第八章　流　速

第一節　垂直線内の流速分布

或る垂直線内に於ける流速の分布を明ならしむるため、水深と流速との關係を圖示したるものを縱流速曲線(Vertical velocity curve)と云ふ。

1. 拋物線形の分布

Humphreys 及 Abbot 兩氏は理論上及實測の結果により此曲線は大體第69圖の如き水平軸を有する拋物線であると唱へた、即ち

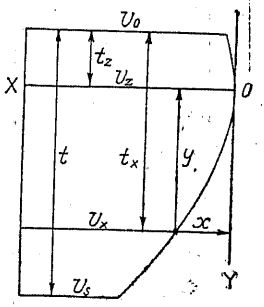
$$y^2 = Px$$

而して $y = t_x - t_z$　又 $x = v_z - v_x$ なるにより

$$(t_x - t_z)^2 = P(v_z - v_x)$$

或は

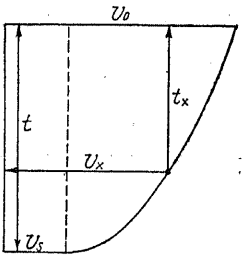
$$v_x = v_z - \frac{1}{P}(t_x - t_z)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$



第69圖　縱流速曲線 其一

兩氏の 1851～1858 年に於ける Mississippi 河の實測によれば、拋物線の軸は水面より 0.297 t の箇所にある。

又 Darcy 及 Bazin 兩氏並に Grashof 氏も亦水平軸を有する拋物線なりとした。然し G. Hagen 氏は第70圖の如く垂直軸を有する拋物線とし、其頂點を河床にあるものと考へ次の如く表はした。

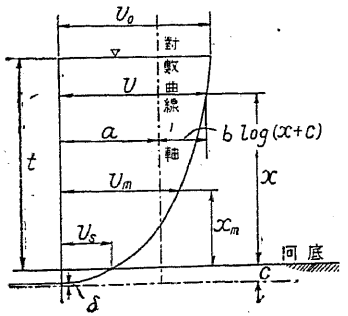


第70圖　縱流速曲線 其二

$$v_x = v_s + P\sqrt{t - t_x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

然れども全水深を通じて一つの曲線で表はすことは無理であるから、Wagner 氏は或る水深迄は或る曲線にて表はし、夫れより以下河床迄は、此曲線と異なる曲線で示さんとした、Lippe 氏は此說に從ひ上部は拋物線の代りに直線となし、其の下方は此直線及河床に相切する楕圓とした。

2. 對數曲線形の分布



第 71 圖　縱流速曲線 其三

R. Jasmund 氏は最初は二次の拋物線なりと考へたが、Elbe 河に於ける實測の結果により、拋物線は實測と甚だ異なつて、却て双曲線に近いことを知つた、尙其後垂直軸を有する對數曲線 (Logarithmic curve) が實測の結果と殆ど一致することを發見した、即ち第 71 圖の如く流速を v、河底よりの高を x とすれば次の式を以て表はすことが出來る。

$$v = a+b\log(x+c) \quad \cdots\cdots(3a)$$

或は

$$v = a+0.434\,b\,\mathrm{lognat}(x+c) \quad \cdots\cdots(3b)$$

上式中 a, b, c は或る常數である。

(3) 式により $x+c = 1$ なる箇所にては $v = a$ となり、又 $\log(x+c) = -\frac{a}{b}$ なる所にては $v = 0$ となる、此 $v = 0$ なる所を表はす $x+c$ は第 71 圖の δ である、此 δ の値は大抵は甚だ小なるもので、後に述ぶる富士川清水端にては $\delta = 0.014\,m$ となつた、只安倍川の例にては $\delta = 0.393\,m$ となつた。

而して流速は δ に於ける 0 より漸次大きくなり、表面流速 v_o となるのである。

或る垂直線内の平均流速は次の如くして求むることが出來る。

$$v_m = \left[v_o t-\int_{vs}^{vo} x\,dv\right]/t \quad \cdots\cdots(4)$$

然るに $v = a+0.434\,b\,\mathrm{lognat}(x+c)$ なるにより

$$\mathrm{lognat}(x+c) = \frac{v-a}{0.434\,b}$$

$$x+c = e^{\frac{v-a}{0.434\,b}} \quad \cdots\cdots(5)$$

今 $\frac{v-a}{0.434\,b} = V$ とする時は

$$dv = 0.434\,b.dV$$

故に

$$\int_{vs}^{vo} x\,dv = \int_{vs}^{vo}\left(e^{\frac{v-a}{0.434\,b}}-c\right)dv$$

$$= \int_{vs}^{vo} e^{\frac{v-a}{0.434\,b}}\,dv - c\int_{vs}^{vo} dv$$

而して

$$\int_{vs}^{vo} e^{\frac{v-a}{0.434\,b}}\,dv = 0.434\,b\int_{vs}^{vo} e^{V}dV = 0.434\,b\left|e^{V}\right|_{vs}^{vo}$$

$$= 0.434\,b\left|e^{\frac{v-a}{0.434\,b}}\right|_{vs}^{vo} = 0.434\,b\{(t+c)-c\}$$

(5) 式參照

$$= 0.434\,bt$$

故に

$$\int_{vs}^{vo} x\,dv = 0.434\,bt-c(v_o-v_s)$$

依て

$$v_m = [v_o t-0.434\,bt+c(v_o-v_s)]/t$$

$$= v_o-0.434\,b+\frac{c}{t}(v_o-v_s) \quad \cdots\cdots(6)$$

若し $c = 0$ なる時は

$$v_m = v_o-0.434\,b \quad \cdots\cdots(7a)$$

或は

$$v_o-v_m = 0.434\,b \quad \cdots\cdots(7b)$$

次に平均流速に等しき流速のある點の河底よりの高を x_m とすれば

$$v_o = a+0.434\,b\,\mathrm{lognat}(t+c)$$

$$v_m = a+0.434\,b\,\mathrm{lognat}(x_m+c)$$

$$v_s = a+0.434\,b\,\mathrm{lognat}\ c$$

(6) 式に之等を置き換へれば

$$\mathrm{lognat}\frac{t+c}{x_m+c} = 1-\frac{c}{t}\mathrm{lognat}\frac{t+c}{c}$$

$1 = \mathrm{lognat}\ e$ なるにより

$$\frac{c}{t}\mathrm{lognat}\frac{t+c}{c} = \mathrm{lognat}\frac{e(x_m+c)}{t+c}$$

$$\frac{e(x_m+c)}{t+c} = e^{\frac{c}{t}\mathrm{lognat}\frac{t+c}{c}}$$

故に

$$x_m = \frac{t+c}{e}e^{\frac{c}{t}\mathrm{lognat}\frac{t+c}{c}}-c \quad \cdots\cdots(8)$$

