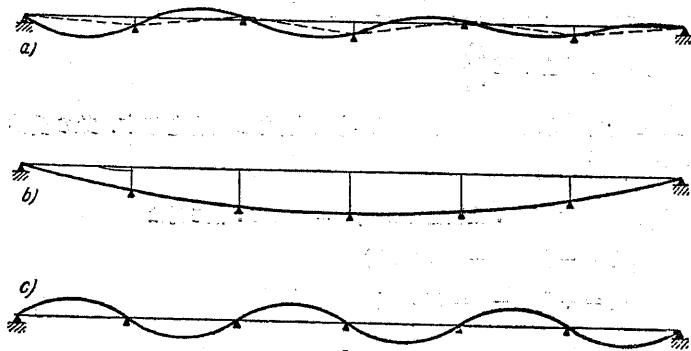


を拂ひ、多少複雑な計算を恐れてはならない。斯くして吾々は一方災害の警戒をなすと同時に、他方與へられた可能性を利用して經濟的に構造物を作る事が出来るであらう。

第十二章 ポニー橋の抗壓弦のバックリング安全度

46. 總 論

側方へのバックリングに對するポニー橋の抗壓弦の安全度は鋼橋工の最も難解な問題の一つである。此の場合弦は格點に於て對傾ラーメンの垂直材に依つて側方に弾性的に支へられてゐる1部材列となる。何となれば對傾ラーメンは非常に撓み易く出來てゐるため此の支點を固定的なものと思ふ事は出來ないからである。此の様な部材列の不安定平衡状態(バックリング状態)に於ては、場合によつて支點によつて取られなければならない非常に大きい剪力が働く。若しも支點が非常に強固なものとなれば兩端に於て固定された部材列は第147a圖に示した様に一種の波形列を作る。此の場合各部材徑間が半波形となる。彎曲點は支點に存在する。反對に支點が非常に撓み易い場合を考へるならば、全部材列は單一の半波形にバックルする事になる(第147b圖)支點の剛性が此の兩者の中間に存在する様な時には、容易に了解し得る様に、部材の側方のバックリングは1よりも大きい部材徑間の數よりも小さい或る若干の半波形に從つて生ずる。此の半波形の數は支點が強固な程多いものである。個々の波形の長さは一般には等徑間の場合に於てもお互に等しくない。此處に直に明かに認められる様に、初め考へた兩極限の場合



第147圖

(第147圖a及びb)の生ずる事は決して支點が完全に變位を起さない事及び中間支點の缺けてゐる事を意味するものではない。反對に此の問題を次の様に考へるべきである。即ち支點の剛度が數學的に言つて有限な或る一定の度を越す時、部材列は丁度完全に撓まない支點上にある様な作用をなし、又逆に或る一定の弛緩度を越すと中間支點は一般に最早や認められなくなる。此の有限な兩極限の間に中間の場合が存在する。最初に述べた極限の場合は尙次の如き特徴を持つて居る。即ち第147a圖に依り知り得る様に、バックリング状態に於て支點が偏倚を始める限界の場合が與へられる。處が一方は強固な支點の場合は支點は静止しており、只部材が支點の中間でバックルするのみである(第147c圖)。

弾性的に支持せられた部材列の問題は Engesser に依つて始めて取扱はれたものである。

此の研究者に依つてなされた解は近似的な公式であり、之によつて弦及びラーメンの断面決定を速になし得る關係上その簡單なのが非常に好都合であつた¹⁾。尤も此の公式は實際上最も重要な範圍に於ては用をなさない。その後 Zimmermann 及び Müller-Breslau が弾性的に支持せられた抗壓弦のバックリング安全度の計算に對する精確な又詳細な方法を導いた。²⁾ 之は本質的には 41 で導いた方法に於ける弾性部材結合の一般理論と一致するものであつて、結局は1組の一次方程式即ちバックリング方程式を立てて、 A を此の1組の方程式の分母行列式とするとき方程式 $A=0$ の根を決定する事に歸着する。併し此の方法は實際的に何等の端緒をも提供するものではない、何となれば部材の數が多い時には、行列式の計算並びに方程式 $A=0$ の解法は非常に困難で時間の浪費であるからである。然も此の仕事は經濟的な断面決定を行ふためには寸法を色々假定して何回も行はなければならない。

著者は格間距離相等しく、断面一定及び壓應力一定の最も簡単な場合に對する此の問題の精確な解を、簡単な取扱ひ易い公式となし、Eisenbau に於ける論文に示した。³⁾ 然し乍ら此の公式の説明にうつる前に夫々の橋梁規定は Engesser の方程式に基いて居るから、尙この方程式を述べよう。

47. Engesser に依るポニー橋のバックリング安全度の計算

Engesser は一定壓應力、不變慣性能率の假定の下に出發した。 A を問題となつてゐる弦のバックリング方向に於て變位 1 を支點に及ぼす力を示すものとする時、ラーメン抵抗 $C = Ay$ が各支點に働くものとする代りに、此の抵抗が格間長 l (支へてゐる對傾ラーメン間の距離) 上に均等に分布するものとする。今此の連続的に分布する横荷重を dR で示すならば

$$dR = \frac{A}{l} y dx$$

となる。

茲に更に之から先の研究に對して A は總ての支點に就て同じ値を持つものと假定する。

不安定平衡状態に於ける弦の軸は餘弦曲線状を呈するものとし、從つて此の波形は部材列の軸中に彎曲點を持つ明かに等しい波長の波と假定するならば、バックリング状態に於ける弦の軸の方程式は次の様になる。即ち

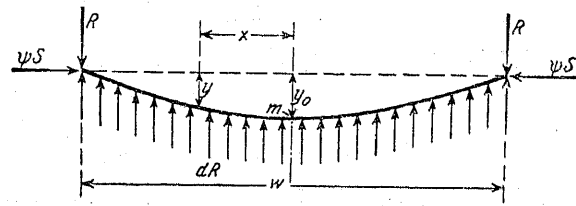
$$y = y_0 \cos \frac{\pi x}{w}$$

但し横距 x は半波形中央から測るものとし、半波形の長さを w とする(第148圖)。此の様な弦材片は連続的に分布する弾性抵抗 dR の外に次の剪力

- 1) Engesser, Fr.: Die Sicherung offener Brücken gegen Ausknicken. Zentralbl. Bauw. 1884 und 1885. Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken, II, Berlin 1893.
- 2) Zimmermann, H.: Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken. Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wissensch. 1907 und Z. Bauw. 1910. Müller-Breslau: Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. II/2, Leipzig 1908.
- 3) Bleich, Dr. F.: Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen. Eisenbau 1919, S. 27 ff.

$$R = \int_0^{w/2} dR$$

及び弦應力 ψS を受ける。此の際應力 S には安全率 ψ を乗ずる。何となれば此の研究はバックリング状態に於けるものを示すからである。弾性曲線の方程式



第 148 圖

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

から半波形の中點 m に関して次の方程式が得られる。即ち

$$\psi S y_0 - R \frac{w}{2} + \int_0^{w/2} x dR = \frac{\pi^2 EJ}{w^3} y_0$$

さて

$$R \frac{w}{2} = \frac{A w^2}{2 \pi l} y_0$$

及び

$$\int_0^{w/2} x dR = \frac{A w^2}{2 \pi l} y_0 - \frac{A w^2}{\pi^2 l} y_0$$

であるから、次の如くなる

$$\psi S = \frac{\pi^2 EJ}{w^2} + \frac{A w^2}{\pi^2 l} \dots \dots \dots (a)$$

$\frac{d\psi S}{dw} = 0$ の時、従つて

$$-\frac{2\pi^2 EJ}{w^3} + \frac{2Aw}{\pi^2 l} = 0$$

の時 ψS の値は最小となる。それ故此の式から半波形の長さは

$$w = \pi \sqrt[4]{\frac{EJl}{A}}$$

となる。此の値を用ひ結局式 (a) からバックリング應力として

$$\psi S = 2 \sqrt{\frac{EJA}{l}} \dots \dots \dots (17)$$

或は安全率 ψ の時必要なラーメン剛度は

$$A_{\text{erf}} = \frac{\psi^2 S^2 l}{4 EJ} \dots \dots \dots (17')$$

となる。

之までは弾性法則が一般的に成立つものと假定した。一般的の弾性曲線の方程式を考へ E の代りに $E\tau$ を代入すれば、公式 (17) 及び (17') は次の形になる、即ち

$$\psi S = 2 \sqrt{\frac{EJ\tau A}{l}} \dots \dots \dots (18)$$

及び

$$A_{\text{erf}} = \frac{\psi^2 S^2 l}{4 EJ\tau} \dots \dots \dots (18')$$

普通 A は總ての支點につき同じ値を持たない、又 l 及び S も不變なものではない。今 l 及び S が少くとも 1 波長内では悉く等しい値を持つものと假定すれば、普通行はれて居る様に少くとも近似的には、今考へてゐるラーメンに隣接する格間の S 及び l の平均値を以て必要な A の値を定める事が出来る。此の過程を一つのラーメンより次々のラーメンへと繰返す。

ラーメンの高さに甚だしい差のない様な時 (例へば半拋物線状のボニー橋の場合や、直弦構の場合など之であるが) には橋梁中央に對する最も不利な値に依つて計算すれば充分である。然し乍ら假令上に求めた公式 (17) 及び (17') がそれ自身正しいものであるとしても、主構の様式の違ふ時は此のラーメンとしての計算は非常に亂暴な近似計算でしか有り得ない。

然し乍ら方程式 (17) 及び (17') は總ての場合に於て少くとも 5~6 位の安全率を必要とする。何となれば之を導く時に用ひた假定は近似的にすら満足されない事が屢々あるからである。¹⁾

弦材が彎曲してゐる時は、彎曲作用の他に捩れの作用さへバックリング状態中に入り來るものである。併し此の捩れの作用は通常無視し得る。上述の公式中格間距離 l (支點の水平距離) は弦材長に依つて置き變へれば充分である。

ボニー式結構拱桁に於ける二つの弾性的に支持された弦の場合を **Briske**²⁾ は **Engesser** と似た假定の下に取扱つて居る。併し此處では此の研究を記載するに止めよう。何となれば此の結果は正確な計算の結果と比べると著しく異つて居るからである。

48. ラーメンの有する剛度 A の決定

代表的なラーメンの二三種の型に就てラーメンの寸法と上に導いた公式中の剛度の大きさ A との間を關係を説明する事が尙殘つてゐる。

a) ボニー式ラーメン (第 149 圖)

ラーメンの兩端に (第 149 圖) 荷重 1 が作用した時、之等の點の撓度 δ を決定するために 4.1 で導いた三力率方程式 (7') を用ひる。何となれば最大弦應力 S と同時にラーメンの垂直

1) Engesser の公式の精確度を 50 に於て導かれた嚴密な關係に依り吟味しよう。實際の場合に、式 (17) に基き算定した安全率は實際の數倍に達する事が屢々あることが解る。又一方 $\psi=5$ の時の Engesser に依る計算は、精々 2 以上の實際の安全率を與へるに過ぎない。其れ故抗張材及び抗壓弦以外の抗壓材の普通の安全率 3~4 に對して抗壓弦に 2~2.5 の安全率は望ましくないが、Engesser によつて計算した橋梁の存立に對する危険性はない。

Engesser 自身は、彼の茲に述べた論說から解る様に、彼の公式の缺點及びその應用範圍の境界を正しく知つてゐた。彼は又公式の不確實を計算に入れるために相當した大きな安全率を選ぶ事を勧めた。

2) Briske: Die Knicksicherheit der Druckgurte offener Bogenbrücken. Z. Ing. u. Arch.-Ver. zu Hannover 1911, S. 237.

