

第九章 直材のバックリング強度理論

33. 序 論

登録番号	昭和40年5月/5日
番号	第 2240 号
社団法人	土木学会
附属	東京図書館

前章に於ては現今實際計算に當り普通に用ひられるバックリング公式の意義及び其の應用方法に就き説明した。假令此等の公式が種々なる構造規定の示す意味に於て、鋼橋の抗彎集成材のバックリング安全度を決定するに充分であるにしても、非集成直材の最も簡単な支持方法に就てのみ導かれた方程式を以ては最早満足し得ない場合が屢々存在する。今此處では單に部材を弾性的に固定した場合、及び部材を弾性的に側方より支へた場合のバックリング安全度の問題、集成部材のバックリング安全度の計算及び大橋梁の部材の薄壁のバックリングに對する安全度の研究に就て述べる事にする。又以前取扱つた公式の通常の應用に就ての規定は、充分な實驗材料の存在しない限り、慎重な出來得る限り假定の少ない理論的な説明に基いて行はれた批判的調査が必要である。

現在まで知られた實驗研究の結果により信用するに足る理論をたてるためには狹義ではあるが幸ひ差當り充分である基本が得られる。若し個々の場合に就て計算の結果と求められた實驗の結果とが一致する事が確定するならば、之に基いて得られた公式及び法則は鋼橋の各部材の寸法を決定するに當りその正しい事を充分確信して用ひ得るであらう。即ち之等は假定と見積るとに基く普通の法則或は非常に疑問のある根據に基いて導かれた公式等に比して遙かに信用するに足るものである。バックリング問題の本體即ち弾性系の不安定平衡の理論に充分徹底するため先づ最も簡単な場合即ち直材の不安定平衡に就て説明する事にする。

34. 直材の弾性バックリング

完全に弾性的で、最初充分真直で繊細な断面の一樣な部材に就き部材軸に沿つて働く直應力 S (第 91 圖) 及び他の一つの任意に選ばれたる横荷重の作用する場合を考へる。之等は距離 x の點に彎曲率 \mathfrak{M}_x を生ぜしめる。其れ故 x 點に於ける全彎曲率は

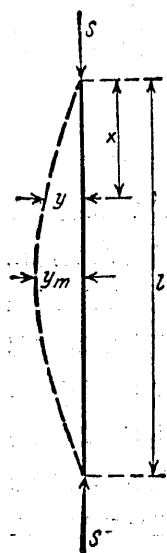
$$M_x = Sy + \mathfrak{M}_x$$

彎曲平面は斷面對稱軸に一致し、最小慣性能率を持つ斷面軸に垂直である。今撓度 y を小なりと假定すれば弾性曲線の微分方程式は次の様になる。

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} + Sy + \mathfrak{M}_x = 0 \dots \dots \dots (1)$$

部材がその端に於て彎曲率のない様に支へられ、その中央に働く集中荷重によつて \mathfrak{M}_x が生ずる様な特別な場合に就て考へれば次の解が得られる。

$$y = -\frac{\mathfrak{M}_x}{S} \left[\frac{\sin ax}{ax \cos \frac{al}{2}} - 1 \right], \dots \dots \dots (2)$$



第 91 圖

但し $\alpha = \sqrt{\frac{S}{EJ}}$ である。尙此の場合彎曲率 \mathfrak{M}_x は零以外の或る量なる事を要し、これを廻轉力率 (Störungsmoment) と呼ぶ事にする。 S の値の小さい時には此の式中の $\cos \frac{\alpha l}{2}$ なる項は殆んど 1 に等しい。然し乍ら S 即ち α が増加するにつれ、方程式 (2) の分數値は益々大になり $\frac{\alpha l}{2}$ が $\frac{\pi}{2}$ に近づくに従つて急に増大する。それ故に y の値は常に増大し——先づ方程式 (2) は如何なる場合にも適用せられるものと假定する¹⁾—— $\alpha l = \pi$ の時無限大となり、此の時迄に部材は既にバックルするものである。 $\alpha l = l \sqrt{\frac{S}{EJ}}$ よりバックリング荷重の上限界 S_k として Euler の公式を得る。即ち

$$S_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \dots \dots \dots (3)$$

Euler に依るバックリング荷重 S_k は力率 \mathfrak{M}_x に無關係である。故に次の如く確信し得る。

部材にバックリングを生ぜしむる直應力以外に作用する彎曲率は方程式 (3) によつて定義せられる Euler のバックリング荷重 S_k には何等の影響も持たないものである。