$c = 0$ なる時は (7a) 式より

$$v_m = a+0.434\,b\ \mathrm{lognat}\ t-0.434\,b$$

$$= a+0.434\,b\ \mathrm{lognat}\ \frac{t}{e}$$

故に $$x_m = \frac{t}{e} = \frac{t}{2.718} = 0.368\,t \quad\cdots\cdots(9)$$

即ち水面よりの深は $0.632\,t$ に相當す。尙 c 增すに從ひ(x_m が增す、即ち平均流速のある箇所は上方へ昇る。

Jasmund 氏の Elbe 河の水深 6 m 及水深 2 m の箇所に對し次の如き式を用ひた。

水深 6 m のとき $v = 1.18+0.50\log(x+0.03)$

水深 2 m のとき $v = 0.50+0.25\log(x+0.10)$

E. Bölte 氏も Watrhe 河の實測の結果此對數曲線が最も實際に適合することを發表した、其式の數例を擧ぐれば

水深 2 m のとき $v = 0.735+0.326\log(x+0.041)$

水深 5 m のとき $v = 0.878+0.444\log(x+0.074)$

以前には最大流速は水面と水深との $\frac{1}{3}$ の所との間にあるものとせられたが、此說に從へば最大流速は水面にあることゝなり、實測の結果もこれが眞らしい、唯實測に當りては種々の事情のために最大流速が水面より下に現はれることも多いのである。

3. 對數曲線常數の算定

$$v = a+0.434\,b\ \mathrm{lognat}(x+c)$$

$$= a+b_1\,\mathrm{lognat}(x+c)$$ の a, b_1 (以下便宜 b を以て示す) 及 c を算定する。

v は a, b, c の或る函數と看做すことが出來るから

$$F(a,\ b,\ c) = a+b\ \mathrm{lognat}(x+c) = v \quad\cdots\cdots(10)$$

今 a, b, c の近似値 (a) (b) (c) を何等かの方法により見出し、之を α, β, γ を夫々の更正數とすれば

$$\left.\begin{aligned} a &= (a)+\alpha \\ b &= (b)+\beta \\ c &= (c)+\gamma \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(11)$$

即ち $$F(a,b,c) = F\{(a)+\alpha,\ (b)+\beta,\ (c)+\gamma\} \quad\cdots\cdots(12)$$

上式の α, β, γ が共に甚だ小ならば、次の如く展開することが出來る。

$$F(a,b,c) = F\{(a),(b),(c)\}+\frac{\partial F}{\partial(a)}\alpha+\frac{\partial F}{\partial(b)}\beta+\frac{\partial F}{\partial(c)}\gamma \quad\cdots\cdots(13)$$

但し $\partial F = \partial F\{(a),(b),(c)\}$

而して

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial(a)} &= 1 \\ \frac{\partial F}{\partial(b)} &= \mathrm{lognat}\{x+(c)\} \\ \frac{\partial F}{\partial(c)} &= \frac{(b)}{x+(c)} \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(14)$$

(a), (b), (c) を用ひて得たる F の値を (v), $(v)-v$ (實測) $= l$ とし、v_i を誤差とする時は觀測等式は次の如くなる。

$$v_i = \alpha+\mathrm{lognat}\ (x+c)\beta+\frac{(b)}{x+(c)}\gamma+l \quad\cdots\cdots(15)$$

故に最小二乘法により次の正等式を得

$$\left.\begin{aligned} &n\ \alpha+[\mathrm{lognat}\{x+(c)\}]\beta+\left[\frac{(b)}{x+(c)}\right]\gamma+[l] = 0 \\ &[\mathrm{lognat}\{x+(c)\}]\alpha+[\{\mathrm{lognat}\ \overline{x+(c)}\}^2]\beta+\left[\frac{(b)}{x+(c)}\mathrm{lognat}\{x+(c)\}\right]\gamma \\ &\qquad\qquad +[\mathrm{lognat}\{x+(c)\}\,l] = 0 \\ &\left[\frac{(b)}{x+(c)}\right]\alpha+\left[\frac{(b)}{x+(c)}\mathrm{lognat}\{x+(c)\}\right]\beta+\left[\left\{\frac{(b)}{x+(c)}\right\}^2\right]\gamma \\ &\qquad\qquad +\left[\frac{(b)}{x+(c)}l\right] = 0 \end{aligned}\right\} (16)$$

之より α, β, γ を見出し、從て (11) 式より a, b, c を求むることを得。

若し $c = 0$ なる時は、$v = a+b\log x$ であつて、實測の結果から最小二乘法により簡單に a 及 b を求めることが出來る。

4. 對數曲線計算例

(A) 安倍川筋安倍川橋附近の水深 1.40 mの箇所にて數回流速を測定せし結果右の如くなつた。

No	x m	v m / sec
1	0.20	1.343
2	0.50	1.714
3	0.80	1.919
4	1.30	2.312

(10) 式より

$$v_1 = 1.343 = a + b\,\mathrm{lognat}(0.20+c)$$

$$v_2 = 1.714 = a + b\,\mathrm{lognat}(0.50+c)$$

$$v_3 = 1.919 = a + b\,\mathrm{lognat}(0.80+c)$$

$$v_4 = 2.312 = a + b\,\mathrm{lognat}(1.30+c)$$

$$\frac{v_4 - v_3}{v_2 - v_1} = \frac{0.393}{0.371} = \frac{\mathrm{lognat}(1.30+c) - \mathrm{lognat}(0.80+c)}{\mathrm{lognat}(0.50+c) - \mathrm{lognat}(0.20+c)}$$

$$= \frac{\log\dfrac{1.30+c}{0.80+c}}{\log\dfrac{0.50+c}{0.20+c}} = \frac{f(c)}{\varphi(c)} = 1.0593$$

