

第 20 表

固形部材に対する耐荷力の減少が 5% 以下の場合の

集成部材の結合の最小距離  $c = \mu l_g$

全部材の細長比 $l/l_g$	30	40	50	60	70	80	90	95	100	105	110	>110
$\mu = \frac{c}{l_g}$	32	36	38	41	43	44	45	40	35	30	28	$\frac{1}{4} \frac{l}{l_g}$

距離  $c \geq 30l_g$  に結合を配置すべきであると云ふ屢々適用される法則は合法的なものと考へられる。何となれば、之はその最小値を考へてゐるからである（新國有鐵道規定でもこの値を選んで居る）。中位の細長い部材 ( $\lambda = 50 - 90$ ) 及び非常に繊細な部材  $\lambda > 120$  に對しては第 20 表に示した様に結合は本質的により廣く置かれ得る。

### 第十一章 平面部材網のバックリング強度

#### 41. 平面部材網の不安定平衡状態

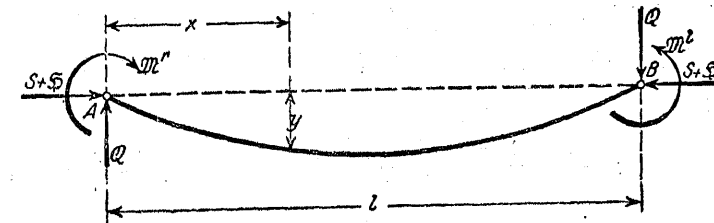
本質的に一種の部材網を形成するもので、構造上結構或はラーメンとして取扱ひ得べき各構桁要素は橋梁工に於ては重要なものの一つである。通常よく見受けられる様に彎曲率に抵抗し得る部材結合のために各部材は不安定な平衡状態——先づ此の様な状態が存在し得るものと假定する——の下に相互に作用し合ふものである。結構或はラーメンの個々の要素はその相隣る部材と弾性的に結合されて居り、その結合の程度は正しく部材結合に於けるその他の部材の弾性状態及び荷重とに關係するものである。それ故バックリングの状態に關しては個々の部材それ自身に就てではなく他の部材との關係如何に依つて論ぜられなければならない。即ち問題は弾性的に結合せられた部材網の不安定なる平衡に就て研究すれば良い事になる。吾々は平面部材網の關係に就て研究するに止めよう、と云ふのは普通橋梁工では之で充分であるからである。

前項を説明する意味に於て、かゝる不安定な平衡状態が存在し得るや否やに就ての疑問は若しも此の状態が起る爲の條件を定める事が出来るならば同時に解決せられるであらう。次に分る様に部材結合に於ける不安定な平衡状態は次の如き特長を有して居る。即ちかゝる状態の起る時に際して變位の種類及びその相互間の割合は定め得るが總ての變形量には任意の因數が共通に入つて居るためその大きさは定め得られない。バックリング状態が成立する前に平衡して居る内力及び外力はバックリング状態に於ける變形の生じたる時は最早平衡系を形造らない。何となれば此の變形が外力の相互の位置を變化せしめ、しかも此の位置の變化は無視する事が出来ないからである。それ故に一般に附加應力及び附加力率を生ずる。此等を夫々バックリング應力及びバックリング力率と呼ぶ事にする。そして此等の量はバックリング状態に於ける變位と

同位の大きさの關係を持つて居り、從つて變位と同様に任意の因數を有して之と共に消失するものである。

變形量とバックリング應力との間の關係は部材組成の靜力學的、彈性學的及び幾何學的條件から導かれる様に不安定な平衡状態を可能ならしめる條件を立てる根本となるのである。それ故變形量及びバックリング應力を定め、且又此の不安定平衡状態を特長づける有限であるが大きさは任意の變位の生ずる時に必要な特殊の條件を導き得る様な關係をたてる事は我々の使命である。上述の關係をバックリング方程式と呼ぶ事にする。

此處ではバックリングの問題の極く狭い範圍の部分のみを取扱ふから平面部材網の完全なる理論に就ては論及しない積りである。それ故バックリング方程式をその形及び適用範圍に就き只現在注目して居る問題を解くのに充分な程度に求めよう。<sup>1)</sup>



第 122 圖

今バックリング状態に於ける部材結合の中から部材 AB を取出して考へて見る（第 122 圖）。兩端の結合點には壓力 S の外にバックリング力率  $m'$  及び  $m''$ 、バックリング應力  $\Omega$  及び  $\Omega'$  が働くものとする。バックリング状態の生ずる前に外力に依つてひき起される彎曲率及び剪力は度外視する。何となれば之等は丁度單柱の場合に於けると同様に（124 頁參照）少くともその一般的な形に於てはバックリング條件に就て何等の影響をも持たないからである。變位及びそれと同位のバックリング應力及びバックリング力率は非常に小さいものと假定すれば之等の積及び乘は無視する事が出来る。

x 點につき力率をとれば

$$m_x = m' + \Omega x + (S + Q)y$$

故に  $x = l$  では

$$m'' = m' + \Omega l$$

故に

$$\Omega = \frac{m'' - m'}{l}$$

此の  $\Omega$  の値を代入すれば

$$m_x = m' \left(1 - \frac{x}{l}\right) + m'' \frac{x}{l} + Sy$$

1) 問題の詳細なる論述に關しては著者の論文 „Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen,” Eisenbau 1919, S. 27 ff. 參照。

但し積  $\psi$  は二次的に少さい量であるから之を捨てる。此處に於て部材 A B に對する彈性曲線の微分方程式として次式を得る (133 頁式 (11) 参照)。

$$EJ\tau \frac{d^2 y}{dx^2} + Sy + \mathfrak{M}^r \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \mathfrak{M}^i \frac{x}{l} = 0 \dots (1)$$

此の二次微分方程式の一般解は次の様になる。

$$y = A \sin ax + B \cos ax - \frac{\mathfrak{M}^r}{S} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{\mathfrak{M}^i x}{S l}$$

茲に A, B は限界條件から定めらるべき 2 定數であつて、又

$$a = \sqrt{\frac{S}{EJ\tau}} \dots (2)$$

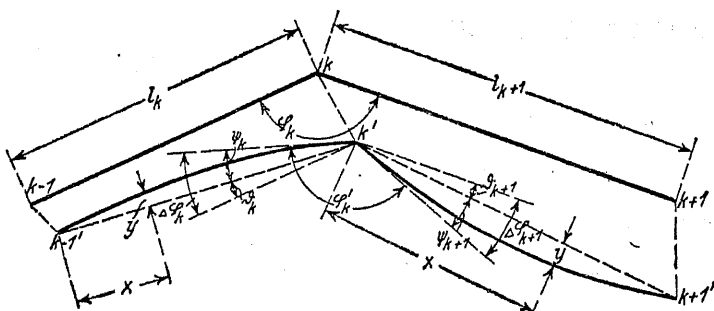
を示す。

先づ A, B を定めるために横距  $x = 0$  及び  $x = l$  に於て變位  $y = 0$  と置けば、斯くして得られた二つの方程式から定數を定め得る。斯く計算せられた A, B の値を代入すれば結局  $y$  の一般式として

$$y = \frac{\mathfrak{M}^r}{S} \left( \frac{\sin a(l-x)}{\sin al} - 1 + \frac{x}{l} \right) + \frac{\mathfrak{M}^i}{S} \left( \frac{\sin ax}{\sin al} - \frac{x}{l} \right) \dots (3)$$

が得られる。此の式中バックリング力率  $\mathfrak{M}^r$  及び  $\mathfrak{M}^i$  は未知數として取扱はれるもので、之等は上述のバックリング方程式から決定せらるべきものである。此のバックリング方程式をたてるに當つては、部材結合に於ける各部材の彈性學的並びに靜力學的關係から生ずる條件が必要である。之は即ち定常條件及び平衡條件である。

**定常條件** 部材網に於ける各部材は夫等が互に強固に結合せられたる時のみ相互に作用し合ふものであるから、バックリング力率  $\mathfrak{M}$  相互間の關係を導くに際し此の強固に結合せられたと云ふ特徴を利用する。  $k$  點に於て強固に結合せられた 2 部材  $l_k$  及び  $l_{k+1}$  は變形する時常に相互に同じ角を保たなければならない。其れ故一對の部材のバックリング状態に於ける變形を生ずる前及び生じた



第 123 圖

る時を示せる第 123 圖に就て見るに角  $\phi_k$  は角  $\phi_{k+1}$  に等しい。即ち  $k$  點に於ける兩部材への切線の廻轉角も等しくなければならない。即ち

$$\Delta \phi_k = \Delta \phi_{k+1}$$

此の角は部材の弦が廻轉に依つて畫いた部材撓角  $\psi$  と本來の切線撓角  $\phi$  とが結合せられたものであるから定常條件は次の様な形で示す事が出来る。即ち

$$\psi_k + \phi_k = \psi_{k+1} + \phi_{k+1} \dots (4)$$

總ての部材につき横距を左から右へと取る事にすれば

$$\phi_k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}^k \quad \text{及び} \quad \phi_{k+1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}^{k+1}$$

である。式 (3) から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{M}^r}{S} \left( -\frac{a \cos a(l-x)}{\sin al} + \frac{1}{l} \right) + \frac{\mathfrak{M}^i}{S} \left( \frac{a \cos ax}{\sin al} - \frac{1}{l} \right)$$

それ故

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}^k = \frac{\mathfrak{M}^r}{S l} \left( -\frac{al}{\sin al} + 1 \right) + \frac{\mathfrak{M}^i}{S l} (al \cot al - 1)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}^{k+1} = \frac{\mathfrak{M}^r}{S l} (-al \cot al + 1) + \frac{\mathfrak{M}^i}{S l} \left( \frac{al}{\sin al} - 1 \right)$$

此の兩微分商を式 (4) 中の角  $\phi_k$  及び  $\phi_{k+1}$  に代入すれば次の關係を得る。即ち

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{M}^r_{k-1}}{S_k l_k} \left( -\frac{al}{\sin al} + 1 \right)_k + \frac{\mathfrak{M}^i_k}{S_k l_k} (al \cot al - 1)_k + \psi_k = \\ = \frac{\mathfrak{M}^r_{k+1}}{S_{k+1} l_{k+1}} (-al \cot al + 1)_{k+1} + \frac{\mathfrak{M}^i_{k+1}}{S_{k+1} l_{k+1}} \left( \frac{al}{\sin al} - 1 \right)_{k+1} + \psi_{k+1} \end{aligned}$$

此の場合個々の項が部材  $l_k$  及び  $l_{k+1}$  の何れに屬するかは指數  $k$  及び  $k+1$  を附する事により示す。  $\mathfrak{M}^r_{k-1}$  及び  $\mathfrak{M}^i_k$  は部材  $l_k$  の連結力率であつて  $\mathfrak{M}^r_k$  及び  $\mathfrak{M}^i_{k+1}$  は部材  $l_{k+1}$  の連結力率を示す。  $\mathfrak{M}^r_k$  及び  $\mathfrak{M}^i_k$  は一般には相互に異なる値を有するものである。何となれば  $k$  點に尙他の部材が強固に結合せられて居る時には  $k$  點に於ける力率は部材  $l_k$  より部材  $l_{k+1}$  に傳達する時突發的に變化するからである。

今  $al = \varphi$  と置けば、 $\varphi$  は次の式に依つて決定せられる。此の際  $\varphi$  を不安定係數と呼ぶ。

$$\varphi = l \sqrt{\frac{S}{EJ\tau}} \dots (5)$$

故に  $\varphi = \pi$  と置けば部材の自然バックリング荷重を得る (129 頁, 35 を参照)。更に式 (5) から次の如くなる。

$$S l = \varphi^2 \frac{EJ\tau}{l}$$

今上述の撓曲率の關係式の  $S l$  に此の式を代入し、任意に選んだ積  $EJ\tau$  を乗じ更に

$$l \frac{l_c}{J\tau} = l'$$

と置けば、次の關係が得られる。

1)  $J_c$  は出來得る限り多く  $\frac{l_c}{J\tau} = 1$  となる様に選ぶのである。

$$m_{k-1}' l_{k-1} \frac{1}{\varphi_{k-1}^2} \left( \frac{\varphi_{k-1}}{\sin \varphi_{k-1}} - 1 \right) + m_k' l_k \frac{1}{\varphi_k^2} (1 - \varphi_k \cot \varphi_k) + m_{k+1}' l_{k+1} \frac{1}{\varphi_{k+1}^2} (1 - \varphi_{k+1} \cot \varphi_{k+1}) + m_{k+1}' l_{k+1} \frac{1}{\varphi_{k+1}^2} \left( \frac{\varphi_{k+1}}{\sin \varphi_{k+1}} - 1 \right) - E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = 0$$