\mathfrak{M}_x が次第に減少する場合、 \mathfrak{M}_x がまだ非常に小さいが有限なる時は、 $\alpha l = \pi$ に對する y は無限大となる。 \mathfrak{M}_x が零になつた時始めて y は不定形 $0 \cdot \infty$ となる。代入法により容易に知られる様に $\mathfrak{M}_x = 0$ に對する微分方程式 (1) の解は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} S \text{ の任意の値に對する解 } y = 0; \\ S \text{ の特別の値 } S = n^2 \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \text{ に對する解 } y = C \sin n\pi \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

茲に n は任意の自然數にして C は任意の係數である。之等の解の中先づ最小のものは $n = 1$, 即ち $S = S_k$ である。解 $y = 0$ は $S < S_k$ の様な總ての S に就て意味あるものである。何となれば n の他の値に相當する部材の平衡形は未だ考へて居ない様な定まつた特定の場合に於てのみ生ずるからである。それ故に部材は廻轉力率の作用しない時には $S < S_k$ なるが如き任意の S の作用に對しては眞直であり、 $S = S_k$ となつた時任意の不定なる振幅 C を持つ正弦曲線として彎曲する事になる。故に此の様な荷重状態に相當して無數の同様な平衡位置が成立するのである。

即ち次の様な部材關係を確立する事が出来る。

部材が S_k よりも小さい軸荷重 S の作用を受ける時は部材は眞直である。廻轉力率 \mathfrak{M}_x が働き出すと部材は彎曲し、此の時の撓度の大きさは方程式 (2) に依つて與へられる。 \mathfrak{M}_x の作用が中絶すれば部材は再び眞直となる。軸力 S が S_k になる時には部材は $\mathfrak{M}_x = 0$ なる限り全く任意の平衡位置 (任意の振幅を持つ正弦曲線) を取り得る。然し非常に小さい廻轉力率 \mathfrak{M}_x により

1) 撓度が増大するに従つて式 (3) を導いた近似方程式 (1) は成立しない。

この平衡は破られる。方程式 (2) は \mathfrak{M}_x の有限値に對して $y = \infty$ を與へるから部材は必然的に彎曲する。そこで全體を綜合して次の様に言ひ得る。 $S < S_k$ なる限り部材は廻轉力率の作用の下に彎曲するが、此の廻轉力率が取り去られる時は原形に復するのである。此の時は内力、外力間に安定なる平衡が成立する。 $S = S_k$ で横荷重が作用しない時には無數の平衡状態が考へられるものであるが、ごく小さい力率でも部材は必然的に彎曲し、そして部材は最早原形状態に復し得ないものである。此の時は内力、外力間の不安定な平衡の場合であつて、従つて限界荷重 S_k ¹⁾ は抗壓材の状態に於ける不連續點を示すことになる。

以上の注意すべき事實は勿論數學的假説の結果に過ぎない。何となれば上の結論を得た微分方程式 (1) は彎曲した部材の状態を單に近似的に示したものであるからである。しかし本來は不連續性のもではない。完全なる直材は實際に於て幾分異つた状態にある。故に下記の正確なる弾性曲線の方程式から研究を行ふ事にする。

$$\frac{EJ}{\rho} = -M_x$$

茲に ρ は彎曲せる部材軸の曲率半徑を示すものである。かくすれば既に Grashof²⁾ が求めた様に横荷重を受けざる部材中點の撓度 y_m は次の式で與へられる。

$$y_m = \frac{2l}{\pi} \sqrt{\frac{S_k}{S}} \sqrt{\sqrt{\frac{S}{S_k}} - 1} \dots \dots \dots (5)$$