$f(c)$ 及 $\varphi(c)$ の c に種々の値を入れて其比が 1.0593 なるものを求めねばならぬ。

c	$\frac{1.30+c}{0.80+c}$	$\frac{0.50+c}{0.20+c}$	$f(c)$	$\varphi(c)$	$f(c)/\varphi(c)$
0.85	1.3030	1.2857	0.1149444	0.1091396	1.0532
0.90	1.2941	1.2727	0.1119678	0.1047260	1.0691

按分比例により適當のものを求むるに　$c = 0.8692$

從つて　$b = 1.4994$　$a = 1.2427$　となるにより

$$(a) = 1.24$$

$$(b) = 1.50$$

$$(c) = 0.87$$

正等式を得るために次の計算を行ふ。

No	v	x	$x+(c)$	lognat $\{x+(c)\}$	$\frac{(b)}{x+(c)}$	(b)lognat $\{x+(c)\}$	(v)	$l=(v)-v$
1	1.343	0.20	1.07	0.0677	1.4019	0.10155	1.34155	− 0.00145
2	1.714	0.50	1.37	0.3149	1.0949	0.47235	1.71235	− 0.00165
3	1.919	0.80	1.67	0.5129	0.8982	0.76935	2.00935	+ 0.09035

4	2,312	1.30	2.17	0.7743	0.6912	1.16235	2.40235	+ 0.09035
計				1.6704	4.0862			+ 0.17760

No	$\{\mathrm{lognat}\ \overline{x+(c)}\}^2$	$\frac{(b)}{x+(c)}\mathrm{lognat}\{x+(c)\}$	$\mathrm{lognat}\{x+(c)\}$	$\left\{\frac{(b)}{x+(c)}\right\}^2$	$\frac{(b)}{x+(c)}l$
1	0.00458	0.0949	− 0.000098	1.9653	− 0.00203
2	0.09916	0.3448	− 0.000520	1.1988	− 0.00181
3	0.26307	0.4607	+ 0.046341	0.8068	+ 0.08115
4	0.60047	0.5356	+ 0.070012	0.4778	+ 0.06245
計	0.96728	1.4360	+ 0.115735	4.4487	+ 0.13976

依て正等式は次の如くなる。

$$4\alpha + 1.6704\beta + 4.0862\gamma + 0.17760 = 0$$

$$1.6704\alpha + 0.96728\beta + 1.4360\gamma + 0.115735 = 0$$

$$4.0862\alpha + 1.4360\beta + 4.4487\gamma + 0.13976 = 0$$

之を解きて　$\alpha = +0.01973$

$$\beta = -0.15398$$

$$\gamma = +0.00017$$

依て　$a = (a) + \alpha = 1.24 + 0.01973$

$$= 1.25973 \doteqdot 1.260$$

$$b = (b) + \beta = 1.50 - 0.15398$$

$$= 1.34602 \doteqdot 1.346$$

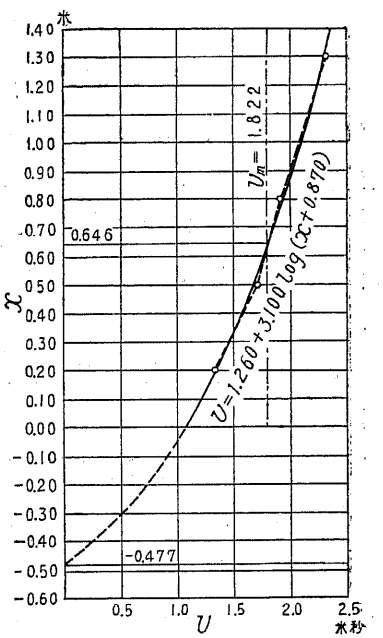
$$c = (c) + \gamma = 0.87 + 0.00017$$

$$= 0.87017 \doteqdot 0.870$$

從つて　$v = 1.260 + 1.346\,\mathrm{lognat}(x+0.870)$

$$= 1.260 + 1.346 \times 2.303 \log(x+0.870)$$

$$= 1.260 + 3.100 \log(x+0.870) \cdots\cdots (17)$$



第 72 圖　安倍川縱流速曲線 其一

第72圖の實線は此曲線を示したるものにて、實測の四點に能く適合して居る、實測流速と本式による計算流速との差の實測流速に對する割合は平均 1.1 % に過ぎず。

此場合に於ける平均流速を求むるに、(6) 式より

$$v_m = v_o - 0.434\,b + \frac{c}{t}(v_o - v_s)$$

(17) 式より　$v_o = 2.364$

$v_s = 1.072$

故に　$v_m = 2.364 - 0.434 \times 3.100 + \frac{0.870}{1.400}(2.364 - 1.072) = 1.822\ m/sec$

又 (8) 式より x_m を求むるに

$$\text{lognat}\,\frac{t+c}{c} = \text{lognat}\,\frac{1.400+0.870}{0.870} = 0.9593$$

$$\frac{c}{t}\,\text{lognat}\,\frac{t+c}{c} = \frac{0.870}{1.400} \times 0.9593 = 0.5961$$

$$e^{\frac{c}{t}\text{lognat}\frac{t+c}{c}} = e^{0.5961} = 1.815$$

$$x_m + c = \frac{t+c}{c} \cdot e^{\frac{c}{t}\text{lognat}\frac{t+c}{c}} = \frac{1.400+0.870}{2.7182} \times 1.815 = 1.516$$

