M_B^*) \therefore M_C - M_B^* = \frac{W_2 h_2}{2}$ (V)

第 1 階に對して

$W_1 + W_2 = 2 \frac{1}{h_1} (M_B^* - M_A) \therefore M_B^* - M_A = \frac{h_1}{2} (W_1 + W_2)$ (VI)

簡單のため $k = \frac{h_2 J_2}{l J_1}$ とおき $h_1 = h_2 = h$ とすれば

$U = h \frac{J_c}{J_1} = h (J_c = J_1)$ $U = l \frac{J_c}{J_2} = \frac{h}{k}$ となる。

(III), (IV), (V), (VI) より各彎曲率を解くことを得。

$M_A = -\frac{(3k+1)hW_2 + (18k^2 + 12k + 1)h(W_1 + W_2)}{2(36k^2 + 18k + 1)}$
 $M_B^* = \frac{-(3k+1)hW_2 + 6k(3k+1)h(W_1 + W_2)}{2(36k^2 + 18k + 1)}$
 $M_B = \frac{6k(3k+1)hW_2 + 3k(6k+1)h(W_1 + W_2)}{2(36k^2 + 18k + 1)}$ (VII)

$$M_B^2 = -\frac{(3k+1)(6k+1)hW_2 - 3kh(W_1+W_2)}{2(36k^2+18k+1)}$$

$$M_C = \frac{9k(2k+1)hW_2 + 3kh(W_1+W_2)}{2(36k^2+18k+1)}$$

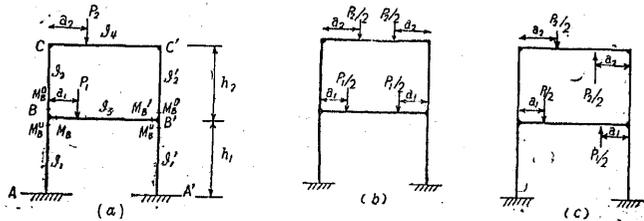
但し $k = \frac{hJ_l}{lJ_h}$ 茲に J_l は桁の惰性率, J_h は柱の惰性率.

若し $W_1 = W_2$, $k=1$ ($\frac{h}{l} = \frac{J_h}{J_l}$ の場合) ならば

$$M_A = -\frac{3}{5}Wh, \quad M_B^2 = \frac{2}{5}Wh, \quad M_C = \frac{3}{5}Wh,$$

$$M_B^2 = -\frac{1}{5}Wh, \quad M_C = \frac{3}{10}Wh.$$

2) 垂直荷重を受けたる場合 (第 141 圖)



第 141 圖

(a) 圖の如き剛構を解く場合には (b) 圖及び (c) 圖とを合せたものと考えれば宜し.

(b) 圖の如く對稱構造に對稱荷重を載せたる場合には次の如き關係あり.

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = \rho_6 = \rho_7 = 0$$

$$M_A = M_{A'}, \quad M_B = M_{B'}, \quad M_B^2 = M_{B'}^2, \quad M_C = M_{C'}, \quad M_C = M_{C'}$$

四彎曲率の定理より

$$\left. \begin{aligned} \text{A 點に對して} \quad & 2h_1'M_A + h'M_B^2 = 0 \\ \text{B 點に對して} \quad & h_1'M_A + 2h_1'M_B^2 + 3h'M_B + hN_1 = 0 \\ & h_1'M_A + 2h_1'M_B^2 + 2h_2'M_B^2 + h_2'M_C = 0 \\ \text{C 點に對して} \quad & h_2'M_B^2 + 2h_2'M_C + 3h'M_C + hN_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(I)}$$

但し $N_1 = \frac{6}{l}W_1$, $N_2 = \frac{6}{l}W_2$ にして夫々 P_1 及び P_2 による荷重項である.

$$\text{平衡條件より} \quad M_B^2 - M_B - M_B^2 = 0 \dots \dots \dots \text{(II)}$$

簡單のため $h_1 = h_2$ として之を解けば

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{(k+2)N_1 - N_2}{3(k^2+6k+7)} & M_{A'} &= M_A \\ M_B^2 &= -\frac{2\{(k+2)N_1 - N_2\}}{3(k^2+6k+7)} & M_{B'}^2 &= M_B^2 \\ M_B &= -\frac{(4k+3)N_1 + kN_2}{3(k^2+6k+7)} & M_{B'} &= M_B \\ M_B^2 &= \frac{(2k+3)N_1 + (k+2)N_2}{3(k^2+6k+7)} & M_{B'}^2 &= M_B^2 \\ M_C &= -\frac{kN_1 + (2k+7)N_2}{3(k^2+6k+7)} & M_{C'} &= M_C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

但し $k = \frac{hJ_l}{lJ_h}$, J_l は桁の惰性率, J_h は柱の惰性率.

第 1 階, 第 2 階に相等しい等布荷重を荷すれば (第 141 圖 d) $N_1 = N_2 = \frac{pl^2}{4}$ となる. 更に $k=1$ 即ち $\frac{h}{l} = \frac{J_h}{J_l}$ とおけば

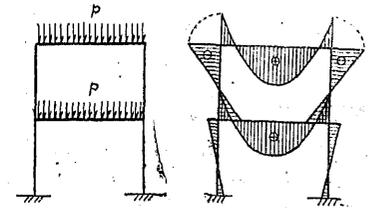
$$M_A = \frac{1}{84}pl^2$$

$$M_B^2 = -\frac{2}{84}pl^2$$

$$M_B = -\frac{84}{84}pl^2$$

$$M_B^2 = \frac{4}{84}pl^2$$

$$M_C = -\frac{5}{84}pl^2$$



第 141 圖 (d)

又桁の兩端より等距離に同じ大きさの荷重が荷せられたる場合は (第 141 圖 e)

$$N_1 = 3P_1 \frac{(l-a_1)}{l}, \quad N_2 = 3P_2 \frac{(l-a_2)}{l}$$

となり, 従つて

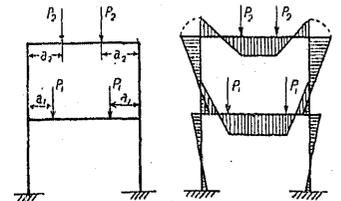
$$M_A = \frac{3P_1 a_1 (l-a_1) - P_2 a_2 (l-a_2)}{14l}$$

$$M_B^2 = -2M_A$$

$$M_B = -\frac{11P_1 a_1 (l-a_1) + P_2 a_2 (l-a_2)}{14l}$$

$$M_B^2 = \frac{5P_1 a_1 (l-a_1) + 3P_2 a_2 (l-a_2)}{14l}$$

$$M_C = -\frac{P_1 a_1 (l-a_1) + 9P_2 a_2 (l-a_2)}{14l}$$



第 141 圖 (e)

(f) 圖は (e) 圖の $P/2$ の代りに P を用ひたるものである。かゝる荷重方法を逆對稱と云ふ。この場合には

$$M_A = -M_{A'}, \quad M_B^* = -M_{B'}, \quad M_B = -M_{B'}$$

$$M_B^* = -M_{B'}, \quad M_C = -M_{C'}$$

なる關係あり。又角方程式より $\rho_3 = \rho_4 = 0$ なる關係あり。

A 點に對して $2h_1' M_A + h_1' M_B^* = -6EJ_c \rho_1$ 第 141 圖 (f)

B 點に對して $h_1' M_A + 2h_1' M_B^* + 2l' M_B + l' M_{B'} + 6 \frac{J}{l} \rho_1 = 6EJ_c (\rho_1 - \rho_2)$

B 點に對して $h_1' M_A + 2h_1' M_B^* + 2h_2' M_B^* + h_2' M_C = 6EJ_c (\rho_1 - \rho_2)$

C 點に對して $h_2' M_B^* + 2h_2' M_C + 2l' M_C + l' M_{C'} + 6 \frac{J}{l} \rho_2 = 6EJ_c (\rho_2 - \rho_4)$

今簡單のため $h_1 = h_2$ とし $\frac{6}{l} \rho_1 = N_1'$, $\frac{6}{l} \rho_2 = N_2'$ とし ρ を消去すれば

$$3kM_A + 3kM_B^* + M_B + N_1' = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$3kM_A + 3kM_B^* + 3kM_B^* + (3k+1)M_C + N_2' = 0 \dots\dots\dots (15)$$

但し $k = \frac{J_l}{J_h} \frac{h}{l}$

又平衡條件 1) より $M_B^* - M_B - M_{B'} = 0 \dots\dots\dots (16)$

平衡條件 2) より第 2 階に對して

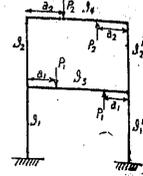
$$\frac{1}{h}(M_C - M_B) + \frac{1}{h}(-M_{C'} + M_{B'}) = 0 \quad \text{即ち} \quad M_C = M_B \dots\dots\dots (17)$$

第 1 階に對して $M_A = M_B^* \dots\dots\dots (18)$

この 5 個の式より $M_A, M_B^*, M_B, M_{B'}, M_C$ を求むれば

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{(6k+1)N_1' + N_2'}{36k^2 + 18k + 1} & M_{A'} &= -M_A \\ M_B^* &= M_A & M_{B'}^* &= -M_A = M_{A'} \\ M_B &= -\frac{(12k+1)N_1' + 6kN_2'}{36k^2 + 18k + 1} & M_{B'} &= -M_B \\ M_B^* &= \frac{6kN_1' - (6k+1)N_2'}{36k^2 + 18k + 1} & M_{B'}^* &= -M_B^* \\ M_C &= M_B & M_{C'} &= -M_B = M_{B'}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (IV)$$

荷 N_1', N_2' は逆對稱 (f) 圖の場合には



$$N_1' = P_1 a_1 \left(1 - \frac{a_1}{l}\right) \left(1 - \frac{2a_1}{l}\right) \quad N_2' = P_2 a_2 \left(1 - \frac{a_2}{l}\right) \left(1 - \frac{2a_2}{l}\right)$$

(a) 圖の場合を解くには (III) 式と (IV) 式とを加へ合すれば宜しい。但し

$$N_1 = 3 \frac{P_1}{2} a_1 \frac{(l-a_1)}{l} \quad N_2 = 3 \frac{P_2}{2} a_2 \frac{(l-a_2)}{l}$$

$$N_1' = \frac{P_1}{2} a_1 \left(1 - \frac{a_1}{l}\right) \left(1 - \frac{2a_1}{l}\right) \quad N_2' = \frac{P_2}{2} a_2 \left(1 - \frac{a_2}{l}\right) \left(1 - \frac{2a_2}{l}\right)$$

を用ふべきである。

71. 各種剛構の實用式 本項に於ける主なる記號は次の如し。

J = 桁の惰性率, A = 斷面積, E = 弾性率, $\alpha_t = 1^\circ\text{C}$ に對する線膨張係數,
 t = 無荷重の原状態に對する溫度差。

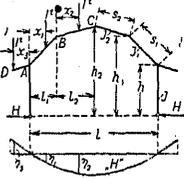
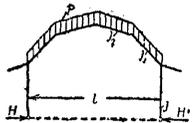
No.	剛構の型式及び荷状態	反力	彎曲率
1		$M_B = -\frac{P}{2l^2} a(l-a)(2l-a)$ $R_A = \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3 + \frac{6hJ}{A}}$ $R_A = P \frac{a^2(3l-a)}{2l^3}$	荷點に於ける彎曲率: $M_a = P \frac{a^2(3l-a)(l-a)}{2l^3}$ M_a 及び M_B は $\frac{6EJ}{A}$ を無視せる値なり。 M_a は正の最大彎曲率である。
2		$R_A = \frac{P^2(2l+3c)}{2l^3 + \frac{6hJ}{A}}$ $R_A = P \left(1 + \frac{3c}{2l}\right)$	$M_B = P \frac{c}{2}$
3		$R_A = \frac{6hJ}{A}$ を無視せる場合: $R_A = \frac{3}{2} \frac{Pe}{l^3} d(2l-d)$	$M_B = \frac{3}{2} \frac{Pe}{l^3} \left[(l-d)^2 - \frac{l^2}{3} \right]$ (d = B から腕木までの距離)

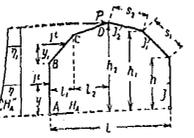
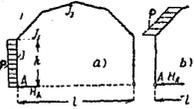
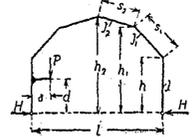
No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び剪力	彎曲率
4		$R_A = \frac{3pl^2}{8l^3 + \frac{24hJ}{A}}$ $\frac{24hJ}{A} \text{ を無視せる場合:}$ $R_A = \frac{3\gamma l}{8}, R_B = \frac{5pl}{8}$	$M_B = -\frac{\gamma l^2}{8}$ $\alpha = \frac{5}{8}l:$ $\max M = \frac{9}{128}pl^2$
		<p>撓度:</p> $y = -\frac{pl^4}{48EJ} \left[\frac{l-x}{l} - 3\left(\frac{l-x}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{l-x}{l}\right)^4 \right]$ $\alpha = 0.5785l: \quad \max y = \frac{\gamma l^4}{185EJ}$ <p>反曲点: $\alpha = \frac{l}{4}$</p>	
5		$R_A = \frac{pl^2c(4l+3c)}{4l^3 + \frac{12hJ}{A}}$ $\frac{12hJ}{A} \text{ を無視せる場合:}$ $R_A = pc \left(1 + \frac{3c}{4l} \right)$	$M_B = \frac{pc^2}{4}$
6	温度の變化の場合	$R_A^t = \frac{3EJ\alpha_1 th}{l^3 + \frac{3hJ}{A}}$ $\frac{3hJ}{A} \text{ を無視せる場合:}$ $R_A^t = \frac{3EJ\alpha_1 th}{l^3}$	$M_B^t = \frac{3EJ\alpha_2 th}{l^3}$
7	二脚対稱剛構 	<p>H の影響線:</p> <p>A-B: $\eta = \frac{\alpha(l-x)}{2hl} \nu$</p> <p>B-C: $\eta_1 = -\frac{\alpha_1}{2h} \nu$</p> $\nu = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{l} \frac{J_1}{J_2}}$	<p>注意:</p> <p>H を求める場合に軸力及び反力の影響を無視せり。</p>

No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
8		$H = -\frac{pl^2}{12h} \nu$ <p>ν: 7) と同じ</p>
9		$H = -\frac{pc^2}{4h} \nu$ <p>ν: 7) と同じ</p>
10		<p>H_A の影響線:</p> <p>A-C: $\eta = \left[\frac{1}{2} \frac{y}{h} \left(\frac{J_1}{J_2} \frac{h}{l} + 1 \right) - \frac{1}{8} \frac{y^3}{h^2 l} \frac{J_1}{J_2} \right] \nu$</p> <p>C-D: $\eta = 1 - \eta_1 = \frac{1}{2} - \frac{y_1}{2h} \nu$</p> <p>$\nu$: 7) と同じ</p>
11		<p>載荷状態 a): $H_A = ph \left(\frac{11}{24} \frac{J_1}{J_2} \frac{h}{l} + \frac{3}{4} \right) \nu$</p> <p>載荷状態 b): $H_A = pc \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{4h} \right) \nu$</p> <p>$\nu$: 7) と同じ</p>
12		$H = \frac{P\alpha\nu}{2h} \left[\frac{J_1}{J_2} \left(\frac{h}{l} - \frac{d^2}{hl} \right) + 1 \right]$ <p>ν: 7) と同じ</p>
13	$\pm t^\circ C$ の温度變化をなせる場合	$H_t = \pm \frac{EJ_1\alpha_1 t}{h^2} \nu$ <p>ν: 7) と同じ</p>
14	支點が Δl の水平移動をなせる場合	$H_{\Delta l} = \pm \frac{EJ_1\Delta l}{h^2 l} \nu$ <p>ν: 7) と同じ</p>