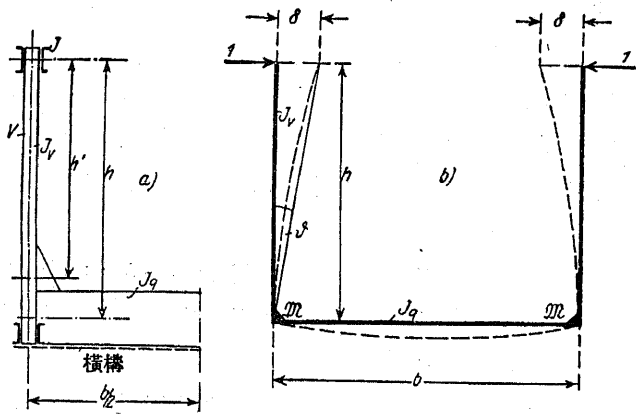
材に作用する圧應力及び張應力の撓度 δ の大きさに及ぼす影響をも考へ度いからである。今 m を荷重 1 の作用によりラーメンの隅に作用する彎曲率とすれば、彎曲率方程式は次の様になる。

$$m(c_v' + c_q') + m s_q' - E J_v \delta = 0$$

又 $\delta = \frac{\delta}{h}$ 及び $m = 1 \cdot h$ であるから、上式より

$$\delta = \frac{h^2(c_v' + c_q' + s_q')}{E J_v}$$

を得る。



第 149 圖

扱て著しい軸應力の作用しない横桁に対しては

$$c_q' = \frac{1}{3} \frac{J_v}{J_q} \cdot b \quad \text{及び} \quad s_q' = \frac{1}{6} \frac{J_v}{J_q} b$$

であり、一方垂直材に対しては

$$\left. \begin{array}{l} \text{圧應力に対して} \quad c_v' = h c(\varphi_v) = \frac{h}{\varphi^2} (1 - \varphi \cot \varphi) \\ \text{張應力に対して} \quad c_v' = h c(\varphi_v) = \frac{h}{\varphi^2} (\varphi \cot \varphi - 1) \end{array} \right\} \text{茲に } \varphi = h \sqrt{\frac{\psi V}{E J_v}}$$

と書き得る。此の値を用ひて δ を次の様な形で書き得る。

$$\delta = \frac{h^3}{3 E J_v'} + \frac{h^2 b}{2 E J_q} \quad \text{茲に} \quad J_v' = \frac{J_v}{3 c(\varphi_v)} \dots (19)$$

$V = 0$ に対しては $c(\varphi_v) = \frac{1}{3}$ となり、茲に既知の撓度公式を得る。

$$\delta = \frac{h^3}{3 E J_v} + \frac{h^2 b}{2 E J_q} \dots (19')$$

V を相當大きい張應力或は圧應力とするならば、吾々は近似的に次の様に置き得る。

$$3 c(\varphi_v) = \frac{\pi^2}{\pi^2 \pm \varphi^2} \left(\begin{array}{l} + \dots \text{張力} \\ - \dots \text{圧力} \end{array} \right)$$

之より

$$J_v' = J_v \left(1 \pm \frac{\varphi^2}{\pi^2} \right)$$

或は φ の意味を考へて

$$J_v' = J_v \pm \frac{\psi V h^2}{\pi^2 E} \dots (19'')$$

多くの場合垂直材は撓度 δ の方向には非常に強固に作られて居るから方程式 (19'') の第二項は J_v に対して零とみられる。かかる場合には $J_v' = J_v$ と置き得る。

方程式 (19) から

$$A = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{h^3}{3 E J_v'} + \frac{h^2 b}{2 E J_q}} \dots (20)$$

茲に向後から近似的に横桁の高さが分母の最初の項で表はされた撓度の減少に及ぼす影響 h をやゝ小さい値 h' 即ち垂直材の自由高 (第 149 a 圖参照) に置きかへる事によつて考慮した。

式 (17) 及び (20) から、例へば $h = h'$ とすれば安全率 ψ に対して屢々用ひられた公式

$$\psi = \frac{E}{S h} \sqrt{\frac{12 J J_v'}{l h (1 + 1.5 \frac{b J_v'}{h J_q})}} \dots (20')$$

が出て来る。非常に強固な横桁の際には括弧内の第二項は 1 に対して小さいから無視する事が出来る。然る時は **Preußen の規定** の簡單化された公式

$$\psi = \frac{E}{S h} \sqrt{\frac{12 J J_v'}{l h}} \dots (20'')$$

を得る。

Baden の規定 は中間垂直材に対して

$$J_v \geq \frac{\psi V h^2}{6 E} + \frac{\psi^2 S^2 h^2 l}{10 E^2 J} \quad \psi \geq 4$$

と定めてゐる。

$$\delta = \frac{h^3}{3 E J_v'} + \frac{h^2 b}{2 E J_q} \sim \frac{h^3}{2.5 E J_v'}$$

なるを以て、式 (17) に依り普通的设计に出て来る δ の最大値を求めると

$$\frac{2.5 E J_v'}{h^3} = \frac{\psi^2 S^2 l}{4 E J}$$

(19 b) の J_v' を代入して (壓力に対して)

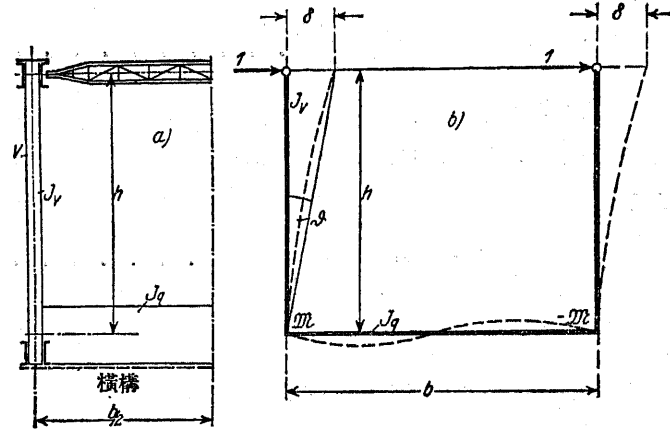
$$J_v = \frac{\psi V h^2}{10 E} + \frac{\psi^2 S^2 h^2 l}{10 E^2 J}$$

を得る。この式は上に引用した **Baden の規定** と只第一項の分母の係数が違つてゐるのみである。

1) 式 (19'') により J_v' を決定する際は ψ の代りに求むる安全率を置けば良い。

b) 横材を鉸結したボニー式半ラーメン (第 150 圖)

壓力に抵抗する横材は兩上弦を同じ方向に彎曲させる。従つてバックリング状態に於ける變形圖は第 150 b 圖に示す様になる。前には兩隅角彎曲率を全く等しい m で示したが、今度は彎曲率の値は m 及び $-m$ となる。それ故力率方程式は



第 150 圖

$$m(c_v' + c_q') - m s_q' - E J_v \delta = 0$$

となる。以前と同様な方法により次式を得る。

$$\delta = \frac{h^3}{3 E J_v'} + \frac{h^2 b}{6 E J_q}$$

茲に

$$J_v' = J_v \pm \frac{\phi V h^2}{\pi^2 E}$$

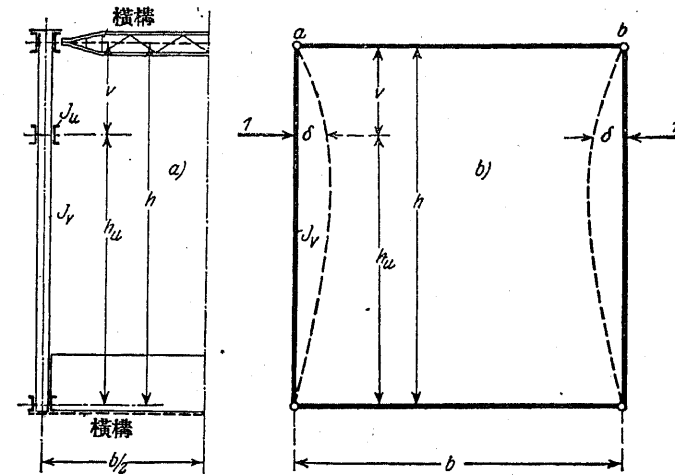
及び

$$A = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{h^3}{3 E J_v'} + \frac{h^2 b}{6 E J_q}} \dots \dots \dots (21)$$

c) 上下横構を有する橋、兩横構間に彈性的に支持された弦

1. 垂直材が兩端に於て鉸結された場合 (第 151 圖)

第 151 圖に示す場合は自由に懸つた床版を持つた繫拱橋の時に生ずるもので、此の時には横桁は吊材と強固に結合されて居ない。上部横構によつて上拱弦は側方に強固に支持されて居り、一方慣性能率 J_u なる下拱弦は吊材によつて彈性的に支へられて居る様に考へられる。ラーメンの隅角 a 及び b は變位を生じないものと考え、垂直材は二つの支點上に横はる單桁と見られる。荷重のかかる點の撓度 δ は



第 151 圖

$$\delta = \frac{v^2 h u^2}{3 E J_v h}$$

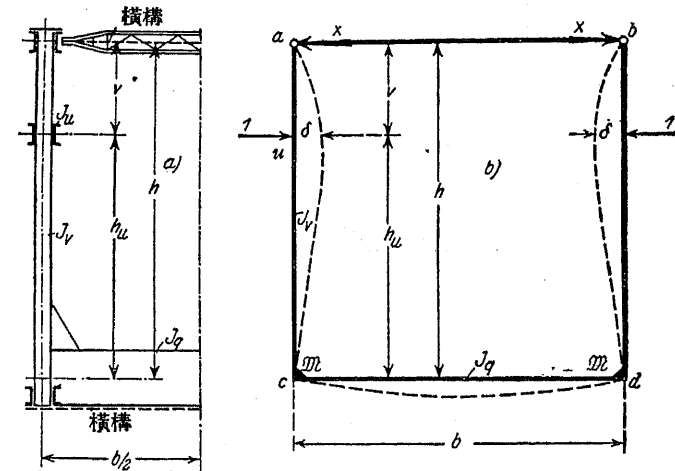
$$A = \frac{3 E J_v h}{v^2 h u^2} \dots \dots \dots (22)$$

それ故

となる。

2) 垂直材が横桁によつて彎曲率に抵抗する様に固定された場合 (第 152 圖)

撓度 δ を決定し得るためには先づ此の一次の不靜定系に於て横材應力 X を求めねばならぬ。茲に吾々は非常に巧に三力率方程式 (7') を利用する事が出来る。但し此の式はラーメン部材に



第 152 圖

於ける軸應力の作用を無視する際には既知の Clapeyron の方程式となる。此の方程式を兩部材 ac 及び cd (第 152 圖) に應用すれば先づ次の關係を得る。²⁾

1) Hütte Ba. I 参照

2) 各部材がそれぞれ異つた慣性能率を有する時は Clapeyron の方程式は

$$M_{r-1} l_{r'} + 2 M_r (l_{r'} + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} - 6 E J_c (\delta_1 - \delta_2) = - \sum P_r a_r l_{r'} \left(1 - \frac{a_r^2}{l_{r'}^2}\right) - \sum P_{r+1} a'_{r+1} l_{r+1} \left(1 - \frac{a'_{r+1}}{l_{r+1}}\right)$$

となる。こゝに $v = l \frac{J_c}{J}$ 及び J_c は任意に選んだ慣性能率である。 a_r 及び a'_{r+1} はそれぞれ左格間の左支點から及び右格間の右支點からの荷重距離である。

Bleich: Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme nach der Methode des Viermomentensatzes, Berlin 1918. 参照。

$$2m(h' + b') + mb' = -v \frac{h^2 - v^2}{h}$$

さて

$$h' = h, \quad b' = b \frac{J_v}{J_a}, \quad m = Xh - 1 \cdot h_u$$

として、此の方程式から次式を得る。

$$X = \frac{h_u}{h} - \frac{v(h^2 - v^2)}{h^2(2h + 3b \frac{J_v}{J_a})} \dots \dots \dots (23)$$

今 δ_1 を $X = 0$ のとき垂直材の1点 u に於ける1の荷重による撓度とし、 δ_2 を1の荷重がない時に X による同点の撓度とすれば、求める撓度は

$$\delta = \delta_1 - \delta_2$$

となる。扱て

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{h_u^3}{3EJ_v} + \frac{h_u^2 b}{2EJ_a} \\ \delta_2 &= X \left[\frac{h_u^2(2h_u + 3v)}{6EJ_v} + \frac{h h_u b}{2EJ_a} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

である。吾々は先づ式(23)によつて X を計算し(24)式によつて δ_1 及び δ_2 を求め、結局之によつて比ラーメン剛度

$$A = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2}$$

を求める。

3) 垂直材が横桁及び強固な上部横材に彎曲率に抵抗する様に結合された場合 (第153圖)