故に　$x_m = 1.516 - 0.870 = 0.646\ m$

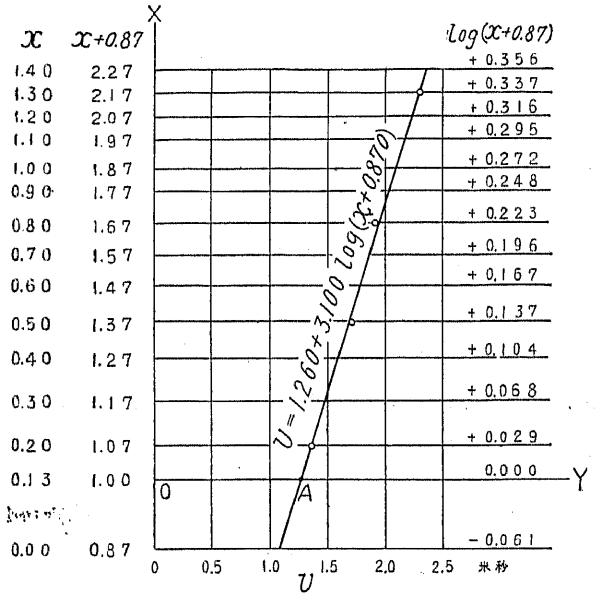
水面よりの深は $1.400 - 0.646 = 0.754\ m$ にして

$0.754 / 1.400 = 0.539\,t$ に當る、此例によるも $c = 0$ なる時は x_m は水面より $0.63\,t$ の所にあるが、c 増すに從ひ、上方に昇ることが明である。

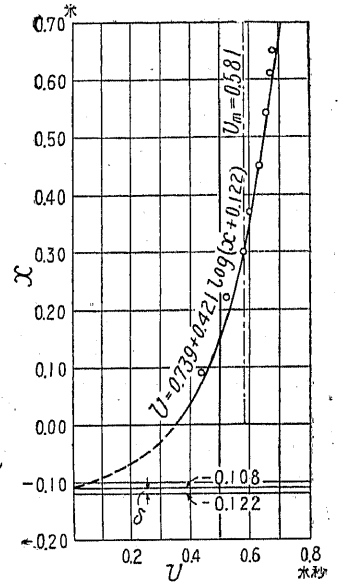
尙 $v = 0$ の所を見出すには、(17) 式より $v = 0$ として $x_{v=0} = -0.477\ m$ を求める。

又水深を對數の目盛をしたる紙に表はす時は、縱流速曲線は直線を以て示されるから、甚だ便利である、例へば前記安倍川の例を圖示すれば、第73圖の如くなる。

此直線の座標原點は O であつて、OX 及 OY が座標軸である、而し OY の方向に v を表はすことは普通であるが、OX に於ては log を示すから、1.00 の



第73圖　安倍川縱流速曲線　其二



第74圖　富士川清水端縱流速曲線

所を原點とする、之れ log 1 が 0 であるからである、第73圖にて $OA = 1.260$ である。

(B) 富士川清水端の例によるに水深 0.70 m の實測は第74圖の通りである、前者と同一方法により計算したるに

$$v = 0.739 + 0.421\log(x + 0.122) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

となり、實測流速と本式による計算流速との差の實測流速に對する割合は平均 1.8 % に過ぎず、能く實測と一致するを見る。

$v_m = 0.581\ m/sec$

$x_m = 0.299\ m$

水面よりの深 $= \frac{0.700 - 0.299}{0.700} = 0.573\ t$ にして c の値小なるにより安倍川の $0.539\,t$ よりは下にある。

$x_{v=0} = -0.108\ m$

$\delta = x_{v=0} + c = -0.108 + 0.122 = 0.014\ m$

5. 一垂直線内の平均流速

一垂直線内の平均流速 (Mean velocity in the vertical) の表面流速 (Surface velocity) に對する關係に就て調査せられたが、大體平均流速は表面流速の 0.8～0.9 である、而して平均流速は全水深の 0.55～0.65 平均 0.6 の箇所にある。

安倍川筋安倍川橋流量觀測所にて水深 0.3～1.4 mの 101 垂直線に於て流速を測定し、各垂直線内の平均流速を算定し、之を實測したる表面流速と比べたるに 0.645～0.958 にして平均は 0.860 となつた。

又富士川清水端に於て水深 0.4～0.9 m の 32 垂直線に於て實測したる結果によれば、兩者の比は 0.755～0.950 で、其平均は 0.855 である、又平均流速のある所は全水深の 0.564～0.691 平均 0.623 であつた。

尙兩者の關係に付種々の式がある、例へば

Hagen 氏 $v_m = 0.86\,v_0 = \frac{6}{7}v_0$ ……(19a)

Bazin 氏 $v_m = 0.76\,v_0$ ……(19b)

Wagner 氏 $v_m = (0.64 \sim 0.97)v_0$ 平均 $0.84\,v_0$ ……(19c)

Grunsky 氏 $\left.\begin{array}{l} v_m = \dfrac{v_{0.2}+v_{0.8}}{2} \\ v_m = v_{0.6} \end{array}\right\}$ ……(19d)

式中 $v_{0.2}$, $v_{0.6}$, $v_{0.8}$ は水深の 0.2, 0.6, 0.8 に於ける流速を示す。

表面流速は大體を測定し得て、あまり正確なることは望まれないが、最も容易に測ることが出來るから、上記の關係から平均流速を出すことが多い。

6. 一垂直線内の底流速

河底に於ける流速(Bottom velocity) は測ることが出來ない、河底より 15 cm 餘離れたる箇所の流速を測る。

一般に $v_s = (0.25 \sim 0.75)v_0$

Bajin 氏は其實測により $v_s = \frac{v_0}{2}$ ……(20a)

或は $v_s = 0.75\,v_m$ とす……(20b)

前記安倍川に於ては $\frac{v_s}{v_0} = 0.49 \sim 0.64$ 平均 0.58

而して $v_m = 0.86\,v_0$ なるにより

$$v_s = \frac{0.58}{0.86}v_m = 0.67\,v_m$$

又富士川清水端にては $\frac{v_s}{v_0} = 0.48 \sim 0.79$ 平均 0.65

此處にても $v_m = 0.86\,v_0$ であるから

$$v_s = \frac{0.65}{0.85}v_m = 0.76\,v_m$$

第二節 一横斷面内の平均流速

一般に一垂直線内に於ては大體に於て水面の流速は最大であり、又一横斷面にては水深增すに從ひ表面流速が大、從て平均流速も增す、即ち河岸に於ては流速は最小で、流心で最大である。