No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
15	<p>二脚非對稱剛構</p>	$\nu = 1 + k + k^2 + \frac{J}{J_1} \frac{h_1}{s} + k^2 \frac{J}{J_2} \frac{h_2}{s}, \quad k = \frac{h_2}{h_1}$ <p>H の影響線:</p> <p>A-B: $\eta = \frac{x(l-x)}{2h_1\nu} \left[k \left(1 + \frac{x}{l} \right) + \left(2 - \frac{x}{l} \right) \right]$</p> <p>C-A: $\eta_1 = -\frac{x_1}{2h_1\nu} (k+2)$</p> <p>B-D: $\eta_2 = -\frac{x_2}{2h_1\nu} (2k+1)$</p>
16		$H = \frac{pl^2}{8h_1\nu} (1+k)$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>
17		<p>A-C 間のみ載荷されたる場合:</p> $H = -\frac{pc_1^2}{4h_1\nu} (k+2)$ <p>B-D 間のみ載荷されたる場合:</p> $H = -\frac{pc_2^2}{4h_1\nu} (2k+1)$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>
18		$H_A = \frac{P}{(k-1)\nu} \left[\frac{h_2}{s} \frac{J}{J_2} k^2 (k-1) + k^2 - \frac{y}{2h_1} (k^2 + k + 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h_1} \right)^2 \right]$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>
19		$H_A = \frac{p(h_2-h_1)}{(k-1)\nu} \left[\frac{h_2}{s} \frac{J}{J_2} k^2 (k-1) + k^2 - \frac{(k+1)^2}{8} \right]$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>

No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
20		<p>載荷状態 a):</p> $H_A = 1 - \frac{ky}{2h_2\nu} \left[\frac{h_1}{s} \frac{J}{J_1} \left(3 - \frac{y^2}{h_1^2} \right) + k + 2 \right]$ <p>載荷状態 b):</p> $H_A = ph_1 \left\{ 1 - \frac{1}{8\nu} \left[5 \frac{h_1}{s} \frac{J}{J_1} + 2(k+2) \right] \right\}$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>
21		$H = \frac{3Pak}{2h_2\nu} \left[\frac{h_1}{s} \frac{J}{J_1} \left(1 - \frac{d^2}{h_1^2} \right) + \frac{k+2}{3} \right]$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>
22		<p>載荷状態 a):</p> $H_A = \left[\frac{h}{h_1} (2k+1) + k^2 \frac{J}{J_2} \frac{h_2}{s} \right] \frac{P}{2\nu}$ <p>載荷状態 b):</p> $H_A = \frac{pc}{2\nu} \left[\frac{h+h_2}{2h_1} (2k+1) + 2k^2 \frac{J}{J_2} \frac{h_2}{s} \right]$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>
23	<p>$\pm t^\circ C$ の温度變化をなせる場合</p>	$H_t = \pm \frac{3EJ\alpha t l}{h_1^2 s \nu}$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>
24	<p>支點が Δl の水平移動をなせる場合</p>	$H_{\Delta l} = \pm \frac{3EJ\Delta l}{h_1^2 s \nu}$ <p>ν 及び k: 15) と同じ</p>

No.	剛 構 の 型 式 及 び 載 荷 状 態	反 力 及 び 應 力
25	<p>二 鉸 脚 多 邊 剛 構</p> 	<p>H の 影 響 線 :</p> <p>A-B :</p> $\eta_1 = \frac{l_1}{4} \left\{ \frac{J}{J_1} s_1 \left[(h+h_1) \frac{x_1}{l_1} - h \left(\frac{x_1}{l_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{3} (h_1-h) \left(\frac{x_1}{l_1} \right)^3 \right\} + \frac{J}{J_2} s_2 (h_1+h_2) \left(\frac{x_1}{l_1} \right) \frac{1}{\nu}$ <p>B-C :</p> $\eta_2 = \frac{l_2}{4} \left\{ \frac{J}{J_1} \frac{s_1 l_1}{3 l_2} (h+2h_1) + \frac{J}{J_2} s_2 \left[(h_1+h_2) \left(\frac{l_1}{l_2} + \frac{x_2}{l_2} \right) - h_1 \left(\frac{x_2}{l_2} \right)^2 - \frac{1}{3} (h_2-h_1) \left(\frac{x_2}{l_2} \right)^3 \right] \right\} \frac{1}{\nu}$ <p>A-D :</p> $\eta_3 = -\frac{x_2}{4} \left[\frac{J}{J_1} s_1 (h+h_1) + \frac{J}{J_2} s_2 (h_1+h_2) \right] \frac{1}{\nu}$ <p>茲に $\nu = \frac{h^3}{3} + s_1 \frac{J}{J_1} \left[h h_1 + \frac{1}{3} (h_1-h)^2 \right] + \frac{J}{J_2} s_2 \left[h_1 h_2 + \frac{1}{3} (h_2-h_1)^2 \right]$</p>
26		$H = \frac{p}{6\nu} \left\{ \frac{J}{J_1} s_1 l_1 \left[\frac{3h+5h_1}{4} l_1 + (h+2h_1) l_2 \right] + \frac{J}{J_2} s_2 l_2 \left[\frac{3h_1+5h_2}{4} l_2 + \frac{3(h_1+h_2)}{2} (l_1^2+2l_1 l_2) \right] \right\}$ <p>ν : 25) と同じ</p>
27		<p>$H =$</p> $-\frac{1}{8} p c^2 \left[\frac{J}{J_1} s_1 (h+h_1) + \frac{J}{J_2} s_2 (h_1+h_2) \right] \frac{1}{\nu}$ <p>ν : 25) と同じ</p>

No.	剛 構 の 型 式 及 び 載 荷 状 態	反 力 及 び 應 力
28		<p>H_A の 影 響 線 :</p> <p>A-B :</p> $\eta = 1 - \frac{y}{4} \left\{ \frac{3h^2-y^2}{3} + \frac{J}{J_1} s_1 (h+h_1) + \frac{J}{J_2} s_2 (h_1+h_2) \right\} \frac{1}{\nu}$ <p>B-C :</p> $\eta = 1 - \frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{3} h^3 + \frac{J}{J_1} s_1 \left[(y_1+h) (h+h_1) - \frac{h}{h_1-h} y_1^2 - \frac{1}{3(h_1-h)} y_1^3 \right] + s_2 \frac{J}{J_2} (y_1+h) (h_1+h_2) \right\} \frac{1}{\nu}$ <p>ν : 25) と同じ</p> <p>D に 荷 重 有 る 場 合 : $H = -\frac{p}{2}$</p>
29		<p>載 荷 状 態 a) :</p> $H_A = p h \left\{ 1 - \frac{h}{8} \left[\frac{5}{6} h^2 + \frac{J}{J_1} s_1 (h+h_1) + \frac{J}{J_2} s_2 (h_1+h_2) \right] \right\} \frac{1}{\nu}$ <p>載 荷 状 態 b) :</p> $H_A = (h_1-h) \nu \left[1 - \frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{3} h^3 + \frac{J}{J_1} s_1 \left(\frac{5}{4} h_1 + h^2 + h^2 \right) + s_2 \frac{J}{J_2} (h_1+h_2) \frac{h+h_1}{2} \right\} \right] \frac{1}{\nu}$ <p>ν : 25) と同じ</p>
30		$H = \frac{P_1 l}{4} \left\{ (h^2-d^2) + s_1 \frac{J}{J_1} (h+h_1) + s_2 \frac{J}{J_2} (h_1+h_2) \right\} \frac{1}{\nu}$ <p>ν : 25) と同じ</p>

No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
	單脚梁支點剛構	H の影響線:
31		$A-B: \eta = \frac{x(l-x)(2l-x)}{2h_1 l^2} \nu$ $A-C: \eta_1 = -\frac{x_1}{h_1} \nu$ <p>茲に</p> $\nu = \frac{1}{1 + \frac{J_1}{J_2} \frac{h_1}{s}}$
32		<p>載荷状態 a): $HI = \frac{pl^2}{8h_1} \nu$</p> <p>載荷状態 b): $H = -\frac{pc^2}{2h_1} \nu$</p> <p>$\nu$: 31) と同じ</p>
33		<p>載荷状態 a):</p> $HI = \frac{[2h_1^3 - 3yh_1^2 + y^3] \frac{J_1}{J_2} + 2h_1(h_1 - y)s}{2h_1^2 s}$ <p>$y = h_1$ ならば: $H = 0$</p> <p>載荷状態 b):</p> $H = \frac{plh_1}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{h_1}{s} \frac{J_1}{J_2} \right) \nu$ <p>ν: 31) と同じ</p>
34		$H = \frac{Pa \left[3(h_1^2 - a^2) \frac{J_1}{J_2} + 2h_1 s \right]}{2h_1^2 s}$ <p>ν: 31) に同じ</p>

No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
	埋込單脚剛構	R_B の影響線:
35		$A-B: \eta = \frac{2x + \frac{J_2}{J_1} \frac{x^2 s}{h_1 l^2} \left(l - \frac{x}{3} \right)}{2l} \nu$ $A-C: \eta_1 = -\frac{3x_1}{l} \nu$ <p>茲に</p> $\nu = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{J_2}{J_1} \frac{s}{h_1}}$
36		<p>載荷状態 a):</p> $R_B = \left(1 + \frac{1}{4} \frac{J_2}{J_1} \frac{s}{h_1} \right) \frac{pl}{2} \nu$ <p>載荷状態 b):</p> $R_B = -\frac{pc^2}{2l} \nu$ <p>ν: 35) と同じ</p>
37		<p>載荷状態 a):</p> $R_B = \left[\frac{h_1}{2l} + \frac{y}{l} + \frac{y^2 s}{2h_1 l (h_2 - h_1)} \times \frac{J_2}{J_1} \left(1 - \frac{y}{3(h_2 - h_1)} \right) \right] \nu$ <p>載荷状態 b):</p> $R_B = \frac{p(h_2 - h_1)}{2l} \left[h_2 + \frac{1}{4} \frac{J_2}{J_1} \frac{s}{h_1} (h_2 - h_1) \right] \nu$ <p>ν: 35) と同じ</p>
38		<p>載荷状態 a): $\eta = \frac{2a^2}{2h_1 l} \nu$</p> <p>載荷状態 b): $R_B = \frac{plh_1^2}{6l} \nu$</p> <p>$\nu$: 35) と同じ</p>

No.	剛 構 の 型 式 及 び 載 荷 状 態	反 力 及 び 應 力
39		$R_B = \frac{P a d}{h_1 l} \nu$ $\nu: 35) \text{ と 同 じ}$
40	±t°C の温度變化をなせる場合	$R_B = \pm \frac{\alpha_t E J_2}{l^2} \frac{h_2}{h_1} \nu$ $\nu \text{ は } 35) \text{ と 同 じ}$

鉸節桁を有する埋込二脚剛構

41		<p>載荷状態 a): $M_A = P(1-\nu)h_1$ $M_B = P\nu h_2$</p> <p>載荷状態 b): $M_A = p(h_2 - h_1)h_1(1-\nu)$ $M_B = p(h_2 - h_1)h_2\nu$</p> <p>茲に $\nu = \frac{1}{1 + \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3}$</p>
----	--	--

42		<p>載荷状態 a): $M_A = p h_1 \left[\frac{y}{h_1} - \frac{\nu}{2} \left(\frac{y}{h_1} \right)^2 \left(3 - \frac{y}{h_1} \right) \right]$ $M_B = p h_2 \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{y}{h_1} \right)^2 \left(3 - \frac{y}{h_1} \right) \right]$</p> <p>載荷状態 b): $M_A = \frac{p h_1^2}{8} (4 - 3\nu), \quad M_B = \frac{3 p h_1 h_2}{8} \nu$ $\nu: 41) \text{ と 同 じ}$</p>
----	--	--

No.	剛 構 の 型 式 及 び 載 荷 状 態	反 力 及 び 應 力
43		$M_A = P a \left\{ 1 - \frac{3\nu}{2} \left[2 \frac{d}{h_1} - \left(\frac{d}{h_1} \right)^2 \right] \right\}$ $M_B = P a \frac{h_2}{h_1} \left[2 \frac{d}{h_1} - \left(\frac{d}{h_1} \right)^2 \right] \frac{3\nu}{2}$ $\nu: 41) \text{ と 同 じ}$
44		$M_A = P h_1 \left[\frac{a}{h_1} + 1 - \nu \left(\frac{3}{2} \frac{a}{h_1} + 1 \right) \frac{h_2}{h_1} \right]$ $M_B = P h_2 \left(\frac{3}{2} \frac{a}{h_1} + 1 \right) \nu$ $\nu: 41) \text{ と 同 じ}$
45	t°C の温度上昇をなせる場合 (温度降下の場合は符號は反對)	$M_A = \frac{3 \alpha_t E J_1 l}{h_1^2} \nu$ $M_B = \frac{3 \alpha_t E J_1 h_2}{h_1^2} \nu$ $\nu: 41) \text{ と 同 じ}$
埋込二脚剛構		
46		$M_A = \frac{P a b}{2l} \frac{5\nu - 1 + 2 \frac{a}{l} (2 + \nu)}{(2 + \nu)(1 + 6\nu)}$ $M_B = \frac{P a b}{2l} \frac{3 + 7\nu - 2 \frac{a}{l} (2 + \nu)}{(2 + \nu)(1 + 6\nu)}$ $H = \frac{3 P a b}{2 h_1 l (2 + \nu)} \quad \text{茲に } \nu = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}$
47		$M_A = M_B = \frac{p l^2}{12(2 + \nu)}, \quad H = \frac{p l^2}{4 h (2 + \nu)}$ $\nu: (46) \text{ に 同 じ}$

No.	剛構の型式 及び載荷状態	反力及び應力
48		$M_A = -\frac{P y^2}{2h} \left[\frac{2h}{y} \frac{3+2\nu-\frac{y}{h}(1+\nu)}{2+\nu} - \frac{3\nu}{1+6\nu} \right]$ $M_B = +\frac{P y^2}{2h} \left[\frac{3+2\nu-\frac{y}{h}(1+\nu)}{2+\nu} - \frac{3\nu}{1+6\nu} \right]$ $H_B = \frac{P \left(\frac{y}{h}\right)^2}{2(2+\nu)} \left[3(1+\nu) - \frac{y}{h}(1+2\nu) \right]$ <p style="text-align: center;">ν: 46) と同じ</p>
49		$M_A = -\frac{p h^2}{24} \left(12 - \frac{9+5\nu}{2+\nu} - \frac{12\nu}{1+6\nu} \right)$ $M_B = +\frac{p h^2}{24} \left(\frac{9+5\nu}{2+\nu} - \frac{12\nu}{1+6\nu} \right)$ $H_B = \frac{p h}{8} \frac{3+2\nu}{2+\nu}$ <p style="text-align: center;">ν: 46) と同じ</p>
50	<p>函形剛構*</p>	$V = \frac{2a a' \left(\frac{b}{2} - a\right) b \frac{J_v}{J_u}}{b^3 \left(b \frac{J_v}{J_o} + 6h + b \frac{J_v}{J_u}\right)}$ $H = \frac{9}{2} \frac{a a' b \frac{J_v}{J_u} \left(h + b \frac{J_v}{J_o}\right)}{b h \left[\left(2h + 3b \frac{J_v}{J_o}\right) \left(2h + 3b \frac{J_v}{J_u}\right) - h^2 \right]}$ $M = -\frac{3}{2} \frac{a a' b h \frac{J_v}{J_u}}{b \left[\left(2h + 3b \frac{J_v}{J_o}\right) \left(2h + 3b \frac{J_v}{J_u}\right) - h^2 \right]}$ <p style="text-align: center;">隅彎曲率:</p> $M_1 = M + V \frac{b}{2} + H h, \quad M_2 = M - V \frac{b}{2} + H h$ $M_3 = M + V \frac{b}{2}, \quad M_4 = M - V \frac{b}{2}$