吾々は先づ次の二つの力率方程式によつて隅角彎曲率 m_0 及び m_u を計算しよう。

$$m_0 b_0' + 2m_0(b_0' + h') + m_u h' = -h_u h' \left(1 - \frac{h_u^2}{h^2}\right)$$

$$m_0 h' + 2m_u(h' + b_u') + m_u b_u' = -v h' \left(1 - \frac{v^2}{h^2}\right)$$

茲に

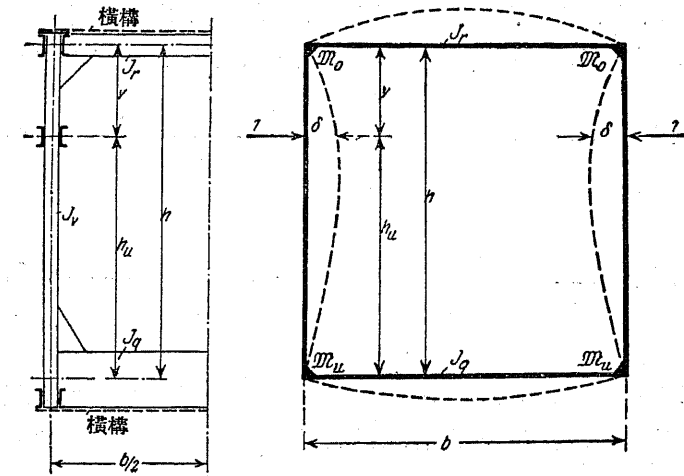
$$b_0' = \frac{J_v}{J_r} b = k_1 b, \quad b_u' = \frac{J_v}{J_a} b = k_2 b, \quad h' = h$$

を示す。之等の値を代入すれば

$$m_0(2h + 3k_1 b) + m_u h = -h_u \frac{h^2 - h_u^2}{h}$$

$$m_0 h + m_u(2h + 3k_2 b) = -v \frac{h^2 - v^2}{h}$$

となり、之を解いて



第153圖

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{3} \frac{v(h^2 - v^2) - \frac{h_u}{h}(h^2 - h_u^2)(2h + 3k_2 b)}{h^2 + 2(k_1 + k_2)hb + 3k_1 k_2 b^2} \\ m_u &= \frac{1}{3} \frac{h_u(h^2 - h_u^2) - \frac{v}{h}(h^2 - v^2)(2h + 3k_1 b)}{h^2 + 2(k_1 + k_2)hb + 3k_1 k_2 b^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

となる。第154圖に示した荷重の場合には撓度は容易に次の形で表はされる事を知る。



第154圖

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{v^2 h_u^2}{3EJ_v h} \\ \delta_2 &= \frac{v h}{6EJ_v} \left[m_0 \left(2 - 3 \frac{v}{h} + \left\{\frac{v}{h}\right\}^2\right) + m_u \left(1 - \left\{\frac{v}{h}\right\}^2\right) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

である。それ故吾々は先づ公式(25)によつて彎曲率 m_0 及び m_u を計算し、それより式(26)により δ_1 及び δ_2 を計算し、結局

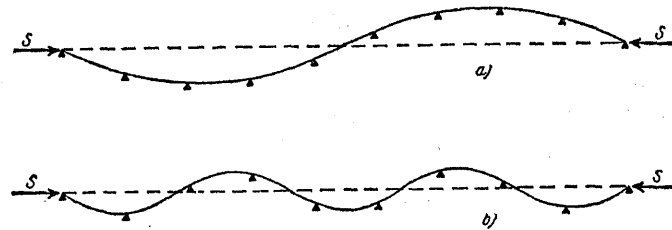
$$A = \frac{1}{\delta_1 + \delta_2}$$

を求める。 m_0 及び m_u は公式(25)に従つて負となるから、 δ_2 も亦負となり、 δ は兩撓度 δ_1 及び δ_2 の差として得られる。

49. 弾性支承を有する部材の嚴密な理論

以下數計算の例によつて示す様に Engesser の方程式は實際の法則を示す範圍に於ては用ひられない。橋梁の弦は之を支へる對傾ラーメンに對し非常に強固に作られて居るので、ラーメン

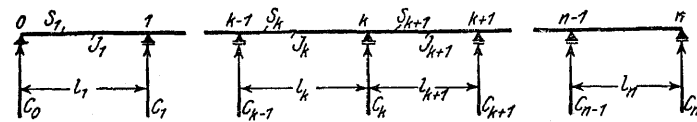
の距離の數倍の値に達する半波形状にバックリングするもので、之は丁度各支點に作用する支點反力が格間上に分布されるとする場合の連続的に支へられた弦と相似た状態を示すと云ふ事は



第 155 圖

容易に肯かれる(第 155 a 圖). 前に示した様に此の假定から Engesser は出發してゐる. 併し乍ら此の假定は弦の剛度が減じた場合には最早適合しない, 此の場合にはバックリングは半波形状に従ふがその長さは大體ラーメンの間隔に等しいか或は 2 倍位のものである(第 155 b 圖). 此の場合には最早集中荷重をそれと等しい總額を持つ連続荷重によつて置換へる事は出来ない. しかし後者の場合は實際の法則を示すものである, 何となれば多くは餘り材料を用ひないで弦のバックリングがラーメン間隔の 1~2 倍の波形に起る様に支へるべき對傾ラーメンを非常に強固に作り得るからである. 弦材のバックリング長を大きくする事は多くの場合ラーメン断面は儉約になるにも拘はらず不經濟のものとなるであらう.

吾々は先づ彈性的に支持せられた直材の最も一般的な場合に對するバックリング方程式を求め, 鋼橋の設計並びに試算の際の應用に對する Engesser の公式に似た確定した公式を見出すために簡単な特別の場合を取扱つて見よう.



第 156 圖

今第 156 圖に示した點 0, 1, 2, ..., n に於て彈性的に支持せられた直線部材列を考へる. 先づ個々の格間につき格間長 l , 慣性能率 J , 部材應力 S は異つたものと假定する. 41 に於て求めたバックリング方程式をこの部材系に應用すれば各支點 1, 2, ..., n-1¹⁾ に對する力率方程式 (7') 及び各部材格間に對する平衡條件 (8) を立てる事が出来る. 尙又方程式の數と未知數の數とを一致せしめるために撓角 ϑ と支點撓度 y との間の簡単な關係を利用する.

中間點 k に對して力率方程式は次の如くなる.

$$M_{k-1} S'_k + M_k (c'_k + c'_{k+1}) + M_{k+1} S'_{k+1} - E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (a)$$

又部材傾斜角 $\alpha = 0$ なるを以て, 第 k 番目の格間に對して平衡條件は

$$\frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} - S_k \vartheta_k = \Omega_k = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

1) 部材兩端は自由に廻轉し得る様に支持されてゐる, 故に M_0 及び M_n は零である.

となる.

之等の方程式からバックリング剪力 Ω を消去するために, 二つの互に連続した平衡條件を互に引算して次の關係を得る.

$$\frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} - \frac{M_{k+1} - M_k}{l_{k+1}} - S_k \vartheta_k + S_{k+1} \vartheta_{k+1} - \Omega_k + \Omega_{k+1} = 0$$

今 C_k が點 k の支點反力を示すものとすれば

$$\Omega_{k+1} - \Omega_k = C_k$$

となる. それ故平衡條件は次の様になる.

$$\frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} - \frac{M_{k+1} - M_k}{l_{k+1}} - S_k \vartheta_k + S_{k+1} \vartheta_{k+1} + C_k = 0 \dots \dots (b)$$

C_k は次の形で示す事が出来る

$$C_k = A_k y_k$$

茲に A_k は k 支點に於て C_k の方向に 1 の變位を起させる壓力を示す. A_k を支點 k の比剛度と呼ぶ事にする. 更に

$$\vartheta_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k}$$

である. 此の C_k 及び ϑ_k の式を方程式 a) 及び b) に代入すれば次に示す 1 組のバックリング方程式を得る.

力率方程式:

$$M_{k-1} S'_k + M_k (c'_k + c'_{k+1}) + M_{k+1} S'_{k+1} - E J_c \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} - \frac{y_{k+1} - y_k}{l_{k+1}} \right] = 0 \dots (27)$$

平衡條件:

中間點に對するもの

$$\frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} - \frac{M_{k+1} - M_k}{l_{k+1}} - S_k \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} + S_{k+1} \frac{y_{k+1} - y_k}{l_{k+1}} + A_k y_k = 0$$

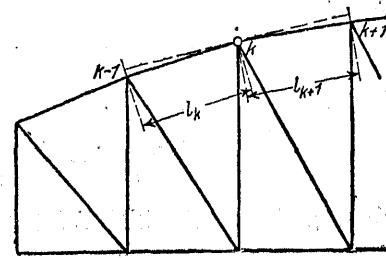
兩端點に對するもの

$$\frac{M_1}{l_1} - S_1 \vartheta_1 - A_0 y_0 = 0 \quad \text{及び} \quad -\frac{M_{n-1}}{l_n} - S_n \vartheta_n - A_n y_n = 0$$

n 個の格間の部材列の際は全部で $n-1$ 個の力率方程式及び $n+1$ 個の平衡條件がバックリング方程式として成立つ. 之から $n-1$ 個の彎曲率 M と $n+1$ 個の變位 y とを計算し得る, 従て前に導いた關係 (27) 及び (27') は完全なバックリング方程式の組を示すものである.

部材列が直線ではなく拋物線状並びに拱桁等の弦の様に, 結構平面内で彎曲してゐる時には, 上述の公式は同様に應用し得る. 只長さ l は直線状の部材列の場合には支點距離に一致したがこの場合には抗壓弦部材の長さ l を用ひさへすればよい. 即ち公式 (27) 及び (27') は彎曲弦の場合にはそれを展開して眞直に引延ばした弦に對して應用し得る(第 157 圖). 此の假定部材系の支點距離はそれ故に事實上のラーメン距離よりも大きい. 若しも 41 に於ける四力率方程式

並びに平衡条件の導き方を研究するならば、この事實の正しいことを認め得るのであらう。四力率の定理に於ては只單に二つの互に相隣る部材の關係を示したのみである。それ故に若しも第157圖に於て容易にバックルする2本の部材を平均の位置にある直線をなす一對の部材に依つて置換へるならば、部材列平面内に於ける彎曲に對して導かれた41に於ける



第157圖

方程式(7)はこの一對の部材に對しても亦用ひ得るものである。何となればこの兩置換部材を含んで結構平面に垂直なる平面即ち彎曲平面を表はす平面が存在し得るからである。茲に格間長としては置換部材の長さ、即ち丁度弦部材の長さを(7)に代入すべきである。尙平衡条件を導くのはもつと簡單である。即ち小さな廻轉力率を無視する場合で、弦材長を長さ l と見做すならば方程式(8)はその儘應用される。此の考慮に行はれた省略は通常大して重要なものではない。¹⁾

バックリング方程式(27)並びに(27')は與へられた部材寸法を基礎として個々の場合にバックリング条件 $\Delta=0$ の成立する事を示してゐる。

バックリング方程式の全體から變位 y を消去し唯未知量 w だけを含む餘りの方程式の組から最後に行列式 Δ を計算すれば最もよい。更に此の行列式の値を假定した安全率 $\psi = 3, 4, 5 \dots$ にて算出し $\Delta = 0$ になる様に補間法によつて ψ の値を定めるのが一番便利である。斯くして求めた ψ の値は事實上の安全率である。個々の場合に就てこの計算は非常に面倒である事は特に強調する必要はない、それ故に計算を簡單ならしめる或る假定の下に必要なラーメン剛度に對するまとまつた公式を導かう。

**50. 一定の壓力, 不變の慣性能率, 同じ格間長及び凡て等しい
ラーメン剛度を有する抗壓弦の嚴密な理論による
バックリング安全度²⁾**

今弦の末端が非常に強固な橋門構に依つて變位はなし得ないが廻轉はなし得る様に固定せられてゐるものとする。

方程式(27)の c' 及び s' の總ての量は相互に等しいものであるから、力率方程式を $s' = s(\varphi)l$ で割つて次式を得る

$$w_{k-1} + 2 \frac{c(\varphi)}{s(\varphi)} w_k + w_{k+1} + \frac{EJ}{s(\varphi)l^2} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) = 0$$

1) 此に考へた關係の更にやゝ詳しい理論に就ては Müller-Breslau, Graph. Statik, Bd. II/2 参照。
2) Bleich, Dr. Fr.: Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Eisenbau 1919, S. 27.