今簡単のために

$$s(\varphi) = \frac{1}{\varphi^2} \left( \frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right), \quad c(\varphi) = \frac{1}{\varphi^2} (1 - \varphi \cot \varphi), \quad \rho = E J_c \quad \dots \dots (6)$$

更に

$$s' = l' s(\varphi) \quad \text{及び} \quad c' = l' c(\varphi)$$

とすれば力率の関係は結局次の式にて表はされる。

$$m_{k-1}' s_k' + m_k' c_k' + m_{k+1}' c_{k+1}' + m_{k+1}' s_{k+1}' - \rho (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = 0 \quad \dots \dots (7)$$

此の式(7)を不安定な平衡に於ける四力率方程式と呼ぶ。附録第IV表に此の四力率方程式の應用を容易ならしめる爲に  $\varphi = 0$  から  $2\pi$  までの値に對する函数  $s(\varphi)$ ,  $c(\varphi)$  の値を示した。此の方程式の應用は連續桁の計算の時のかの有名な Clapeyron の方程式の場合と同様である。此の方程式(7)及び簡單化せられた  $s(\varphi)$ ,  $c(\varphi)$ ,  $l'$  等の正確な意味を良く記憶する事は次項に於ける計算の理解を容易ならしめる爲に必要な事である。

$k$  點で只二つの部材のみが固定的に結合せられた場合には

$$m_k' = m_k = m_k$$

で四力率方程式(7)は三力率方程式となる。即ち

$$m_{k-1}' s_k' + m_k (c_k' + c_{k+1}') + m_{k+1}' s_{k+1}' - \rho (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = 0 \quad \dots \dots (7')$$

今迄  $k$  點で結合せられた部材は壓力を受けるものと假定して來たが、若しも部材が張力を受ける時には方程式(7)の中で此の部材に關係する項を次の様に置き換れば宜しい。<sup>1)</sup>

$k$  點の左にある部材が張力を受けるものとするれば

$$m' l' \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) + m' l' \frac{1}{\varphi^2} \varphi (\cot \varphi - 1)$$

$k$  點の右にある部材が張力を受けるものとするならば

$$m' l' \frac{1}{\varphi^2} (\varphi \cot \varphi - 1) + m' l' \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right)$$

但し  $\sin \varphi$ ,  $\cot \varphi$  はその双曲線函数を示す。

若し  $S = 0$  即ち今考へて居る部材が應力を受けない時には、四力率方程式の兩部分は次の極限值を得る。即ち

$$m' \frac{l'}{6} + m' \frac{l'}{3} \quad \text{及び} \quad m' \frac{l'}{3} + m' \frac{l'}{6}$$

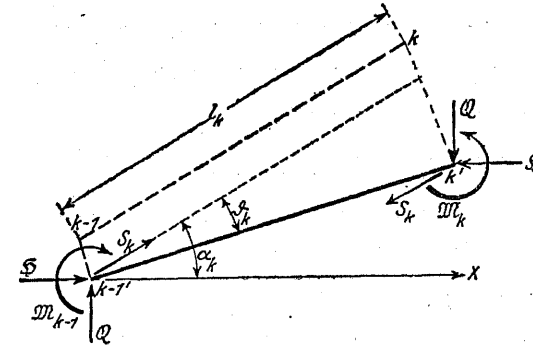
若しも或る部材が  $J = \infty$  である時、従つて此の部材に強固に連結せられる部材が其處に固定される場合は  $J = \infty$  なる部材に對する  $l'$  は 0 となるから、四力率方程式中之に屬する項は

1) 張力を受ける部材に關しては微分方程式(1)の中  $s_y$  の項を  $-s_y$  と置く。それ故四力率方程式中之に關する項では  $\varphi$  の代りに  $i\varphi$  を入れ、上に導いた様な關係が得られる。

消失する。

方程式(7)はバックリング方程式の第一群を作るものである。最も一般的な形の式(7)はあらゆる種類の平面部材網に成立するものである。

**平衡條件** 此處では單柱列に就き考察するに留める。平衡の成立した荷重群の作用により部材應力  $S_1 S_2 \dots S_n$  が生ずる。  $\Omega$  及び  $\mathcal{S}$  は不安定な平衡状態に於て變形する時生ずる支點反力の分力である。



第124圖

今特に1部材  $k-1, k$  を取出して考へる。不安定な平衡状態が成立すると此の部材はその最初の位置から  $k-1, k'$  へと變位する(第124圖)。此の變位した部材端にはバックリング力率  $m_{k-1}$  及び  $m_k$ 、バックリング應力  $\Omega$  及び  $\mathcal{S}$  並びに部材應力  $S_k$  が作用する。 $a_k$  を部材  $k-1, k$  が此の部材列の兩端  $o$  及び  $n$  を結んだ線即ち  $x$  軸として選んだ線となす角とし、 $\vartheta_k$  を部材撓角とすれば  $k'$  を力率中心に取る時には次の關係が成立する、即ち

$$m_k = m_{k-1} + S_k l_k \vartheta_k + \Omega l_k \cos(a_k - \vartheta_k) - \mathcal{S} l_k \sin(a_k - \vartheta_k)$$

$\vartheta_k$  は小さい量だから、その三角函数  $\sin$  及び  $\cos$  に對する影響を無視し、全體を  $l_k$  で割れば平衡條件として次の式が得られる。

$$\frac{m_k - m_{k-1}}{l_k} - S_k \vartheta_k - \Omega \cos a_k + \mathcal{S} \sin a_k = 0 \quad \dots \dots (8)$$

此の式中三角函数の符號は角  $a_k$  に依つて定められ、此の  $a_k$  は  $x$  軸の方向からその都度の左端に於て時計の方向と反對に測られるものである。

バックリング方程式(7)及び(8)は總ての場合に於て、此處に生ずる凡ての未知數即ち  $m$ ,  $\Omega$ ,  $\mathcal{S}$  及び  $\vartheta$  を定めるに充分なものではない。然し乍ら簡単のために一般的な形のバックリング方程式を更に立てる事は止める。若しも之が必要である場合にはバックリング方程式(7)及び(8)から過剰の未知數を消去する爲に、個々の場合に適合せる關係から尙不足の式を示す事にしよう。之等の方程式は消去を行ふ事に依つて、バックリング方程式の全部を表はす事になる。

**バックリング條件** バックリング方程式は未知數を含まない項がなく、従つて1組の方程式の行列式  $\Delta$  が零となる場合にのみ零でない根を持つ1組の一次の相似方程式を形造る特徴がある。其れ故バックリング力率、バックリング應力及び撓角も

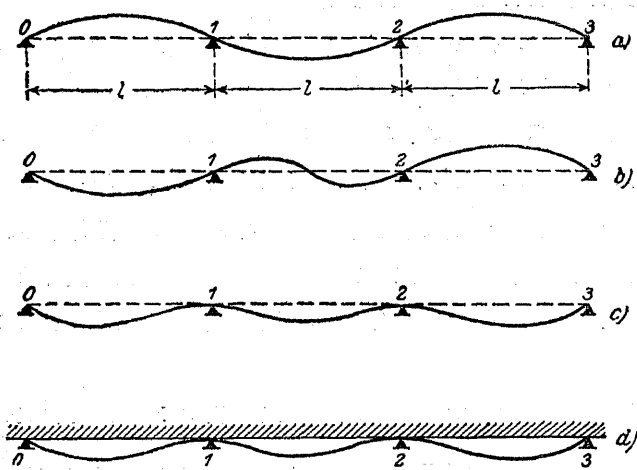
$$\Delta = 0 \quad \dots \dots (9)$$

の場合にのみ有限な零でない値を有し、従つて此の場合にのみ不安定平衡状態が生ずるのであ

る。其れ故方程式(9)はバックリング条件である。言ふ迄もなく此の場合に於てはバックリング方程式の根は相互に無関係なるものではなく、總て任意にとり得るその中の一つの根に依つて示されるものである。即ち不安定なる平衡状態に於て決定すべき總ての量は共通の任意の因数を持つ。それ故にバックリング状態に於ては恰も單柱の場合に於けると同様に、單に變位の大きさ及び之に對應するバックリング應力に依つてのみ區別され得る無数の同様の平衡位置が存在する。今本節に於てはバックリング条件(9)の性質の一般的解説に入り込むのを避け只次の事實のみを注意する。

方程式  $\Delta = 0$  は一般的にはバックリング問題に對し一義的の解を與へない。何となれば之は通常若干数の根を持つからである。それ故に此の根列の中から合理的な根を決定し得る爲には各場合場合に就て更に他のもう一つの条件が入り來らねばならない。若し之に反し、その1根に相當した平衡状態が起る様に制限する条件が存在しない場合には最小のバックリング應力を與へる様な根を選び出すべきである。何となれば只此の平衡状態のみが實際上の意義を有して居るからである。以下簡単な例に依つて此の論説を説明する事にする。

3 徑間を有する部材のバックリング条件はバックリング應力  $S_k$  に對して 3 根を與へる。此の 3 根は第 125 圖に示す様な變形状態を生ずる。 $S_k$  の最小値は變形状態 a) を生じ、最大値のものは變形状態 c) を生ずる。實際的には更にもう一つの条件の存在しない以上只平衡状態 a) のみを考へればよい。何となれば之は零から漸次増加する荷重  $S$  に依つて惹き起される最初のバックリング状態であるからである。部材にバックリング状態 a) が起れば部材は變形を續け遂にバックルしてしまふから他の状態の生ずる事は全く有り得ない。然し乍ら此の a) に依る變形状態が不可能な様な条件の存在する時には全然事情が違つて來る。例へば 3 徑間の場合に就て考へれば部材が一方を強固な壁に依つて支へられ (第 125 d 圖)、従つて變形に依る波形が一方の側



第 125 圖

にしか形成されない場合が之である。即ち此の時は状態 a) 及び b) は不可能であり只 c) に依る變形が起り得るのみである。かく支へられた部材の耐荷力は此の側壁の無い場合より遙に大である。之に類似した制限は又部材列が横荷重を受ける様な場合にも存在する。即ち横荷重を受けて居る部材は事情に依つては此

の横荷重がない部材よりも更に強大なバックリング應力に耐へ得るのである。<sup>1)</sup>

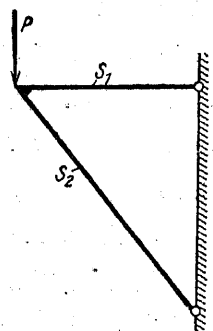
1) Bleich, Dr. Friedlich; Elnige Aufgaben über die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Eisenbau 1922, S.34

此の場合尙部材結合に於ける各部材の安全度の問題を極く簡単に述べよう。既に述べた通り部材結合に於ける各部材はそのバックリング作用に對する耐荷力に關しては部材それ自身考察出来るものではなく、部材網に於ける他の部材と關聯してのみ考察出来るものである。即ち個々の部材のバックリング安全度は最早嚴密に考へる事は出來ず、全部材結合に於けるバックリング安全度が考へ得られるのみである。單一部材の場合にはバックリングに對する安全率を  $\psi$  倍の有効荷重を支へ得るが如き状態にある時に此の部材は  $\psi$  倍の安全率を持つと定義する。<sup>1)</sup> 然る時は合理的には次の様に定義しなければならない。即ち部材網が全部材網の  $\psi$  倍の有効荷重を取る様な状態にある時にはその部材網は  $\psi$  倍の安全率を有する。但し之には或る困難が伴ふのである。即ち夫れは此の様な部材網のバックリング安全率に對して致命的である様な單一の最も不利なる荷重群が存在するのみならず、部材結合に於ける個々の抗壓材に最大應力を生ぜしめる様な多數の荷重が存在すると云ふ事である。其れ故實際には次に述べる方法により計算を行ふものである。即ち順次に部材結合の抗壓材を考察し、各部材に對して問題の部材に最大壓力を起させる様な最不利の各荷重配列を定め、バックリング安全度の計算の際注意されねばならない限り、此の部材及び此の部材に關係ある總ての部材の應力を計算し、斯くして問題の抗壓材のバックリングに對する耐荷力を算定するのである。若し抗壓材の  $\psi$  倍の安全率を上のように定義すると抗壓材自身が  $\psi S_a$  (茲に  $S_a$  をその部材の實應力とする) なる力を取り得る状態にある事を言ふのではなく、計算に際し今考慮中の荷重群を  $\psi$  倍の安全率を以て支へ得る他の部材と關聯して、上の抗壓材が  $\psi S_a$  の力を取り得る事を言ふのである。