1. 一横斷面内の平均流速と最大表面流速との關係

V_m = 一横斷面内の平均流速

V_{max} = 最大表面流速 とすれば

實測の結果は大體 $V_m = (0.65 \sim 0.80)\,V_{max}$ である。

Rhein 河の實測 $\frac{V_m}{V_{max}} = 0.66 \sim 0.73$ ……(21a)

Forchheimer 氏 〃 $= 0.64 \sim 0.76$ ……(21b)

Lahmeyer 氏 〃 $= \frac{3}{4}$ ……(21c)

Bazin 氏 $V_{max} = V_m + 14\sqrt{hJ}$

而して $V_m = c\sqrt{hJ}$ なるにより

$$\frac{V_m}{V_{max}} = \frac{c}{c+14} \quad \cdots\cdots(21d)$$

$= 0.71$ $c = 35$ のとき

$= 0.80$ $c = 55$ のとき

富士川清水端に於ける實測の結果によれば第 45 表の如く、上記係數は平均 0.75 となる。

第 45 表　　富士川清水端平均流速と最大表面流速との關係

實測年月日	清水端量水標水位 m	横斷面積 m^2	流量 m^3/sec	平均流速 V_m m/sec	最大表面流速 V_{max} m/sec	$\frac{V_m}{V_{max}}$
大正 15— 6—25	— 0.21	35.51	18.866	0.531	0.730	0.72
〃 15—12—21	— 0.10	41.79	26.534	0.635	0.820	0.77
昭和 2— 1— 8	— 0.09	42.57	27.342	0.640	0.830	0.77

又昭和4年6月より9月に至る間に於て、安倍川筋安倍川橋下流に於ける17回の實測の結果によるに $\frac{V_m}{V_{max}}$ は 0.50～0.79 にして其平均は 0.65 となつた。

以上は低水時流速計を以て實測したる結果であるが、12河川、19箇所に於て、洪水に際し適當長さの竹浮子を流下せしめ、全横斷面に於ける流量を計算し、之より平均流速を算出したるものと、全横斷面中の最大流速との比較をなしたるものは第46表の如く 0.67～0.89 で平均 0.78 となつた。

第 46 表　　洪水時の平均流速及最大流速

河川	箇所	水位 m	平均深 m	平均流速 V_m m/sec	最大流速 V_{max} m/sec	$\frac{V_m}{V_{max}}$
富士川	松野	5.60	5.37	4.91	6.40	0.76
〃	清水端	2.90	2.46	2.60	3.17	0.82
阿武隈川	館矢間	2.53	2.68	1.40	2.08	0.67
〃	千貫	8.04	3.20	1.51	2.03	0.74
矢作川	石下瀬	4.18	4.60	5.30	7.69	0.69
〃	岡崎	3.92	3.12	2.14	2.47	0.87
大野川	犬飼	6.32	5.35	3.27	4.51	0.72
手取川	鶴來	1.71	1.68	3.50	4.61	0.76
米代川	二ッ井	4.17	4.24	2.39	2.91	0.82
相模川	千木良	10.20	5.64	5.05	5.88	0.86
北上川	黒澤尻	4.27	3.61	2.37	3.26	0.73
〃	門崎	8.49	9.15	1.82	2.73	0.67
最上川	柴橋	4.75	3.87	3.02	3.69	0.82
〃	大石田	4.14	4.39	2.59	3.15	0.82
〃支川松川	河井	4.53	4.35	2.51	3.73	0.67
太田川	犬野	5.67	5.20	4.57	5.88	0.78
白川	明午橋	2.67	2.30	1.80	2.02	0.89
小貝川	愛國橋	5.36	5.16	1.30	1.49	0.87
〃	川又	5.57	3.51	1.30	1.49	0.87

一般に大なる河川に於ける流速は、水深大なるため、小なる河川に於けるより大である、然し大なる河川に於ても流速が 6 m 以上のことは稀である、第46表に於て富士川、矢作川にては最大流速 6 m 以上、平均流速 5 m 内外である。

2. 一横斷面内の平均流速と平均表面流速との關係

平均表面流速は等距離に於て測つた各表面流速の合計を平均するか、或は横斷面の水面の上へ各點に於ける表面流速を取り、之を結びて表面流速曲線を畫き、此面積を求積器にて測り、水面幅にて除して算出する、平均表面流速を V_0 とすれば

$$\frac{V_m}{V_0} = 0.80 \sim 1.0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

第45表に記したる富士川清水端大正15年6月25日觀測に於て 5 m 宛の間隔にて表面流速を測りしに $v_0 = 0.430 \sim 0.730$、m/sec 平均 $V_0 = 0.642\ m/sec$ である、依て $\frac{V_m}{V_0} = \frac{0.531}{0.642} = 0.83$ となる。

又昭和4年6月より9月に至る間に於て、安部川筋安倍川橋下流に於ける17回の實測結果によれば $\frac{V_m}{V_0}$ は 0.73～0.94 にして、其平均は 0.88 に當る。

阿武隈川、矢作川、手取川、米代川、相模川、北上川、最上川、太田川、白川、小貝川の10河川、17箇所の洪水觀測によるに $\frac{V_m}{V_0}$ は 0.81～1.07 平均 0.93 を示して居る。之は表面流速を測り、全横斷面の平均流速の大體を知るに便利である。尙 Rhein 河の實測にては上の數字は 0.92～1.08 平均 1.0 となつて居る。

第三節　平均流速曲線

河川の或る横斷面に於ける水流の平均流速と水位との關係を示すものを平均流速曲線 (Mean velocity curve) と云ふ、即ち水位を縱距とし、各水位に平均水位を横距として圖示すればよい、若し各水位に對して充分なる觀測が備はつて居た時には、此曲線の性質を究むる必要がないのであるが、實際に於ては、或る範圍内の觀測に止まることが多いから、之より推定して此曲線を作る必要がある。