* 函形剛構はすべて内側に張力を生ずる如き彎曲率を正とす。

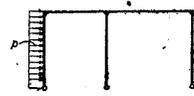
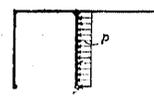
No.	剛構の型式 及び載荷状態	反力及び應力
51		$V = W \frac{h_1}{b} \frac{b \frac{J_v}{J_u} + 3h}{b \frac{J_v}{J_o} + 6h + b \frac{J_v}{J_u}}$ $H = W \frac{h_1}{2h}, \quad M = 0$ $M_1 = -M_2 = -\frac{1}{2} (W h_1 - V b)$ $M_3 = -M_4 = -\frac{1}{2} V b.$ <p>頂隅に於ける水平移動:</p> $\delta = \frac{W h_1 h}{12 E J_v} \left[\frac{\left(b \frac{J_v}{J_u} + 3h\right) \left(b \frac{J_v}{J_o} + 3h\right)}{b \frac{J_v}{J_o} + 6h + b \frac{J_v}{J_u}} - h \right]$
52		$M_1 = \frac{p}{12} \frac{l^2 + b^2 k}{1+k}$ $k = \frac{J_2}{J_1} \frac{b}{l}$
53		$M_1 = \frac{p}{12} \frac{l^2 + 2b^2 k}{1+2k}$ $M_2 = \frac{p}{12} \frac{l^2 + (3l^2 - b^2) k}{1+2k}$ <p>緊張棒の受る張力 = $\frac{p}{2l} \frac{2l^2 + (5l^2 - b^2) k}{1+2k}$</p> $k = \frac{J_2}{J_1} \frac{b}{l}$
54		$M_1 = \frac{p}{12} \frac{3l^2 + 5b^2 k}{3+5k}$ $M_2 = \frac{p}{12} \frac{3l^2 + (6l^2 - b^2) k}{3+5k}$ <p>緊張棒の受る張力 = $\frac{p}{2l} \frac{6l^2 + (11l^2 - l^2) k}{3+5k}$</p> $k = \frac{J_2}{J_1} \frac{b}{l}$

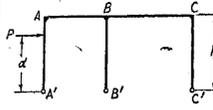
No.	剛構の型式 及び載荷状態	反力及び應力
55	<p>拋物線形屋根の剛構</p>	<p>1) 鉸脚 $k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}$</p> <p>載荷状態 a): $H = \frac{5Pab}{2l^3} \frac{3hl^2 + 2f(ab + l^2)}{5h^2(3+2k) + 4f(5h+2f)}$ $V_A = \frac{Pb}{l}$ </p> <p>載荷状態 b): $H = \frac{pl^2}{4} \frac{5h+4f}{5h^2(3+2k) + 4f(5h+2f)}$ $V_A = \frac{pl}{2}$ </p> <p>載荷状態 c): $H = \frac{pl^2}{8} \frac{5h+4f}{5h^2(3+2k) + 4f(5h+2f)}$ $V_A = \frac{3}{8} pl$ </p> <p>載荷状態 d): $H = \frac{5Pl}{2h} \frac{3h^2(1+k) + 2fh - d^2k}{5h^2(3+2k) + 4f(5h+2f)}$ $V_A = -V_B = -\frac{Pd}{l}$ </p> <p>載荷状態 e): $H = \frac{5pl^2}{8} \frac{h(6+5k) + 4f}{5h^2(3+2k) + 4f(5h+2f)}$ $V_A = -V_B = -\frac{pl^2}{2l}$ </p>
56		<p>2) 埋込脚</p> <p>載荷状態 a): $H = \frac{Pab}{2hl} \left[5 \frac{1+\alpha-\alpha^2}{\rho} \frac{f}{h} \right. \\ \left. + \frac{3+2\varphi}{4} \frac{f}{h} (1+\alpha-\alpha^2) \right] \\ \left. + \frac{3(1+2k) - \varphi(3k-2\frac{f}{h})}{3(1+2k) - \varphi(3k-2\frac{f}{h})} \right]$ </p>

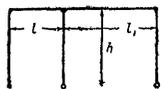
No.	剛構の型式 及び載荷状態	反力及び應力
56		$M_A = \frac{Pab}{2l} \left[5 \frac{1+\alpha-\alpha^2}{\rho} \frac{f}{h} \frac{1-2\alpha}{1+6k} \right. \\ \left. - (1-\varphi) \frac{3+2\varphi \frac{f}{h} (1+\alpha-\alpha^2)}{3(1+2k) - \varphi(3k-2\frac{f}{h})} \right]$
	<p>茲に $k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}$, $\varphi = \frac{5}{2\rho} (3k - 2\frac{f}{h})$</p> <p>$\alpha = \frac{a}{l}$ $\rho = 5k + 4(\frac{f}{h})$</p> <p>載荷状態 b):</p>	$H = \frac{pl^2}{2h} \left[\frac{1}{\rho} \frac{f}{h} + \frac{\varphi}{10} \frac{5+4\varphi \frac{f}{h}}{3(1+2k) - \varphi(3k-2\frac{f}{h})} \right]$
		$M_A = \frac{pl^2}{2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{f}{h} \frac{1-\varphi}{10} \frac{5+4\varphi \frac{f}{h}}{3(1+2k) - \varphi(3k-2\frac{f}{h})} \right]$
		$H = \frac{pl^2}{4h} \left[\frac{1}{\rho} \frac{f}{h} + \frac{\varphi}{10} \frac{5+4\varphi \frac{f}{h}}{3(1+2k) - \varphi(3k-2\frac{f}{h})} \right]$
		<p>載荷状態 c):</p> $M_A = \frac{pl^2}{4} \left[\frac{1}{\rho} \frac{f}{h} - \frac{1}{16(1+\varphi)} \right. \\ \left. - \frac{1-\varphi}{10} \frac{5+4\varphi \frac{f}{h}}{3(1+2k) - \varphi(3k-2\frac{f}{h})} \right]$
		<p>載荷状態 d): $\delta = d/h$</p> $H = \frac{P^2}{2} k \left[\frac{5}{2} \frac{3-\delta}{\rho} \right. \\ \left. + \frac{\varphi(1-\frac{\delta}{3}) - 1}{3(1+2k) - \varphi(3k-2\frac{f}{h})} \right]$

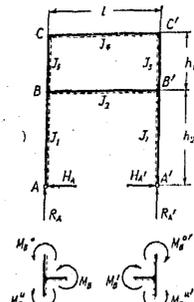
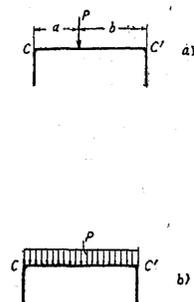
No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
56		$M_A = -\frac{\gamma \delta^2 h}{2} k \left[\frac{2}{\delta k} - \frac{3}{1+(k-\frac{5}{2}\frac{3-\delta}{\rho})} + 3(1-\varphi) \frac{\varphi \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) - 1}{3(1+2k) - \varphi \left(3k - 2\frac{f}{h}\right)} \right]$ <p>載荷状態 e):</p> $H = \frac{\gamma h}{8} k \left[\frac{15}{2\rho} + \varphi \frac{3\varphi - 4}{3(1+2k) - \varphi \left(3k - 2\frac{f}{h}\right)} \right]$ $M_A = -\frac{\gamma h^2}{8} \left[\frac{4}{k} - \frac{4}{1+6k} - \frac{15}{2\rho} + (1-\varphi) \frac{3\varphi - 4}{3(1+2k) - \varphi \left(3k - 2\frac{f}{h}\right)} \right]$
57	<p>鉸脚二徑間連構</p>	$M_A = -\frac{3P\alpha(1-\alpha)}{2} \frac{\{J_4 - 2(1+\alpha)L_4\}}{N}$ $M_B^L = -\frac{P\alpha(1-\alpha)}{2} \frac{\{2(1+\alpha)L_2 - 3L_1\}}{N}$ $M_B^R = -\frac{P\alpha(1-\alpha)}{2} \frac{\{2(1+\alpha)R_2 - 3R_3\}}{N}$ $M_B^L = M_B^R - M_B^T$ $M_C = -\frac{3P\alpha(1-\alpha)}{2} \frac{\{T - 2(1+\alpha)R_3\}}{N}$ $R_A = P(1-\alpha) + \frac{M_B^L - M_A}{l}$ $R_B = P\alpha + \frac{M_A - M_B^L}{l} + \frac{M_C - M_B^R}{l_1}$ $R_C = -\frac{M_C - M_B^R}{l_1}$ $H_A = -\frac{M_A}{h}, H_B = -\frac{M_B^L}{h}, H_C = -\frac{M_C}{h}$

No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
57		<p>茲に $\alpha = a/l, k = \frac{J_2}{J_4} \frac{l_1}{l}, k_1 = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}$ $k_2 = \frac{J_2}{J_3} \frac{h}{l}, k_3 = \frac{J_2}{J_5} \frac{h}{l}$ $S = 3k + k k_2 + k_3,$ $\nu_1 = \frac{l_1}{l}, K = k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1, \nu = \frac{l}{l_1}$ $N = (1+k)(3S+4K) + 3k k_1 (1+k) + 3k_3 (1+4k)$ $L_1 = 2S + 2k_3 - k L_0 \quad L_0 = S + k_3$ $R_1 = 2S + 2k k_1 - R_0 \quad R_0 = S + k k_1$ $L_2 = 3S + 2K + 3(2k k_1 + k_3) \quad L_3 = 3k + 4k_3$ $R_2 = 3S + 2K + 3(k k_1 + 2k_3) \quad R_3 = 3 + 4k_1$ $L_4 = 2S + 3k(1+2k_1) \quad L_7 = 3k + 2k_3$ $R_4 = 2S + 3(k + 2k_3) \quad R_7 = 3 + 2k_1$ $L_5 = 4S + 3k_2 + 4k_3(1+k) \quad L_8 = 6k + 5k_3$ $R_5 = 4S + 3 + 4k_1(1+k) \quad R_8 = 6 + 5k_1$ $T = 4S - 3k, U = k_3 - k k_1, T_1 = 2S - 3k$</p>
58		$M_A = -\frac{\gamma l^2}{4} \frac{L_4 - 3L_0}{N} \quad M_B^L = -\frac{\gamma l^2}{4} \frac{L_2 - L_1}{N}$ $M_B^R = -\frac{\gamma l^2}{4} \frac{R_2 - R_3}{N} \quad M_B^T = M_B^L - M_B^R$ $M_C = \frac{\gamma l^2}{4} \frac{3R_3 - T}{N}$ $R_A = \frac{\gamma l}{2} + \frac{M_B^L - M_A}{l}$ $R_B = \frac{\gamma l}{2} + \frac{M_A - M_B^L}{l} + \frac{M_C - M_B^R}{l_1}$ $R_C = \frac{M_C - M_B^R}{l_1}$ $H_A = -\frac{M_A}{h}, H_B = -\frac{M_B^L}{h}, H_C = -\frac{M_C}{h}$ <p>各符號寸法等は (57) と同じ</p> <p>各常数: (57) と同じ</p>

No.	剛構の型式 及び載荷状態	反力及び應力
59	 <p>各符號寸法等 57) と同じ</p>	$M_A = \frac{Ph^2}{8} \frac{(2T_1L_0 - k_1L_4)}{N}$ $M_B^* = -\frac{Ph^2}{8} \frac{(4L_2 - L_1R_3)}{N}$ $M_B^* = \frac{Ph^2}{8} \frac{(R_3R_2 - 4R_2)}{N}$ $M_B^* = M_B^* - M_B^*$ $M_C = -\frac{Ph^2}{8} \frac{(2T_1R_3 + k_1T)}{N}$ $R_A = -\frac{M_A - M_B^*}{l}$ $R_B = -\frac{M_B^* - M_C}{l_1} + \frac{M_A - M_B^*}{l}$ $R_C = \frac{M_B^* - M_C}{l_1}$ $H_A = -\left(\frac{Ph}{2} + \frac{M_A}{h}\right)$ $H_B = -\frac{M_B^*}{h} \quad H_C = -\frac{M_C}{h}$ <p>各常数: 57) と同じ</p>
60	 <p>各符號寸法等は 57) と同じ</p>	$M_A = -\frac{3Ph^2}{8} \frac{(S+k)}{N} L_0$ $M_B^* = \frac{Ph^2}{8} \frac{\{2L_3L_7 - 4kL_2 - k_2(L_3 - L_1)\}}{N}$ $M_B^* = -\frac{Ph^2}{8} \frac{\{2R_3R_7 - 4R_3 - k_2(R_3 - R_1)\}}{N}$ $M_B^* = M_B^* - M_B^*$ $M_C = \frac{3Ph^2}{8} \frac{(S+k)R_3}{N}$ $R_A = -\frac{M_A - M_B^*}{l}$ $R_B = -\frac{M_B^* - M_C}{l_1} + \frac{M_A - M_B^*}{l}$ $R_C = \frac{M_B^* - M_C}{l_1}$

No.	剛構の型式 及び載荷状態	反力及び應力
60		$H_B = -\frac{M_A}{h} \quad H_B = -\frac{M_B^*}{h} - \frac{Ph}{2}$ $H_C = -\frac{M_C}{h}$ <p>各常数: 57) と同じ</p>
61	 <p>各符號寸法等は 57) と同じ</p>	$M_A = \frac{Pl}{2} \frac{\{T_1L_0 - (1-\delta^2)L_4k_1\}}{N}$ $M_B^* = -\frac{Pl}{2} \frac{\{L_3L_7 - 2kL_2 - (1-\delta^2)L_1k_1\}}{N}$ $M_B^* = \frac{Pl}{2} \frac{\{R_3R_7 - 2R_2 + (1-\delta^2)R_3k_1\}}{N}$ $M_B^* = M_B^* - M_B^*$ $M_C = -\frac{Pl}{2} \frac{\{T_1R_3 + (1-\delta^2)Tk_1\}}{N}$ $R_A = \frac{M_B^* - M_A}{l}$ $R_B = \frac{M_A - M_B^*}{l} - \frac{M_B^* - M_C}{l_1}$ $R_C = \frac{M_B^* - M_C}{l_1}$ $H_A = -P(1-\delta) - \frac{M_A}{h}$ $H_B = -\frac{M_B^*}{h} \quad H_C = -\frac{M_C}{h}$ <p>茲に $\delta = d/h$. その他常数: 57) と同じ. 特別の場合 (P が A 點に作用せる場合):</p> $\delta = d/h = 1 \text{ となり,}$ $M_A = \frac{Ph}{2} \frac{T_1L_0}{N}$ $M_B^* = -\frac{Ph}{2} \frac{(L_3L_7 - 2kL_2)}{N}$ $M_B^* = \frac{Ph}{2} \frac{(R_3R_7 - 2R_2)}{N}$ $M_B^* = M_B^* - M_B^*$

No.	剛構の型式 及び載荷状態	反力及び應力
61		$M_C = -\frac{Ph}{2} \frac{T_1 R_0}{N}$ $R_A = \frac{M_B^* - M_A}{l}$ $R_B = \frac{M_A - M_B^*}{l} - \frac{M_B^* - M_C}{l_1}$ $R_C = \frac{M_B^* - M_C}{l_1}$ $H_A = -\frac{M_A}{h} \quad H_B = -\frac{M_B^*}{h}$ $H_C = -\frac{M_C}{h}$
62	<p>$t^\circ\text{C}$ の温度上昇をなせる 場合</p>  <p>各符號は 57) と同じ</p>	$M_A = -\frac{3EJ_2 \alpha t}{h} \frac{(L_2 + \nu_1 T)}{N}$ $M_B^* = +\frac{3EJ_2 \alpha t}{h} \frac{(L_1 + \nu_1 L_2)}{N}$ $M_B^* = +\frac{3EJ_2 \alpha t}{h} \frac{(R_2 + \nu_1 R_1)}{N}$ $M_B^* = M_B^* - M_B^*$ $M_C = -\frac{3EJ_2 \alpha t}{h} \frac{(T + \nu_1 R_2)}{N}$ $R_A = \frac{M_B^* - M_A}{l}$ $R_B = \frac{M_A - M_B^*}{l} + \frac{M_C - M_B^*}{l_1}$ $R_C = \frac{M_B^* - M_C}{l_1}$ $H_A = -\frac{M_A}{h} \quad H_B = -\frac{M_B^*}{h}$ $H_C = -\frac{M_C}{h}$ <p>各常数: 57) と同じ</p>