此の説明は次の簡單なる例によつて明かである。第 126 圖に示す様に兩部材  $S_1$  及び  $S_2$  が隅に於て固定結合せられて一種の突桁を形作り、此處に荷重  $P$  が作用してゐるものとする。部材應力  $\psi S_2$  の作用に依つて抗壓部材は突桁の平面内でバックルするものであるが、抗張材との固定結合のために  $\psi S_2$  は兩部材が相互に鉸に依つて結合せられてゐる場合に比して大きい、抗張材に於ける部材應力が大なれば大なる程  $\psi S_2$  は大となる、さて應力  $S_1$  及び  $S_2$  は荷重  $P$  に比例するから全部材結合のバックリング荷重  $\psi P$  は部材應力  $\psi S_1$  及び  $\psi S_2$  に相當する。即ちバックリング荷重の決定に際しては張應力  $\psi S_1$  を以て計算すべきであつて、既に屢々強調してある通りバックリング条件に於ては單なる部材張應力  $S_1$  と  $\psi$  倍の部材應壓力  $S_2$  とを對立せしめてはならない。何となれば此の場合にのみバックリング状態に於ける突桁の支持力が  $\psi P$  であり、従つて前述の定義に従ひ此の部材結合は  $\psi$  なるバックリング安全率を持つと云ふことが確言出来るからである。但し此の場合暗々裡に抗張材はそれ自身  $\psi S_1$  なる力を取り得るものなる事を假定して居る。

其れ故部材結合の抗張材がバックリング作用に關し抗壓材に對して求めたる安全率に等しいか或はより高い安全率を有する様な場合には、總て部材結合に於ける總ての部材應力が抗壓材に對して決定的なる荷重に比例して生ずるならば、その張應力、壓應力の如何を問はず總ての

1) 此の定義に對する眞の意義に就ては 23 の詳論參照



第 126 圖

に就て説明しよう。

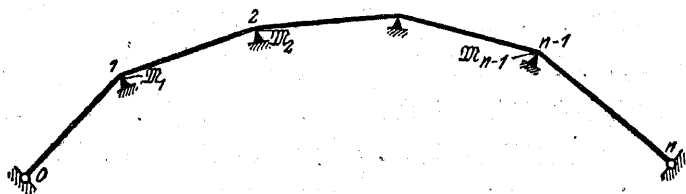
バックリング条件中に入り来る部材應力に今求めたる安全率を乗すればよいのである。

此の第二条件は必ずしも常に満足せられるものではないから附記を必要とする。即ち例外として此の条件が満足せられない時にはバックリング条件中に導くべき部材張應力として出来るだけ小さいものをとるべきである。但し之は同時に  $\psi$  倍の部材壓應力を生じ得るものである事を要する。

之から本章に述べた一般論の應用として結構部材及び彈性的に支へられたる弦のバックリング強度又は橋梁工上之と類似の問題

### 42. 結構平面内の弦のバックリング

壓應力を受ける結構弦の作用を判定するに當つては結構腹材が弦のバックリング安全率の上及ぼす影響は度外視してもよい。何となれば腹材の断面は弦断面よりも大抵小であり、従つて少くとも多數の場合に於ては腹材に依り弦のバックリング安全率が殆んど高くないからである。それ故今結構弦を結構平面内で格點に於て廻轉はなし得るが、變位をする事は出来ない様に支へられた彎曲に堪え得る部材列として考へて見る。弦端の固定は抗壓弦が直接丈夫な抗張弦と結合してある様な場合に於てすら同時に考へない。何となれば端部に於ける斯る固定の作用は多徑間の部材列に就ては取るに足りないからである。<sup>1)</sup>



第 127 圖

今任意の寸法を持ち任意の壓應力を取り得る全部の弦材が同じバックリング安全度を有するものと假定する。之は注意深く製作した構桁には充分正確に當嵌り、且又弦のバックリング安全度の點から言つても最も条件の悪い場合を示すものである。即ち充分利用し盡されない部材が他の部材を援け、全部材結合のバックリング安全率を高めた様な場合には此の場合には屬さない譯である。其れ故不安定係數  $\phi$  は全部材に對し同一である。バックリング条件を立てるため三力率方程式 (7) から出發する。之は  $M_0 = M_n = 0$  (第 127 圖) なる條件に注意すれば次の如くなる。即ち

1) 多徑間の部材列に於ける固定の影響に關しては 169 頁脚註 1) に説明した論文中に數値を以て述べてある。

$$\begin{aligned} M_1(c_1' + c_2') + M_2 s_2' &= 0 \\ M_1 s_2' + M_2(c_2' + c_3') + M_3 s_3' &= 0 \\ &\dots \\ M_{k-1} s_{k-1}' + M_k(c_k' + c_{k+1}') + M_{k+1} s_{k+1}' &= 0 \\ &\dots \\ M_{n-2} s_{n-2}' + M_{n-1}(c_{n-1}' + c_n') + M_n s_n' &= 0 \end{aligned}$$

未知量  $M$  を決定するために此の三力率方程式の數は充分であり、従つて之等は總體のバックリング方程式をなすと云ふ事は容易に知る事が出来る。それ故バックリング条件は次の形を持つ事となる。

$$\begin{vmatrix} (c_1' + c_2') & s_2' & & & & \\ s_2' & (c_2' + c_3') & s_3' & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & s_{n-2}' & (c_{n-2}' + c_{n-1}') & s_{n-1}' \\ & & & & s_{n-1}' & (c_{n-1}' + c_n') \end{vmatrix} = 0$$

若し

$$c_1' + c_2' = 0 \quad c_2' + c_3' = 0 \dots c_{n-1}' + c_n' = 0$$

と置けば、此の方程式は先づ満足される。

更に

$$c_k' = c_k l_k' \quad \text{茲に} \quad l_k' = l_k \frac{J_c}{J_k \tau_k}$$

と置けば、次の  $n$  個の方程式が得られる。即ち

$$\begin{aligned} c_1 l_1' &= -c_2 l_2' \\ c_2 l_2' &= -c_3 l_3' \\ &\vdots \\ c_{n-1} l_{n-1}' &= -c_n l_n' \end{aligned}$$

之等の方程式は  $l$  の大さとは無關係に  $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = \pi$  に依つて満足せられる。その際は第 IV 表より明かな様に  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = \pm \infty$  となるからである。既に假定した様に全部材が總て同様なる不安定係數  $\phi$  を持つものとすれば  $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \pi$  なる場合も此の中の一つである。 $\phi = \pi$  と置き、式 (5) を  $S$  に就て解けば次の如くなる。

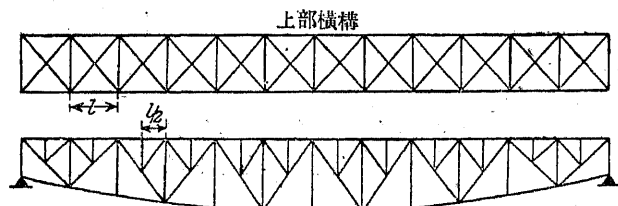
$$S = \pi^2 \frac{EJ_c}{l^2}$$

$\phi = \pi$  の時は自由に廻轉し得る端を有する長さ  $l$  なる部材をバックルさせる荷重を示す事になる。この荷重を自然のバックリング荷重と云ふ。部材列は恰も總ての格點が鉸に依り結合されてある場合の様に此の力に耐へるのである。それ故弦材を互に強固に結合する事は結果に於て何等バックリング安全率を高める事にならない。依つて次の法則が存在する。

全部材が同時に自然的バックリング限界に達し、従つて之等の部材が悉く同じバックリング安全率を持つ様に作られた結構の弦は、その結構平面内に於けるバックリング作用に對して恰もその弦材が格點に於て互に鉸にて結合せられて居るものとして計算を行ふべきで、而して計算に於ては各弦材に對し全部材長(理論長)を以てバックリング長さとする。

1907年2月16日のオーストリアの規定では弦材に就てはバックリング長を理論長の0.8に減じて居る。結構弦に於て此の様にバックリング長を減少させる事は既に述べた様な理由により望ましくない。

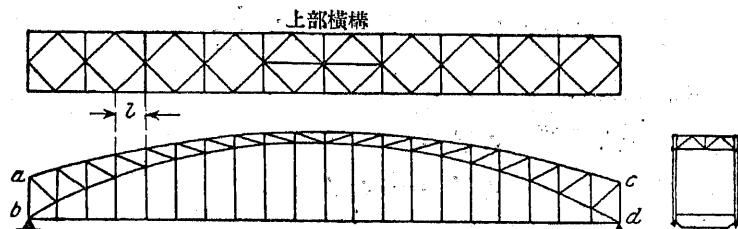
例1. 第128圖に示す様な上路桁橋。上弦の主格點は垂直並びに水平の方向に固定されてゐる。而して中間の格點は主桁の平面内に於てのみ固定されてゐる。それ故に主桁平面に於ける上弦材のバックリングに對しては格間の半分即ち  $\frac{l}{2}$  をとり、水平の方向に對するバックリングに對しては格間  $l$  を以て計算を行ふのである。



第128圖

例2. 繫材を有する拱橋(第129圖)。拱弦材 a-c の總ての格點は垂直方向には拱作用により、水平方向には上部横構部材により空間的に固定せられてゐる。其れ故バックリング長さは今考へてゐる兩方向共に格間  $l$  に等しい。水平方向に横構を

有し側面へのバックリングに對して安全にせられた格點を持つ拱弦 b-d に就ても同様である。

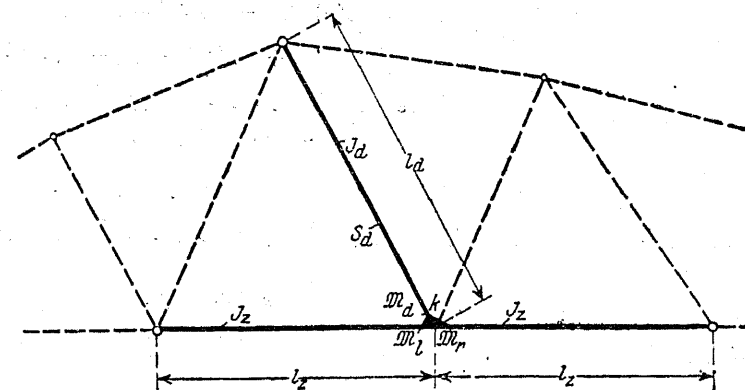


第129圖

### 43. 結構平面内の腹材のバックリング

#### a) 腹材が中間點で支へられてない場合

結構腹材のバックリング長の測定に對して最も不利なる場合をも包括する法則を求める爲に次の研究は總ての餘り重要でない影響を無視する事により著しく簡單化される、而かも此の影響を無視する事は結果を有利に導くものである。第130圖に於ては互に固定の作用を及ぼすと認められる部材を特に太く示した。之で見ると問題の抗壓部材の他に結合された抗張弦の2部材丈を考へるのである。之は更に離れた抗張弦の餘り著しくない影響を取り除く爲に相隣る部材と鉸によつて連結されて居ると見做す。同様に抗壓部材は抗壓弦に於て鉸に依つて連結せ



第130圖

られたものと考へる。此の様な配列は偶然に最も不利な場合に相當して居る。即ち抗壓弦及び抗壓部材が同時にバックリング限界に達した場合であつて、此の時には抗壓弦は抗壓腹材に最早顧慮するに足る固定作用を及ぼす事が出来ないのである。腹材の剛度は非常に小さい事を考へるならば考慮中の抗壓部材の末端で結合されてゐる限り此の影響は無視する事が出来る。此の様な事實は抗張部材がしばしば單に彎曲率に對して適度な剛度を有するも、抗壓斜材が今考へて居る部材と共に大體同時にバックリング限界又はその近くにあつて、それがため問題の斜材の固定に對して全く餘分の剛度を與へない様な場合には成立つのである。それ故單に抗壓部材の抗張弦に對する關係を研究する事にする。今計算を更に簡單にするために抗張弦が應力を受けないものと假定する、何となれば適當に働く張應力それ自身の影響は非常に小さいからである。兩抗張弦格間に於ける部材の長さ並びに断面は等しいものと假定する。結構組織の格點は幾何學的に變位は出來ないと考へ得るからして、力率方程式中の部材撓角  $\psi$  は悉く零と置かねばならぬ。