茲に S 及び S_k は上記のものと同様の意味を有する。

$S < S_k$ なる限りは y_m は虚數である。即ち撓度は存在せざる事となり部材は眞直である。 $S = S_k$ の時には $y_m = 0$ である。部材はやはり此の時にも撓度を生じないものである。 $S > S_k$ の時初めて有限な大きき一定の撓度 y_m が生ずる。容易に計算し得る様に著しい撓度を生ぜしめるためには S の値として S_k より極く僅か大きい値を與へればよい。従つて S_k を極く僅か越した S の値は部材の存立に對して危険なる彎曲を與へることになる。³⁾ 同様に $S = S_k$ の時に尙充分小さい廻轉力率が働き得るものである。只部材は $S = S_k$ の時には此の種の廻轉力率に對しては非常に敏感で、此の時には有限ではあるが非常に大きな彎曲が生ずる。其れ故實際的に言ふならば、此の精密な研究の結果も亦前に述べたと同様である。Euler の式の示すバックリング荷重 S_k に達すれば部材に不安定なる状態が生じ、従つて荷重が極く僅か此の S_k を越すか或は非常に小さい廻轉が起るかすれば部材は破壊するのである。精密な計算は S_k と本來の破壊荷重との間に非常に狭いものであるにしても遷移範圍が存在する事を示すのみで、之に

- 1) $\mathfrak{M}_x = 0$ の際は S_k を以て荷重は無限に多くの平衡状態に相當するが、然し横荷重には耐へられない事を考慮すれば、こゝに嚴密に安定及び不安定平衡の注意すべき一致が存在する。
- 2) Grashof, Dr. F.: Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl., Berlin 1878, S. 168. 又は Schneider, A.: Zur Theorie der Knickfestigkeit, Z. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1901, S. 633 参照。
- 3) 例へば $S : S_k = 1,001 : 1$ とすれば、 $y_m = 0,0142l$ となる。例へば $l/i = 110$ 又 $e/i = 2$ (e は部材軸から縁維迄の距離) の部材に對し最大縁維應力は $\sigma = 4,13 \sigma_k$ となる。其れ故縁維應力をバックリング應力 $\sigma_k = S_k/F$ の 4,13 倍に高める、即ち此の場合應力を $7,24 \text{ t/cm}^2$ (例へば鋳鐵材は之に堪えられない) にするには、バックリング荷重 S_k をその $1/1000$ だけ超過せしむれば充分である。故に其より幾分か早くこはれる事になる。

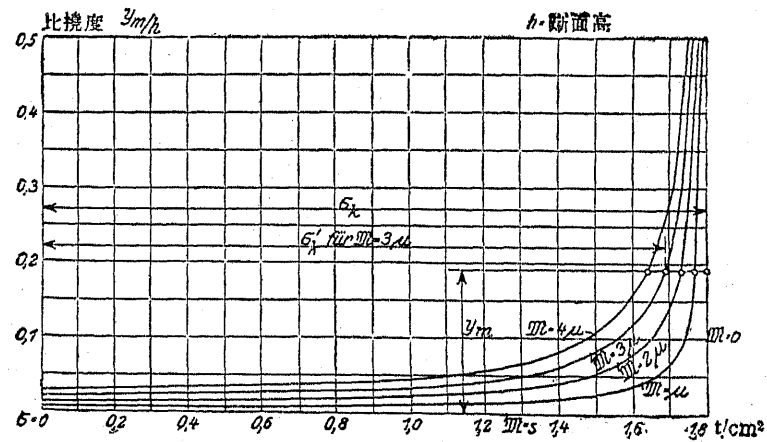
依つてバックリング限界範囲内の部材の状態に於ける不自然な不連続性が避けられた様に見える。最初に導ける公式に於ては始めの方程式中の高次に小さい或る項を無視する事によつて此の遷移範囲が縮小して不連続点となる。此の事は部材が多少とも突然その状態を變化する限界荷重 S_k を定める事、尙詳く言へばバックリング状態の生ずる条件を決定する事にあつて、バックリングの起る過程に關するものではないから、解析取扱ひを簡單にするため、部材が突然バックルするといふ假定を用ひ、従つて上の吟味に依つて明らかな如く、バックリング過程の生ずる条件を正確に充分表はす微分方程式 (1) に基いて研究を行ふのである。此の假定に基いた結果と實驗の結果とが充分一致すると云ふ事は簡單化せる計算法を用ひて差支へない證據である。

それ故に此のバックリング状態を部材軸の同價の平衡位置が無數に存在するといふ特徴を持つ不安定平衡状態と考へて差支へない。

之までは説明を簡單にするため両端共廻轉自由に支へた部材につき考察した。両端が彈性的或は固定的に結合せられた部材に於ても本質的には同様の作用が存在する。従つて上述の事實には始めから一般性を持たせて差支へないものである。今 M_1, M_2 を不安定平衡状態に於て撓度 y によつて生じた固定彎曲率なりとすれば、一般的な場合に於ける不安定平衡状態の彈性曲線の微分方程式として次の式を得る。