No.	剛構の型式 及び載荷状態	反力及び應力
63	<p>鉸脚二階剛構</p> 	<p>載荷状態 a):</p> $R_A = P(1-\alpha), \quad R_A' = P\alpha, \quad H_A = H_A' = \frac{M_B^*}{h}$ $M_B^* = M_B^* = \frac{3Pa(1-\alpha)}{2} \frac{k_1 \lambda}{N}$ $\frac{M_B^*}{M_B^*'} > = \frac{Pa(1-\alpha)\lambda}{2} \left[\frac{k_1(3+2k)}{N} - \frac{1-2\alpha}{N_1} \right]$ $M_B = M_B^* - M_B^* \quad M_B' = M_B^* - M_B^*$ $M_C > = -\frac{Pa(1-\alpha)\lambda}{2} \left[\frac{2(3k+2kk_1+3k_1)}{N} - \frac{1-2\alpha}{N} \right]$
64		<p>載荷状態 b):</p> $R_A = R_A' = \frac{Pl}{2}, \quad H_A = H_A' = \frac{M_B^*}{h}$ $M_B^* = M_B^* = \frac{Pl^2}{4} \frac{k_1 \lambda}{N}$ $M_B = M_B' = -\frac{Pl^2}{6} \frac{k_1 \lambda}{N}$ $M_B^* = M_B^* = M_B^* - M_B$ $M_C = M_C' = -\frac{Pl^2}{6} \frac{\lambda(3k+2kk_1+3k_1)}{N}$ <p>茲に $\alpha = a/l$ $\lambda = \frac{J_2}{J_4}$</p> $k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l} \quad k_1 = \frac{J_2}{J_3} \frac{h_1}{l}$ $N = (3k+2kk_1+3k_1)(k_1+2\lambda) + kk_1$ $N_1 = 1+6k_1+\lambda$ $\nu = h/h_1$ <p>載荷状態 a):</p> $R_A = P(1-\alpha), \quad R_A' = P\alpha, \quad H_A = H_A' = +\frac{M_B^*}{h}$ $M_B^* = M_B^* = -\frac{3Pa(1-\alpha)}{2} \frac{k_1(k_1+2\lambda)}{N}$

No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
64		$\begin{aligned} M_B^0 &> + \frac{Pa(1-\alpha)}{2} \left[\frac{2k(2k_1+3\lambda)}{N} \right. \\ M_B^0 &< \left. \pm \frac{1-2\alpha}{N_1} \right] \\ M_B &= M_B^0 - M_B^c \quad M_{B'} = M_B^0 - M_B^c \\ M_C &> - \frac{Pa(1-\alpha)}{2} \left[\frac{2kk_1}{N} \mp \frac{1-2\alpha}{N_1} \right] \\ M_{C'} &< \\ \text{載荷状態 b):} \\ R_A &= R_{A'} = \frac{pl}{2}, \quad H_A = H_{A'} = \frac{M_B^0}{h} \\ M_B^0 &= M_{B'}^0 = - \frac{pl^2}{4} \frac{k_1(k_1+2\lambda)}{N} \\ M_B &= M_{B'} = M_B^0 - M_B^c \\ M_B^0 &= M_{B'}^0 = \frac{pl^2}{6} \frac{k(2k_1+3\lambda)}{N} \\ M_C &= M_{C'} = - \frac{pl^2}{6} \frac{kk_1}{N} \end{aligned}$ <p>各符號寸法等は (63) と同じ</p> <p>各常數: (63) と同じ.</p>
65		<p>載荷状態 a):</p> $\begin{aligned} R_A &= -R_{A'} = - \frac{Pl_1(1+\nu)}{l}, \quad H_A = -H_{A'} = P/2 \\ M_B^0 &= Pl/2 \quad M_{B'}^0 = -Pl/2 \\ M_B^0 &= - \frac{Pl_1}{2} \frac{(3k_1+\lambda-\nu)}{N_1} \\ M_{B'}^0 &= + \frac{Pl_1}{2} \frac{(3k_1+\lambda-\nu)}{N_1} \\ M_B &= M_B^0 - M_B^c \quad M_{B'} = M_{B'}^0 - M_{B'}^c \\ M_C &= \frac{Pl_1(3k_1+1+\nu)}{2} \frac{1}{N_1}, \quad M_{C'} = - \frac{Pl_1(3k_1+1+\nu)}{2} \frac{1}{N_1} \end{aligned}$ <p>載荷状態 b):</p> $\begin{aligned} R_A &= -R_{A'} = - \frac{pl_1^2(1+2\nu)}{2l} \end{aligned}$ <p>各符號寸法等は (63) と同じ</p>

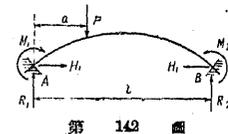
No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
65		$\begin{aligned} H_A &= - \frac{P}{h} \quad H_{A'} = \frac{M_B^0}{h} \\ M_B^0 &> \pm \frac{ph_1^2}{8} \left[4\nu \mp \frac{k_1(k_1+3\lambda)}{N} \right] \\ M_{B'}^0 &< \\ M_B &> \pm \frac{ph_1^2}{4} \left[\frac{4k_1(1+3\nu)+\lambda(1+2\nu)}{N_1} \right. \\ M_{B'} &< \left. \pm \frac{kk_1(k_1+3\lambda)}{3N} \right] \\ M_B^0 &= M_B^c - M_B \quad M_{B'}^0 = M_{B'}^c - M_{B'} \\ M_C &> \pm \frac{ph_1^2}{4} \left[\frac{2k_1+1+2\nu}{N_1} \right. \\ M_{C'} &< \left. \mp \frac{k_1(6k_1+2kk_1+3k_1)}{6N} \right] \end{aligned}$ <p>各符號寸法等は (63) と同じ</p> <p>各常數: (63) と同じ.</p>
66		<p>載荷状態 a):</p> $\begin{aligned} R_A &= -R_{A'} = -Pl/h, \quad H_A = -H_{A'} = -P/2 \\ M_B^0 &= -M_{B'}^0 = +Pl/2 \\ M_B^0 &= -M_{B'}^0 = Pl/2N_1 \\ M_B &= -M_{B'} = \frac{pl}{2} \frac{6k_1+\lambda}{N_1} \\ M_C &= -M_{B'} = Pl/2N_1 = M_B^0 = -M_{B'}^0 \end{aligned}$ <p>載荷状態 b):</p> $\begin{aligned} R_A &= -R_{A'} = -pl^2/2l \\ H_A &= \frac{pl}{2} + \frac{M_B^0}{h} \quad H_{A'} = \frac{M_{B'}^0}{h} \\ M_B^0 &> \pm \frac{pl^2}{8} \left[\frac{2(6k_1+\lambda)}{N_1} \mp \frac{kk_1(k_1+2\lambda)}{N} \right] \\ M_{B'}^0 &< \\ M_B^0 &> \pm \frac{pl^2}{8} \left[\frac{2}{N_1} \mp \frac{k(2k_1+3\lambda)}{N} \right] \\ M_{B'}^0 &< \\ M_B^0 &= M_B + M_B^c, \quad M_{B'}^0 = M_{B'} + M_{B'}^c \\ M_C &> \pm \frac{pl^2}{8} \left[\frac{2}{N_1} \pm \frac{kk_1}{N} \right] \\ M_{C'} &< \end{aligned}$ <p>各符號寸法等は (63) と同じ</p> <p>各常數: (63) と同じ.</p>

No.	剛構の型式及び載荷状態	反力及び應力
67	+t°Cの温度の上昇をな る場合 各符號寸法等は (63) と 同じ	$H_A = H_{A'} = + \frac{M_B^0}{h}$ $M_B^0 = M_{B'}^0 = - \frac{3EJ_2 \alpha t}{h} \frac{k k_1 + 2}{N} + \lambda(2k_1 + 3)$ $M_B = M_{B'} = - \frac{3EJ_2 \alpha t}{h} \frac{k_1(2\lambda + k_1)}{N}$ $M_B^0 = M_{B'}^0 = - \frac{3EJ_2 \alpha t}{h} \frac{(2k_1 + 3\lambda)}{N}$ $M_C = M_{C'} = \frac{3EJ_2 \alpha t}{h} \frac{k_1}{N}$ <p>各常数: (63) に同じ。 温度下降の場合には彎曲率の各符號は反對にすべし。</p>

第 8 章 曲桁又は拱

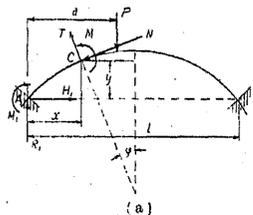
第 1 節 曲桁の應力

72. 曲桁の反力 曲桁の上に荷重が載るときその兩端に於て生ずる反力は通常の直桁の場合の反力 R_1, R_2 (これを拱では垂直反力といふ) の外に鉸支點では水平反力 H_1 があり定端支點では更に此の外端力率 M_1, M_2 が起る。之等の正の値を第 142 圖の如く定む。

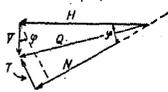


第 142 圖

73. 曲桁の彎曲率, 垂面推力及び接面力 曲桁の任意の點に於ては上述の荷重及び反力の爲めに彎曲率 M , 垂面推力 N 及び接面力 T が生ずる。之等の正の値を第 143 圖 (a) に示す様に決める。



今 N と T との合力を Q としこれを水平及び垂直に分解すれば H 及び V となる (第 143 圖 b)。



(b)
第 143 圖

C (x, y の點) に於て ΔC 側の外力の力率を

とれば彎曲率 M は

$$\left. \begin{aligned} M &= M_1 + R_1 x - H_1 y & [x < a] \\ M &= M_1 + R_1 x - H_1 y - P(x-a) & [x > a] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

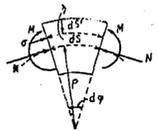
C 點に於ける垂面推力は $N = V \sin \phi + H \cos \phi$,
然るに $H = H_1$, V は $x < a$ では R_1 に等しく $x > a$ では $R_1 - P$ に等しき故

$$\left. \begin{aligned} N &= R_1 \sin \phi + H_1 \cos \phi & [x < a] \\ N &= (R_1 - P) \sin \phi + H_1 \cos \phi & [x > a] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

C 點に於ける接面力 T は $T = V \cos \phi - H \sin \phi$ なる故

$$\left. \begin{aligned} T &= R_1 \cos \phi - H_1 \sin \phi & [x < a] \\ T &= (R_1 - P) \cos \phi - H_1 \sin \phi & [x > a] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

74. 曲桁の應力 曲桁の斷面に起る垂面應力 σ は彎曲率 M 及び垂面推力 N から生ずる。今曲桁の一小部分をとり第 144 圖に示せる様な M, N, σ を正とすれば s, s' と ϕ とは反對向の方向が正なる故



第 144 圖

$$ds' = \left(1 + \frac{\eta}{\rho}\right) ds = ds - \eta d\phi$$

此の部分にフックの彈性法則を應用すれば

$$\sigma = -E \frac{\delta(ds')}{ds'} \quad \text{但し } \delta \text{ は彈性による變化量を示す。}$$

而して

$$\delta(ds') = \delta(ds) - \eta \delta(d\phi)$$

$$\therefore \sigma = E \left\{ - \frac{\delta(ds)}{ds} + \frac{\delta(d\phi)}{ds} \eta \right\} \frac{\rho}{\rho + \eta} \dots\dots\dots (4)$$

此式に於ける $-\frac{\delta(ds)}{ds}$ は中立軸上の壓縮率であつて $\frac{\delta(d\phi)}{ds}$ は拱角の變化率を示す。今 $-\frac{\delta(ds)}{ds} \equiv X$, $\frac{\delta(d\phi)}{ds} \equiv Y$ と置けば

$$N = \int_{(A)} \sigma dA = E \left\{ X \int_{(A)} \frac{\rho}{\eta + \rho} dA + Y \int_{(A)} \frac{\rho \eta}{\eta + \rho} dA \right\}$$

$$M = \int_{(A)} \sigma \eta dA = E \left\{ X \int_{(A)} \frac{\rho \eta}{\rho + \eta} dA + Y \int_{(A)} \frac{\rho \eta^2}{\rho + \eta} dA \right\}$$

にして $\int_{(A)} dA = A$, $\int_{(A)} \eta dA = G$, $\int_{(A)} \frac{\rho \eta^2}{\rho + \eta} dA = J$ とすれば

$$N = E \left\{ X \left(A - \frac{G}{\rho} + \frac{J}{\rho^2} \right) + Y \left(G - \frac{J}{\rho} \right) \right\}$$

$$M = E \left\{ X \left(G - \frac{J'}{\rho} \right) + Y J' \right\}$$

中立軸が拱肋の中心を通るときは上式の断面静力率 G は 0 である。 J' は断面の慣性率 J に似た値であつて之を準慣性率と呼び ρ が大なるときはこれは J と一致する。今 $G=0, J'=J$ として X, Y を求めれば

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\delta(ds)}{ds} &= X = \frac{N}{EA} + \frac{M}{EA\rho} \\ \frac{\delta(d\varphi)}{ds} &= Y = \frac{N}{EA\rho} + \frac{M}{EJ} + \frac{M}{EA\rho^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

故に (4) に於て ρ が η に對して大なる故

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} \frac{\rho\eta}{\rho + \eta} + \frac{M}{A\rho} \frac{N}{A} + \frac{M}{J} \eta + \frac{M}{A\rho} \dots\dots (6)$$

(6) 式の第 1 項は短柱の應力、第 2 項は直桁の彎曲垂面應力であり、第 3 項が曲桁特有の項である。これは拱の半徑 ρ が充分大ならば無視してもよい故通常の拱では兩端より應力を受ける直桁と同一の垂面應力を生ずるものと見て (7) 式を使つてよい。

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} \eta \dots\dots (7)$$

上下の縁 $\eta = +y_0$ (重心軸より上縁に向ふ方向を $+\eta$ とする), $\eta = -y_u$ に於ける最大縁應力を夫々 σ_o 及び σ_u とすれば

$$\sigma_o = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} y_0, \quad \sigma_u = \frac{N}{A} - \frac{M}{J} y_u \dots\dots (8)$$

重心軸に関する断面係数を Z_o 及び Z_u とすれば $J/y_0 = Z_o, J/y_u = Z_u$ にして

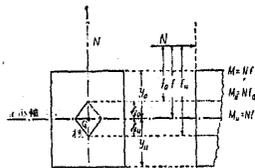
$$\sigma_o = \frac{N}{A} + \frac{M}{Z_o}, \quad \sigma_u = \frac{N}{A} - \frac{M}{Z_u} \dots\dots (9)$$

又重心軸より上下の核半徑を夫々 k_o 及び k_u とすれば (第 145 圖)

$$k_o = \frac{J}{y_u A} = \frac{Z_u}{A}, \quad k_u = \frac{J}{y_o A} = \frac{Z_o}{A}$$

此の k_o, k_u を以て σ_o, σ_u を表すに $M = Nf, M_o = Nf_o, M_u = Nf_u$ (第 145 圖) なるを以て

$$\left. \begin{aligned} \sigma_o &= \frac{Nf_u}{k_u A} = \frac{M_u}{Z_o} \\ \sigma_u &= -\frac{Nf_o}{k_o A} = -\frac{M_o}{Z_u} \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$



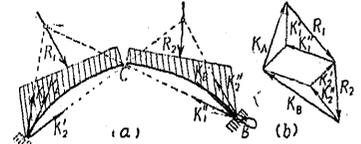
第 145 圖

M_o 及び M_u を核點彎曲率と云ふ。拱の問題は先づ核點彎曲率を求めて最大縁應力を求めるを便利とする事多し。

接面應力の計算には直桁の場合に於ける剪力 S の代りに接面力 T を用ひて τ を計算すればよい。拱の場合には通常この接面應力はあまり重要でない。

第 2 節 三 鉸 拱

75. 靜荷重をうける三鉸拱 1) 反力 反力は第 146 圖の如く圖式的に求むるを便とす。 R_1 及び R_2 を夫々鉸 C の左及び右に於ける外力の合力とすれば先づ R_1 のみによる反力 K_1' 及び K_1'' を C 點即ち鉸に於ける彎曲率が 0 と云ふ條件の下に求む。次で R_2 のみによる反力 K_2' 及び K_2'' を求む。