格點  $b$  に於て固定的に結合せられて居る3部材の連結力率を夫々  $m_a$ ,  $m_i$  及び  $m_r$  とする(第130圖)。今四力率の方程式に於て抗張弦の長さを  $l_z$ 、慣性能率を  $J_z$  とし、抗壓部材の長さを  $l_a$ 、慣性能率を  $J_a$  を以て示す事とし、腹材の一端及び抗張弦の各端に於ては力率は零なる事に注意すれば、方程式(7)より次の關係を得る。

$$m_i c_z' + m_a c_a' = 0$$

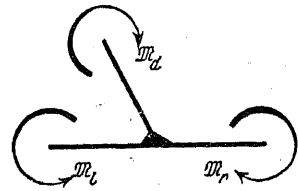
$$m_r c_z' - m_a c_a' = 0 \quad (1)$$

第131圖に於て見るが如く力率量の間には次の關係が存在する。

$$m_a - m_i + m_r = 0$$

それ故上記の力率方程式は

1) 力率は抗張弦と斜材との間の空間に就て考へるならば、部材を内方に曲げ様とする力率を以て正と考へる。第131圖に於て見るが如く第一の力率方程式に於ては斜材の左に就き考へ、 $m_i$  及び  $m_a$  は此の法則に従ひ正と考へられる。所が第二の力率方程式に於ては斜材の右側に就き考へて  $m_a$  は負であり  $m_r$  は正である。



第 131 圖

$$\begin{aligned} M_1(c_z' + c_a) - M_1 c_a' &= 0 \\ + M_2(c_a' + c_z') - M_2 c_a' &= 0 \end{aligned}$$

となる。それ故バックリング条件として次式が得られる。

$$(c_z' + c_a)^2 - c_a'^2 = 0$$

或は 
$$c_z'(c_z' + 2c_a) = 0$$

$c_z'$  は零でないから、バックリング状態に於ては

$$c_z' + 2c_a = 0$$

なる条件が満足されねばならない。又兩部材  $l_z$  は應力を受けず (172 頁参照), 又  $J_z$  を  $J_0$  として選ぶならば

$$c_z' = \frac{l_z}{3}$$

となり、更に又

$$c_a' = c(\varphi_a) \cdot l_a' = c(\varphi_a) l_a \frac{J_z}{J_a \tau_a}$$

とおけば、かくしてバックリング条件として最後に次の形を得る。

$$c(\varphi_a) = -\frac{1}{6} \frac{l_z}{l_a} \frac{J_a}{J_z} \tau_a \dots \dots \dots (10)$$

此の  $\frac{1}{6} \frac{l_z}{l_a} \cdot \frac{J_a}{J_z} \tau_a$  の値を計算して置くならば、第 IV 表による函数  $c(\varphi_a)$  の値により直接此の値に対する係数  $\varphi_a$  を求める事が出来る。式 (5) より

$$S_a = \varphi_a^2 \frac{E J_a \tau_a}{l_a^2}$$

或は

$$S_a = \frac{\pi^2 E J_a \tau_a}{\left(\frac{\pi}{\varphi_a} l_a\right)^2}$$

となる。それ故部材は恰も長さ  $\frac{\pi}{\varphi_a} l_a$  にして鉸により互に結合せられたる抗壓部材の様な状態にある事になる。次の第 21 表に  $\frac{1}{6} \frac{l_z}{l_a} \frac{J_a}{J_z} \tau_a$  の値に対する不安定係数  $\varphi_a$  を公式 (10) により計算し、此の下にバックリング長の減少係数

$$\gamma = \frac{\pi}{\varphi_a}$$

を示した。

第 21 表

結構腹材に対する減少係数  $\gamma$  (抗壓弦の固定は無視する)

$\frac{1}{6} \frac{l_z}{l_a} \frac{J_a}{J_z} \cdot \tau_a$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
$\varphi_a/\pi$	1,430	1,402	1,377	1,355	1,335	1,316	1,299	1,283	1,269	1,255	1,242
$\gamma$	0,700	0,714	0,727	0,733	0,749	0,760	0,770	0,779	0,788	0,797	0,805

$\frac{l_z}{l_a} \frac{J_a}{J_z} \tau_a$  の値は実際上は 1 より大きくなる事は稀である、故に  $\gamma$  の値は常に 0,8 よりも小である。

繫鉸に依り弦に結合せられた結構腹材は結構平面内に於けるバックリングに対しては上記の理由に依り、實長の 0,8 をバックリング長として計算する事が出来る。

Württemberg 州有鐵道の規定に於ては構桁平面内に於けるバックリングに對してバックリング長を部材長の 0,8 と定めて居る。オーストリア橋梁規定及び Bayern の州有鐵道規定も同様である。Baden 州有鐵道規定に於ては、更に實長の 0,6 を以てバックリング長と定めて居る。新國有鐵道規定で行つて居る様に繫鉸の大きさに依りバックリング長を定めるのは良くない、何となれば固定の程度は繫鉸の大きさに依つて殆ど影響されないからである。

新設計に際しては總ての場合を蔽ひ得る減少係数として普通  $\gamma = 0,8$  を用ひて良い。然し乍ら特別の場合、例へば既に出來て居る橋の再計算をなす場合に於ては、萬一の増大を避ける爲に實際の寸法に基いて、前述の表に依り減少係数  $\gamma$  の値を定める。事情に依つては今迄無視した固定の度合を高める作用をする影響をも考へて、正確な  $\gamma$  の値を求める事さへ必要である事がある。斯る目的に役立つ爲に次に示す第 22 表は抗壓弦に於ける固定結合の影響をも考へて計算を行つたものである。<sup>1)</sup>

$\alpha$ ,  $\beta$  及び  $i$  は部材結合の弾性状態を示すものである。 $S_0$  は最大斜材應力  $S_a$  と同時に生ずる最大抗壓弦應力である。 $S_0$  及び  $S_a$  は使用荷重である。先づ  $\tau_a/\tau_0$  を 1 と假定し、バックリング應力  $\sigma_k$  に基いて更に  $\tau_a/\tau_0$  の値を確めるのである。若し此の値が 1 と可成り違ふ場合には、より正しい  $i$  を求め、之に依り表を用ひてより正しい  $\gamma$  を定むべきである。

若しも  $i > 0,7$  である場合は、抗壓弦は今考へてゐる斜材よりも早くバックリング限界に達すると言ふ證據であつて、此の時は抗壓弦は應力を減じ最早斜材に作用を及ぼさざるのみならず、反對に斜材に依つても支へられる事になる。故に斜材は鉸に依つて抗壓弦に結合せられるものと考へ、 $\gamma$  の値は第 21 表に依り求めるべきである。斯る理由に基いて、表は只  $i = 0,7$  迄に就て計算を行つた。抗壓弦に於ける固定状態が最早問題とならなくなる危険限界を示す  $i$  の正確な値は、當然抗張弦に於ける斜材の固定状態、從つて  $\beta$  の値に關係するものである。 $\beta$  の値を 0 から 0,30 に増加せしめると、此の  $i$  の限界値は 0,70 から 0,74 に變化する、然し乍ら實際には既に述べた様に  $i > 0,70$  の斜材は第 21 表に依つて計算すべきである。從つて此の際は何れにせよ抗壓弦に於ける最早全く微小なる固定に依る作用は勿論無視する。

例 繫拱の主桁の斜材にして、其の實長 680 cm, 最大應力 135 t にして、安全率 4 を持たしめんとす。第 132 圖。普通の減少係数  $\gamma = 0,8$  を以て斜材の計算を行へば、要求せられたる安全率  $\psi = 4$  より以下となる。其れ故  $\gamma$  の正確な値を上弦に於ける固定の影響を考慮して定める。計算は次の諸量に基いて行ふ上弦 (抗壓弦): 問題の斜材に結合する部材の平均値をとる。

1) 此の計算に就ては 169 頁の脚註 1) に示せる著者の論文参照。

第 22 表

結構腹材に対する減少係数  $\gamma$  (抗壓材に於ける固定を考慮す)

バックリング長  $l_b = \gamma l$  但し  $l$  は部材の實長を示す

$$\alpha = \frac{l_b J_a}{l_a J_0 \tau_0}, \quad \beta = \frac{1}{3} \frac{l_u J_a}{l_a J_u}, \quad i = \frac{l_b}{l_a} \sqrt{\frac{S_0 J_a \tau_a}{S_a J_0 \tau_0}}$$

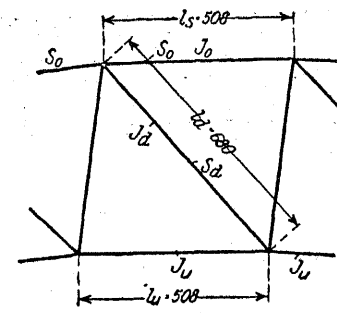
$S_0 J_0 \tau_0$  抗壓材に対する部材断面積, 部材長, 慣性率及びバックリング係数

$l_u J_u$  抗張材に対する部材長及び慣性率

$S_a l_a J_a \tau_a$  抗張斜材に対する部材断面積, 部材長, 慣性率及びバックリング係数

	$\alpha$	$\beta =$						
		0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$i = 0,3$	0	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57
	0,2	0,52	0,53	0,55	0,56	0,57	0,57	0,59
	0,4	0,54	0,55	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61
	0,6	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62
	0,8	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63
	1,0	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64
$i = 0,4$	0	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57
	0,2	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59
	0,4	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61
	0,6	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63
	0,8	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64
	1,0	0,59	0,60	0,62	0,63	0,64	0,64	0,65
$i = 0,5$	0	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57
	0,2	0,56	0,57	0,57	0,58	0,59	0,60	0,60
	0,4	0,58	0,59	0,59	0,60	0,61	0,62	0,62
	0,6	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,64
	0,8	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66
	1,0	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67
$i = 0,6$	0	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57
	0,2	0,61	0,62	0,62	0,63	0,63	0,64	0,64
	0,4	0,63	0,63	0,64	0,65	0,65	0,66	0,66
	0,6	0,64	0,64	0,65	0,66	0,66	0,67	0,67
	0,8	0,64	0,65	0,66	0,67	0,67	0,68	0,69
	1,0	0,65	0,66	0,66	0,67	0,68	0,69	0,69
$i = 0,7$	0	0,50	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57
	0,2	0,71	0,70	0,70	0,70	0,71	0,71	0,71
	0,4	0,70	0,70	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72
	0,6	0,70	0,70	0,71	0,71	0,72	0,72	0,73
	0,8	0,70	0,70	0,71	0,72	0,72	0,73	0,73
	1,0	0,70	0,71	0,71	0,72	0,73	0,73	0,74

但し  $S_0$  は  $S_a$  の最大値と同時に生ずる最大の抗壓材断面積とす。



第 132 圖

$$F_0 = 1030 \text{ cm}^2, \quad J_0 = 376 \text{ 000 cm}^4$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{F_0}} = 19,10 \text{ cm}, \quad l_0 = 508 \text{ cm},$$

下弦 (抗張材): 結合する兩部材の平均値をとる。

$$J_u = 102 \text{ 000 cm}^4, \quad l_u = 508 \text{ cm}$$

斜材:

$$F_a = 220 \text{ cm}^2, \quad J_a = 11 \text{ 200 cm}^4$$

$$r_a = \sqrt{\frac{J_a}{F_a}} = 7,14 \text{ cm}, \quad l_a = 680 \text{ cm}$$

自重, 活荷重及び風荷重に依る最大斜材断面積と同時に生ずる抗壓材断面積は, 兩部材を平均して,  $S_0 = 590 \text{ t}$  となる。(此等の部材の絶対最大断面積は平均して  $710 \text{ t}$  である)。