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Sy + M_1 + \frac{M_2 - M_1 x}{l} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

y が零になれば M_1 及び M_2 も零になる。



第 92 圖

Euler の公式 (3) によつて定められたバックリング荷重 S_k の値は勿論實際的には完全なるものではない。何故ならば絶対に完全なる直材といふものは存在しないし、又此の理論の要求する様な正確に軸に沿つて荷重が働く事は有り得ないからである。方程式 (3) は部材を構成する物質の強度には無關係である。即ちその限りなき通用性により限りなき強度を有する構造材料を假定するものである。Euler のバックリング荷重は危険荷重の上限界を示すもので、廻轉力率 λ が小さければ小さい程、そして構造材料の強度が大きければ大きい程、確實性を増すも

のである。

公式 (2) によつて表はされた或る点 (例へば部材の中點) の撓度を λ の種々なる値に對する断面應力 σ_m の函数として示すならば第 92 圖に示した様な一群の双曲線を得る。その上昇分枝は直線 $x = \sigma_k$ を漸近線として持つ事になる。圖は μ を小さい彎曲率とすれば $\lambda = 0, \mu, 2\mu, 3\mu, 4\mu$ に對する彎曲線を示したものである。今與へられたる断面に於て超過してはならない一定の縁維壓應力例へば破壊強度に對して一定の撓度 y_m を生ずるものとすれば、第 92 圖に於て明らかなる様に破壊荷重の値は λ が増加すると共に常に小さくなるものである。固有の破壊應力 σ_k とバックリング應力 σ_k との間の差は少くとも繊細部材に於ては實際に存在する彎曲率 λ に就き比較的少いから、理論的のバックリング荷重 S_k を以て破壊荷重と考へて差支へない。Bauschinger, Tetmajer, Kármán の實驗により彈性バックリングの範囲に於ては従つて充分に繊細な部材については Euler の公式が實驗の結果と非常によく合ふ事が示された。此の兩者の一致の程度は理論の假定が正確なる程即ち $\lambda = 0$ なる条件がよりよく満足される程良いのである。

35. 直材の非弾性バックリング

前章に於ける考察は、バックリング應力即ち断面に一樣に分布する壓應力は不安定平衡の入り來る瞬間になほ彈性限界以下であると云ふ假定に基いて居た。併し之は繊細部材の場合のみの事である。短い部材はバックリング状態の入り來る以前に既に彈性限界を越してゐる。此の時は殘留變形が起り、今まで變化せずと考へてゐた彈性係數 E はバックリング應力 σ_k の函数となる。

今完全に彈性的な部材の計算方法に倣つて彈性限界を越えて不安定平衡の生ずる時の彎曲過程の成行に就て研究して見る。先づ次の假定をおく。

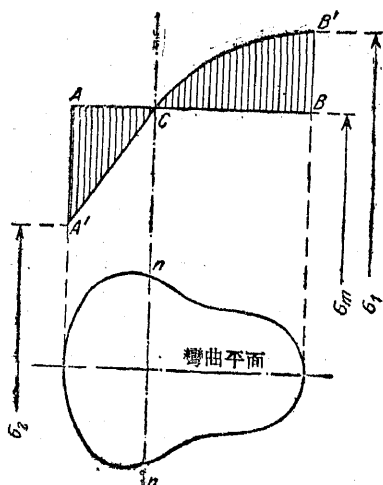
- (1) 變形量は部材寸法に比して小なる事;
- (2) 彎曲前に平面であつた断面は彎曲を受けた後も平面なる事;
- (3) 彎曲の場合に於ても應力と歪との間には純粹な張應力、或は壓應力を受けた場合と同様な法則に従ふ關係が存在する事;
- (4) 彎曲平面は断面の對稱平面たる事。

之等の假定に對しては次の事實に注意を要する： 我々の考察は不安定平衡状態の導入に對する条件を確定する事に就てのみ行はれるものであるから、變形量は部材の断面寸法に對して小なるものであると假定しても研究の一般性を縮小しない。更に Charlottenburg の Prof. Eugen Meyer¹⁾ は研究の結果此の断面が平面の儘で残ると云ふ假定に基いて張力圖表及び壓力圖表より計算した鋸鐵部材の撓度が彈性限界以上破壊までの間でも觀測した撓度と非常に

1) Meyer, Eugen: Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetze nicht folgt. Z. V. d. I. 1908, S. 167.