第 146 圖

K_1', K_1'' を求むるには先づ B 支點と C とを結ぶ即ち之れによつて K_1'' の方向がわかる。 K_1' の方向は R_1 と BC 線の延長との交點と A 支點とを結ぶ。 K_1' 及び K_1'' の大きさは (b) 圖の如く力の多角形より求むることを得。同様にして R_2 のみによる反力 K_2' 及び K_2'' を求めらる。 K_1' と K_2' との合力が A 支點の反力 K_A であり K_1'' 及び K_2'' との合力が B 支點の反力 K_B となる。

垂直荷重を載せたる場合解析的に解くには垂直反力は A 又は B に就て凡ての外力の力率をとつて 0 と置くことにより、水平反力 H は C に就て CB 部分 (又は AC 部分) の外力の力率をとることにより求めらる (第 147 圖)。

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{1}{l} \sum_0^l p(l-u) + H \tan \alpha, & R_B &= \frac{1}{l} \sum_0^l p(u) - H \tan \alpha \\ H &= \frac{\sum c}{f} \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

茲に $\sum c$ は C の片側に於ける凡ての垂直力の C 點に関する力率である。

三鉸拱は靜定構造物である。

2) 剪力及び垂面推力 任意の方向に載荷されたる場合には力の分解を圖式的に行ひ又垂直荷重の載せられたる場合は解析的に解くを便とす。

第 147 圖に於て反力は垂直分力 R_A 及び R_B 及び AB を結べる方向で互に相等しき H' なる分力に分けることを得。故に

$$H' \cos \alpha = H \dots\dots (12)$$

茲に α は AB と水平との挟む角である。

i 點に於ける垂直なる剪力 \bar{S}_x は $\bar{S}_x = \bar{S}_x + H' \sin \alpha = \bar{S}_x + H \tan \alpha$

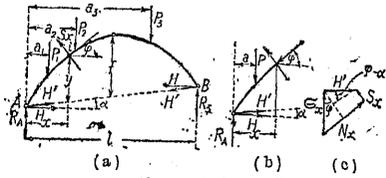
茲に \bar{S}_x は AB なる單桁を考へたる場合の剪力である。

拱の剪力 (接面力) S_x は (c 圖参照)

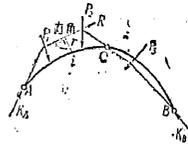
$$S_x = \bar{S}_x \cos \phi - H \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (13)$$

又垂面推力 N_x は

$$N_x = \bar{S}_x \sin \phi + H \frac{\cos(\phi - \alpha)}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (14)$$



第 147 圖



第 148 圖

3) 彎曲率 任意方向に荷重されたる場合に第 148 圖の如く圖式的に解くを便とす。先づ K_A, K_B なる反力を求め K_A, P_1 の合力 R_1 の大きき及び其方向を求め R_1, P_2 の合力 R_2 の大きき及びその方向を順次求むるのである。點の彎曲率 (i 點は拱肋断面の重心軸上の點又は格點) は

$$M_x = Rr$$

茲に R は i 點の左の反力及び外力の合力にして r はその合力への i 點よりの距離である

垂直荷重の場合には第 147 圖の如く i 點の彎曲率 M_x は

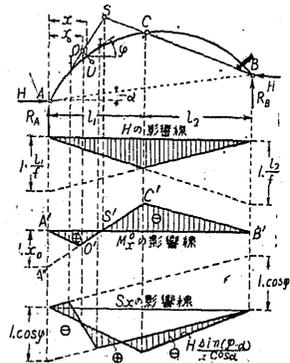
$$M_x = \bar{M}_x - Hy \dots \dots \dots (15)$$

茲に \bar{M}_x は AB を單桁と考へたる場合の i 點の彎曲率である。

76. 三鉸拱の影響線 第 149 圖は水平反力 H , 彎曲率 M_x^0 (左支點 A より α の距離の核點彎曲率) 及び拱の剪力 S_x の影響線である。

H の影響線は頂點を鉸の眞下に持つ三角形である。(1) 式によりすべての垂直力の C 點に與ふる單桁としての彎曲率を f で割つたものであるから單桁の彎曲率の影響線を求むると全く同じ。即ち左端に於て $1 \cdot l_1/f$ 右端に於て $1 \cdot l_2/f$ を一邊とする様な 2 つの三角形から第 149 圖の如く作る。

M_x^0 の影響線は (15) 式によつて AB を單



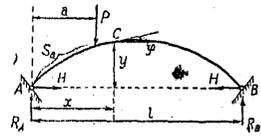
第 149 圖

桁と考へた場合の彎曲率より Hy を差引けば宜し、この場合 y は考へてゐる i 點の座標を表はすもので一定である。従て Hy は H の影響線の頂點を y 倍せる三角形であり \bar{M}_x は左端に於て $1 \cdot x_0$ を切る三角形である。之を差引せるものが第 149 圖であるが之を畫くには BC の延長と AO の延長とが交る點 S を求む。S に荷重されたる場合には反力は AS の方向となる故 O 點に彎曲率を與へず。故に S の眞下に 0 の影響を與ふ依て A'A'' を $1 \cdot x_0$ にとり A'' と S の眞下の點 S' と結び延長して C' を得。A'O'C'B' が求むる影響線である。

S_x の影響線は (13) 式により AB を單桁と考へた剪力を $\cos \phi$ 倍せるものより $H \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\cos \alpha}$ を引けば宜しい。 $\frac{\sin(\phi - \alpha)}{\cos \alpha}$ は i 點に於て一定であるから $H \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\cos \alpha}$ もやはり三角形である。兩支點 A 及び B の支點反力の影響線は (11) 式により $R_A = R_A' + H \tan \alpha$, $R_B = R_B' - H \tan \alpha$ より求めらる。但し R_A', R_B' は AB を單桁として考へたる場合の A 及び B 點の反力である。

第 3 節 二鉸拱

77. 二鉸拱の反力及び應力 二鉸拱は 1 次の不靜定構である。通常この不靜定量は水平反力 H を選ぶ。即ち靜定基本系は單桁と考ふことが出来る。



第 150 圖

垂直反力は

$$R_A = \sum P \frac{l-a}{l}, \quad R_B = \sum P \frac{a}{l} \dots \dots (16)$$

水平反力 H は 61. (6) 式の彈性方程式に於て H の作用點即ち支點が移動せざるものとするれば

$$\int \frac{MM_1}{EJ} ds + \int \frac{NN_1}{EA} ds - \int N_1 \alpha_i ds = 0$$

の式より求むることを得。

但し M, N は不靜定構に於て與へられたる外力及び温度變化によつて起る彎曲率及び垂面推力であり M_1 及び N_1 は基本系に $H = -1$ のみ作用せる場合の彎曲率及び垂面推力である。積分は拱の全長に就て行ふべきである。

* 61. (7) 式は $\dots + \int N_1 \alpha ds$ なれども一般に伸びの場合を正の働となせる故に垂面推力に壓力を正とすれば温度による項のみは前に負號を付すべし。他の 2 項はいづれも結局自乘の項となる故如何なる運轉方向直應力方向を正號とするも結果には變化なし。

今 M_0 及び N_0 を静定基本系に於て與へられたる外力による彎曲率及び垂面推力とすれば (拱が割合平で $\frac{f}{l} < \frac{1}{8}$ の場合)

$$M = M_0 - Hy, \quad N = N_0 + H \cos \varphi$$

$$M_1 = +y, \quad N_1 = -\cos \varphi.$$

故に彈性方程式に $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$ を應用して解けば

$$H = \frac{\int \frac{M_0 x l}{EJ} ds - \int \frac{N_0 x l}{EA} + \alpha_t l}{\int \frac{y^2}{EJ} ds + \int \frac{\cos \varphi}{EA} dx} \dots \dots \dots (17)$$

若し温度變化なく第 150 圖の如く單一垂直荷重が作用せる場合は

$$H = \frac{\frac{p}{2} \left[\int_0^{s_a} \frac{xy ds}{J} + a \int_{s_a}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{J} ds - \int_0^{s_a} \frac{\sin \varphi}{A} dx \right]}{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y^2}{J} ds + \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{\cos \varphi}{A} dx} \dots \dots \dots (18)$$

又 N の影響は通常小なる故に分子の N に関する項を無視し分母に於ても第 2 項は第 1 項に比し小なる故 A 及び $\cos \varphi$ は平均値を用ひて十分に平均値を $A \int \cos \varphi = A'$ と置き温度變化なしとすれば

$$H = \frac{\frac{p}{2} \left[\int_0^{s_a} \frac{xy}{J} ds + a \int_{s_a}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{J} ds \right]}{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y^2}{J} ds + \frac{l}{2A'}} \dots \dots \dots (19)$$

一般に近似計算として次式を用ふ (但し l の割に f の小なる橋梁等の如く $f < \frac{1}{8} l$ なる平なる拱に限る).

$$H = \frac{\int \frac{My}{EJ} ds + \alpha_t l}{\int \frac{y^2}{EJ} ds + \frac{l}{EA'}} \dots \dots \dots (20)$$

H の影響線 $P=1$ なる移動荷重がある場合には

$$H = \frac{\int \frac{My}{EJ} ds}{\int \frac{y^2}{EJ} ds + \frac{l}{EA'}} = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}}$$

$\delta_{m1} = \int \frac{My}{EJ} ds$ は $H=-1$ が支點に作用せる場合 $P_m=1$ の荷力點 m に於ける垂直方向の撓みと考ふことを得. [30. 3) 4) 及び 62. 3) 参照]

$\delta_{11} = \int \frac{y^2}{EJ} ds + \frac{l}{EA'}$ は荷重には無關係の項である, 即ち水平反力 H は δ_{m1} に比例す.

今拱の形及び断面が $J \cos \varphi = J_0$ なる如く假定することの出来るものとし $\delta_{m1} = EJ_0 \int \frac{My ds}{EJ}$, $\delta_{11} = EJ_0 \int \frac{y^2}{EJ} ds + \frac{l}{EA'}$ と置けば

$$H = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} = \frac{\int My dx}{\int y^2 dx + \frac{J_0 l}{A'}} \dots \dots \dots (21)$$

78. 拋物線拱 拱が拋物線形ならば水平反力 H の影響線は (21) 式に於て

$$\delta_{m1} = \frac{f l^2}{8} \omega_p'', \quad \delta_{11} = \frac{8}{15} f^2 l + \frac{J_0 l}{A'} = \frac{8 f^2 l}{15 \nu}, \quad \text{茲に } \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J_0}{A' f^2}}$$

依て

$$H = \frac{5}{8} \frac{l}{f} \omega_p'' \nu \dots \dots \dots (22)$$

而して $\omega_p'' = \omega_R (1 + \omega_R)$, $\omega_R = \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}$ なる故又

$$H = \frac{5}{8} \frac{l}{f} \left[\left(\frac{a}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{a}{l} \right)^3 + \left(\frac{a}{l} \right) \right] \nu \dots \dots \dots (23)$$

と書くことを得. H の影響線は (22) 式より ω の表を用ひて計算するが便利である.

第 151 圖の如く H の影響線が求められるれば核點彎曲率の影響線は

$$M_0 = M_0 - Hy_0 = y_0 \left(\frac{M_0}{y_0} - H \right)$$

$$M_u = M_u - Hy_u = y_u \left(\frac{M_u}{y_u} - H \right)$$

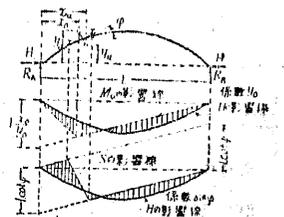
より求むることを得.

接面力 (剪力) の影響線は

$$S = S \cos \varphi - H \sin \varphi = \sin \varphi (S \cot \varphi - H)$$

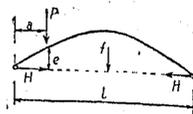
より求むる事を得.

低拋物線拱に關する數式を整理すれば垂直集中荷重に對して



第 151 圖

$$H = \sum P \frac{5}{8} \frac{l}{f} \left[\left(\frac{a}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{a}{l} \right)^3 + \left(\frac{a}{l} \right) \right] \nu$$



第 152 圖

茲に

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J_c}{f^2 A'}}$$

温度變化に對して

$$H = \frac{15}{8} \frac{E J_c}{f^2} \alpha_t t \nu$$

左支點より x の點迄等布荷重 p に對して

$$H = \frac{p x^2}{8f} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 - \frac{5}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{5}{2} \right] \nu$$

$x=l$ 即ち滿載等布荷重に就ては

$$H = \frac{p l^2}{8f} \nu$$

$x=0$ より $x=l/2$ 迄即ち拱半分だけの等布荷重に就ては

$$H = \frac{p l^2}{16f} \nu, \quad M_x = \frac{p x}{8} [3l - 4x - 2(l-x)] \nu \quad (x < \frac{l}{2}, x \text{ は左支點より測る.})$$

$$M_{x'} = \frac{p x'}{8} [l - 2(l-x')] \nu \quad (x' < \frac{l}{2}, x' \text{ は右支點より測る.})$$

支點間を應張棒(タイ)を以て連結したる二鉸拱の場合にも同様の式を用ふることを得。但しこの場合の ν は次の値をとるべし。

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8f^2} \left(\frac{J_c}{A'} + \frac{J_c}{A_t} \right)} \quad \text{茲に } A_t \text{ は緊張棒の斷面積}$$

79. 圓形拱 集中荷重による水平反力は(第 153 圖)

$$H = \frac{(R-f) \{ 2e + \varphi(l-2a) - \varphi_0 l \} + \alpha(l-a)}{2\nu} P.$$

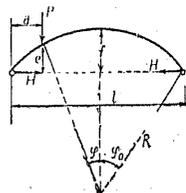
茲に

$$\nu = \varphi_0 \{ R^2 + 2(R-f)^2 \} - \frac{3}{2} l(R-f)$$

温度變化による水平反力

$$H = \frac{\alpha_t l E J_c}{R \nu}$$

但し低圓形拱の場合には低拋物線拱に殆ど近似せる形なる故に低拋物線拱に導ける式をそのまま用ふることを得。

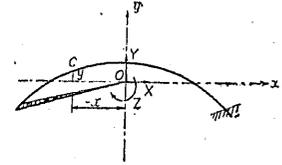


第 153 圖

第 4 節 無鉸拱

80. 無鉸拱の反力及び應力 兩端にて固定せられ鉸なき拱は 3 次不靜定である。

之を解くに一端を固定し(第 154 圖右端)他端を一點 O と剛結し、O 點に X, Y, Z なる不靜定量を加へたる靜定基本系を考へる。この靜定基本系は突桁である。O 點は如何なる點にても差支へなきも計算に便利なる如く定むるのである。



第 154 圖

M_1, M_2 及び M_3 を夫々 $X=-1, Y=-1$ 及び $Z=-1$ のみが作用せる場合の任意點の彎曲率とし N_1 を $X=-1$ のみが作用せる時の任意點の垂直推力とす。 N_2 及び N_3 (夫々 $Y=-1$ 及び $Z=-1$ のみが作用せる場合の垂直推力) は比較的小なるを以て 0 と假定す。更に M 及び N を靜定基本系に於て荷重 P のみによる彎曲率及び垂直推力とす。

然るときは 61. (7) 式によつて彈性方程式として次の 3 つを得。

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{\mathcal{M} M_1}{EJ} ds + \int \frac{\mathcal{N} N_1}{EA} ds - \int N_1 \alpha_t t ds - X \left[\int \frac{M_1^2 ds}{EJ} + \int \frac{N_1^2 ds}{EA} \right] &= 0 \\ \int \frac{\mathcal{M} M_2}{EJ} ds - Y \int \frac{M_2^2}{EJ} ds &= 0, \quad \int \frac{\mathcal{M} M_3}{EJ} ds - Z \int \frac{M_3^2}{EJ} ds &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$