此の式に $2w_k$ を加減し、次の簡單化した記號

$$\frac{c(\varphi)}{s(\varphi)} = r, \quad \frac{EJ}{s(\varphi)l^2} = \rho$$

を用ふれば、次の關係を得る。

$$(w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}) + 2(r+1)w_k + \rho(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) = 0$$

w_k 及び y_k を指數 k の函数と考へるならば、3項を有する括弧内は之等の函数の第二位の差によつて示される。それ故力率方程式は第二位の差方程式の形

$$\Delta^2 w_k + 2(r+1)w_k + \rho \Delta^2 y_k = 0 \dots \dots \dots (a)$$

と書く事が出来る。

同様な方法に依つて平衡条件も變形される。即ち方程式(27')に於けるバックリング荷重 S に對し ψS と置けば、 $-l$ を乗じて

$$w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1} - \psi S(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) - Al y_k = 0$$

即ち

$$\Delta^2 w_k - \psi S \Delta^2 y_k - Al y_k = 0 \dots \dots \dots (b)$$

が得られる。

方程式(a)及び(b)は1組の聯立差方程式を形作るもので、その解は次の様にして求められる。今

$$w_k = C \xi^k \quad y_k = C a \xi^k$$

と置く、茲に C は任意の定數であつて、 ξ 及び a は適當に定むべき量である。

w_k 及び y_k の第二位の差を求めると次の如くなる。

$$\Delta^2 w_k = C \xi^k \frac{(\xi - 1)^2}{\xi}$$

及び

$$\Delta^2 y_k = C a \xi^k \frac{(\xi - 1)^2}{\xi}$$

之を兩差方程式(a)及び(b)に代入すれば

$$C \xi^k \left[\frac{(\xi - 1)^2}{\xi} + 2(r+1) + \rho a \frac{(\xi - 1)^2}{\xi} \right] = 0$$

$$C \xi^k \left[\frac{(\xi - 1)^2}{\xi} - \psi S a \frac{(\xi - 1)^2}{\xi} - Al a \right] = 0$$

となる。

差方程式は括弧の中が零となるならば假定した解に依つて満足される。之に依り ξ 及び a を決定すべき二つの方程式が得られる。今

$$\frac{(\xi - 1)^2}{\xi} = x \dots \dots \dots (c)$$

とおけば、次の條件が成立する

$$x + 2(r+1) + \rho a x = 0$$

$$x - \psi S a x - Al a = 0$$

第一の方程式から

$$a = -\frac{x + 2(\gamma + 1)}{\rho x} \dots \dots \dots (d)$$

を得る。

此の a の式を用ふれば第二の方程式から

$$x^2 + x \frac{2(\gamma + 1)\phi S + Al}{\rho + \phi S} + 2Al \frac{\gamma + 1}{\rho + \phi S} = 0 \dots \dots \dots (e)$$

之は x に関する二次方程式であるから二つの根 x_1, x_2 又それに相當した二つの値即ち a_1 及び a_2 を與へる。x を定めた方程式も亦 ξ に就て二次方程式である、即ち

$$\xi^2 - \xi(x + 2) + 1 = 0 \dots \dots \dots (f)$$

此の式に依り x_1 及び x_2 に依つて四つの根 ξ_1, ξ_2 並に ξ_3, ξ_4 が生ずる。それ故に ξ 及び a を決定すべき方程式は四つの値 ξ_1 乃至 ξ_4 及び二つの値 a_1, a_2 によつて満足せられるもので茲に a_1 及び ξ_1, ξ_2 それから a_2 及び ξ_3, ξ_4 はそれぞれ 1組の値を與へる。それ故に方程式(a)及び(b)の一般解は次の如くなる。

$$w_k = C_1 \xi_1^k + C_2 \xi_2^k + C_3 \xi_3^k + C_4 \xi_4^k$$

$$y_k = C_1 a_1 \xi_1^k + C_2 a_1 \xi_2^k + C_3 a_2 \xi_3^k + C_4 a_2 \xi_4^k$$

定數 C を決定するために次の末端条件を用ひる。

$$w_0 = 0 \quad w_n = 0$$

$$y_0 = 0 \quad y_n = 0$$

今一般解に於て $k = 0$ 並に n とおけば、定數を定め得べき次の四つの方程式を得る。

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

$$C_1 a_1 + C_2 a_1 + C_3 a_2 + C_4 a_2 = 0$$

$$C_1 \xi_1^n + C_2 \xi_2^n + C_3 \xi_3^n + C_4 \xi_4^n = 0$$

$$C_1 a_1 \xi_1^n + C_2 a_1 \xi_2^n + C_3 a_2 \xi_3^n + C_4 a_2 \xi_4^n = 0$$

之等の方程式の右邊は 0 に等しいから、この方程式の根 C 従つて w_k 及び y_k の有限値はこの 1組の方程式の行列式が零の時にのみ存在する。それ故に不安定平衡状態の起る條件は次の様になる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \xi_3^n & \xi_4^n \\ a_1 \xi_1^n & a_1 \xi_2^n & a_2 \xi_3^n & a_2 \xi_4^n \end{vmatrix} = 0$$

此の式を開くと

$$(a_1 - a_2)^2 (\xi_1^n - \xi_2^n) (\xi_3^n - \xi_4^n) = 0$$

此の方程式は次の三つのバックリング条件に分けられる。

$$a_1 - a_2 = 0, \quad \xi_1^n - \xi_2^n = 0, \quad \xi_3^n - \xi_4^n = 0$$

先づ同時に他の二つの條件が満足せられないといふ假定の下に

$$a_1 - a_2 = 0$$

なる條件を考へて見る。 $a_1 = a_2$ であるから又 $x_1 = x_2$ であり、従つて $\xi_1 = \xi_3, \xi_2 = \xi_4$ でなければならぬ。

此の關係を常數 C に対する條件方程式の中に代入すれば、之等の四つの方程式中各二つ宛等しくなつて次の二つの關係を得る。

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

$$(C_1 + C_3) \xi_1^n + (C_2 + C_4) \xi_2^n = 0$$

茲に各二つの定數を新未知數と考へるならば、次の様に簡単に書く事が出来る。

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 \xi_1^n + c_2 \xi_2^n = 0$$

之より

$$c_1 = -c_2$$

それ故

$$c_1 (\xi_1^n - \xi_2^n) = 0$$

を得る。

$\xi_1^n - \xi_2^n$ は假定によつて零とは異なる、故に

$$c_1 = C_1 + C_3 = -(C_2 + C_4) = 0$$

であらねばならない。

此の c_1 の値から $\xi_1 = \xi_3$ 及び $\xi_2 = \xi_4$ なる事に注意して

$$w_k = 0 \quad \text{及び} \quad y_k = 0$$

を得る。即ち部材は眞直である事になる。それ故にこの平衡の場合は更に追究しなくてよい。

そこで第二の條件 $\xi_1^n - \xi_2^n = 0$ に移る事にする。

$\xi_1 \cdot \xi_2 = 1$ に等しいから $\xi_1^{2n} - 1 = 0$ と書き得る。

此の方程式は $2n$ の一つの根

$$\epsilon_v = \left(\cos v \frac{2\pi}{2n} + i \sin v \frac{2\pi}{2n} \right)_{v=0,1,2,\dots,2n-1} \dots \dots \dots (g)$$

に依つて満足される。

方程式 (f) より先づ

$$x + 2 = \epsilon_v + \frac{1}{\epsilon_v}$$

を計算し、 ϵ_v に対する方程式 (g) を利用して

$$x = 2 \left(\cos v \frac{\pi}{n} - 1 \right)_{v=0,1,2,\dots,n-1} \dots \dots \dots (h)$$

となる。

今バックリング条件から得られた x の此の値を x に對する二次の決定方程式 (e) 中に入れるならば寸法及び荷重の各の大きさの間に一つの式が得られ、此の式よりその中の一つが定められるのである。最も簡単なのは此の関係から A を計算する事である。先づ方程式 (e) から

$$Al = - \frac{x(\rho + \psi S) + 2(r+1)\psi S}{1 + 2\frac{r+1}{x}}$$

となり、式 (h) の値を代入して

$$Al = -2 \frac{(\cos \nu \frac{\pi}{n} - 1)(\rho + \psi S) + (r+1)\psi S}{1 + \frac{r+1}{\cos \nu \frac{\pi}{n} - 1}} \quad (\nu=1, 2, \dots, n-1) \dots (j)$$

が得られる。

条件 $\xi_3^n - \xi_4^n$ に依つても、之と同様の結果に達する。それ故に方程式 (j) は $\cos \nu \frac{\pi}{n}$ に $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ の順番に代入する事に依つて凡ゆる不安定平衡状態を示す事になる。茲に $\nu = 0$ の場合を取除く事にする。何となれば此の場合は無意味な解 $Al = 0$ を生ずるからである。

此の公式の更に進んだ利用を述べる前にバックリング状態の變形の有様を定める事にする。 $\xi_1^n - \xi_2^n = 0$ 及び $\xi_3^n - \xi_4^n = 0$ は同一の根を有するから $\xi_1 = \xi_3$ であり、従つて $a_1 = a_2$ である。それ故に此處にも既に上に導いた関係を得るのである。即ち

$$C_1 + C_3 = -(C_2 + C_4) \text{ 及び } (C_1 + C_3)(\xi_1^n - \xi_2^n) = 0$$

然し乍ら $\xi_1^n - \xi_2^n = 0$ であるから前とは違つて $(C_1 + C_3) \geq 0$ となる。従つて $\xi_1 = \xi_3$ 及び $\xi_2 = \xi_4$ より ξ_1 に對する根値 (g) を代入して

$$M_k = (C_1 + C_3)(\xi_1^k - \xi_2^k) = -2i(C_1 + C_3) \sin k\nu \frac{\pi}{n}$$

或は

$$M_k = C \sin k\nu \frac{\pi}{n} \quad (\nu=1, 2, \dots, n-1) \dots (l)$$

それ故に又

$$y_k = Ca \sin k\nu \frac{\pi}{n} \quad (\nu=1, 2, \dots, n-1) \dots (m)$$

となる。

方程式 (m) によつて支點の變位から任意係數 C 迄決定されるものである。それ故に n 個の格間より成る部材に於ては $(n-1)$ 個の平衡形が可能である。それ故に ν の値従つて $\cos \nu \frac{\pi}{n}$ の値を選べば方程式 (j) による A を極大になし得るのである。此の ν の極限値を定むる前に尙方程式 (j) を變形して見よう。即ち

$$\rho + \psi S = \psi S \left(1 + \frac{\rho}{\psi S}\right) = \psi S \left(1 + \frac{EJ}{\psi S^2 s(\varphi)}\right) = \psi S \left(1 + \frac{1}{\varphi^2 s(\varphi)}\right)$$

又

$$s(\varphi) = \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1\right)$$

なるを以て

$$\rho + \psi S = \psi S \frac{\varphi}{\varphi - \sin \varphi}$$

となる。更に

$$1 + r = 1 + \frac{c(\varphi)}{s(\varphi)}$$

測角函數 $\frac{c(\varphi)}{s(\varphi)}$ は吾人の研究範圍内に於ては非常に正確に次の拋物線方程式によつて置換へられる。即ち

$$\frac{c(\varphi)}{s(\varphi)} = 2 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2$$

従つて

$$1 + r = 3 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2$$

となる。それ故 A に對する方程式 (j) は次の確定的な形をとる。

$$A = \frac{2\psi S}{l} \left\{ \frac{\left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right)a - b}{1 - \frac{b}{1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}}} \right\}_{\nu=1, 2, \dots, n-1} \dots (28)$$

茲に

$$a = \frac{\varphi}{\varphi - \sin \varphi}, \quad b = 3 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2$$