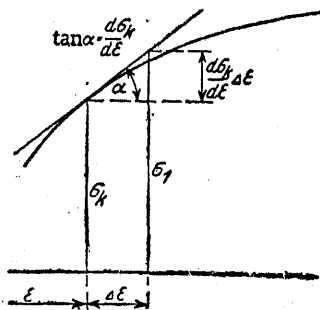
よく一致する事を示した。従つて 2 及び 3 の假定も充分正しいと考へられる。4 の假定は計算方法を簡單化するために設けられたものである。故に之により得られた結果は尙一般的に橋梁工に於ては勿論稀な場合にも用ひられて有意義なのである。

今充分短かい部材が中心に働く荷重 S により壓縮され $\sigma_m = S/F$ が弾性限界を越したものとす。部材が完全弾性部材の不安定平衡状態とよく似てゐる不安定な平衡状態になる迄更に荷重 S を上げる。この状態に於ては部材は小さいが大きさの不定な撓度を受ける。然る時は各断面には彎曲の生ずる前に存在した断面應力 σ_m が變化しないのである彎曲平面に垂直な直線 $n-n$ が存在する (第 93 圖)。此の直線を σ_m 線と稱する事にす。直線 $n-n$ の一方の側に於ては軸壓應力は彎曲のため増加し、應力面積は構造材料の壓力圖表のその章から導びかれる様に曲線 CB' に依つて限られる。他の側に於ては彎曲應力が加はつた爲め縦應力は減少する (輕減作用)、此の輕減作用のために弾性變化が減少するから此の側は常係数 E を持つた比例の法則が成立する。それ故彎曲抗張側の應力面積の境界線は直線 CA' に依つて與へられるのである。



第 93 圖

バックリングの過程を考察するに當つては、上に説明した通り中間應力 σ_m が $\sigma_m = \sigma_k$ (バックリング應力) に達した時には非常に小さい彎曲が起るものと假定すれば充分である。此の時抗壓、抗張兩側の各縁維



第 94 圖

應力 σ_1 及び σ_2 は中間應力 σ_k と略等しい。第 94 圖は壓力圖表の一部を示したものである。抗壓側に於て彎曲のために生じた纖維縮少 $\Delta \epsilon$ は非常に小さいものであるから、抗壓側の縁維應力はこの圖より次の關係によつて充分正確に次の如く表はし得る。¹⁾

$$\sigma_1 = \sigma_k + \frac{d\sigma_k}{d\epsilon} \Delta \epsilon$$

$\frac{d\sigma_k}{d\epsilon}$ は残留變形の範圍に於て變化する弾性係數である。Kármán²⁾ は之に全變形係數と

1) σ_1 を $\Delta \epsilon$ の圍に展開して考へれば、 $\Delta \epsilon$ は小であるから、此の高階は省略出来る。
2) Kármán, Th. v.: Untersuchungen über Knickfestigkeit Mitt. II, Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurw., Hsbg. v. V. d. I, Berlin 1910. 現在の説明は本質的には Kármán のなせるものに依る。

云ふ名前をつけた。今 $\frac{d\sigma_k}{d\epsilon} = E'$ と置けば、抗壓側の任意の縁維に於ける應力は次の簡單な直線式に依つて示される。

$$\sigma = \sigma_k + E' \Delta \epsilon$$

抗張側の應力は既に記述した所に従つて次の如くなる。

$$\sigma = \sigma_k + E \Delta \epsilon$$

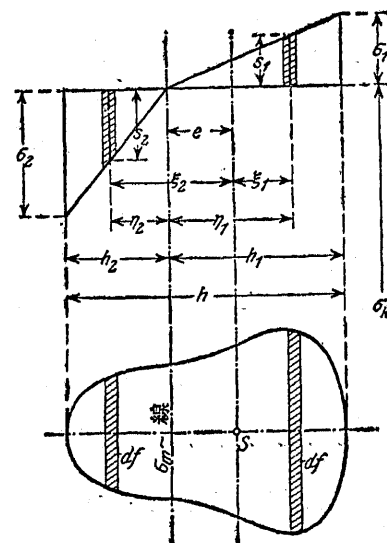
第 95 圖は上に述べた断面の一次的に變化する應力分布圖である。此の關係に立脚して不安定平衡に於ける彎曲の根本法則を求める事はさしたる難事ではない。