但し上式は O 點が次の式を満足すべき様定めたるなり。

$$\int \frac{M_1 M_2}{EJ} ds = 0, \quad \int \frac{M_2 M_3}{EJ} ds = 0, \quad \int \frac{M_3 M_1}{EJ} ds = 0 \dots \dots \dots \text{(II)}$$

扱 $M_1=1 \cdot y, M_2=-1 \cdot x, M_3=-1$ なる故此の關係を (II) に入れ又 E を全長につき一様なりとすれば

$$\int \frac{x y}{J} ds = 0, \quad \int \frac{x}{J} ds = 0, \quad \int \frac{1}{J} ds = 0 \dots \dots \dots \text{(III)}$$

(III) 式が O 點を定むる條件である。即ち $1/J$ 倍の拱の軸線の重心點が O である。相乗率も 0 となるべきにより X, Y 座標軸は共扼である様に撰ぶ。對稱拱の場合には Y 軸は拱を對稱に左右に分つ線で X 軸は拱の重心 O を通り支點を結ぶ弦に平行となる。(I) 式を解きて所要の不靜定量を解く事を得。即ち

$$X = \frac{\int \frac{\mathcal{M} M_1}{J} ds + E \alpha_t l}{\int \frac{M_1^2}{J} ds + \frac{l}{A}}, \quad Y = \frac{\int \frac{\mathcal{M} M_2}{J} ds}{\int \frac{M_2^2}{J} ds}, \quad Z = \frac{\int \frac{\mathcal{M} M_3}{J} ds}{\int \frac{M_3^2}{J} ds} \text{ (24)}$$

$\int \frac{\mathcal{M}N_1}{EA} ds$ は比較的小なる故無視する. 近似的に積分の値を次の如く置くことを得

$$-\int N_1 \alpha_t ds \cong 1 \cdot \alpha_t l \quad \int \frac{N_1^2}{EA} ds \cong 1 \cdot \frac{l}{EA}$$

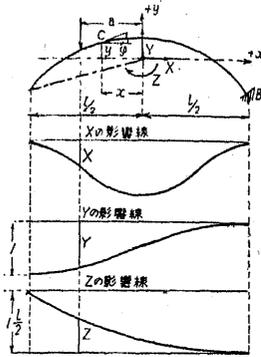
故に任意点 (x, y) に於ける彎曲率 M_x 及び垂面推力 N_x は

$$M_x = \mathcal{M} - Xy + Yx + Z, \quad N_x = \mathcal{N} + X \cos \varphi + Y \sin \varphi \dots (25)$$

X, Y 及び Z の影響線 $P=1$ なる單位荷重が拱の上を移動する場合に XYZ の變化即ち X, Y 及び Z の影響線を求めるに, 今 $J \cos \varphi = J_c$ 又 E は拱の全長につき一様なりと假定すれば

$$\frac{ds}{J} = \frac{ds \cos \varphi}{J_c} = \frac{dx}{J_c} \quad \text{となり (I) 式より}$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\int \mathcal{M}y dx}{\int y^2 dx + \frac{J_c l}{A}} \\ Y &= \frac{-\int \mathcal{M}x dx}{\int x^2 dx} \\ Z &= \frac{-\int \mathcal{M} \cdot 1 \cdot dx}{\int dx} \end{aligned} \right\} \dots (26)$$



第 155 圖

を得. \mathcal{M} は右端を埋込とせる突桁に於て荷重によりて起されたる彎曲率で x 及び y は拱の形状が與へられたるとき定まるものである. $\int \mathcal{M}M dx$ の計算には第 14 表 $\int M_i M_j ds$ の表を用ふるが便利である (x, y の原點は拱の軸線の重心を用ふ). 第 155 圖は低拋物線拱の X, Y 及び Z の影響線の形状を示してある.

81. 拋物線拱 拱の形状が拋物線なるときは (26) 式より各不靜定量 X, Y 及び Z の影響線を定むる式は次の如し.

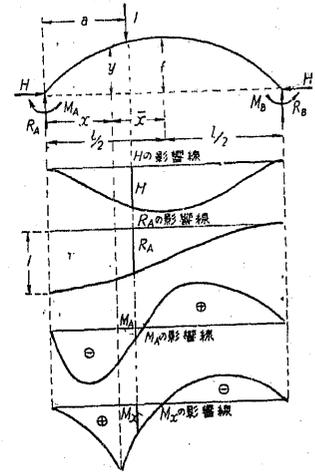
$$X = \frac{15l}{4f} \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right] \eta, \quad Y = \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2 \left(1 + 2\frac{\alpha}{l}\right), \quad Z = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2$$

茲に

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \frac{J}{f^2 A}}$$

此等の値より第 156 圖に於て A 支點の各反力を H_A, R_A 及び M_A とすれば

$$\left. \begin{aligned} H_A &= X = \frac{15l}{4f} \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right] \eta \\ R_A &= Y = \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2 \left(1 + 2\frac{\alpha}{l}\right) \\ M_A &= Z + X \frac{2}{3} f - Y \frac{l}{2} \\ &= l \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{l}\right) \left[\frac{5}{2} \left(\frac{\alpha}{l}\right) \eta - 1\right] \end{aligned} \right\} (27)$$



第 156 圖

又右支點の各水平及び垂直反力, 力率を H_B, R_B 及び M_B とすれば (27) 式の α を $l - \alpha$ と置き換へたる物となるべきことは勿論にして $H_A = H_B$ なり.

又任意点 (x, y) の彎曲率は

$$\left. \begin{aligned} M_x &= l \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2 \left[\frac{x}{l} + \left(\frac{2x}{l} - 1\right) \frac{\alpha}{l} \right. \\ &\quad \left. - \eta \left(\frac{15y}{4f} - \frac{5}{2}\right) \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right] \quad [\alpha > x] \dots (28) \end{aligned} \right\}$$

但し (28) 式の座標 (x, y) は A 又は R を原點とした場合にして, 考へてゐる点 C (x, y) より右に荷重ある場合は α 及び x は左支點 A より測るべく, C 点より左に荷重ある場合は α 及び x は右支點 B より測るべきものとす. 故に α は常に x より大なり. (27) 及び (28) 式より第 156 圖の如く H_A, R_A, M_A, M_x の影響線を畫く事を得.

温度變化による反力は

$$\left. \begin{aligned} X_t &= \frac{45 E J \alpha_t t}{4 f^2} \eta, & Y_t &= 0, & Z_t &= 0 \\ M_A^t &= \frac{15 E J \alpha_t t}{2 f} \eta, & H_t &= X_t = \frac{45 E J \alpha_t t}{4 f^2} \eta. \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

滿載等布荷重が載れる場合水平及び垂直反力を H_G 及び R_{AG} とすれば

$$H_G = X_G = \frac{p l^2}{8 f}, \quad R_{AG} = \frac{f l}{2} \dots (30)$$

p は單位長さに対する荷重とする. 任意點の彎曲率を M_{xy} とすれば

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= \frac{p l^3}{24} \left[1 - 12 \left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^2\right] (1 - \eta) \quad \left[\text{但し } \bar{x} = \frac{l}{2} - x\right] \\ \text{頂點に於て} & \quad M_s = \frac{p l^3}{24} (1 - \eta) \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

支點彎曲率を $M_{A\theta} = M_{B\theta}$ とすれば

$$M_{A\theta} = -\frac{\eta l^2}{12}(1-\eta) \dots\dots\dots (32)$$

又左半分に等布荷重が載れる場合水平反力 H_y は

$$H_y = X_y = \frac{\eta l^2}{16f}\eta, \quad \eta: \text{單位長さにつきての荷重} \dots\dots\dots (33)$$

任意點の彎曲率 M_x は荷重されたる左半分の部分に於て

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{\eta l^2}{96} \left[2(1-\eta) + 9\frac{\bar{x}}{l} - 24(2-\eta)\left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^2 \right] \quad \left[\text{但し } \bar{x} = \frac{l}{2} - x \right] \\ \max M_x &= \frac{64-37\eta}{3072}\eta l^2 \quad \left[x = \frac{5}{16}l \text{ の點} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

載荷されざる右半分の部分に就きて

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{\eta l^2}{96} \left[2(1-\eta) + 9\frac{\bar{x}}{l} + 24\eta\left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^2 \right] \quad \left[\text{但し } \bar{x} = \frac{l}{2} - x \right] \\ \max M_x &= -\frac{10+37\eta}{3072}\eta l^2 \quad \left[x = \frac{11}{16}l \text{ の點} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

支點彎曲率は

$$M_A = -\frac{11-8\eta}{192}\eta l^2 \quad [\text{左}], \quad M_B = \frac{-5+8\eta}{192}\eta l^2 \quad [\text{右}] \dots\dots\dots (36)$$

垂直反力は

$$R_A = \frac{13}{32}\eta l, \quad R_B = \frac{3}{32}\eta l \dots\dots\dots (37)$$

82. 圓形拱 半徑を R , 拱矢 f なる第 157 圖の如き圓形拱に於ては (但し $N=0$ と假定す)

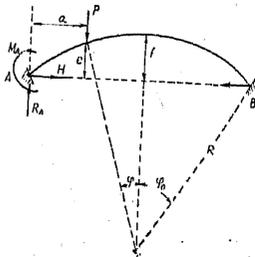
$$H = \frac{le + \left(\frac{l}{2} - a\right) \left\{ \varphi l - \varphi_0(l-2a) \right\} - \varphi_0 a(l-a)}{\varphi_0 \{ 2R^2 \varphi_0 + l(R-f) \} - l^2} P.$$

$$M_A = \left(\frac{l}{2\varphi_0} - R + f \right) H +$$

$$\frac{(l-2a)(2R^2\varphi_0 - le)\varphi_0 - 2\varphi_0\varphi R^2l - \{ 2R^2\varphi_0 - l(R-f) \} \{ 2\varphi a + l(\varphi_0 - \varphi) - 2e \}}{4\varphi_0 \{ 2R^2\varphi_0 - l(R-f) \}} P$$

$$R_A = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\{ 2\varphi R^2 - (l-2a)(R-f+e) \} + 2e(l-2a)}{2\{ 2R^2\varphi_0 - l(R-f) \}} \right\} P.$$

$$H_t = \frac{2\alpha_t l E J \varphi_0}{R \{ \varphi_0 \{ 2\varphi_0 R^2 + l(R-f) \} - l^2 \}}, \quad M_t = H_t \frac{l - 2\varphi_0(R-f)}{2\varphi_0}.$$



第 157 圖

第 9 章 勢力式による解法

第 1 節 弾性變形の勢力

83. 弾性變形の勢力 弾性體の一部が變形して伸縮率 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ 剪變形率 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ を生ずるとき此れ等に應ずる垂面應力を $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 剪應力を $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ とするときは單位容積の弾性變形の勢力は

$$\frac{1}{2}(\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \dots\dots\dots (1)$$

である。 $dx \times dy \times dz$ の要素部分に於ける勢力は

$$dK = \frac{1}{2} dxdydz(\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \dots\dots\dots (2)$$

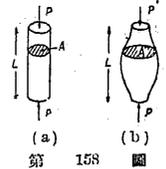
故に弾性體全體に於ては

$$K = \frac{1}{2} \int \int \int dxdydz(\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \dots\dots\dots (3)$$

K を弾性變形の勢力又は内働といふ。

84. 直應力を受けた弾性體の内働 直應力を受けた弾性體の斷面積を A とすれば變形率はフックの法則により

$$\epsilon = \frac{P}{EA}$$
$$\sigma = \frac{P}{A}$$



第 158 圖

應力は

故に單位容積に於ける弾性變形の勢力は

$$\frac{1}{2}\sigma\epsilon = \frac{P^2}{2EA^2} \dots\dots\dots (4)$$

斷面不變の弾性體に於ては弾性體全體の内働は (第 158 圖 a)

$$K = \frac{1}{2}\sigma\epsilon A L = \frac{P^2}{2EA} L \dots\dots\dots (5)$$

斷面變化せる場合の全體の内働は (第 158 圖 b)

$$K = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dL \dots\dots\dots (6)$$

85. 彎曲率に因る桁の内働 彎曲率 M の爲めに桁の任意の點に起る垂面應力は

$$\sigma_x = -\frac{M}{J}y$$

茲に J は桁の断面の慣性率, y は中立軸よりの距離.

同じく伸縮率は

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

故に此の點に於ける單位容積の内働は

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ^2} y^2 \dots\dots\dots (7)$$

桁の斷面積を A , 全長を l とすれば桁全體の内働は (第 159 圖)

$$K = \int_{(1)} \int_{(1)} \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ^2} y^2 dA dx$$

然るに $\int_{(1)} y^2 dA = J$ なる故

$$K = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dx \dots\dots\dots (8)$$

86. 剪力に因る桁の内働 剪應力 τ と剪變形率 γ との關係は G を剛性係數とすれば $\tau = G\gamma$.

故に單位容積内に於ける内働は

$$\frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$$

$dA dx$ なる要素部分に於ける内働は

$$dK = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dA dx$$

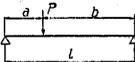
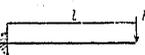
桁全體に對しての内働は (第 160 圖)

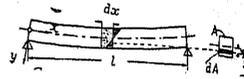
$$K = \int_{(1)} \int_{(1)} \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dx dA$$

然るに $\int_{(1)} \tau dA = S$ [但し S は剪力] なる故に

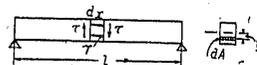
$$K = \int_0^l \alpha \frac{S^2}{2GA} dx \quad \left[\text{但し } \alpha = \frac{1}{S^2} \int_{(1)} \tau^2 dA \right] \dots\dots\dots (9)$$

87. 桁の内働の例 單桁及び突桁の内働はそれぞれ次の如くなる.

單	桁		$K = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl}$
突	桁		$K = \frac{Pl^3}{6EJ}$



第 159 圖

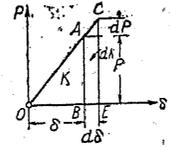


第 160 圖

第 2 節 最小仕事の原理

88. カステリアノの定理 彈性體に外力 P が働いて彈性變形をなしその働點が δ の變位をした際に微小なる變位 $d\delta$ が加はつた爲めに生ずる彈性變形の勢力の變化 dK は第 161 圖に於て ACD の三角形を $ABCDE$ に比して微量と考へれば

$$dK = P d\delta \quad \therefore \frac{dK}{d\delta} = P \dots\dots\dots (10)$$



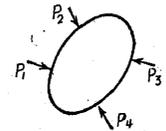
第 161 圖

然るに $\triangle OAB \sim \triangle ACD$ なる故

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta}{P} \quad \therefore \frac{dK}{dP} = \delta \dots\dots\dots (11)$$

即ち内働を外力について微分するときはその外力の働點の變位を得. 第 162 圖の如く $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ と多數の外力あるときこの中の P_n が dP_n 丈増加した際の内働は

$$K + \frac{\partial K}{\partial P_n} dP_n \dots\dots\dots (I)$$



第 162 圖

然るに内働はこれに加はる外力の順序には無關係なる故, 今最初に dP_n なる外力を彈性體にかけ然る後に P_1, P_2, P_3, \dots 等を加へたと假定すれば, その爲めに起る内働は

$$K + dP_n \delta_n \dots\dots\dots (II)$$

この K は $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ の dP_n を除いて全部の外力の爲めに起る内働であつて, $dP_n \delta_n$ は最初から加はつてゐた爲め後に P_n が加はつてその働點が δ_n 丈動いたとすれば dP_n の爲めに自然これ丈の内働が加はるわけである, 但し最初に dP_n 丈かけたために起つた働點の變位 $d\delta_n$ は δ_n に比して微量なる爲め無視する. (I) (II) は等しかるべきにより

$$\frac{dK}{\partial P_n} = \delta_n \dots\dots\dots (12)$$

即ち多數の外力によつて起る彈性體の變形の場合にもその内の任意の外力について内働を微分すればその外力の働點の變位が得られる. この事は外偶力が働く場合も同様で只その際には角變位即ち廻轉の量が出る. 上の定理をカステリアノの定理といふ.