$\gamma = 0,8$  とすれば斜材に対するバックリング長は  $l = 0,8 \cdot 680 = 544 \text{ cm}$  で  $l/r = 76,2$  となる。之に對する  $\alpha_k$  は第 I 表から  $2,232 \text{ t/cm}^2$  となる。其れ故安全率は次の如くなる。即ち

$$\psi = \frac{220 \cdot 2,232}{135} = 3,64$$

$\psi < 4$  であるから, 抗壓材の軽減作用を考慮に入れて, 此の斜材の耐荷力を決定する。即ち

$$\alpha = \frac{508}{680} \cdot \frac{11 \text{ 200}}{376 \text{ 000}} = 0,022, \quad \beta = \frac{1}{3} \frac{508}{680} \cdot \frac{112 \text{ 000}}{102 \text{ 000}} = 0,027, \quad i = \frac{508}{680} \sqrt{\frac{590}{135} \cdot \frac{11 \text{ 200}}{376 \text{ 000}}} = 0,27$$

但し此の場合  $\tau_a/\tau_0 = 1$  とした。表中最も近似的の値とし  $\alpha = 0,2, \beta = 0,05$  及び  $i = 0,3$  と考へ,  $\gamma = 0,53$  を得る。故に

$$\frac{l}{r} = \frac{0,53 \cdot 680}{7,14} = 50,5$$

となり, 第 I 表により  $\sigma_k^0 = 2,525 \text{ t/cm}^2$  となる。故に安全率は

$$\psi = \frac{220 \cdot 2,525}{135} = 4,12$$

となる。故に部材断面は充分安全である。

次にバックリング係数  $\tau_a$  及び  $\tau_0$  を定めよう。斜材が不安定平衡状態にある時, 抗壓材は次の断面積を受ける。即ち

$$\sigma_k^0 = \frac{4,12 \cdot 590}{1030} = 2,360 \text{ t/cm}^2$$

第 III 表に依り  $\sigma_k^0$  及び  $\sigma_k^0$  に相當するバックリング係数は  $\tau_a = 0,303$  及び  $\tau_0 = 0,460$  である。それ故

$$\alpha = \frac{0,022}{0,460} = 0,047 \quad \text{又} \quad i = 0,27 \sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_0}} = 0,22$$

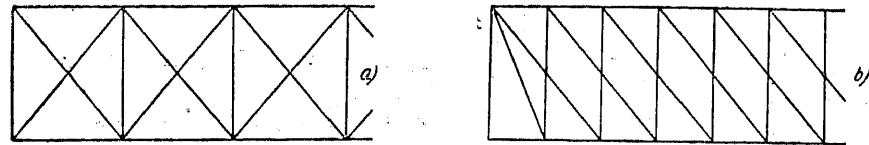
となる。それ故  $i$  の正確な値は  $0,27$  より尙幾分小さくなる。何となれば  $\gamma$  を  $i = 0,3$  及び  $\alpha = 0,2$  として求めたため,  $\gamma = 0,53$  の値は正しくないからである。

b) 結構腹材が一中間點で支へられた場合

此處に於ては, 例へば横構の單一交叉斜材に於て見るが如き, 只 1 箇の中間點を持つ場合に就て論述しよう。何となれば或る種の軍事橋梁を度外視するならば近世橋梁工に於ては三



重又は其れ以上の様式は殆ど見られないからである。単一交叉斜材は横構及び對傾構に於て重大な役目を演じて居る。併し主構桁に於ては極く稀な場合にしか斯る高次の不静定腹材様式を用ひず、而も高々直弦桁の場合である。其れ故第133圖に示す様な正確に中央に於て支へられた結構斜材に就て研究すれば充分である。



第133圖

茲に研究を簡単にせんが爲に前節と同様の假定をなす。即ち抗壓斜材は抗壓弦と鉸に依つて結合せられ、只之と連結せる抗張弦材とのみ固定結合せられ、中央に於て第二の斜材により支へられてゐるものとする。其れ故抗壓斜材は一端が弾性的に固定せられたる3點に依り支へられた部材となる。故に三つの力率方程式を立てる事が出来る。そのうち始めの2方程式は斜材と兩弦材との間の弾性關係を示し、最後の方程式は點  $m$  に於ける兩抗壓部材片間の弾性關係を示すものである(第134圖参照)。既に  $a$ ) に於て用ひた記號の他に點  $m$  に於けるバックリング力率に對する記號  $\mathfrak{M}_m$  を加へ、又179頁の脚註に述べた力率の符號に關する法則に注意すれば、四力率方程式(7)の規定に従つて、次の1組の方程式を得る。即ち

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 c_2' + \mathfrak{M}_a c_a' + \mathfrak{M}_m s_a' &= 0, \\ \mathfrak{M}_1 c_2' - \mathfrak{M}_a c_a' - \mathfrak{M}_m s_a' &= 0, \\ \mathfrak{M}_a s_a' + 2 \mathfrak{M}_m c_a' &= 0, \end{aligned}$$

更に静力學的關係

$$\mathfrak{M}_a - \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_m = 0$$

を加へる。上記の4方程式中から  $\mathfrak{M}_1$  及び  $\mathfrak{M}_m$  を消去すれば、次の2式を得る。即ち

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_a s_a' + 2 \mathfrak{M}_m c_a' &= 0, \\ \mathfrak{M}_a \left( \frac{c_2'}{2} + c_a' \right) + \mathfrak{M}_m s_a' &= 0, \end{aligned}$$

之に依つてバックリング條件は次の如くなる。即ち

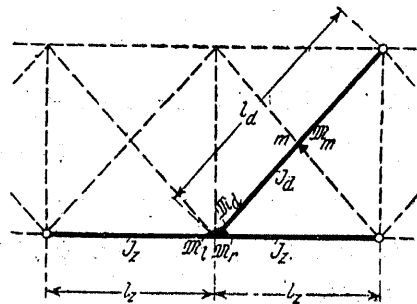
$$s_a'^2 - c_a' (c_2' + 2 c_a') = 0$$

今

$$c_a' = \frac{l_a}{2} \frac{J_z}{I_a \tau_a} \cdot c(\varphi_a), \quad s_a' = \frac{l_a}{2} \frac{J_z}{I_a \tau_a} s(\varphi_a), \quad c_2' = \frac{l_2}{3}$$

と置けば、バックリング條件は全體を  $\left( \frac{l_a}{2} \frac{J_z}{I_a \tau_a} \right)^2$  で割つて

$$[s(\varphi_a)]^2 - c(\varphi_a) \left[ 2c(\varphi_a) + \frac{2}{3} \frac{l_2}{l_a} \frac{J_a}{J_z} \tau_a \right] = 0$$



第134圖

の形となり、更に  $[s(\varphi_a)]^2$  で割ると、結局次の如くなる。

$$1 - 2 \left[ \frac{c(\varphi_a)}{s(\varphi_a)} \right]^2 - \frac{\alpha}{s(\varphi_a)} \left[ \frac{c(\varphi_a)}{s(\varphi_a)} \right] = 0, \dots \dots \dots (11)$$

但し

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{l_2}{l_a} \frac{J_a}{J_z} \tau_a$$

である。

$c(\varphi_a)$  及び  $s(\varphi_a)$  は抗壓斜材の不安定係数  $\varphi_a$  の函数である。若し  $\alpha$  を知れば  $\varphi_a$  は附録第IV表を用ひ、式(11)に依り容易に計算する事が出来る。

$$\varphi_a = \frac{l_a}{2} \sqrt{\frac{S_a}{E J_a \tau_a}}$$

から計算に用ふべきバックリング長に對する減少係數  $\gamma$

$$\gamma = \frac{\pi}{2 \varphi_a}$$

が得られ、弦格點から弦格點に至る全部材長に此の係數を乗すれば良い。

・橋梁工に於て生ずる若干の  $\alpha$  の値に就て、 $\varphi_a$  及び  $\gamma$  の値を計算すれば次の第23表の様になる。

第23表

$\alpha = \frac{2}{3} \frac{l_2}{l_a} \frac{J_a}{J_z} \tau_a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$\varphi_a / \pi$	1,144	1,113	1,094	1,081	1,071	1,062	1,055	1,050	1,046
$\gamma$	0,437	0,449	0,457	0,463	0,467	0,471	0,474	0,476	0,478

抗張弦との固定結合に依る影響は比較的小である。弦の断面小なる場合は減少係數  $\gamma$  は0.5よりひどく小さくはならない。其れ故次の法則が成立つ。

交叉せる斜材は結構平面内のバックリングに對し部材長(弦格點から弦格點に測つた實長)の0.5に等しいバックリング長を以て計算すべきである。

特別の場合には實際の測定値より、正確なる減少係數  $\gamma$  を直接第23表より求めるのである。此の場合先づバックリング係數  $\tau_a$  を1とし、バックリング長  $\gamma l$  を計算し、之によりバックリング應力  $\sigma_k$  を計算する。尚必要な場合は、計算した  $\sigma_k$  に基き第III表より求めた  $\tau_a$  の値に依り此の計算を繰返すのである。

Baden 州有鐵道の規定では交叉斜材の構桁平面内のバックリング長に對し部材長の0,4をとつてゐる。オーストリアのバックリング規定でも同様に交叉斜材の場合は部材長の0,4を以て計算して居る。

#### 44. 結構平面外への腹材のバックリング

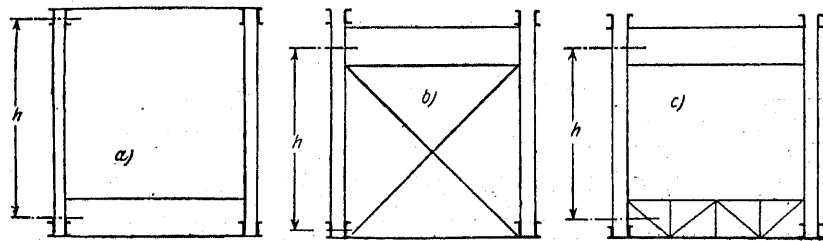
a) 部材が中間點に於て支へられてない場合

對傾ラーメンの平面中にあつて、對傾構の彎曲に堪える部材と強固に結合せられた腹材

鋼橋の普通の對傾構中の強固なる横桁又は横材は、その平面内に存在する主構腹材、就中結構垂直材のバックリング長に甚大な影響を與へるものである。其れ故強固なる横材に依つて生ずる固定の計算を行ふ事は經濟的理由から言つて然るべき事であらう。

第135圖に抗壓垂直材を有する二三の結構を示し、第136圖に之に對する橋梁斷面を形式的に示す。總ての場合に相對應せる水平構に依つて、垂直材の末端を空間的に其の位置を保ち得るものと假定する。其れ故本質的に二つの異つた場合が考へられる。即ち、1. 垂直材が一端は横桁に彎曲に堪える様結合せられ、他端は弦と鉸に依つて結合せられた場合。2. 垂直材が一端は横桁に他端は非常に強固なる横材に彎曲に堪える様結合せられた場合。

場合 1. 第137圖。隅點  $ab$  及び  $cd$  は變位を生じないものと考へる。1)  $m_1$  及び  $m_2$  を横桁と垂直材との結合點に於ける彎曲率とする。第136  $a$  圖に示す様に、高さ  $h$  は横桁の中央から、弦の理論線迄の高さとする。  $J_v$  及び  $J_h$  を垂直材及び横桁の慣性能率とする。



第136圖

ラーメンの隅點は空間的に固定せられるから、力率方程式はバックリング條件を成立させるに充分である。力率方程式は次の如くである。即ち

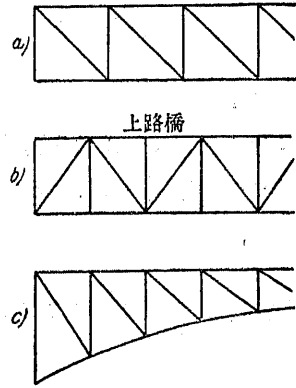
$$m_1(c_v' + c_q') + m_2 s_q' = 0$$

$$m_1 s_q' + m_2(c_v' + c_q') = 0$$

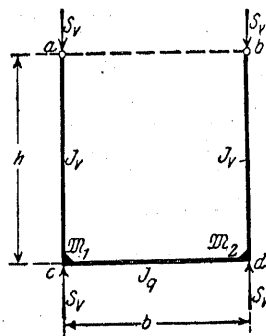
此の場合第一の方程式では部材  $ac$  及び  $cd$  を、第二の方程式では部材  $cd$  及び  $db$  を一緒に考へた。  $c_v'$  は垂直材に  $s_q'$  及び  $c_q'$  は横桁に關係せるものである。之等2方程式の分母行列式を零と置く事に依つてバックリング條件が得られる。即ち

$$(c_v' + c_q')^2 - s_q'^2 = 0$$

1) 此の變位を生じないのは、例へば上下兩横構に依り、又はボニー橋に於ては下横構に依り、尙又充分強固な垂直材が之に相當せる斷面を有する上弦と結合する事に依つて生ずるのである。