1. 平均流速曲線の形狀及曲線式

普通の水流に於ては、一般に此平均流速曲線は大體垂直軸を有し、而かも此垂

直軸に凹面を呈する拋物線である、然し水位の増嵩するに從ひ直線に近づくのである。又全水位を通じて一直線を以て表はすことの出來る場合が多い。

一般に平均流速曲線は

$$v^n = ah+b \quad \cdots\cdots(23)$$

を以て表はされ、式中の n は 1～2 である。即ち n が 1 なる場合には直線となり、其他の場合には拋物線となる。

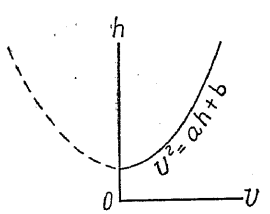
此方程式を作るには實測の結果より豫めの數値を假定し、最小二乘法により相當の精密度を有する平均流速曲線式を計算し得るのである、普通計算の便宜上 n は $1, \frac{3}{2}, 2$ の何れかを採用して

$$v = ah+b \quad \cdots\cdots(24)$$

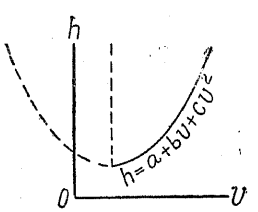
$$v^{\frac{3}{2}} = ah+b \quad \cdots\cdots(25)$$

$$v^2 = ah+b \quad \cdots\cdots(26)$$

とする。而して以上三式の內何れが最も適當であるかは、各水位に於ける實測流速に就て $v, v^{\frac{3}{2}}, v^2$ を圖上に點にて記入し、之等の諸點の各組の內成るべく一直線に近いものを最良とする。



平均流速曲線一般圖　其一
第 75 圖



平均流速曲線一般圖　其二
第 76 圖

尙 (25),(26) 式共拋物線の頂點が第 75 圖の如く丁度縱軸上にあるが、常に斯く定まつて居るものでなく、第 76 圖の如きことも起るのである、此時には流量と水位との關係に於て、$Q = a+bh+eh^2$ なる式を作つたと同じく

$$h = a+bv+cv^2 \quad \cdots\cdots(27)$$

とするのが適當である。

(27) 式の頂點を求むるには h の最小なる點を見出すために $\frac{dh}{dv} = 0$ とすればよい、即ち $b+2cv = 0$ 或は $v = -\frac{b}{2c}$

之に依れば b, c が同符號の時は頂點は縱軸の左方にあり、又異符號の時は頂點

は縱軸の右方にある、而して此頂點が橫軸の上にあるか下にあるかを見るには、求めたる v の値を (27) 式に入れて h の値を求むればよろしい。

2. 計算例

(A) 阿武隈川館矢間流量觀測所に於ける 19 回の觀測より (24) 式により

$v = ah+b$ とし最小二乘法により a, b を求むるに

$$a = \frac{n[vh]-[h][v]}{n[h^2]-[h]^2}$$

$$b = \frac{[v][h^2]-[h][vh]}{n[h^2]-[h]^2}$$

$$v = 0.358h+0.541$$

(第 77 圖參照)

又 (25) 及 (26) 式によるに次の如くなる。

$$v^{\frac{3}{2}} = 0.519h+0.375$$

或は $v = (0.519h+0.375)^{\frac{2}{3}}$

(第 78 圖參照)

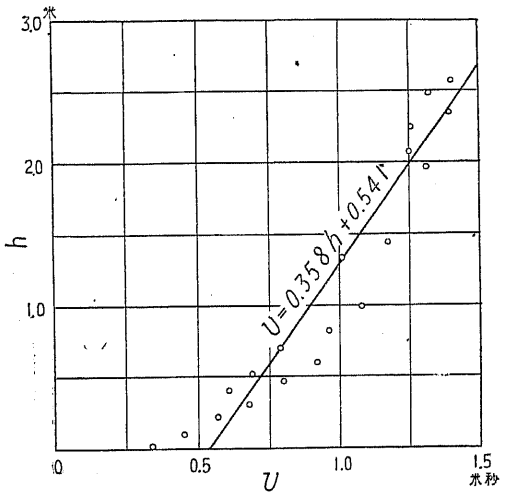
$$v^2 = 0.681h+0.230$$

或は $v = (0.681h+0.230)^{\frac{1}{2}}$

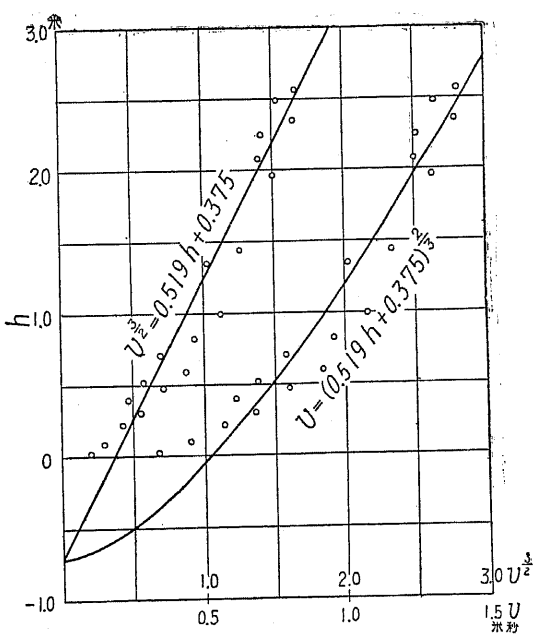
(第 79 圖參照)