を示す。

設計に對して標準的な A の値を $(n-1)$ 個の 1 組の解の中から見出すために方程式

$$\frac{dA}{d\eta} = 0$$

を満足する一つの値

$$\eta = 1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}$$

を定むれば、次の式を得

$$\eta = b \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right) = \left[3 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2\right] \left(1 \pm \sqrt{\frac{\sin \varphi}{\varphi}}\right), \dots (28a)$$

茲に負符號は A_{\max} を與へる。それ故に $\left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right)$ の値の 1 組から公式 (28a) により計算した η の値に最も近い二つの値を選び、そして之によつて公式 (28) から比剛度 A を計算するのである。斯くして計算した値の兩者の中の大なる方の値を以て設計の基礎とする。

公式 (28) 及び (28a) によつてこの問題は其の原則に於て解かれた事になる。今 φ を一般式

$$\varphi = l \sqrt{\frac{\psi S}{EJ\tau}}$$

とみるならば弾性並に非弾性範囲に於て此の方程式は適應する。此の際バックリング係數 τ は $\sigma_k = \frac{\psi S}{F}$ と共に第 III 表に示されてゐる。吾々は尙方程式 (28) にて嚴正な公式に於て期待される様に格間數 n の影響が式中に現はれてゐる事に注意を要する。

方程式 (28) は比剛度 A を不安定係數 φ の函數として示してゐる。 φ が減少すれば即ち部材が同一量の荷重に對しより強固であるならば、 A も亦減少し支點はより弛み得るものである。 φ が増加すると共に A も亦 $\varphi = \pi$ の値に相當するその最大値まで増加する。 φ はこの値以上になり得ぬものである、何故なればそうでない時は部材は支點が動かぬものと假定すれば此の 2 支點間でバックルするからである。 $\varphi = \pi$ に對しては $\alpha = 1$ 及び $\beta = 2$ であるから

$$A = \frac{2\psi S}{l} \left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right)_{\nu=1,2,\dots,n-1}$$

となる。 A は $\nu = n - 1$ ならば、此の特別の場合に於て最大値になる、且つ

$$\cos (n - 1) \frac{\pi}{n} = - \cos \frac{\pi}{n}$$

であるから

$$A = \frac{2\psi S}{l} \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right) \dots \dots \dots (29)$$

となる。格間數 n が増加すればする程 $\cos \frac{\pi}{n}$ の値は 1 に近づく、従つて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \frac{4\psi S}{l}$$

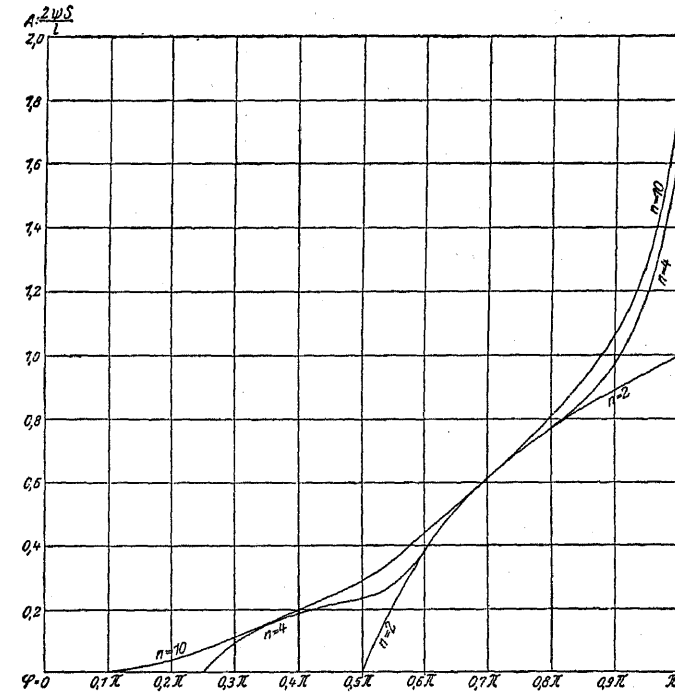
となる。此の極限值はすでに Engesser が導いた所のものである。¹⁾

第 158 圖に於ては $n = 2, 4$ 及び 10 に對する方程式 (28) に従つた $A : \frac{2\psi S}{l}$ 線の經過を示したものである。式 (28) は $\varphi = \frac{\pi}{n}$ に對して $A = 0$ を與へる。これはバックリング長 nl がこの不安定係數に相當する事を考へるならば明かであらう。従つて部材列は其の 0 から n までの全長に就てバックリングに對して安全である。横支持はなくなつてよい事になる。従つて第 158 圖に於ける各曲線は $\varphi = \frac{\pi}{n}$ の時に φ 軸の 1 點から始まり $\varphi = \pi$ の時に方程式 (29) によつて與へられる最大値に達する。第 158 圖より又明かに次の事實を知る。即ち A の合法的經過は格間數 n に無關係な單一の公式によつては——少くとも n が或る小さな數なる限り——表はし得られない。各線が部分的に一致してゐると言ふ事は色々な曲線に對する $\left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right)$ の決定的な値がその範圍に於て同一値を示すといふ事に由來してゐる。 $\cos \nu \frac{\pi}{n}$ は n にのみ關係するものであるから此の函數の同一値によつて A の値も亦一致するものである。

剛度 A の値はその他が同一の状態に止まる際には格間數 n の増加と共に非常に速に極限值に近づくものである。そして此の値は小さい n に相當する A の總ての値より大きいものであ

1) Zentralbl. Bauverw. 1892.

る。それ故に一般には格間數が $n = 6$ よりも小さい場合は殆どあり得ないから吾々は充分確信して此の極限值を設計の基礎に置き得るのである。此の場合には $n = 6$ 及び $n = \infty$ にして計算した A の値は僅に 1% しか違はないのである。今 $n = \infty$ とするならば此の格間數は公



第 158 圖

式 (28) による無限に多くの解を與へるものである。 $\left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right)$ は 0 から 2 までの間のあらゆる數をとり得る。

それ故に之等の値から A に最大値を與へる様な決定的な値 (28 a) が見出される。此の値を式 (28) に代入すれば幾分變形する事によつて次の式を得

$$A_{\text{erf}} = \frac{2\psi S}{l} \left[3 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2 \right] \frac{\sqrt{\varphi} - \sqrt{\sin \varphi}}{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\sin \varphi}} \dots \dots \dots (30)$$

式 (30) の中 φ に關係した部分を \emptyset で示すならば A の値を簡單な形

$$A_{\text{erf}} = \frac{2\psi S}{l} \emptyset \dots \dots \dots (30 a)$$

で示す事が出来る。此の際吾々は A に erf を付ける事によつて式 (30) 及び (30 a) は假定した安全率 ψ を持つたラーメン剛度 A の必要な値を與へるものである事を目立たせたいのである。 A の計算を容易にするため φ の色々な値に對する \emptyset の値を第 27 表に示した。

不安定係數に對する方程式を實用化するためには φ を變形した方が便利である。

今 $S_E = \pi^2 \frac{EJ\tau_E}{l^2}$ なる關係を利用する。茲に S_E は格間長 l に對する自然のバックリング

第 27 表
函 数 ϕ

| $\frac{\phi}{\pi}$ | Φ | $\Delta_{0,01}$ | $\frac{\phi}{\pi}$ | Φ | $\Delta_{0,01}$ | $\frac{\phi}{\pi}$ | Φ | $\Delta_{0,01}$ | $\frac{\phi}{\pi}$ | Φ | $\Delta_{0,01}$ |
|--------------------|--------|-----------------|--------------------|--------|-----------------|--------------------|--------|-----------------|--------------------|--------|-----------------|
| 0,30 | 0,111 | 7,5 | 0,50 | 0,309 | 13,0 | 0,70 | 0,614 | 19,0 | 0,90 | 1,102 | 36 |
| 0,32 | 0,126 | 8,0 | 0,52 | 0,335 | 13,0 | 0,72 | 0,652 | 20,0 | 0,91 | 1,133 | 38 |
| 0,34 | 0,142 | 9,0 | 0,54 | 0,361 | 13,5 | 0,74 | 0,692 | 21,0 | 0,92 | 1,177 | 42 |
| 0,36 | 0,160 | 9,5 | 0,56 | 0,388 | 14,5 | 0,76 | 0,734 | 21,5 | 0,93 | 1,219 | 45 |
| 0,38 | 0,179 | 9,5 | 0,58 | 0,417 | 15,0 | 0,78 | 0,777 | 22,5 | 0,94 | 1,264 | 52 |
| 0,40 | 0,198 | 10,0 | 0,60 | 0,447 | 15,5 | 0,80 | 0,822 | 24,0 | 0,95 | 1,316 | 59 |
| 0,42 | 0,218 | 10,5 | 0,62 | 0,478 | 16,0 | 0,82 | 0,870 | 25,5 | 0,96 | 1,375 | 69 |
| 0,44 | 0,239 | 11,0 | 0,64 | 0,510 | 17,0 | 0,84 | 0,921 | 27,5 | 0,97 | 1,444 | 86 |
| 0,46 | 0,261 | 12,0 | 0,66 | 0,544 | 17,0 | 0,86 | 0,976 | 30,0 | 0,98 | 1,530 | 122 |
| 0,48 | 0,285 | 12,5 | 0,68 | 0,578 | 18,0 | 0,88 | 1,036 | 33,0 | 0,99 | 1,652 | 348 |
| | | | | | | | | | 1,00 | 2,000 | |

荷重を示す。斯くすれば容易に計算し得られる様に ϕ は次の形となる。

$$\phi = \pi \sqrt{\frac{\psi S}{S_E} \cdot \frac{\tau_E}{\tau}}$$

バックリング係数 τ は実際のバックリング応力 $\sigma_k = \frac{\psi S}{F}$ に對應するものでバックリング係数 τ_E はバックリング応力 $\sigma_E = \frac{S_E}{F}$ 即ち弦格間の細長比 $\frac{l}{z}$ に相當したバックリング 應力に對應するのである。 F は弦の斷面積である。扱てバックリングの瞬間に弾性限界を越す時には、 τ 及び τ_E は此の時のバックリング 應力 σ_k 及び σ_E の函数である。即ち 30 の式 (9) によつて次の如くなる。

$$\tau = \frac{\sigma_k}{E} \left(\frac{3,1 - \sigma_k}{0,0358} \right)^2 \text{ 及び } \tau_E = \frac{\sigma_E}{E} \left(\frac{3,1 - \sigma_E}{0,0358} \right)^2$$

此の値を ϕ の方程式に代入する事によつて、 ψS 及び S_E を夫々 $\sigma_k F$ 及び $\sigma_E F$ に依つて置換へる時は次の ϕ に對する簡単な方程式を得。

$$\phi = \left(\frac{3,1 - \sigma_k}{3,1 - \sigma_E} \right) \pi \dots \dots \dots (31 a)$$

之は $\sigma_k > 1,906 \text{ t/cm}^2$ 及び $\sigma_E > 1,906 \text{ t/cm}^2$ の時に有効である。

σ_k は自然常に σ_E より小さくあらねばならぬ。従つて $\sigma_E > 1,906 \text{ t/cm}^2$ の時に尙弾性限界以下にあり得るもので、之は弦がその格間長に關するバックリング安全度を餘分に持つ様な場合に屢々見受けられるものである。此の場合には $\tau = 1$ であり ϕ は次の形をとる

$$\phi = \pi \frac{3,1 - \sigma_E}{1,66} \sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_E}} \dots \dots \dots (31 b)$$

此の式は $\sigma_E > 1,906 \text{ t/cm}^2$ 及び $\sigma_k \geq 1,906 \text{ t/cm}^2$ に對して有効である。

最後に σ_E 及び σ_k 共に弾性限界以内にある場合は τ 及び τ_E は共に 1 に等しく

$$\phi = \pi \sqrt{\frac{\psi S}{S_E}} = \pi \sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_E}} \dots \dots \dots (13 c)$$

であり、之は

$$\left. \begin{matrix} \sigma_k \\ \sigma_E \end{matrix} \right\} \leq 1,906 \text{ t/cm}^2$$