第135圖



第137圖

之を2方程式に分てば次の如くなる。

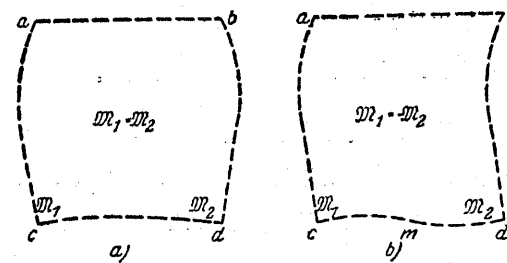
$$I. c_v' + c_q' + s_q' = 0 \quad \text{及び} \quad II. c_v' + c_q' - s_q' = 0$$

バックリング條件 I から  $c_v' + c_q' = -s_q'$  となり、從つて兩力率方程式の一つから  $m_1 = m_2$  となる。此の時の變形狀態を示せば第138  $a$  圖の如くなる。條件 II から  $c_v' + c_q' = s_q'$  となり、力率方程式の一方から  $m_1 = -m_2$  が得られる。此の時の變形狀態は第138  $b$  圖の如くなる。此の第二の變形狀態は横桁の中央  $m$  が固定せられる場合にのみ生ずるものであるが、斯る場合は假定する事が出来ない。其れ故 I が決定的なバックリング條件である。横桁が張力も壓力も受けない状態に在る事を考へて。

$$c_v' = \frac{J_v}{J_v \tau} h c(\varphi_v), \quad c_q' = \frac{b}{3}, \quad s_q' = \frac{b}{6}$$

と置けば、バックリング條件は次の形となる。即ち

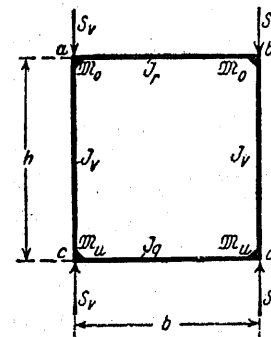
$$c(\varphi_v) = -\frac{1}{2} \frac{b}{h} \frac{J_v}{J_h} \tau \dots \dots \dots (12)$$



第138圖

此の式は本質的には既に述べた式 (10) と同じであるが、只右邊に於て  $1/6$  の代りに  $1/2$  となつてゐる。故に式 (12) の右邊を計算すれば、之に對する  $\varphi_v$  並に  $\tau$  の値を第21表から求める事が出来る。横桁の大なる剛度を考へるならば、主として結構平面に垂直な方向のバックリングに對する危險を考慮すべき實際の場合に於ては、式の右邊が  $0.08$  を超す様な事は殆ど起らない。其れ故總ての場合に唯一つの最不利の減少係數  $\gamma = 0.75$  を以て満足する事が出来る。

場合 2. 第139圖。前項に於て對稱の變形が垂直材のバックリングの安全度に對しより不利な場合である事を知つた。此の場合に於ても同様である。其れ故始めから計算を簡単にする爲に、兩垂直材の上下の連結力率  $m_0$  及び  $m_u$  が互ひに相等しいものとすれば、四つの力率方程式の代りに只の2方程式となる。更に  $J_a = J_r$  と假定し、箇々の場合に若し  $J_a \leq J_r$  であれば、兩方の値のうち小なる方を横材及び横桁の慣性能率と考へる。高さ  $h$  は横桁の中央から横材の中央迄とする。強固な隅鉸が存在しても、之は横桁、横材及び垂直材の慣性能率を局部的に増大するに過ぎないから、之を考慮しない事にする。力率方程式は次の如くなる。



第139圖

部材  $ab$  及び  $bd$   $m_0 s_q' + m_0(c_q' + c_v') + m_u s_v' = 0$

部材  $bd$  及び  $cd$   $m_0 s_v' + m_u(c_v' + c_q') + m_u s_q' = 0$

之から次のバックリング条件が得られる。即ち

$$\begin{vmatrix} (s_a' + c_a' + c_v') & s_v' \\ s_v' & (s_a' + c_a' + c_v') \end{vmatrix} = 0$$

又は

$$(s_a' + c_a' + c_v')^2 - s_v'^2 = 0$$

更に

$$s_a' = \frac{b}{6}, \quad c_a' = \frac{b}{3}$$

として、上の方程式から次の二つの部分条件が得られる。即ち

$$\text{I. } c_v' + s_v' = -\frac{b}{2}, \quad \text{II. } c_v' - s_v' = -\frac{b}{2}$$

式 I は  $\varphi_v$  に對する最小根を導くから、此の条件のみを更に研究すればよい事になる。さて

$$s_v' = \frac{J_v}{J_v \tau} h s(\varphi_v) \quad \text{及び} \quad c_v' = \frac{J_v}{J_v \tau} h c(\varphi_v)$$

と置けば、結局バックリング条件は次の如くなる。即ち

$$c(\varphi_v) + s(\varphi_v) = -\frac{1}{2} \frac{b}{h} \frac{J_v}{J_a} \tau \dots \dots \dots (13)$$

此の式の右邊の各量が總て既知なる時は、此の方程式の根  $\varphi$  は函数  $s(\varphi)$  及び  $c(\varphi)$  の表を用ひて容易に求める事が出来る。第 24 表は此の式の右邊の假定したる値若干に對する計算の結果を示せるものである。表の最下列は根  $\varphi$  に相對應する減少係數  $\gamma$  を示す。

第 24 表

$\frac{1}{2} \frac{b}{h} \frac{J_v}{J_a} \tau$	0	0,1	0,2	0,3	0,5
$\varphi / \pi$	2	1,690	1,517	1,412	1,293
$\gamma = \pi / \varphi$	0,500	0,592	0,660	0,708	0,773

主として垂直材の構桁平面から外へのバックリングが問題となる場合に於て、横桁及び横材が通常の剛度を持つ時は  $\frac{1}{2} \frac{b}{h} \frac{J_v}{J_a} \tau$  の値は 0.1 より大きい事は殆どないから、あらゆる場合に減少係數を  $\gamma = 0,6$  と考へる事が出来る。故に次の法則が成立つ。

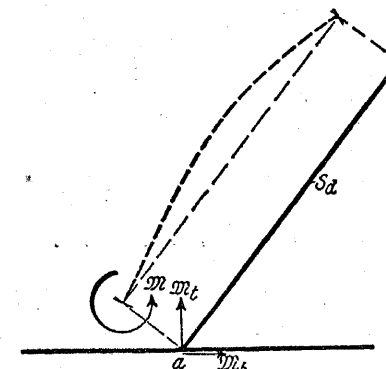
構桁の腹材(垂直材)が對傾構桁平面内にある場合は、構桁平面から外へのバックリングに對するバックリング安全度の計算に當つて、此の腹材が單に一端に於て横桁に剛結されるか(場合 a) 及び場合 b), 或は兩端に於て對傾ラーメンの横桁に剛結されるか(場合 c), に從つてバックリング長を部材長の 0,75 又は 0,6 となすべきである(第136圖参照)。

Württemberg 州有鐵道の規定に依れば、構桁平面に横のバックリングに對する垂直材のバックリング長を、強固な横結合が一つあるか二つあるかに從ひ、垂直材長の 0,8 又は 0,5 をとつてゐる。

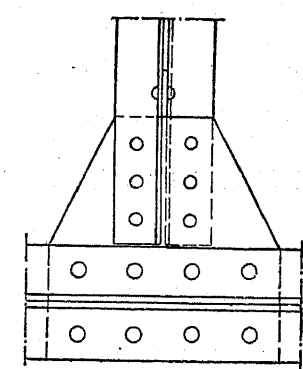
Baden の州有鐵道の規定に依れば對傾垂直材が強固であるか、強固でないかに從つて、バックリング長を 0,8' 又は ' と定めてゐる。但し ' は實長である。

腹材が横結合の彎曲に堪える部材に剛結されてない場合、橋梁工の結構に用ひられる腹材の大多數は此の状態にある。此の部材にあつても多くは結構弦と彎曲に堪える様結合せられる爲、弦に於ける固定が生ずるもので、之に依る作用は部材が結構平面外へ撓められる時現はれるものである。

$S_a$  を普通の方法に依つて繫釰を用ひ抗張弦に固定結合せられた腹材とする(第 140 圖)。バックリング状態に於ける變形に際して結合點  $a$  に生じるバックリング力率  $m$  を二つの分力率に分ける。此のうち一つの力率  $m_t$  は  $a$  を通り弦中心線に垂直な平面中にあり、他の一つの力率  $m_b$  は弦中心線を通り結構面に垂直な平面中に在るものとする。分力率  $m_t$  は弦を廻轉せんとする。弦の廻轉抵抗は一般に小さいとは考へ得られないにしても、又之は一般には假想出来ない事であるが、相隣る格點が強固なる横材に依つて廻轉を妨げられてゐる場合特にそうであるにしても、あらゆる場合を含む法則を導かんとすれば、特に抗壓部材が間接に單に繫釰に依り弦と結びつけられてゐる最も不利な場合を考案しなければならない。繫釰は力率  $m_t$  に對し釰の如き作用をなし、連結點に於ける著大なる轉振力率の傳達は問題でない事は明かである(第 141 圖)。弦に垂直に結合せられた部材にあつては  $m_b = 0$  であるから、弦の轉振抵抗に依る軽減作用のみが問題となる。然るに繫釰に依り完全に傳達されるとは確言出来ないから、結構平面外へのバックリングに就き考へる場合、斯る部材は全部材長をバックリング長と計算するのが望ましい。



第 140 圖



第 141 圖

抗張弦に斜に結合せる腹材は幾分か好都合な状態にある。何となれば強固に結合せる場合は彎曲率  $m_b$  は屢々非常に強固な弦の彎曲抵抗に依つてとられ得るからである。然し乍ら此の場合にも、腹材から弦への力率の傳達が屢々單に搖鉸の如く働く断面小なる繫釰に依つて行はれる事に注意を拂はねばならない。故に此の場合に於ても固定作用を度外視して、全部材長を以てバックリング長として計算を行ふのは尤もな事である。

横結合の強固なる部材と強固に結合してゐない結構腹材は、結構平面外へのバックリングに對しては全部材長をバックリング長として計算すべきである。

總てのドイツ及びオーストリアの橋梁規定によれば、要するにバックリング長の選定に関する項目の有る限りは、構桁平面に横へのバックリングに対する単一結構斜材のバックリング長は實長に等しくとつてゐる。

6) 部材が中間點で支へられた場合

43β に於て述べたのと同様な考察に依つて、此處に於ても問題の部材が中央で支へられた場合のみを考察する。第 138 圖に示した様式に依る結構が即ち此の場合である。抗壓部材を支へる部材は張力を受けるものとする。さて末端が鉸に依つて固定されるものと假定すれば、此の抗壓部材は壓力  $S_a$  を受け、中央に於て抗張材に弾性的に支へられた 3 支點上にある桁として考へる事が出来る。48 に於ては此の様な弾性的に支へられた、バックリングする応力を受けた組織に就て尙詳細に論及する事とする。こゝに述べる例は斯る部材列の最も單純な場合であり、従つてそれだけ計算も可成り簡單である。

抗壓材の全長を  $l_a$ 、抗張材の全長を  $l_z$ 、部材中央に於けるバックリング力率を  $m$  を以て示せば(第 142 圖)、次の力率方程式が得られる。即ち

$$2 m c_a' - E J_a (\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0 \dots \dots \dots (a)$$

更に不安定平衡状態に於ける兩部材徑間の各々に対して平衡條件式 (8) が成立つ。即ち

$$\begin{aligned} \frac{2 m}{l_a} - S_a \vartheta_1 - R_1 &= 0 \\ -\frac{2 m}{l_a} - S_a \vartheta_2 - R_2 &= 0 \end{aligned}$$

此の兩式の引算に依り次式を得る。即ち

$$\frac{4 m}{l_a} - S_a (\vartheta_1 - \vartheta_2) - (R_1 - R_2) = 0$$

所が兩徑間に於けるバックリング剪力の差は支點反力  $C$  に等しいから、次の關係が得られる。

$$\frac{4 m}{l_a} - S_a (\vartheta_1 - \vartheta_2) + C = 0 \dots \dots \dots (b)$$