89. 最小仕事の原理 カステリアノの定理に於て外力 P_n を變位の起らざる様なものにとれば當然

$$\frac{\partial K}{\partial P_n} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

故に今構造物の不明の反力又は應力等を X, Y, Z, \dots としそれ等の働く點が不動と考へれば

$$\frac{\partial K}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial Z} = 0, \quad \text{等} \dots\dots\dots (14)$$

此等の式は何れも X, Y, Z, \dots に就いて 1 次式であつて式の數と X, Y, Z, \dots の數とは等しい故この聯立方程式を解けば X, Y, Z, \dots を求めることが出来る。此れを**最小仕事の原理**といふ。これは不靜定應力の計算に用ひて便である。

第 3 節 最小仕事の原理の應用

90. 矩形門構 AB 柱の A より x の距離にある點の A 側の彎曲率は

$$M = M_1 - Hx$$

ABC なる折れ曲つた桁の B より x なる距離にある點の B 側の彎曲率は

$$M = M_1 + V_1 x - Hh \quad [x < a]$$

$$= M_1 + V_1 x - Hh - P(x - a) \quad [x > a]$$

ABCD なる折れ曲つた柱の C より x の距離にある點

の C 側の彎曲率は同じく D 側の彎曲率を負としたものと同じきにより

$$M = M_4 - H(h - x)$$

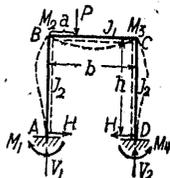
最小仕事の原理より短形門構に於て隅角の彎曲率を求めるには通常彎曲率の影響のみを考へれば充分である故、門構全體の内働は

$$K = \frac{1}{2EJ_2} \left[\int_0^h (M_1 - Hx)^2 dx + \int_0^h \{M_4 - H(h - x)\}^2 dx \right]$$

$$+ \frac{1}{2EJ_1} \left[\int_0^a (M_1 + V_1 x - Hh)^2 dx + \int_a^b \{M_1 + V_1 x - Hh - P(x - a)\}^2 dx \right]$$

故に M_1, M_4, H を未知と考へ

$$\frac{\partial K}{\partial M_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial M_4} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial H} = 0$$



第 163 圖

よりこれ等を求むれば

$$H = \frac{3J_2 a (b - a)}{2h(hJ_1 + 2bJ_2)} P$$

$$M_1 = \frac{J_2}{2} \left\{ \frac{1}{hJ_1 + 2bJ_2} - \frac{b - 2a}{b(6hJ_1 + bJ_2)} \right\} a(b - a) P$$

$$M_4 = \frac{J_2}{2} \left\{ \frac{1}{hJ_1 + 2bJ_2} + \frac{b - 2a}{b(6hJ_1 + bJ_2)} \right\} a(b - a) P$$

を得。尙他の未知値 M_2, M_3, V_1, V_2 は下式により容易に求められる

$$M_2 = M_1 - Hh$$

$$M_3 = M_4 - Hh$$

$$V_1 = \frac{1}{b} \{M_4 - M_1 + P(b - a)\}$$

$$V_2 = P - V_1$$

91. 矩形門構 AB 柱に於て A より x の距離にある A 側の彎曲率は

$$M = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{h} x$$

BC 桁の B より x の距離にある B 側の彎曲率は

$$M = M_2$$

CD 柱は AB 柱と同じ、AD 桁の A より x の距離にある A 側の彎曲率は

$$M = M_1 + M' \quad [\text{但し } M' \text{ は單桁として } q \text{ の爲めに起る彎曲率}]$$

故にこれ等の爲めに起る函構全體の内働は

$$K = \frac{2}{2EJ_2} \int_0^h \left\{ M_1 - \frac{M_1 - M_2}{h} x \right\}^2 dx + \frac{1}{2EJ_1} \int_0^l M_2^2 dx + \frac{1}{2EJ_1} \int_0^l (M_1 + M')^2 dx$$

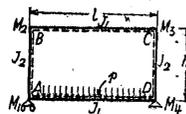
これを M_1, M_2 なる未知値に對し

$$\frac{\partial K}{\partial M_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial M_2} = 0$$

より M_1, M_2 を求めれば

$$M_1 = \frac{\left(\frac{l}{J_1} + \frac{2h}{3J_2}\right) \int_0^l \frac{M' dx}{J_1}}{\left(\frac{l}{J_1} + \frac{2h}{3J_2}\right)^2 - \left(\frac{h}{3J_2}\right)^2}, \quad M_2 = \frac{\frac{h}{3J_2} \int_0^l \frac{M' dx}{J_1}}{\left(\frac{l}{J_1} + \frac{2h}{3J_2}\right)^2 - \left(\frac{h}{3J_2}\right)^2}$$

但し p なる等布滿載荷重に對しては $\int_0^l M' dx = -\frac{pl^3}{12}$ なるにより



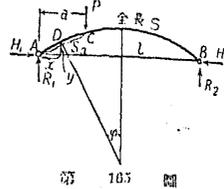
第 164 圖

$$M_1 = \frac{l^3}{12J_1} \left(\frac{l}{J_1} + \frac{2h}{3J_2} \right) P, \quad M_2 = - \frac{l^3 h}{36J_1 J_2} P \dots (17)$$

$$\left(\frac{l}{J_1} + \frac{2}{3} \frac{h}{J_2} \right)^2 - \left(\frac{h}{3J_2} \right)^2$$

M_2, M_1 は左右對稱たる故求むる要なし。

92. 二鉸拱 既に第 8 章に於て知れる如く二鉸拱に於ては R_1, R_2 は静力學的に求められ H_1 のみが静力學的に不定値である、これを最小仕事の原理により求むるには次の如く彎曲率と垂面推力とによる内働を考へれば通常充分である。第 165 圖の如き圓形拱に於ては



第 165 圖

$$M = P \frac{l-a}{l} x - H_1 y \quad [x < a]$$

$$= P \frac{l-a}{l} x - H_1 y - P(x-a) \quad [x > a]$$

$$N = P \frac{l-a}{l} \sin \phi + H_1 \cos \phi \quad [x < a]$$

$$= -P \frac{a}{l} \sin \phi + H_1 \cos \phi \quad [x > a]$$

故に拱全體の内働は

$$K = \int_0^S \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int_0^S \frac{N^2 ds}{2EA}$$

$$= \int_0^{S_a} \frac{1}{2EJ} \left\{ P \frac{l-a}{l} x - H_1 y \right\}^2 ds + \int_{S_a}^S \frac{1}{2EJ} \left\{ P \frac{l-a}{l} x - H_1 y - P(x-a) \right\}^2 ds + \int_0^{S_a} \frac{1}{2EA} \left\{ P \frac{l-a}{l} \sin \phi + H_1 \cos \phi \right\}^2 ds$$

$$+ \int_{S_a}^S \frac{1}{2EA} \left\{ -P \frac{a}{l} \sin \phi + H_1 \cos \phi \right\}^2 ds$$

$$\frac{\partial K}{\partial H_1} = 0 \text{ より}$$

$$H_1 = P \frac{\int_0^S \frac{(l-a)xy}{lJ} ds - \int_{S_a}^S \frac{(x-a)y}{J} ds - \int_0^S \frac{(l-a) \sin \phi}{lA} dx + \int_{S_a}^S \frac{\sin \phi}{A} dx}{\int_0^S \frac{y^2}{J} ds + \int_0^S \frac{\cos \phi}{A} dx} \dots (18)$$

温度の爲めに起る H_t は下の如くにして求める。

$$M = H_t y, \quad N = H_t \cos \phi$$

なる故温度の爲めの内働は

$$K = \int_0^S \frac{H_t^2 y^2 ds}{2EJ} + \int_0^S \frac{H_t^2 \cos^2 \phi ds}{2EA}$$

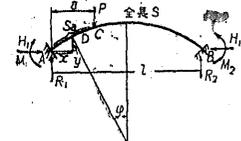
この内働は鉸距離が αl (但し t は温度の上昇, α は膨脹係数) 丈自由に伸びれば消失するわけなり、故にこの内働は H_t によつて αl 變位を鉸に與へたために生じたものと見做し得、即ち

$$\frac{\partial K}{\partial H_t} = \alpha l$$

これより

$$H_t = \frac{\alpha t E l}{\int_0^S \frac{y^2 ds}{J} + \int_0^S \frac{\cos \phi}{A} dx} \dots (19)$$

93. 無鉸拱 反力 H_1, R_1, R_2 , 端力率 M_1, M_2 の中 R_2, M_2 は静力學的に求められる故に H_1, R_1, M_1 が不静定値である。D に於ける A 側の彎曲率及び垂面推力は (第 166 圖)



第 166 圖

$$M = M_1 + R_1 x - H_1 y \quad [x < a]$$

$$= M_1 + R_1 x - H_1 y - P(x-a) \quad [x > a]$$

$$N = R_1 \sin \phi + H_1 \cos \phi \quad [x < a]$$

$$= (R_1 - P) \sin \phi + H_1 \cos \phi \quad [x > a]$$

夫れ故にこれ等による内働は

$$K = \int_0^S \frac{M^2}{2EJ} ds + \int_0^S \frac{N^2}{2EA} ds$$

$$= \int_0^{S_a} \frac{\{M_1 + R_1 x - H_1 y\}^2}{2EJ} ds + \int_{S_a}^S \frac{\{M_1 + R_1 x - H_1 y - P(x-a)\}^2}{2EJ} ds$$

$$+ \int_0^{S_a} \frac{\{R_1 \sin \phi + H_1 \cos \phi\}^2}{2EA} ds + \int_{S_a}^S \frac{\{(R_1 - P) \sin \phi + H_1 \cos \phi\}^2}{2EA} ds$$

$$\frac{\partial K}{\partial H_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial M_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial R_1} = 0 \text{ より } H_1, M_1, R_1 \text{ に就いて第 8 章第 4 節 82. と}$$

同一式を得。

温度による爲めの反力及び端力率は R_1, R_2 は消失して H_t と M_t となる。

$$K = \int_0^S \frac{\{M_t - H_t l\}^2}{2EJ} ds + \int_0^S \frac{(H_t \cos \varphi)^2}{2EA} ds$$

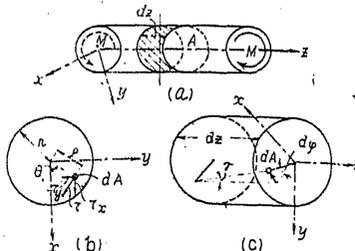
に於て

$$\frac{\partial K}{\partial H_t} = a l, \quad \frac{\partial K}{\partial M_t} = 0$$

より H_t, M_t に関して第 8 章第 4 節 82. と同一式を得.

第 10 章 軸

94. 圓形軸 圓形軸を第 167 圖 (a) の如く振偶力 M を以てて振る時は任意の断面 A は振れる後でも平面になつてゐる (クーロンの定理), 故に A に於ては垂面應力起らず接面應力 τ のみ存在する. 此れを (b) 圖の如く τ_x, τ_y に分力し (a) 圖の陰影部分の平衡即ち (c) 圖を考へれば



第 167 圖

$$\int_{(F)} (\tau_y x - \tau_x y) dA + M = 0$$

且つフックの弾性法則により

$$\tau = G\gamma;$$

茲に G は剛性係數.

而して $\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$ なる故

$$\tau_x = \tau \sin \theta = G \frac{d\varphi}{dz} y, \quad \tau_y = -\tau \cos \theta = -G \frac{d\varphi}{dz} x$$

$$\therefore M = G \frac{d\varphi}{dz} \int_{(F)} (x^2 + y^2) dA = G \frac{d\varphi}{dz} J \quad \dots\dots\dots (1)$$

又は

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{GJ}$$

但し $J = J_x + J_y = \frac{\pi r^4}{2}$ なる故

$$M = G \frac{d\varphi}{dz} \frac{\pi r^4}{2} \quad \text{又は} \quad \tau = \frac{2M}{\pi r^4} \rho \quad \dots\dots\dots (2)$$

即ち τ は軸心よりの距離に比例し等變應力をなし軸の外面に於て最大となる. その大ききは

$$\max \tau = \frac{2M}{\pi r^3} \quad \dots\dots\dots (3)$$

95. 圓形ならざる軸 圓形ならざる軸は振つた後で断面は平面でなくなるが一般に振偶力は

$$M = \mathfrak{R} G \frac{d\varphi}{dz} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で表はし得. \mathfrak{R} を振係數といふ.

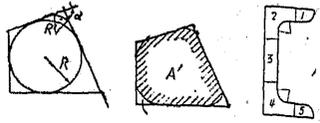
第 15 表 振係數及び最大接面應力

断面形状	振係數 \mathfrak{R}	最大接面應力 $\max \tau$	備 考		
	$\frac{\pi^4}{2}$	$\frac{2M}{\pi r^3}$	$r = \text{半徑}$		
	$\frac{\pi a^2 b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{2M}{\pi a b^2}$	$a = \text{長軸}$ $b = \text{短軸}$		
	$\frac{\sqrt{3}}{80} a^4$	$\frac{20M}{a^3}$	$a = \text{邊長}$		
	$\beta a b^3$	$\gamma b G \frac{d\varphi}{dz}$	$\beta = \frac{16}{3} - 3.30 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{b^4}{a^4}\right)$ $\gamma = \frac{3}{8} \left(1 + 0.6 \frac{a}{b}\right) \beta$		
2a = 長邊	$\frac{a}{b}$	1.0	1.5	2.0	20.0
2b = 短邊	β	2.249	3.132	3.659	5.165
	γ	1.351	1.695	1.860	2.000

95. グリフイス-テイラーの法 (4) 式の振係數 \mathfrak{R} をグリフイス及びテイラーは一般に下の如く置いた

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} k^2 A \quad \dots\dots\dots (5)$$

A は斷面積で k は圓軸ならば半徑に當りこれを振半徑といひ k を決定するには第 168 圖に示す如く少くとも三邊に接する最大圓を描きこの半徑 R 及び外角 α の大きより第 16 表により軸の角を角取りする半徑 R' を決定してそれによつて圍まれた面積 A' と周邊 P' とより



第 168 圖 第 169 圖

$$k = \frac{2A'}{P'} \dots \dots \dots (6)$$

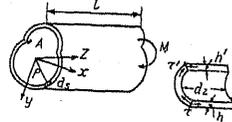
第 169 圖の如き場合は幾つかに區分して (6) を用ひ加算すればよい。

97. 中空軸 中空軸の壁が充分薄いものと考へれば壁内に働く接面應力は厚さの方向に等布と考へ得、且つ之は壁面に平行して働く。第 170 圖に於て

$$\tau h dz = \tau' h' dz$$

即ち $\tau h = \tau' h' =$ 常數 $\dots (7)$

$$\text{振偶力 } M = \int_{(s)} \tau h \rho ds$$



第 170 圖

而して τh は常數、 $\int_{(s)} \rho ds$ は軸を無孔と考へたときの斷面積 A の 2 倍である故

$$M = \tau h 2A \text{ 又は } \tau = \frac{M}{2hA} \dots \dots \dots (8)$$

振角 ϕ を出すには次の如し。 dz の長さの振による弾性變形の勢力は

$$dK = \frac{1}{2} M \frac{d\phi}{dz} dz$$

然るに接面力で同一勢力を表せば $dK = \frac{dz}{2G} \int_{(s)} \tau^2 h ds$

且つ τh は常數なる故

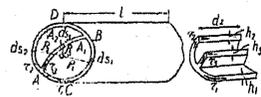
$$M \frac{d\phi}{dz} = \frac{\tau^2 h^2}{G} \int_{(s)} \frac{ds}{h}$$

軸長 L とすれば振角は

$$\phi = \frac{ML}{4GA^2} \int_{(s)} \frac{ds}{h} \dots \dots \dots (9)$$

第 171 圖の如く隔壁ある場合は

$$\tau_1 h_1 = \tau_2 h_2 + \tau_3 h_3 \dots \dots \dots (10)$$



第 171 圖

第 16 表

$\frac{\alpha}{\pi}$	$\frac{R'}{R}$
0	1.0
.1	.93
.2	.85
.3	.75
.4	.625
.5	.50
.6	.375
.7	.27
.8	.21
.9	.17
1.0	.155