第 95 圖の關係を考慮するならば弾性應力及び外力が平衡する時には

$$\int_0^{h_1} s_1 df - \int_0^{h_2} s_2 df = 0 \dots \dots (7)$$

及び

$$\int_0^{h_1} s_1 df \xi_1 + \int_0^{h_2} s_2 df \xi_2 = M \dots \dots (8)$$



第 95 圖

となる。但し $M = Sy + M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l} x$ で、 M_1 及び M_2 はバックリング状態に於て部材端に働く固定彎曲率で、 y は x なる場所の撓度を示す。撓度 y は此の場合部材の重心軸に關して測られた撓度である。

$$\text{今 } s_1 = \frac{\sigma_1}{h_1} \eta_1 \text{ 及び } s_2 = \frac{\sigma_2}{h_2} \eta_2$$

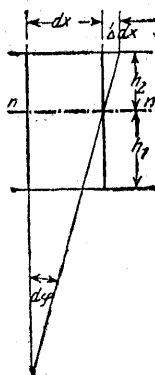
とおき、平面断面は彎曲後も尙平面なりと云ふ假定に基いて

$$\sigma_1 = \frac{E' h_1}{\rho} \text{ 及び } \sigma_2 = \frac{E h_2}{\rho}$$

となり、此より

$$s_1 = \frac{E' \eta_1}{\rho} \text{ 及び } s_2 = \frac{E \eta_2}{\rho}$$

1) 此處に示した圖にある様に無限に接近した相隣る 2 断面の廻轉を考へると



$$\begin{aligned} \Delta dx &= h_2 d\varphi \\ \Delta dx &= \frac{\sigma_2 dx}{E} \\ \text{であるから} \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{\sigma_2}{E h_2} \\ \text{となる。同様に} \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{\sigma_1}{E' h_1} \end{aligned}$$

となる。更に $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\rho}$ (ρ は弾性曲線の曲率半徑を示す) であるから、結局次式を得る。

$$\sigma_1 = \frac{E' h_1}{\rho} \text{ 及び } \sigma_2 = \frac{E h_2}{\rho}$$

が得られ、従つて条件 (7) は次式の如くなる。

$$\frac{E'}{\rho} \int_0^{h_1} \eta_1 df - \frac{E}{\rho} \int_0^{h_2} \eta_2 df = 0$$

或は

$$E' \Sigma_1 - E \Sigma_2 = 0 \dots \dots \dots (9)$$

茲に Σ_1 及び Σ_2 は σ_m 線の右及び左の部分断面積の此の線に関する静力率を示すものである。

更に $h_1 + h_2 = h$ なる関係を用ふれば、此の方程式に依つて σ_m 線の位置が定められる。

同様に第二の平衡条件から次の関係を得る。

$$\frac{E'}{\rho} \int_0^{h_1} \eta_1 \xi_1 df + \frac{E}{\rho} \int_0^{h_2} \eta_2 \xi_2 df = M$$

更に

$$\xi_1 = \eta_1 - e \quad \text{及び} \quad \xi_2 = \eta_2 + e$$

とおく。但し e は重心軸と σ_m 線との距離を示す、然る時は

$$\frac{E'}{\rho} \int_0^{h_1} \eta_1^2 df + \frac{E}{\rho} \int_0^{h_2} \eta_2^2 df - \frac{e}{\rho} \left[E' \int_0^{h_1} \eta_1 df - E \int_0^{h_2} \eta_2 df \right] = M$$

となる。括弧内は平衡条件 (9) に依つて零になる、それ故

$$\frac{1}{\rho} (E' J_1 + E J_2) = M \dots \dots \dots (10)$$

を得る。茲に J_1, J_2 は σ_m 線によつて分たれた部分断面積の此の線に関する弾性能率を示す。

彎曲小なる場合については近似的に

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2}$$

とおくならば、不安定平衡状態に於ける弾性曲線の微分方程式として次式が得られる。

$$(E' J_1 + E J_2) \frac{d^2 y}{dx^2} + M = 0$$

或は

$$T J \frac{d^2 y}{dx^2} + M = 0 \dots \dots \dots (11)$$

茲に

$$T = E' \frac{J_1}{J} + E \frac{J_2}{J} \dots \dots \dots (12)$$

T は Engesser に従つて (113 頁参照) **バックリング弾性係数**¹⁾ と稱す。此の量は断面寸法並びに構造材料の弾性的性質に關係するもので、式 (12) に従ひ既知なる断面形についてはその壓力圖表よりバックリング應力 σ_k の函数として定められ得るものである。