又 (27) 式により

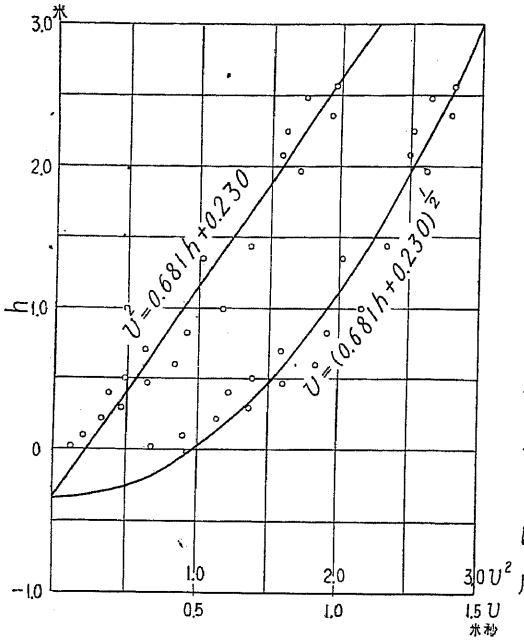
$h = a+bv+cv^2$ と假定し、最小二乘法により



第 77 圖　阿武隈川館矢間平均流速曲線　其一



第 78 圖　阿武隈川館矢間平均流速曲線　其二



第 79 圖　阿武隈川館矢間平均流速曲線　其三

$$na+[v]b+[v^2]c=[h]$$

$$[v]a+[v^2]b+[v^3]c=[hv]$$

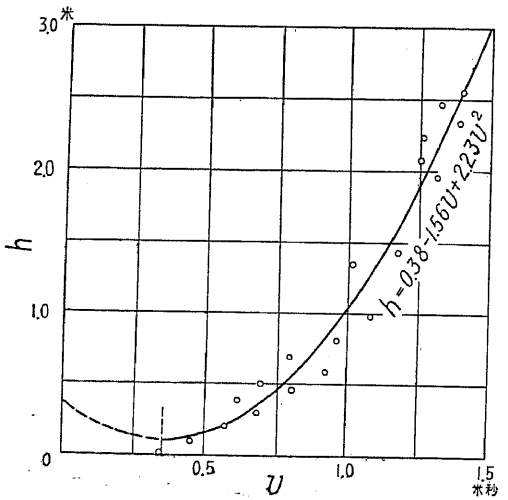
$$[v^2]a+[v^3]b+[v^4]c=[hv^2]$$

なる正等式より a, b, c を求むる時は

$$h=0.38-1{\cdot}56v+2.23v^2$$

（第 80 圖參照）

上式に於て $\frac{dh}{dv}=0$ より $v=0.3498$ となり、之を更に上式に入る時は $h=0.107\ m$ となる、即ち此拋物線の頂點は $v=0.350,\ h=0.107$ の所にある。



第 80 圖　阿武隈川館矢間平均流速曲線　其四

以上四式の内此例に於て何れが最も適當なるかを比較するに、v を實測流速、v_1 を前記式により求めたる計算流速とし $\frac{v-v_1}{v}$ の平均値を求むるに

$v=ah+b$ によるもの　11.2 %

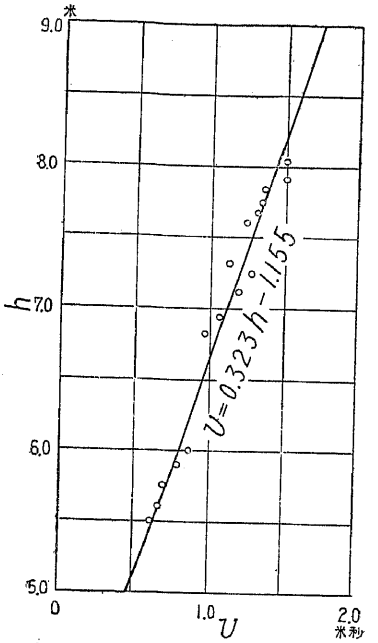
$v^{\frac{3}{2}}=ah+b$ によるもの　10.5 %

$v^2=ah+b$ によるもの　9.4 %

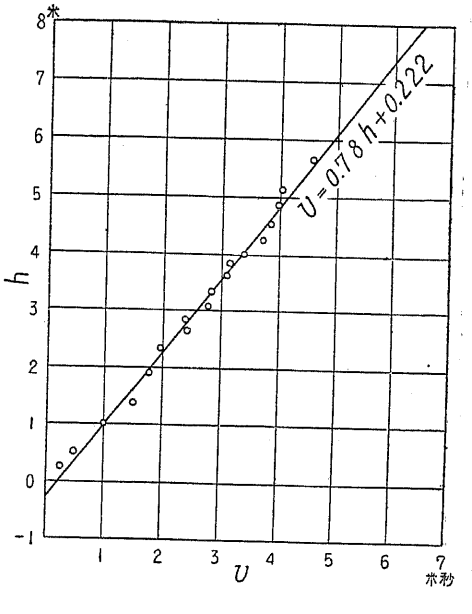
$h=a+bh+ch^2$ によるもの　7.0 %

となり圖面でも見える通り第四式が最も適切なることが明である。

(*B*) 阿武隈川千貫流量觀測所にては 16 回の實測より計算したるに第 81 圖の如く $v=0.323h-1.155$ となり、$\frac{v-v_1}{v}$ は平均 4.2 % に過ぎず、直線式で充分なることが明である。



第 81 圖　阿武隈川千貫平均流速曲線



第 82 圖　太田川大野平均流速曲線

(*C*) 太田川大野流量觀測所にても 18 回の觀測によるに第 82 圖の如く殆ど全横斷面を一直線にて表はすことが出來、$v=0.780h+0.222$ となり $\frac{v-v_1}{v}$ の平均は 7.7 % となる、但し 1 m 未滿の分を除けば 3.5 % に減ず。

(*D*) 最上川柴橋流量觀測所に於ける 24 回の測定により、(24), (25), (26) 式で算出したるに、夫々の $\frac{v-v_1}{v}$ 平均は次の如くなり、此例にては三者何れによるも著しき相違がない。