さて交叉點の撓度は  $y$  であるから  $C = A y$  となる。茲に  $A$  は抗張部材が交叉點に於て單位の長さの撓度を受けた時抗壓部材に及ぼす反力を示すものである。尙第 142 圖に依つて

$$\vartheta_1 = \frac{2y}{l_a}, \quad \vartheta_2 = -\frac{2y}{l_a}$$

となり、又  $c_a' = \frac{l_a}{2} \cdot c(\varphi_a)$  であるから、方程式 (a) 及び (b) は次の如き形になる。即ち

$$m l_a^2 c(\varphi_a) - 4 E J_a y = 0$$

$$4 m - (4 S_a - A l_a) y = 0$$

分母行列式を零と置く事により(未知量は  $m$  及び  $y$  である)バックリング條件は次の様になる

$$(4 S_a - A l_a) l_a^2 c(\varphi_a) - 16 E J_a = 0$$

之から

$$A = \frac{4 S_a}{l_a} \left( 1 - \frac{4 E J_a}{l_a^2 c(\varphi_a) S_a} \right)$$

となり

$$\varphi_a = \frac{l_a}{2} \sqrt{\frac{S_a}{E J_a}}$$

であるから

$$A = \frac{4 S_a}{l_a} \left[ 1 - \frac{1}{\varphi_a^2 c(\varphi_a)} \right]$$

となる。尙

$$c(\varphi_a) = \frac{1}{\varphi_a^2} (1 - \varphi_a \cot \varphi_a)$$

を代入すると次の如くなる、即ち

$$A = \frac{4 S_a}{l_a} \frac{\varphi_a}{\varphi_a - \tan \varphi_a} \dots \dots \dots (c)$$

尙次に抗張部材の計量から量  $A$  を求める事が問題となる。長さ  $l_z$  なる抗張部材に張力  $S_z$  が作用する時、部材中央の集中荷重に依る撓度  $y_m$  に對して、部材端が鉸に依つて結合せられて居るものと假定すれば、次の公式が得られる。即ち

$$y_m = \frac{A l_z}{4 S_z} \left( 1 - \frac{\pi y}{\varphi_z} \right)^2$$

茲に

$$\varphi_z = \frac{l_z}{2} \sqrt{\frac{S_z}{E J_z}}$$

である。量  $A$  の定義に依り  $y_m = 1$  であるから、前述の方程式から  $A$  は次の如くなる。即ち

$$A = \frac{4 S_z}{l_z} \frac{\varphi_z}{\varphi_z - \pi y} \dots \dots \dots (d)$$

方程式 (c) と (d) とを結び付けば

$$\frac{\varphi_a}{\varphi_a - \tan \varphi_a} = \frac{S_z l_a}{S_a l_z} \frac{\varphi_z}{\varphi_z - \pi y}$$

となる。此の超越函数に對して、次の簡単な近似公式を用ふる、

今

$$\frac{\varphi_a}{\varphi_a - \tan \varphi_a} = \frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{3 \varphi_a^2} \quad \frac{\pi}{2} < \varphi_a < \pi \text{ に對して成立つ。}$$

$$\frac{\varphi_z}{\varphi_z - \pi y} = 1 + \frac{\pi^2}{3 \varphi_z^2} \quad \varphi_z \text{ の總ての値に對して成立つ。}$$

と置けば

$$\frac{\pi^2}{3 \varphi_a^2} = \frac{4}{3} - \frac{S_z l_a}{S_a l_z} \left( 1 + \frac{\pi^2}{3 \varphi_z^2} \right)$$

が得られる。減少係数  $r$  は  $\varphi_a$  に包含せられた徑間長に注意して

1) Hütte, I. Bd. 參照

$$\gamma = \frac{\pi}{2\varphi_a}$$

となるから、前の方程式に 3/4 を乗じてその根を求める時は次の式を得る

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{S_z}{S_a} \frac{l_a}{l_z} \left( 3 + \frac{\pi^2}{\varphi_z^2} \right)} \dots \dots \dots (14)$$

$\gamma$  のとり得る最小値は 0.5 である。何故ならばそうでないと部材は径間内に於てバックルする事になるからである。其れ故若し式 (14) が 0.5 より小さい値を與へるならば、之を 0.5 と置き代へるべきである。

公式 (14) 中の應力  $S_a$  及び  $S_z$  に如何なる値を代入すべきかと云ふ事は尙明かにすべき問題である。バックリング条件の基礎となつた彎曲方程式は部材結合の不安定な平衡状態に關聯せるものである。それ故理論的に考へて  $S_a$  に対してはバックリング應力  $\psi S_a$  ( $\psi$  は安全率を示す) を入れるべきであつて、 $S_a$  に対して最不利なる荷重群により  $S_z$  及び  $S_a$  が同じ大ききで増加する時には (それ自身平面系を作る様な交叉せる部材は常に此の場合である)、抗張力  $\psi S_z$  を入れるべきである (4.1 の最後の結論参照)。此處では  $S_z$  及び  $S_a$  は實際の部材應力を示す。其れ故方程式 (14) に於ける比  $\frac{S_z}{S_a}$  に対しては單に實際の部材應力の比を代入し只  $\varphi_z$  は  $\psi S_z$  に依り算定すべきである。

括弧中の第二項に現はれる抗張部材の剛度の影響は、實際上遭遇するあらゆる場合に就て考へるのに、非常に稀な場合を除けば著しいものではない。其れ故計算を極く簡単にする爲に抗張部材の彎曲剛度を全く無視して總ての場合に弛緩せるものと考へ、従つて  $l_z = 0$  に對する  $\varphi_z$  を無限大に置くのは合理的な事である。斯くして公式 (14) は次の如く簡單化せられる。

即ち

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{S_z}{S_a} \frac{l_a}{l_z}} \dots \dots \dots (14')$$

此の式は只實際部材應力の比及び部材長の比を含むのみで取扱ひが非常に簡單である。鋼橋の設計に際して實際に使用する場合は公式 (14') を用ひる事を極力お薦めする。何故なれば多くの場合見受けられる様に、例へば集成抗張材を支へてゐる對傾構は不充分なものであつて、抗張材の彎曲剛度は全くあてにならないものであるからである。

Baden の市街鐵道規定では次の様に定めて居る。交斜した斜材に於ては抗張斜材が抗壓斜材に等しいか或は之より大きな應力を受ける様な場合には、結構平面に垂直なバックリングに際してはバックリング長は部材長の半分に等しく取るべきである。之は公式 (14') とよく一致するものである。

壓力を受ける構造部材の計算に對するオーストリアの規定には、構桁平面外へのバックリングに對してはバックリング長として部材長の 0.625 にとるべきものとしてゐる。

例. 横構の交斜した斜材に於て、結構平面外へのバックリングに對するバックリング長の値を求む。

$l_a = l_z$ ,  $S_a = S_z$  であるから公式 (14') に依り次の如くなる。

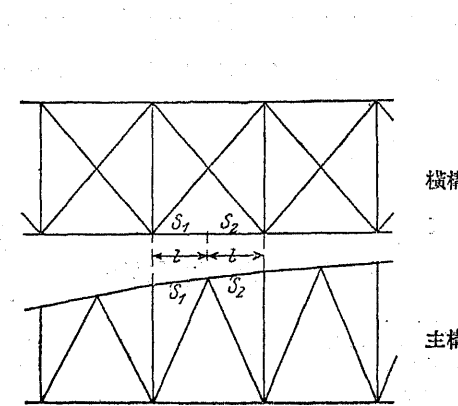
$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 0,5$$

鋼橋に於ける横構の交斜した斜材は、横構平面外へのバックリングに對し、部材の半分をバックリング長として計算すべきである。

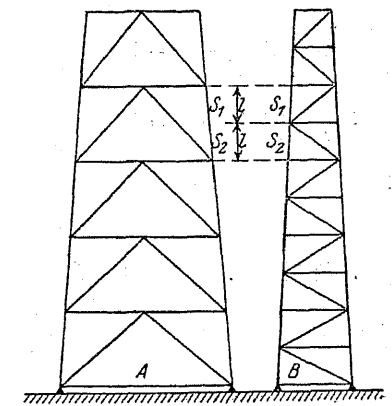
斜材の剛性を考慮に入れる時は (兩斜材は凡て風の交番する方向のために壓力に耐へる様に作られねばならないから此の考慮は當然である)  $\gamma < 0,5$  になる様に思はれるが、 $\gamma$  を 0,5 より小さくとる事は出来ないから、之は此處では意味のないものである。

45. 急激に壓力の變化する部材

壓應力が全部材長に就て同じ値を持たず、部材の或る部分には他の部分と異つた壓應力が作用する様な結構部材が橋梁工に於て屢々見られ、又部材の一部が張力を受け、他の部分が壓

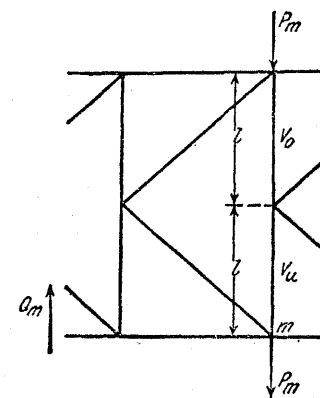


第 143 圖



第 144 圖

力を受ける様な場合も屢々現はれる。第一の場合は例へば主構の格間距離が横構の格間距離と異なる時の主構の弦材の場合、或は相異つた結構腹材を有する二つの結構平面が 1 稜に交つた鐵塔の場合が之である (第 143 圖, 第 144 圖)。第二の場合は K- 結構の垂直材に於て見受けられる。此の場合垂直材に於ける部材應力を示せば次の如くなる (第 145 圖参照)。



第 145 圖

上弦材に於ける荷重に依り  $V_o = +\frac{1}{2} Q_m - P_m$

$$V_u = -\frac{1}{2} Q_m$$

下弦材に於ける荷重に依り  $V_o = +\frac{1}{2} Q_m$

$$V_u = -\frac{1}{2} Q_m + P_m$$

部材應力の變化は第 143 圖に示せる様式の場合は主構平面外へのバックリングに對するバックリング安全度を計算する時、又第 144 圖に示せる様式に依る支柱の場合は構桁平面 A の方向に於けるバックリングに對するバックリング安全度を研究する時認められる。それ故 2 径間の

両端に於て支へられた部材の安全度の研究をすれば良い事になる。先づ兩半部材の各が壓力を受ける場合に就て考へる。此の場合兩半部材は等しい長さを有するものとし、尙部材應力  $S_1$  及び  $S_2$ 、慣性能率  $J_1$  及び  $J_2$ 、又バックリング係數  $\tau_1$  及び  $\tau_2$  は兩半部材に就き異なるものとする。兩部材壓應力中大きな値の方を  $S_1$  で示す。K- 結構の垂直材に對するバックリング條件は別の箇處に示す。

a) 兩半部材が壓力を受ける場合 (結構弦)

バックリング條件は第 146 圖に就て次の如くなる。即ち

點  $m$  に對する力率方程式は

$$\mathfrak{M}(c_1' + c_2') - EJ_1(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0.$$

平衡條件は

$$\frac{\mathfrak{M}}{l} - S_1 \vartheta_1 - \mathfrak{Q} = 0$$

$$-\frac{\mathfrak{M}}{l} - S_2 \vartheta_2 - \mathfrak{Q} = 0$$

更に

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0$$

となる。此の四つのバックリング方程式から  $\mathfrak{Q}$ 、 $\vartheta_1$  及び  $\vartheta_2$  を消去すれば次の關係が得られる。

$$\mathfrak{M} \left[ (c_1' + c_2') - \frac{4EJ_1}{l(S_1 + S_2)} \right] = 0$$

$\mathfrak{M}$  は 0 であり得ないから

$$c_1' + c_2' = \frac{4EJ_1}{l(S_1 + S_2)} \dots \dots \dots (a)$$

となる。即ち此の式が今問題になつてゐる部材系のバックリング條件を示すものである。<sup>1)</sup>

今

$$c_1' = \frac{c(\varphi_1)}{\tau_1} l \quad \text{及び} \quad c_2' = \frac{c(\varphi_2)J_1}{J_2\tau_2} l$$

とすれば次式が得られる。

$$\frac{c(\varphi_1)}{\tau_1} + \frac{c(\varphi_2)J_1}{J_2\tau_2} = \frac{4EJ_1}{l^2(S_1 + S_2)}$$