の時有効である。此の時 σ_E は簡単に格間長 l に對する Euler のバックリング荷重に相當する壓應力を示すものである。

此處に安全率を許容應力の形で示す場合がある。例へばオーストリアに於けるものは此の場合であつて

$$\psi = \frac{3,800}{\sigma_{zul}} \text{ 1)}$$

と書き得る。之により必要なラーメン剛度の A_{err} 方程式は次の形をとる

$$A = \frac{7,6 S}{l \sigma_{zul}} \Phi \text{ (t 及び cm)}$$

茲に S は有效荷重を示す、

方程式 (28) に於ては只單に各個々の點に於て支へられた抗壓部材列のバックリング安全度の計算に對して缺點のない根據の下に立つた公式を得た。方程式 (28) は格間數 n を顧慮してゐるが、之は $n < 6$ の場合のみ使用される。他の場合は極限の考へ方によつて式 (28) から得られた方程式 (30) で充分である。その應用は第 27 表を利用する事によつて最も簡單化されるのである。

Engesser の公式 (17') を方程式 (30) と比較するために、式 (17') を不安定係數 ϕ を用ひて次の形とする

$$A = \frac{2 \psi S}{l} \frac{\phi^2}{8}$$

第 159 圖は方程式 (17') 及び (30) の兩曲線を示したものである。Engesser の曲線は $\phi = 0$ から大體 $\phi = 0,7 \pi$ 位までは非常によく公式 (30) による曲線と一致する。然し乍らそれから ϕ が π なる値に近づくに従つて此の曲線とその偏倚は常に増大する。扱て $0,7 \pi$ から π までの間が實際的には非常に重要である。何となれば既に注意してある通り不安定平衡状態の生ずる時に弾性限界を越す様な特に短大に作られた結構弦に於ては實際上の範圍に於けるものが普通であるからである。

1918 年に Engesser は弾性的に支へられた部材に就ての若干の非常に注目に値する實驗の結果を發表した。²⁾ 彼の公式が強固な部材、従つて $\phi < 0,7 \pi$ に對する實驗の結果と一致する事は Prof. Engesser は既に示してゐる。それ故に第 159 圖に於ては只 $\phi > 0,7 \pi$ の範圍にある實驗値を Engesser の報告に従つて示したものである。茲には八つの値がありその中七つは公式 (30) と非常によく一致する事を示して居る。實驗 14 はこの新公式に依つて與へられる値とは可成著しく異つて居る。

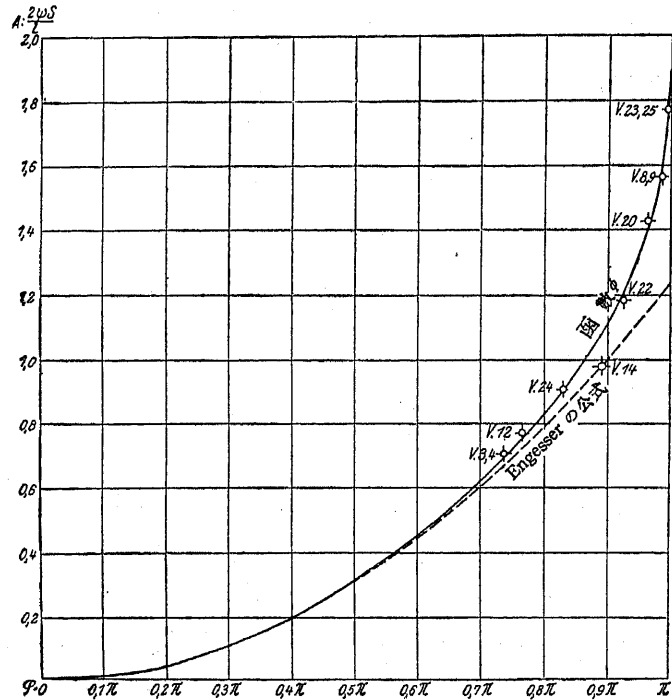
此の實驗に際して小さい格間數 $n = 5$ を考慮して公式 (28) に基づいて A の計算を行ふ時は更に幾分よく一致する事を知る。然し乍ら此の場合すら他の場合の様に良く一致しない。此

1) 27 106 頁參照

2) Engesser, Fr., Versuche und Untersuchungen über den Knickwiderstand des seitlich gestützten Stabes. Der Eisenbau 1918, S. 28.

處に實驗の缺點が存する。

公式 (30) 及び (30a) の不利益として、安全率 ψ が陽函数として定められない様な場合が考へられる。何となれば ψ は φ 中に、従つて θ 中に、超越函数として入つてゐるからである。方程式 (30) は ψ に就てたゞ實驗によつてのみ解かれ得るものである。その際に函数 θ の表は非常に役に立つものである。鋼橋の設計に際しては一般的には弦の断面を先づ定め、規定された安全率 ψ に対して方程式 (30) によつて定められる A_{err} を基としてラーメンの断面決定をする。斯くして吾々は A の必要な値を選んだ實際の値と比較するのである。



第 159 圖

例 1. 吊橋の下路補剛桁に於て上弦の最も不利な場所に $S = 1665t$ が作用して居る。¹⁾ 上弦のバックリングに対して少くとも 3 倍の安全率を有するにはどれ程の断面を垂直材が持つべきか。弦の断面積は (第 160 圖参照) $1816,6 \text{ cm}^2$ で、慣性能率は $J_y = 1914600 \text{ cm}^4$ 、環動半径は $i_y = 32,48 \text{ cm}$ で、格間は $l = 805 \text{ cm}$ である。以上與へた全部の數値は問題のラーメンを限る兩弦部材の平均値を示す。

今格間 l の弦が 3 倍のバックリング安全率を必要とするや否やに就て研究する

$$\frac{l}{i_y} = \frac{805}{32,48} = 24,8$$

に依り第 I 表からバックリング應力 $\sigma_E = 2,817$ を得、之から安全率

$$\frac{\sigma_E F}{S} = \frac{2,817 \cdot 1816,6}{1665} = 3,07$$

1) 實際に行ふ場合には各ラーメンに就て次に 1 格間に於て示す様に必要な A を定め、 A の最大値を以てラーメンの断面を求める。

を得る。故に弦は必要な安全率 3 を極く僅か越して居る事になる。

$$\sigma_k = \frac{3 \cdot 1665}{1816,6} = 2,748 \text{ t/cm}^2$$

及び既に上に求めた σ_k より式 (31a) により φ の値を求める、即ち

$$\varphi = \frac{3,100 - 2,817}{3,100 - 2,743} \pi = 0,804 \pi$$

それ故第 27 表から $\Phi = 0,832$ となる。

之より式 (30a) から必要なラーメン剛度は

$$A_{err} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1665}{805} \cdot 0,832 = 10,30 \text{ t/cm}$$

となる。

選ばれた垂直材断面は第 160 圖に示した。之は

$$J_v = 196130 \text{ cm}^4, J_a = 1828000 \text{ cm}^4$$

(平均値) である。此の値及び第 160 圖に示した寸法により垂直材の軸力を省略して $J_v' = J_v$ と置く時は、203 頁の式 (20) から事實上のラーメン剛度が求められる。即ち

$$A = \frac{2150}{\frac{410^3}{3 \cdot 196130} + \frac{470^3 \cdot 1300}{2 \cdot 1828000}} = 10,99 \text{ t/cm}$$

それ故選ばれた垂直材の断面は抗壓弦の 3 倍の安全度に對し充分である。

A を非常に速かに變化せしめる φ の値は今考へて居る弦の細長比の時にはバックリング應力 σ_k の小變化に對して非常に敏感である。今此の値が只 2~3% だけ小さい時には、 φ は非常に速かに減少し従つて A は更に速かに減少する。 σ_k の大きさの變化に對する φ の敏感さは弦の細長比が増加すると共に減少する。

それ故に一つのラーメンに就て他の求めたラーメン剛度よりも著しく大きい必要な A を得たならば、そのラーメン剛度を他のラーメンのそれと更によく一致させるために A の最も悪い値を持つたラーメンに限つた兩弦部材を精々極く僅か補強するので充分である。そこで全ラーメンは二つの格間に於ける僅かの補強に依つてそれだけ弱くなり得るのである。

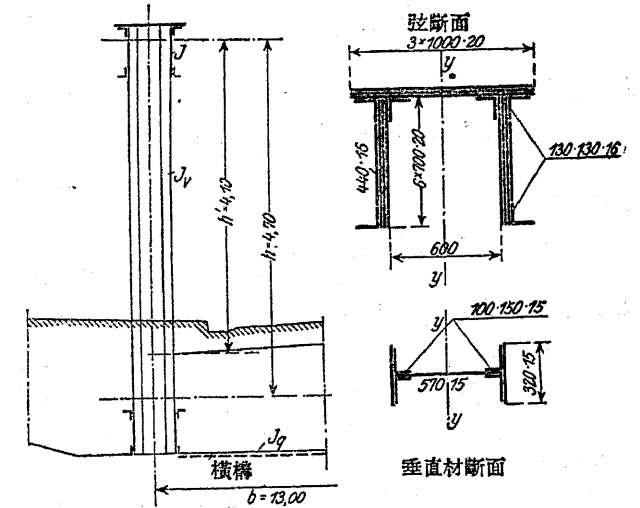
Engesser に従へば實際の場合に相當したラーメン剛度 $A = 10,99 \text{ t/cm}$ を以て公式 (17) より安全率

$$\psi = \frac{2}{1665} \sqrt{\frac{2150 \cdot 1914600 \cdot 10,99}{805}} = 9,0$$

を得る。即ち之は事實上の値の 3 倍の大きさの値である。

例 2. 下路結構拱桁の道路橋が拱の下弦に於て格間長に對するバックリング安全度に関し最も有効な弦に 560 t の壓力が作用して居る。¹⁾ 上部横構は拱の上弦にあり、下弦は吊材によつて彈性的に支持されて居

1) 若し凡てのラーメンを調べない場合には、少くとも φ が最大値を有する最も強く作用してゐる部材及びラーメンが最大の撓度を示す頂上の部材に對して研究をする事を勧める。



第 160 圖

る。側方バックリングに対して拱の下弦が少くとも 3,5 倍の安全度を持つにはどれだけの断面を吊材は持たねばならないか (第 161 圖)。

計算には次の断面の値を根本に置く：

$$F = 706,4 \text{ cm}^2, \quad J_y = 331\,600 \text{ cm}^4, \quad i_y = 21,67 \text{ cm}, \quad \text{弦長 } l = 520 \text{ cm}$$

格間長に於ける側方バックリングに対するバックリング安全率は次の様になる：

$$\frac{l}{i_y} = \frac{520}{21,67} = 24 \text{ であり、之に対する } \sigma_E \text{ は第 1 表から } \sigma_E = 2,826 \text{ t/cm}^2 \text{ であるから}$$

$$\psi = \frac{706,4 \cdot 2,826}{560} = 3,57$$

となる、扱て

$$\sigma_k = \frac{3,5 \cdot 560}{706,4} = 2,773$$

であるから

$$\varphi = \frac{3,1 - 2,826}{3,1 - 2,773} \pi = 0,838 \pi$$

となり、第 27 表から $\Phi = 0,916$

となる。それ故

$$A_{ert} = \frac{2 \cdot 3,5 \cdot 560}{520} \cdot 0,916 = 6,91 \text{ t/cm}$$

である。

吊材に対しては第 161 圖に示した断面で $J_v = 17\,210 \text{ cm}^4$ にとつた。上述のラーメンに対してラーメン剛度 A を次の様にとつた。公式 (23) に従つて第 161 圖に示した寸法を考へて $J_q = 960\,000 \text{ cm}^4$ 及び $\delta = 8 \text{ m}$ にとり

$$X = \frac{5,20}{7,20} - \frac{2,0(7,2^2 - 2,0^2)}{7,2^2(2 \cdot 7,2 + 3 \cdot 8 \frac{\sqrt{17\,210}}{960\,000})} = 0,722 - 0,125 = 0,597 \text{ t}$$

となる、之より式 (24) により

$$\delta_1 = \frac{520^2}{2150} \left(\frac{520}{3 \cdot 17\,210} + \frac{800}{2 \cdot 960\,000} \right) = 1,320$$