$v=0.536h+0.485$　4.2 %

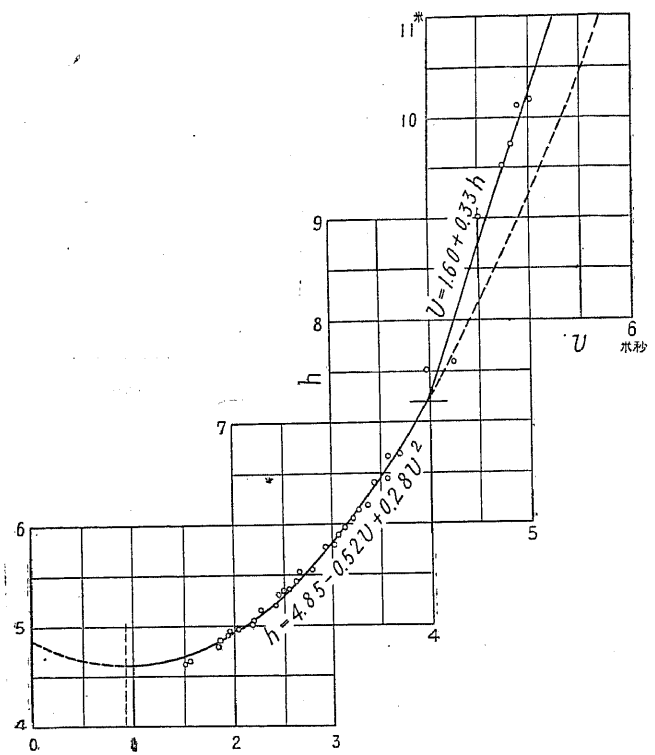
$v^{\frac{3}{2}}=1.186h-0.480$　3.7 %

$v^2=2.356h-2.482$　3.4 %

(*E*) 相模川千木良流量觀測所に於ける低水 28 回、高水 7 回の實測によるに、第 83 圖の如く低水部は拋物線をなし、高水部は直線となつて居る。

$$h = 4.85 - 0.52v + 0.28v^2 \qquad h < 7.2\,m$$

$$v = 1.60 + 0.33h \qquad h > 7.2\,m$$



第 83 圖　相模川千木良平均流速曲線

拋物線の頂點は $v = 0.93$, $h = 4.61$ の所にあつて、$\frac{v - v_1}{v}$ の平均は 3.2 % に過ぎず、尙水位の低き拋物線の頂點に近き 2 回の觀測を省く時は 1.5 % となり、能く此拋物線に接近して居ることが分る、又直線をなす部分に對し同樣に計算するに 1.5 % である。

3. 平均流速曲線の利用

流量曲線式算定に當り相當高き水位に於ける流量測定がない時には此平均流速曲線式と第四章第二節に述べた横斷面積曲線式とを利用して、或る水位に相當する流量を計算し、流量測定のなきを補ふ時は相當に信頼し得る流量曲線式を得られることがある、之は横斷面積は實際に近いものであり、又平均流速曲線は大體直線的に增減することが多く、其他の場合に於ても急激なる變化がないため安心

出來るのである。

次に平均流速、横斷面積及流量の三曲線の關係の實例を示す。

(*A*) 阿武隈川千貫にては

$$v = 0.323h - 1.155 \qquad \text{(第 81 圖參照)}$$

$$F = 322.9h - 1{,}588.6 \qquad \text{(第 35 圖參照)}$$

此二式を乘ずる時は

$$Q = vF = (0.323h - 1.155)(322.9h - 1{,}588.6)$$

$$= 104.30h^2 - 886.07h + 1{,}834.8 \cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

然るに

$$Q = 114.49(h - 4.46)^2 \qquad \text{(第 54 圖參照)}$$

$$= 114.49h^2 - 1{,}021.25h + 2{,}277.2 \cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

(*a*) 及 (*b*) より計算する Q は大體に於て著しい差がない。

(*B*) 太田川大野にては

$$v = 0.780h + 0.222 \qquad \text{(第 82 圖參照)}$$

$$F = 83.65h + 24.14 \qquad \text{(第 36 圖參照)}$$

故に

$$Q = vF = (0.780h + 0.222)(83.65h + 24.14)$$

$$= 67.57h^2 + 37.40h + 5.36 \cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

然るに

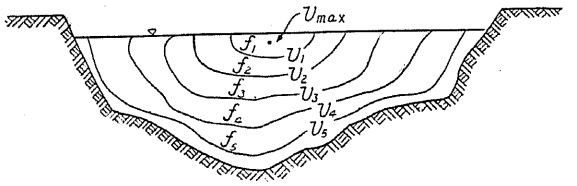
$$Q = 65.64(h + 0.27)^2 \qquad \text{(第 55 圖參照)}$$

$$= 65.64h^2 + 35.45h + 4.79 \cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

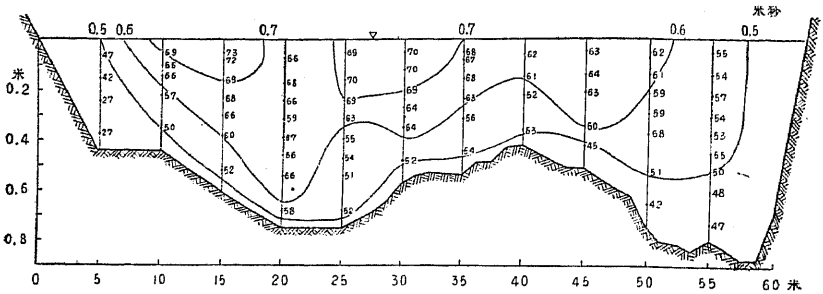
(*c*) 及 (*d*) は殆ど全く一致して居る。

第四節　等流速線

第 84 圖の如く河川の横斷面に於て流速の等しき點を結び付けたる線を等流速線(Line of equal velocity) と云ふ、斯くすれば其横斷面に於ける流速の分布が一目瞭然となる、第 85 圖は富



第 84 圖　等流速線



第 85 圖　富士川清水端に於ける等流速線

士川清水端に於ける等流速線の實例である。

此等流速線を作れば流速を高と看做し、即ち流速の山を考へ、等高線より山の容積を求むると同一方法にて其横斷面に於ける流量を算出することが出來る。

例へば第 84 圖の如く等流速線を夫々 $v_1, v_2, v\ v_3$……等とし、v_{max} を最大流速とし、又 v_1 以上の面積を f_1、v_2 以上の面積を f_2、v_3 以上の面積を f_3 等とし、$v_1 - v_2 = v$, $v_2 - v_3 = v$ 等とする時は角錐及擬壔の容積計算によつて

$$\text{全流量}\quad Q = \frac{1}{3}(v_{max}-v_1)f_1 + \frac{1}{3}v(f_1+4f_2+f_3) + \frac{1}{3}v(f_3+4f_4+f_5)+\cdots$$

$$= \frac{1}{3}(v_{max}-v_1)f_1 + \frac{1}{3}v(f_1+4f_2+2f_3+4f_4+2f_5+)\cdots\cdots\cdots(28)$$