振偶力は $M = \tau_1 h_1 \int_B^A \rho_1 ds_1 + \tau_2 h_2 \int_A^B \rho_2 ds_2 + \tau_3 h_3 \int_A^B \rho_3 ds_3$

$$M = \tau_1 h_1 \left(\int_B^A \rho_1 ds_1 + \int_A^B \rho_3 ds_3 \right) + \tau_2 h_2 \left(\int_A^B \rho_2 ds_2 - \int_A^B \rho_3 ds_3 \right)$$

上式の第 1 項の括弧内は軸を無孔と考へた BAC の斷面積 A_1 の 2 倍、第 2 項の括弧内は ADB の斷面積 A_2 の 2 倍であるから

$$M = 2(\tau_1 h_1 A_1 + \tau_2 h_2 A_2) \dots \dots \dots (11)$$

然るに (10) 及び (11) より τ_1, τ_2, τ_3 を決定するには條件が 1 つ不足である故此場合は静力學的不定となるからカステリアノの原理を追加して $2\tau_1 h_1 A_1 = M_1, 2\tau_2 h_2 A_2 = M_2$ と置けば

$$M = M_1 + M_2 \dots \dots \dots (12)$$

軸長 L の弾性變形働は $K = \frac{1}{2} M \frac{d\phi}{dz} L$

然るに $M \frac{d\phi}{dz} = \frac{\tau^2 h^2}{G} \int_{(s)} \frac{ds}{h}$ なる故

$$K = \frac{1}{2} \frac{L}{G} \left\{ \tau_1^2 h_1^2 \int_{(s_1)} \frac{ds_1}{h_1} + \tau_2^2 h_2^2 \int_{(s_2)} \frac{ds_2}{h_2} + \tau_3^2 h_3^2 \int_{(s_3)} \frac{ds_3}{h_3} \right\}$$

然るに $\tau_1 h_1 = \tau_2 h_2 = \tau_3 h_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{A_1} - \frac{M_2}{A_2} \right)$

$$\therefore K = \frac{1}{8} \frac{L}{G} \left\{ \frac{M_1^2}{A_1^2} \int_{(s_1)} \frac{ds_1}{h_1} + \frac{M_2^2}{A_2^2} \int_{(s_2)} \frac{ds_2}{h_2} + \left(\frac{M_1}{A_1} - \frac{M_2}{A_2} \right)^2 \int_{(s_3)} \frac{ds_3}{h_3} \right\}$$

カステリアノの定理によつて A_1 部の振角 ϕ_1 及び A_2 部の振角 ϕ_2 は

$$\phi_1 = \frac{\partial K}{\partial M_1} = \frac{1}{4} \frac{L}{G} \left\{ \frac{M_1}{A_1^2} \int_{(s_1)} \frac{ds_1}{h_1} + \left(\frac{M_1}{A_1} - \frac{M_2}{A_2} \right) \frac{1}{A_1} \int_{(s_3)} \frac{ds_3}{h_3} \right\}$$

$$\phi_2 = \frac{\partial K}{\partial M_2} = \frac{1}{4} \frac{L}{G} \left\{ \frac{M_2}{A_2^2} \int_{(s_2)} \frac{ds_2}{h_2} - \left(\frac{M_1}{A_1} - \frac{M_2}{A_2} \right) \frac{1}{A_2} \int_{(s_3)} \frac{ds_3}{h_3} \right\}$$

$\phi_1 = \phi_2$ なるべきにより

$$\frac{M_1}{A_1} \left\{ \frac{1}{A_1} \int_{(s_1)} \frac{ds_1}{h_1} + \frac{1}{A_1} \int_{(s_3)} \frac{ds_3}{h_3} + \frac{1}{A_2} \int_{(s_3)} \frac{ds_3}{h_3} \right\} = \frac{M_2}{A_2^2} \left\{ \frac{1}{A_2} \int_{(s_2)} \frac{ds_2}{h_2} + \frac{1}{A_2} \int_{(s_3)} \frac{ds_3}{h_3} + \frac{1}{A_1} \int_{(s_3)} \frac{ds_3}{h_3} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

(12) (13) より M_1, M_2 を求めることが出来る. M_1, M_2 が解れば

$$\tau_1 = \frac{M_1}{2h_1 A_1}, \quad \tau_2 = \frac{M_2}{2h_2 A_2} \dots \dots \dots (14)$$

で τ_1, τ_2 を知り (10) により τ_3 を得, 振角は φ_1 又は φ_2 の何れかで解る.

第 11 章 平 板

第 1 節 平板の基本式

98. 平板の應力, 彎曲率, 剪力及び平衡式 平板に外力がかゝるとき彎曲を起し, 外曲部は伸び内曲部は縮まり中央に近い處に不變の面がある, 此の面を中立面といふ. 平板に立てた垂直線は彎曲の後にもそのまま直線をなして傾いて中立面に垂直をなすものと假定し(キルヒホフの假定), 座標原點を中立面上にとり x 及び y 軸を板の横縦の方向にとれば (第 173 圖 b), O 點の x 方向の變位は

$$\xi = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

同様に y 方向の變位は $\eta = -z \frac{\partial w}{\partial y}$

故に x, y 方向の變形率 ϵ_x, ϵ_y は

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

x, y 面内の剪變形率 γ_{xy} は

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

直角に働く 2 方向の應力を受けた場合にはフックの法則により變形率 ϵ_x, ϵ_y と應力 σ_x, σ_y との間には下の關係あり

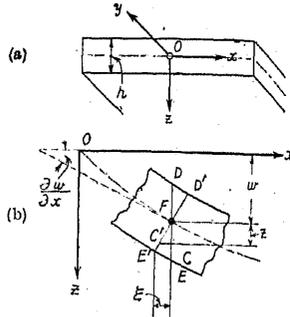
$$E\epsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m}, \quad E\epsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x}{m}$$

茲に E はヤング係數, $1/m$ はポアソン比.

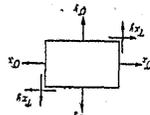
剪應力 τ_{xy} と剪變形率 γ_{xy} との間には G を剛性係數とすれば同じく

$$G\gamma_{xy} = \tau_{xy}$$

或ひは書き直して



第 173 圖



第 174 圖

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-1/m^2} \left(\epsilon_x + \frac{\epsilon_y}{m} \right) = -\frac{Ez}{1-1/m^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-1/m^2} \left(\epsilon_y + \frac{\epsilon_x}{m} \right) = -\frac{Ez}{1-1/m^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{(h)} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= \int_{(h)} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= \int_{(h)} \tau_{xy} z dz = -D \left(1 - \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

而して D を平板剛度と呼ぶ.

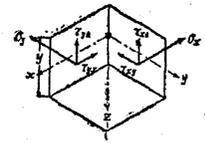
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-1/m^2)} = \frac{EJ}{1-1/m^2} \dots \dots \dots (3)$$

M_x, M_y を xy 方向の平板の彎曲率, M_{xy} を平板の捩モーメントといふ.

應力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は何れも平板の上下縁に於て最大となり縁維應力は

$$\sigma'_x = \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma'_y = \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad \tau'_{xy} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}$$

今平板の要素部分をとりにこれに働く應力を圖示すれば第 175 圖の如くなる.



第 175 圖

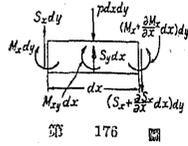
(2) に洩れた τ_{xz} 及び τ_{yz} より

$$S_x = \int_{(h)} \tau_{xz} dz, \quad S_y = \int_{(h)} \tau_{yz} dz \dots \dots \dots (4)$$

これを x 面及び y 面に於ける平板の剪力といふ. τ_{xz}, τ_{yz} の最大値は中立面に於て起りその大き τ'_{xz}, τ'_{yz} は

$$\tau'_{xz} = \frac{3}{2} \frac{S_x}{h}, \quad \tau'_{yz} = \frac{3}{2} \frac{S_y}{h} \dots \dots \dots (5)$$

平板の要素部分をとりこの上面に働く外圧力及び (2), (5) によつて表せる撓曲率, 振モーメント及び剪力を圖示すれば第 176 圖の如し (但し y 軸の方向より見たるもの). 此の要素部分の中點 O に於て y に平行の軸 (即ち紙面に垂直の軸) に就いて全力の力率をとり 0 と置けば



$$S_x \frac{dx dy}{2} + \left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx \right) \frac{dx dy}{2} + \left(M_x - M_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(M_{xy} - M_{xy} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

故に
$$S_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w$$

同様に
$$S_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w$$

茲に
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

次に第 176 圖に於て z 軸の方向の力の和を 0 と置けば

$$\left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx - S_x \right) dy + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy - S_y \right) dx + p dx dy = 0$$

故に (6) を入れて

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad \text{又は} \quad \nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad \dots (7)$$

此れをキルヒホフ又はラグランジュの式といふ.

第 2 節 平 板 各 論

99. 帶狀板 y の方向に無限に延びた帶狀板が p_0 なる強度の帯布荷重を受け $x=0$ 及び $x=l$ なる 2 邊にて單に支持されてゐるとすれば (第 177 圖), w は x のみの函數となりキルヒホフの式は簡單に

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p_0}{D} \quad \dots (8)$$

となる. 之を積分して下の邊縁條件

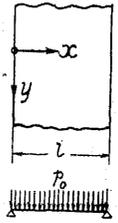
$$w=0, \quad x=l \text{ に於て } w=0 \text{ 及び } M_x=0$$

を入れるれば下の如き w を得.

$$w = \frac{p_0}{24D} (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2) \quad \dots (9)$$

故に
$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{p_0}{2} (lx - x^2) \\ M_y &= -\frac{D}{m} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{p_0}{2m} (lx - x^2) \\ M_{xy} &= 0 \\ S_x &= -D \frac{d^3 w}{dx^3} = p_0 \left(\frac{l}{2} - x \right) \\ S_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} S_x &= -D \frac{d^3 w}{dx^3} = p_0 \left(\frac{l}{2} - x \right) \\ S_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$



最大應力はこれより (4) 及び (6) 式により得らる.

100. 橢圓板及び圓板 橢圓形の平板が等布荷重 p_0 を受け周邊を埋込めるとき假りに

$$w = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2$$

茲に a, b は橢圓の最大及び最小半軸, c は常數とすれば周邊に於て

$$w=0 \quad \text{及び} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

即ち周邊埋込みの條件を充たす. 且つ

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 8c \left\{ 3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{4}{a^2 b^2} \right\}$$

これと (7) と比較して

$$c = \frac{p_0}{8D} \frac{1}{3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{4}{a^2 b^2}}$$

故に

$$w = \frac{p_0}{8D} \frac{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2}{3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{4}{a^2 b^2}} \quad \dots (12)$$

は求むる撓度なり. 撓曲率, 剪力及び應力はこれより容易に得られる.

(12) に於て $a=b=r$ とすれば半径 r の圓板の場合となる. 即ち

$$w = \frac{p_0}{64D} (x^2 + y^2 - r^2)^2 \quad \dots (18)$$

101. 矩形板 a 及び b なる幅及び長さを有する 4 邊單純支持の矩形板が等

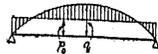
布荷重 p_0 を受ける場合を解くに際し、先づ假りにこの矩形板が

$$w = c \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

なる撓度を生ずるに必要な荷重 p を求めるときは (7) より

$$p = D \nabla^2 \nabla^2 w = q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \text{茲に } q = D \pi^4 c \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2.$$

即ちこの場合荷重 p は 4 邊に於て 0、中央に於て最大なる正弦曲面状のものとなる (第 177 圖). 今この p と等布荷重 p_0 との差の自乗を板全面に積分してこの差を最小ならしめれば (誤差の最小自乗法と同一筆法),



第 177 圖

$$I = \int_0^b \int_0^a (p - p_0)^2 dx dy$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = 2 \int_0^b \int_0^a (p - p_0) \frac{\partial p}{\partial q} dx dy = 0$$

$$\therefore q = \frac{16p_0}{\pi^2} \quad \text{或は} \quad c = \frac{16p_0}{\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 D}$$

故に

$$w = \frac{16p_0}{\pi^4 D} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \dots \dots \dots (14)$$

これは 4 邊に於て w 及び撓曲率は 0 となる故、4 邊單純支持の邊縁條件を充たしてゐる。撓曲率、剪力は容易に (14) より求められる。

此問題をフーリエ級數を用ひて解けば更に正確である (ナツイエの法)。

$$\text{今 } w_{rs} = c_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} \quad \text{但し } \left. \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3, \dots$$

と置けば、これは 4 邊支持の邊縁條件は r, s の如何に係らず満足する。(7) より

$$p = D \nabla^2 \nabla^2 w_{rs} = q_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}$$

但し

$$q_{rs} = D \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2 \pi^4 c_{rs}$$

r, s の 1, 2, ... の値について斯くの如きものを加へ合せて

$$p = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} q_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}$$

で表せば、 \hat{p} はフーリエの定理により如何なる値でも表はし得るわけである。 p が等布荷重 p_0 の場合には上式のフーリエ係數 q_{rs} は

$$q_{rs} = \frac{\int_0^a \int_0^b p_0 \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy}{\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{r\pi x}{a} \sin^2 \frac{s\pi y}{b} dx dy} = \frac{4p_0 ab}{rs\pi^2} = \frac{16p_0}{rs\pi^2}$$

$$\text{即ち } p = \frac{16p_0}{\pi^2 D} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}$$

$$\therefore c_{rs} = \frac{16p_0}{\pi^4 D} \frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2 rs}$$

$$\text{故に } w = \frac{16p_0}{\pi^4 D} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}}{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2 rs} \dots \dots \dots (15)$$

(14) はこの式の第 1 項とつた近似値と見てよい。

102. 矩形板の實用式 鐵筋コンクリート等に於て長邊が短邊の 2 倍以下なる矩形板の撓曲率は下の如き簡略法で求めることがある。等布荷重 p_0 を p_1, p_2 に分けて、 p_1 は a を徑間とする桁に p_2 は b を徑間とする桁に加はるものと考え、その中央の撓度を求めれば兩單支持の場合とすれば 28. 6) により

$$\xi''_m = \frac{5}{384} \frac{p_1 a^4}{EJ}, \quad \xi''_m = \frac{5}{384} \frac{p_2 b^4}{EJ}$$

これは一枚の板を縦と横とから見たるに過ぎぬため

$$\xi''_m = \xi''_m, \quad \therefore p_1 a^4 = p_2 b^4$$

且つ $p_1 + p_2 = p_0$ 、故に p_1, p_2 の値は

$$p_1 = \frac{b^4}{a^4 + b^4} p_0, \quad p_2 = \frac{a^4}{a^4 + b^4} p_0 \dots \dots \dots (16)$$

故に 4 邊支持の板の最大撓曲率は中央に於て起り下の如き値である。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{p_1 a^2}{8} = \frac{b^4}{a^4 + b^4} \frac{p_0 a^2}{8} \\ M_y &= \frac{p_2 b^2}{8} = \frac{a^4}{a^4 + b^4} \frac{p_0 b^2}{8} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

尚 4 邊埋込の板に於ても同様に中央最大彎曲率は

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{p_1 a^2}{24} = \frac{b^4}{a^4 + b^4} \frac{p_0 a^2}{24} \\ M_y &= \frac{p_2 b^2}{24} = \frac{a^4}{a^4 + b^4} \frac{p_0 b^2}{24} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

又埋込端の彎曲率は

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{p_1 a^2}{12} = -\frac{b^4}{a^4 + b^4} \frac{p_0 a^2}{12} \\ M_y &= -\frac{p_2 b^2}{12} = -\frac{a^4}{a^4 + b^4} \frac{p_0 b^2}{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

尚板の隅がしつかりアンカーされてゐるときは M_{xy} を生ずる爲め M_x, M_y は實は (18) (19) より多少小さくなる。
(山口昇, 鶴岡鶴吉)