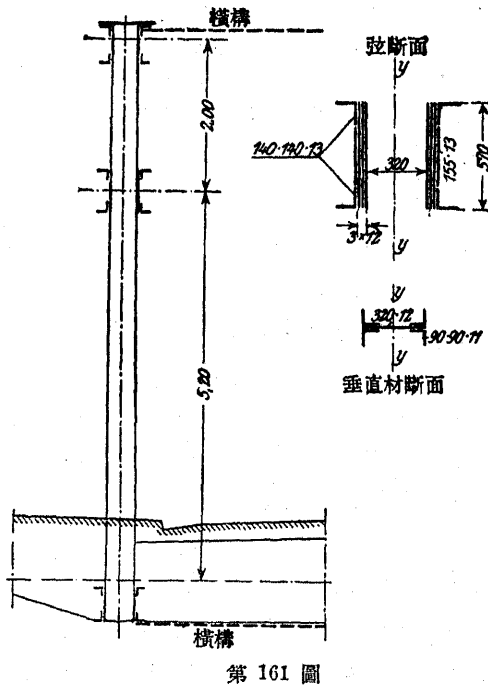
$$\delta_2 = \frac{0,597 \cdot 520}{2150} \left[\frac{(2 \cdot 520 + 3 \cdot 200) 520}{6 \cdot 17\,210} + \frac{720 \cdot 800}{2 \cdot 960\,000} \right] = 1,236$$

となり、結局

$$A = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} = 11,90 \text{ t/cm}$$

となる。此の値に対して $A_{ert} = 6,91 \text{ t/cm}$ が對立する。

Engesser に従へば前述の場合に於て 5 倍の安全度の際 A の必要な値は式 (17') によつて



$$A_{ert} = \frac{5^2 \cdot 560^2 \cdot 520}{4 \cdot 2150 \cdot 331\,600} = 1,43 \text{ t/cm}$$

を得る。高い 5 倍の安全率を假定したにも拘はらず A に対して上に求めたものの値が決定された。

然し乍ら求めた $A_{ert} = 1,43 \text{ t/cm}$ を基本として事實上の安全率を公式 (30 a) に依つて計算するならば (吟味によつて) $\psi = 1,95$ を得る。假定した安全率 $\psi = 5$ の代りに僅に約 2 を與へる事になる。

例 3. 軽い橋梁の直弦の主桁があり、此の一定断面の上弦に 62 t の最大壓力が作用して居る。断面は 2,0 cm の腹板距離を持つ [[NP 30 より成り、ラーメンの距離は $l = 4,0 \text{ m}$ である。更に $F = 117,6 \text{ cm}^2$, $J_y = 2600 \text{ cm}^4$, $i_y = 4,70 \text{ cm}$ である。4 倍の安全度を持つとき A_{ert} の値は如何程か。

$$\frac{l}{i_y} = \frac{400}{4,70} = 85$$

から、 $\sigma_E = 2,131 \text{ t/cm}^2$ を得。それ故腹板の平面に直角な方向に於けるバックリングに対する安全率は次の如くなる。即ち

$$\psi = \frac{117,6 \cdot 2,131}{62,0} = 4,04$$

$$\sigma_k = \frac{4 \cdot 62,0}{117,6} = 2,109 \text{ t/cm}^2$$

之と上に求めた σ_E の値から

$$\varphi = \frac{3,1 - 2,131}{3,1 - 2,109} \pi = 0,978 \pi$$

となり、之より第 27 表により

$$\Phi = 1,513$$

となる、それ故

$$A_{ert} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 62}{400} \cdot 1,513 = 1,876 \text{ t/cm}$$

5 倍の安全度の場合 Engesser に従へば

$$A_{ert} = \frac{5^2 \cdot 62^2 \cdot 400}{4 \cdot 2150 \cdot 2600} = 1,718 \text{ t/cm}$$

となる。之は今求めた A_{ert} の値と正しく一致する。然し乍ら上述の様に 4 倍の安全度を與へるならば $A_{ert} = 1,10 \text{ t/cm}$ となるのである。

第十二章 拱桁のバックリング安全度

51. 弧形部材のバックリング荷重

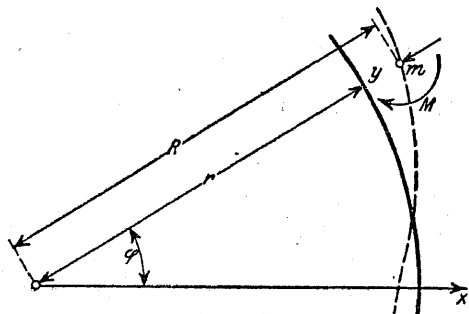
弾性曲線の微分方程式

閉じた圓環及び圓弧に曲げられた部材の不安定平衡の問題は夙にフランスの學者 M. Lévy, M. Halphen 及び J. Boussinesq によつて審かに論ぜられた。¹⁾ 拱部材に對する弾性曲線の微分方程式の次に述べる導き方は本質的には Boussinesq によつて與へられた説明によるものである。

今 r を荷重を受けない部材の曲率半径、 ρ を變形した部材の曲率半径とすれば、彎曲變形に對して次の既知の關係が存する。

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EJ\tau} \dots \dots \dots (1)$$

茲にバックリング係數 τ を導入する事に依て直材の場合と同様に方程式(1)を一般化した。方程式の右邊の負符號に關しては次の様に規定する、即ち部材をより大きく彎曲せしめ様とする力率を正にとるのである(第 162 圖)。



第 162 圖

變形せる部材軸の任意の點 m の位置は極座標 $R = r + y$ 及び φ によつて定められるのである。

或る線の彎曲は極座標に於ては次の公式によつて與へられる。即ち

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R^2 + 2\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 - R \frac{d^2R}{d\varphi^2}}{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

直材の弾性平衡の研究に於けると同様に茲にも亦 y 及びその一次の兩誘導函數は小さいから之等の量の積及び自乗は無視し得るものと假定し得るのである。

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} \quad \text{及び} \quad \frac{d^2R}{d\varphi^2} = \frac{d^2y}{d\varphi^2}$$

に依り、彎曲に對する方程式は簡單化され、次の如くなる。

1) Lévy, M.: Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications. J. de Math. (Liouville), 3. Serie, T. 10, 1884, S. 5. — Halphen, M.: Sur une courbe élastique. Comptes Rendus 1884, S. 422. — Boussinesq, Résistance d'un anneau à la flexion etc. Comptes Rendus 1883, S. 843. Mayer, R.: Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Z. f. Math. u. Phys. 1913, Bd. 61, S. 246. 參照

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r + y - \frac{d^2y}{d\varphi^2}}{(r + y)^2}$$

高次の項を無視する事によつて、次の如く置く。

$$(r + y)^{-2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - 2\frac{y}{r}\right)$$

故に彎曲變形は次の式によつて與へられる。

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r^2} \left(y + \frac{d^2y}{d\varphi^2}\right) \dots \dots \dots (2)$$

(1) 及び (2) を結付ける時は結局弾性曲線の方程式は次の形で與へられる。

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + y = -\frac{Mr^2}{EJ\tau} \dots \dots \dots (3)$$

兩端を絞結した圓拱のバックリング荷重

例へば第 163 圖に示した様に彎曲せる部材が正確に軸に沿つて動く一定の直應力 N を受けてゐる場合を考へる。 y を不安定平衡状態に於ける任意の點の半徑の方向に測られた變位とすれば、彎曲力率は $M = Ny$ となり、弾性曲線の微分方程式は次の如くなる。

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + y = -\frac{Nr^2}{EJ\tau}$$

今 $a = \sqrt{1 + \frac{Nr^2}{EJ\tau}}$

と置けば、微分方程式は次の如くなる。

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + a^2y = 0 \dots \dots (4)$$

此の一般解は既に知れる様に

$$y = C_1 \sin a\varphi + C_2 \cos a\varphi$$

によつて與へられる。

邊緣條件 $\varphi = 0, y = 0$ 及び $\varphi = 2\omega, y = 0$ からして $C_1 = C_2 = 0$ 従つて $y = 0$ を得。然し乍ら此の一般解の外に尙不定係數 C を持つた特解が存在する。¹⁾ 此の解も同様に邊緣條件を満足するもので特別な場合、即ち

$$a = n \frac{\pi}{2\omega} \quad (n=2, 3, \dots) \dots \dots (5')$$

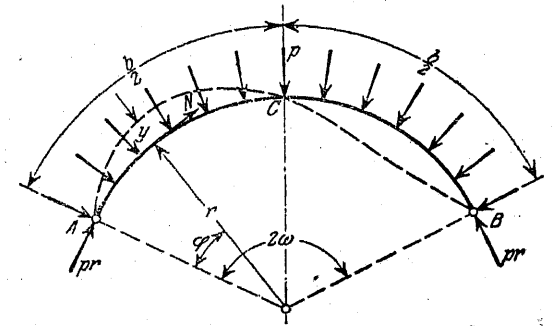
に對しては

$$y = C \sin n \frac{\pi \varphi}{2\omega} \dots \dots \dots (5)$$

であり、此の解は不安定平衡状態を特徴づけるものである。

$n = 1$ とする時は $\varphi = 0$ から $\varphi = 2\omega$ まで y は常に同符號を有し、變形せる部材軸は始めの部材軸の上か下に存在する事になる。然し乍ら此の事實は拱長が變化する時のみ可能なもの

1) 125 頁の 34 に於ける方法と比較され度い。



第 163 圖

であるが、バックルする瞬間に何等之に對する原因がないから $n = 1$ に相當する變形状態は不可能である。それ故 n は 1 より大きくなければならぬ。¹⁾ 式 (5) の α に對して詳細の値を代入するならば、バックリング條件として次の關係を得る。

$$2\omega \sqrt{1 + \frac{N r^2}{E J \tau}} = n \pi$$

此の方程式から N の最小値は $n = 2$ の時に生ずる、即ち

$$N_k = \frac{E J \tau}{r^2} \left[\left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 - 1 \right]$$

方程式 (5) から $\varphi = \omega$ に對して $y = 0$ を得。即ち拱頂は彎曲點となり、拱は第 163 圖に示した様に二つの半波形をなしてバックルするものである。²⁾

$\omega = \frac{b}{2}$ と置けば、バックリング荷重に對する方程式は次の形となる。

$$N_k = \frac{\left[\pi^2 - \left(\frac{b}{2r} \right)^2 \right] E J \tau}{\left(\frac{b}{2} \right)^2} \dots \dots \dots (6)$$

非常に扁平な拱に對しては $\left(\frac{b}{2r} \right)^2$ は π^2 に對して無視し得るからして、バックリング荷重に對する公式は次の簡単な形になる。

$$N_k = \frac{\pi^2 E J \tau}{\left(\frac{b}{2} \right)^2} \dots \dots \dots (6')$$

方程式 (6) 及び (6') は $\frac{b}{2} : \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2r\pi} \right)^2}$ 並びに $\frac{b}{2}$ をバックリング長と見れば Engesser-Karman の公式の形を有してゐる。それ故に兩端は變位をしないが鉸によつて支へられた不變斷面を持ち、一定の軸力 N が作用する拱部材は、拱平面内に於けるバックリングに對しては $\frac{b}{2} : \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2r\pi} \right)^2}$ をバックリング長として計算すれば良い。

52. 二鉸拱と無鉸拱への應用

鋼構造に於て應用し得る様な拱は多くは小さな拱矢を持ち、又その形は殆ど圓弧のものである。従つて軸力 N が不變であると言ふ假定のもとに實際的に間に合ふ近似法によつて上述の法則に従つてバックリング安全度を定め得るものである。水平反力 H_{max} 及び支持反力 A から支點に於ける最大軸力を近似的に次の如く定める。

$$N = \sqrt{A^2 + H_{max}^2}$$

- 1) 拱端が固定されてゐる時にも同様である。これが弦の方向に變位するならば $n = 1$ の場合も亦可能であり、その際にはバックリング荷重は著しく小さい。
- 2) 拱を部材多角形とみるならば同様の結果に達する。Bleich: Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen Eisenbau 1919, S. 169. 參照

此の荷重に依てバックリング安全度を確め得るのである。普通見る様に拱の斷面が變化するものとすれば、146 頁の第 18 表による公式に基いて拱頂及び支點の斷面から計算される置換慣性率を用ふるのである。