今

$$\frac{S_2}{S_1} = k_1^2, \quad \frac{J_1\tau_1}{J_2\tau_2} = k_2^2$$

と置けば

$$c(\varphi_1) + k_2^2 c(\varphi_2) = \frac{4EJ_1\tau_1}{l^2 S_1(1 + k_1^2)}$$

となる。更に

1) 式 (a) は單に 1 方程式から成つたバックリング方程式の 1 組の分母行列式を零と置いたものである。

$$\varphi_1 = l \sqrt{\frac{S_1}{EJ_1\tau_1}} \quad \text{及び} \quad \varphi_2 = l \sqrt{\frac{S_2}{EJ_2\tau_2}} = k_1 k_2 \varphi_1$$

とし函数  $c(\varphi_1)$  及び  $c(\varphi_2)$  の精確な値を求むれば、 $\varphi_1^2$  を乘じてバックリング條件は次の如くなる。

$$(1 - \varphi_1 \cot \varphi_1) + \frac{1}{k_1^2} (1 - k_1 k_2 \varphi_1 \cot k_1 k_2 \varphi_1) = \frac{4}{1 + k_1^2}$$

或は

$$\varphi_1 (\cot \varphi_1 + \frac{k_2}{k_1} \cot k_1 k_2 \varphi_1) = \frac{(k_1^2 - 1)^2}{k_1^2(1 + k_1^2)} \dots \dots \dots (b)$$

比  $k_1$  及び  $k_2$  が與へられる時は、此の方程式に依り不安定係數  $\varphi_1$  を求める事が出来る。その  $\varphi_1$  よりバックリング長を定めるための全部材長  $2l$  に乘すべき減少係數が得られる。即ち

$$r = \frac{\pi}{2\varphi_1}$$

部材は大なる方の壓應力  $S_1$  に對しバックリング長  $r \cdot 2l$  を有するものとして計算すべきである。

次の表は  $k_1^2$  及び  $k_2^2$  の値の列に對する  $r$  の値を計算した結果を示したものである。

第 25 表

$k_1^2$	$k_2^2 = 1$		$k_2^2 = 1.5$		$k_2^2 = 2$	
	$\varphi_1/\pi$	$\gamma$	$\varphi_1/\pi$	$\gamma$	$\varphi_1/\pi$	$\gamma$
0	0,686	0,729	0,640	0,781	0,601	0,832
0,2	0,638	0,784	0,585	0,855	0,542	0,922
0,4	0,595	0,840	0,540	0,926	0,496	1,008
0,6	0,558	0,896	0,503	0,994	0,459	1,088
0,8	0,526	0,951	0,470	1,064	0,428	1,168
1,0	0,500	1,000	0,443	1,129	0,403	1,240

$r$  に對する結果は充分正確に (誤差 < 2%) 次の公式によつて表はされる。

$$r = (0,68 + 0,13 k_1^2) + (0,11 + 0,13 k_1^2) k_2^2 \dots \dots \dots (15)$$

部材長が兩徑間に亘つて  $2l$  であれば、計算上用ひらるべきバックリング長は  $2r l$  である。茲に  $r$  は公式 (15) に依つて求むれば良い。實際上の使用に對しては  $k_2^2$  中に現はれる比  $\tau_1/\tau_2 = 1$  と置いて差支へない。此の場合計算は安全すぎる事になる。

$J_1 = J_2$  である特別な場合には  $k_2^2 = 1$  となり、數値をまとめる時は方程式 (15) は簡単になる。即ち

$$r = 0,75 + 0,25 k_1^2 \dots \dots \dots (15')$$

例.

$$S_1 = 70 \text{ t}, \quad S_2 = 42 \text{ t}, \quad 2l = 8,00 \text{ m}, \quad J_1 = J_2$$

( $\tau_1/\tau_2 = 1$  とする)

さて

$$k_1^2 = \frac{S_2}{S_1} = 0,6$$

$$k_2^2 = \frac{J_1 \tau_1}{J_2 \tau_2} = 1$$

であるから

$$\gamma = 0,75 + 0,25 \cdot 0,6 = 0,90$$

となる。それ故計算上用ひられるべきバックリング長は  $0,9 \times 800 = 720 \text{ cm}$  となり、部材は  $70 \text{ t}$  の壓力に對して此の長さを有するものとして設計せらるべきである。

b) K-結構の垂直材

普通垂直材の半分は張力を受け、他の半分は壓力を受ける。兩部材は常に等しい慣性能率を有するから問題は簡単になる。壓力を受ける半部材の部材應力を  $S_1$  とし、張力を受ける部分の部材應力を  $-S_2$  とする。又此處でも適用出来る上述のバックリング條件 (a) から、出發するものとし、此處に再びしす。即ち

$$(c_1' + c_2') = \frac{4 EJ}{l(S_1 - S_2)} \dots \dots \dots (a)$$

部材半分は張力を受けるから  $\tau_2 = 1$  であり、又計算を簡単にするために  $\tau_1 = 1$  —— 之は幾分不利に計算する事になる——と置けば

$$c_1' = c(\varphi_1)l \quad \text{及び} \quad c_2' = c(\varphi_2)l$$

であるから

$$c(\varphi_1) + c(\varphi_2) = \frac{4 EJ}{l^2(S_1 - S_2)}$$

となる。更に

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2$$

とおけば

$$c(\varphi_1) + c(\varphi_2) = \frac{4 EJ}{l^2 S_1(1 - k^2)}$$

となる。之から  $c(\varphi_1)$  及び  $c(\varphi_2)$  の意味に注意し、 $c(\varphi_2)$  は張力を受ける部分に關係してゐる事を考へ、又

$$\varphi_2 = k \varphi_1$$

である事に注意すれば、方程式は次の如くなる。即ち

$$(1 - \varphi_1 \cot \varphi_1) + \frac{1}{k^2} (k \varphi_1 \cot k \varphi_1 - 1) = \frac{4}{1 - k^2}$$

更に變形を行へば結局決定的の形のバックリング條件を得る。即ち

$$\varphi_1 \left( \cot \varphi_1 - \frac{1}{k} \cot k \varphi_1 \right) = - \frac{(k^2 + 1)^2}{k^2(1 - k^2)}$$

1)  $k_2 = 1$  とし、 $k_1^2 = \frac{S_2}{S_1} < 0$  に對し  $k_1 = i k (i = \sqrt{-1})$  とおけば、a) に述べたバックリング條件から直接此の方程式を導く事が出来よう。

次に示す表は  $k$  の値若干に對する此の方程式の解を掲げ、尙垂直材の全長に關する減少係數  $\gamma$  をも示す。

第 26 表

$k^2 =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\varphi_1/\pi$	0,686	0,745	0,812	0,879	0,945	1,000
$\gamma$	0,729	0,671	0,616	0,569	0,529	0,500

既に知れる様に、部材半分の張應力は桁平面に横のバックリングに對する耐荷力を全く著しく増大させるものである。張應力を受ける半分が全く應力を受けない状態になつた時はバックリング長は  $0,73 \cdot 2l$  であり、之は偶然部材の一端が固定された場合と同じ大きさである。最後に  $S_1 = -S_2$  の場合は兩端を固定した部材と同じ状態にある。

第 26 表に導いた値は實際上は充分正確に直線の法則に従ふものであるから、 $\gamma$  の計算に對して次の簡単な式を用ひる事が出来る。即ち

$$\gamma = 0,75 - 0,25 k^2 \dots \dots \dots (16)$$

之は幾分大きなバックリング長を與へる。

事情に依つては格點荷重  $P$  が剪力  $Q$  に對して大きな時には最初に與へられた公式が示す様に、垂直材は兩半分共に壓力を受ける様な場合が生じ得る。此の様な場合には式 (15 a) に従つて  $\gamma$  を計算する。公式 (15 a) 及び (16) は尙次の公式にまとめる事が出来る。

$$\gamma = 0,75 \pm 0,25 \frac{S_2}{S_1}$$

十の記號は兩部材が壓力を受ける場合を示し、- の記號は  $S_2$  が張力の場合を示す。此の公式は  $S_2 < S_1$  の範圍に於てのみ成立つものである。

例：剪力が  $40 \text{ t}$  で上弦の格點荷重は  $5 \text{ t}$  である。全垂直材を  $6,00 \text{ m}$  とする。然る時は

$$S_1 = -\frac{1}{2} 40 = -20 \text{ t (壓力)}$$

$$S_2 = +\frac{1}{2} 40 - 5 = 15 \text{ t (張力)}$$

それ故  $k^2 = \frac{15}{20} = 0,75$  であるから、公式 (16) に従つて  $\gamma$  に對して

$$\gamma = 0,75 - 0,25 \cdot 0,75 = 0,562$$

それ故問題の垂直材は桁平面外へのバックリングに對して  $0,562 \cdot 6,00 = 337 \text{ cm}$  のバックリング長を以て計算すべきである。

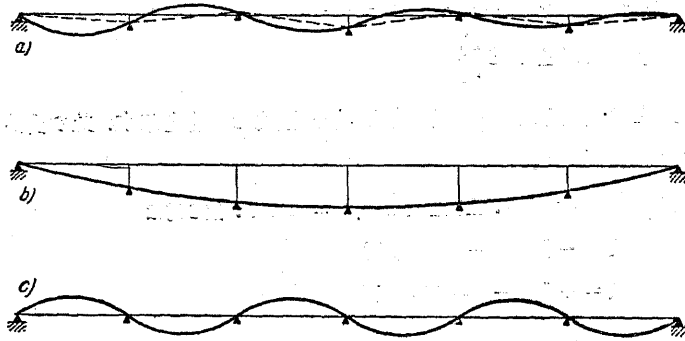
42 ~ 45 に導いた結構部材のバックリング長に對する法則は勿論鋼橋工に於ける總ての場合を包含するものではない。その最も重要なものを選んで、法則を定めたる後、その應力範圍を數字的に定めんとしたのである。法則及び公式は斷じて何等の批判をも爲さずして之を用ひてはならない。設計が經驗に依つて容易に行はれ得ない様な新らしい場合に當つては、一見適合せる様に見える法則がはたして實際上應用されべきや否やに就て充分吟味しなければならない。要するに鋼橋を新に設計する場合に於けるバックリング安全度の問題には特別の注意

を拂ひ、多少複雑な計算を恐れてはならない。斯くして吾々は一方災害の警戒をなすと同時に、他方與へられた可能性を利用して經濟的に構造物を作る事が出来るであらう。

## 第十二章 ポニー橋の抗壓弦のバックリング安全度

### 46. 總 論

側方へのバックリングに對するポニー橋の抗壓弦の安全度は鋼橋工の最も難解な問題の一つである。此の場合弦は格點に於て對傾ラーメンの垂直材に依つて側方に彈性的に支へられてゐる1部材列となる。何となれば對傾ラーメンは非常に撓み易く出來てゐるため此の支點を固定的なものに見做す事は出來ないからである。此の様な部材列の不安定平衡状態(バックリング状態)に於ては、場合によつて支點によつて取られなければならない非常に大きい剪力が働く。若しも支點が非常に強固なものとするれば兩端に於て固定された部材列は第147a圖に示した様にな一種の波形列を作る。此の場合各部材徑間が半波形となる。彎曲點は支點に存在する。反對に支點が非常に撓み易い場合を考へるならば、全部材列は單一の半波形にバックルする事になる(第147b圖)支點の剛性が此の兩者の中間に存在する様な時には、容易に了解し得る様に、部材の側方のバックリングは1よりも大きいが部材徑間の數よりも小さい或る若干の半波形に従



第147圖

つて生ずる。此の半波形の數は支點が強固な程多いものである。個々の波形の長さは一般には等徑間の場合に於てもお互に等しくない。此處に直に明かに認められる様に、初め考へた兩極限の場合

(第147圖 a 及び b)の生ずる事は決して支點が完全に變位を起さない事及び中間支點の缺けてゐる事を意味するものではない。反對に此の問題を次の様に考へるべきである。即ち支點の剛度が數學的に言つて有限な或る一定の度を超す時、部材列は丁度完全に撓まない支點上にある様な作用をなし、又逆に或る一定の弛緩度を超すと中間支點は一般に最早や認められなくなる。此の有限な兩極限の間に中間の場合が存在する。最初に述べた極限の場合は尙次の如き特徴を持つて居る。即ち第147a圖に依り知り得る様に、バックリング状態に於て支點が偏倚を始める限界の場合が與へられる。處が一方なほ強固な支點の場合は支點は静止しており、只部材が支點の中間でバックルするのみである(第147c圖)。

彈性的に支持せられた部材列の問題は Engesser に依つて始めて取扱はれたものである。