バックルする時拱頂が彎曲點であると云ふ事實は Augsburg-Nürnberg の機械工場の Gustavsberg 工場で 1913 年に行つた實驗により確められた。上述の法則に従つて計算に依つて決定したバックリング力と實驗によつて求めた値との間に 1.3% の差があつた。¹⁾

無鉸拱 各拱半分の一方が固定され、他は拱頂に於て鉸によつて支へられた部材の様な状態にあるものは、故計算上用ふるバックリング長は二鉸拱のものを 0.7 で割れば宜しい。従つて

$$N_k = \frac{\pi^2 E J \tau}{\left(\frac{b}{2 \cdot 0.7} \right)^2} = \frac{\pi^2 E J \tau}{\left(\frac{b}{1.4} \right)^2} \dots \dots \dots (7)$$

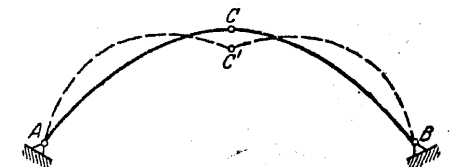
53. 三 鉸 拱 の 安 定

兩端が廻轉し得る様に支へられた弧形材の拱頂に於て不安定平衡状態に際して生ずる彎曲率の零の點に鉸を設ける事が出来、従つて對稱三鉸拱のバックリング荷重を其の他が同様の状態にある二鉸拱のバックリング荷重と同様の關係によつて包含せしめると云ふ事は直ちに考へられることである。然し乍ら第 164 圖に依つて知る様に三鉸拱に於ては鉸が入つて來る事によつて拱頂に於ける著しいバックリングに依つて特徴づけられる第二の變形の起る可能性があり、そしてこの變形を生ぜしめるバックリング荷重は拱部材に於けるものよりも小さい結果になることが期待される。中間に鉸を持つた拱部材の平衡問題は之まで尙嚴密には解かれなかつた。

バックリング荷重に對する近似計算は Engesser が導いたものがある。²⁾ 此の計算の根本概念は大體次の様である：バックリング状態に於ては部材軸の各點に對して内力と外力との間に平衡關係が成立しなければならないから、一般に次の方程式が成立する。

$$M_a = M_i$$

M_a は部材軸の任意の點に於ける外力の彎曲率とし、 M_i は内力の彎曲率とする。今バックリング状態に對する變形曲線の一般的の形が解つたものとすれば、37 に於て導いたのと同様に、最後の結果に大きな誤りなしに邊縁條件を考へに入れた變形曲線のより正確な法則を或る範圍内に於て任意に求め得るものである。かくして得られた變形曲線から M_a 及び M_i が計算せられ、結局此の M_a と M_i を等置することに依つてバックリング條件が得られる。



第 164 圖

- 1) Mayer, R.: Die Knickfestigkeit, S. 145. 參照
- 2) Mayer-Mita, Dr.-Ing. R.: Die Knicksicherheit in sich versteifter Hängebrücken, sowie des Zwei- und Dreigelenkbogens innerhalb der Tragwandebene, Eisenbau 1913, S. 425. 參照

圓形拱部材が第 165 圖に示す様に二つの半波形状にバックルするものと假定すれば m 點に於ける彎曲率 M_a は

$$M_a = Ny$$

となり, M_i に対しては 51 の彈性曲線の方程式 (方程式 (3)) から

$$M_i = -\frac{EJ\tau}{r^2} \left(y + \frac{d^2 y}{d\varphi^2} \right)$$

が成立つ. 今

$$y = f \sin \frac{\pi \varphi}{\omega}$$

とする. 此の假定は支點及び拱頂に於ては y は零であると云ふ邊縁條件を満足するものである. かくすれば y を M_a 及び M_i 中に代入する事に依つて次のバックリング條件を得る.

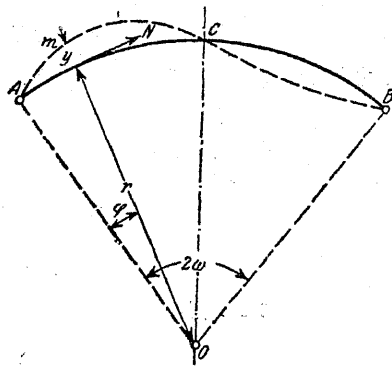
$$Nf \sin \frac{\pi \varphi}{\omega} = -\frac{EJ\tau}{r^2} f \sin \frac{\pi \varphi}{\omega} \left(1 - \frac{\pi^2}{\omega^2} \right)$$

或は

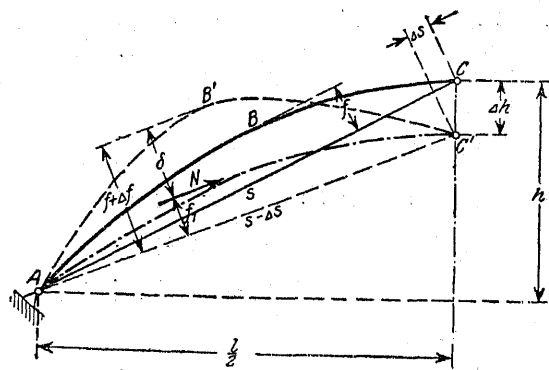
$$N_k = \frac{EJ\tau}{r^2} \left(\frac{\pi^2}{\omega^2} - 1 \right)$$

即ち 51 に於て嚴密な方法で導いたバックリングの公式である.

三鉸拱に於ける計算は此の様に簡単なものではない.



第 165 圖



第 166 圖

第 166 圖に於て ABC はバックルする前の拱の左半分を正確に示したもので, 之は拱矢 f を持つてゐる. $AB'C'$ はバックルした拱軸でこの時その弦の長さは Δs だけ短かくなり拱矢は $f + \Delta f$ になつたとする. 不安定平衡状態に移り行く時に拱長は變化しないものであるから

$$\text{弧 } ABC = \text{弧 } AB'C'$$

でなければならない. 偏平な拋物線拱に於ては

$$s + \frac{8}{3} \frac{f^2}{s} = s - \Delta s + \frac{8}{3} \frac{(f + \Delta f)^2}{s - \Delta s}$$

が成立ち, 此の式から二次の小さい項を無視する事に依つて

$$\Delta f = \Delta s \frac{3s^2 - 8f^2}{16fs} \dots \dots \dots (8)$$

を得る.

第 166 圖に於て鎖線で示した合力線 (壓力線) は荷重を満載した時に拋物線となり, 之は變位した鉸點 C' を通過する. この半拋物線の拱矢は f_1 で次の如くなる.

$$f_1 = \frac{1}{4} (h - \Delta h) = \frac{1}{4} \left(h - \Delta s \frac{s}{h} \right) = f - \frac{s}{16f} \Delta s$$

それ故吾々が外力及び内力に依る彎曲率を決定し様とする四分の一の點 B' の合力線からの距離 δ は次式に依つて與へられる.

$$\delta = f + \Delta f - f_1 = f + \Delta f - \left(f - \frac{s}{16f} \Delta s \right) = \frac{\Delta s}{4fs} (s^2 - 2f^2)$$

それ故

$$M_a = N\delta = \frac{N\Delta s}{4fs} (s^2 - 2f^2) \dots \dots \dots (9)$$

$$M_i = EJ\tau \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right)$$

から曲線 $\frac{1}{\rho}$ 及び $\frac{1}{r}$ の大體の計算に依つて B' 點に於ける内力の彎曲率 M_i を求める. 第 167 圖より

$$\left(\frac{s - \Delta s}{2} \right)^2 = 2(f + \Delta f)(\rho - f - \Delta f)^2$$

それ故に

$$\frac{1}{\rho} = \frac{8(f + \Delta f)}{(s^2 - 2s\Delta s) + 8f^2 + 16f\Delta f} = \frac{8(f + \Delta f)}{s^2 + 8f^2} \left(1 + \frac{2s\Delta s - 16f\Delta f}{s^2 + 8f^2} \right),$$

茲に再び高次の小さな量は之を無視した.

扱て

$$\frac{1}{r} = \frac{8f}{s^2 + 8f^2}$$

であるから

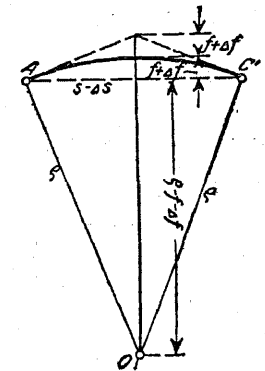
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{8\Delta f}{s^2 + 8f^2} + \frac{8f(2s\Delta s - 16f\Delta f)}{(s^2 + 8f^2)^2} = \frac{8}{s^2 + 8f^2} \left[\Delta f + \frac{2f(s\Delta s - 8f\Delta f)}{s^2} \right]$$

茲に分母の第二項の括弧内の非常に小さな量 $8f^2$ を s^2 に対して無視した.

方程式 (8) の Δf を用ひて

$$M_i = EJ\tau \Delta s \frac{8}{s^2 + 8f^2} \left[\frac{3s^2 - 8f^2}{16fs} - \frac{f}{s} \right] \dots \dots \dots (10)$$

1) Engesser の場合は此の $-f - \Delta f$ の項がない.



第 167 圖

となる。方程式 (9) 及び (10) を結びつけて結局次式を得る。

$$N_k = EJ\tau \frac{4/s}{(s^2 - 2f^2)} \frac{8}{(s^2 + 8f^2)} \left[\frac{3s^2 - 8f^2}{16fs} - \frac{f}{s} \right] = EJ\tau \frac{6s^2 - 48f^2}{(s^2 - 2f^2)(s^2 + 8f^2)}$$

實用に供するためこの公式は f の高次の項を無視すれば簡単化せられる。即ち結局次式を得る。

$$N_k = \frac{6EJ\tau}{s^2} \left(1 - 14 \left(\frac{f}{s} \right)^2 \right)^2 \dots \dots \dots (11)$$

それ故に三鉸拱の桁平面内に於けるバックリングに対しては次のバックリング長を以て計算すべきである。

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{s}{\sqrt{1 - 14 \left(\frac{f}{s} \right)^2}} = 1.28 \left[1 + 7 \left(\frac{f}{s} \right)^2 \right] s$$

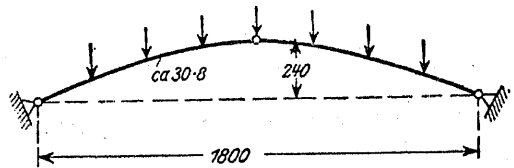
茲に s は半拱の弦の長であつて f はその拱矢を示す。

例. M. A. N. の Gustavsborg 工場に於て行つた矩形断面を持ち第 168 圖に示した様な寸法の部材に就ての實驗がある。荷重は集中荷重より成り八分點に作用するものである。

$$s = \sqrt{90^2 + 24^2} = 93.2 \text{ cm}, f = 6 \text{ cm},$$

$$J = 0.1343 \text{ cm}^4 \text{ (平均値)}$$

を以て $\frac{l}{z} < 105$ であるから $\tau = 1$ と置き得る。



第 168 圖

故に次の如くなる。

$$N_k = \frac{6 \cdot 2150 \cdot 0.1343}{93.2^2} \left[1 - 14 \left(\frac{6}{93.2} \right)^2 \right] = 0.188 \text{ t}$$

實驗によるものは $N_k = 0.202 \text{ t}$ である。相當亂暴な近似方法なるにも拘はらず満足すべき一致を示してゐる。同様の寸法の二鉸拱に對して、實驗は理論と非常によく一致して $N_k = 0.204 \text{ t}$ である。之は三鉸拱に於けるものよりも約 50% 位高い値である。

第十三章 抗壓材の鈹のバックリング

54. 板狀部材の安全度問題

不安定平衡状態に就ての之までの研究に於ては統一した一體としての部材を觀察して來た。鋼橋の部材をなす部分は普通板狀をした要素から成つてゐる。それ故一體としての部材の破壊を示すこれ迄考へて來た不安定平衡状態が生ずる前に、部材を形作る薄い鈹が壓應力の作用のために不安定な平衡状態になり、即ちバックルし、従つて全部材が早期の破壊を起す様な場合が考へられる。此の各單一の場合に就てバックリングの生ずる條件を常に長々と研究することは勿

1) Engesser が導いた N_k の値は之より幾分大きい。