1) Kármán は之を**結果能率**と呼んで居る。

微分方程式 (11) の T は E と同様横距 x には無關係な一定數²⁾ であるから部材が完全な弾性體の時の不安定平衡状態に對する弾性曲線の微分方程式とその構造が同じである。其れ故方程式 (11) の形を持つ不安定平衡に對する弾性曲線の微分方程式は弾性並びに非弾性の範圍に於ても亦有効であると云ふ重要な事實を確立する事が出来る。非弾性範圍に於ては T は變數で σ_k に無關係であり、弾性範圍では T は E に變るものである。それ故不安定平衡状態の研究及びバックリング條件の理論的説明に對して總ての場合を抱括する根本法則が得られた譯である。

今再び彎曲率が働かない様に支へた中心荷重を受けて居る部材をとつて考へるならば、撓度 y は廻轉力率のない時には前章に述べたと全く同様に解は次の如くなる。

$$y = C \sin n \pi \frac{x}{l}$$

但し之は

$$S = n^2 \pi^2 \frac{T J}{l^2}$$

の時にのみ成立するものである。 $n = 1$ の時にはバックリング荷重として一般的に通用する方程式を得る。即ち

$$S_k = \pi^2 \frac{T J}{l^2} \dots \dots \dots (13)$$

これより

$$T = S_k \frac{l^2}{\pi^2 J} = \left(\frac{l}{i} \right)^2 \frac{S_k}{\pi^2}$$

となる。斯くして又色々な断面形に對する T と σ_k の合理的な關係がバックリングの實驗からも求められるであらう。

今便宜のために比例係數 $\tau = \frac{T}{E}$ 即ち**バックリング係數**²⁾ を導く。かくすれば基本方程式は次の様になる。

$$E J \tau \frac{d^2 y}{dx^2} + M = 0 \dots \dots \dots (11')$$

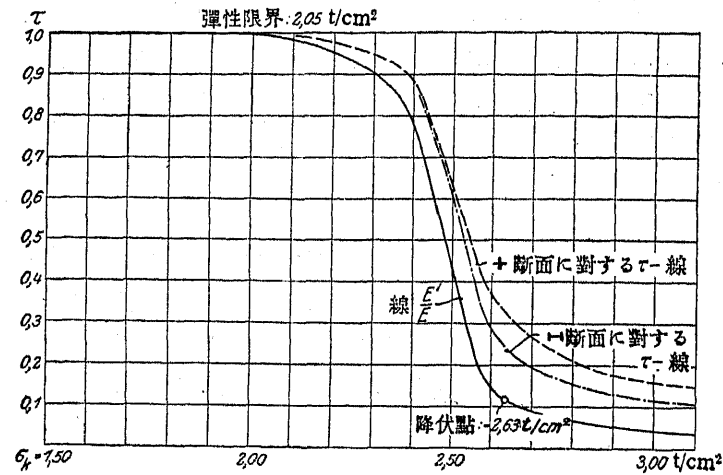
$$\tau = \frac{E' J_1}{E J} + \frac{J_2}{J} \dots \dots \dots (12')$$

$$S_k = \pi^2 \frac{E J \tau}{l^2} \dots \dots \dots (13')$$

S_k を部材の**自然バックリング荷重**と呼ぶ。

τ の大きさ従つて耐荷力 S_k に對する断面形の影響を説明するために、第 96 圖に於てはその様子の非常に異つた 2 種類の断面形に就てバックリング係數 τ をバックリング應力 σ_k の函数として圖示した。圖は先づ弾性限界 2, 05 t/cm² で降伏點 2, 63 t/cm² なる鎔鐵についての E'/E 線、茲に此の E'/E 線に基いて作つた + 及び |—| 断面の τ の線を示してある。後者の線は |—|

1) T は只 $\sigma_m = \sigma_k$ に關係するが彎曲部材の各點では同じ値を持つものである。
2) 112 頁のバックリング係數に付ての説明参照。

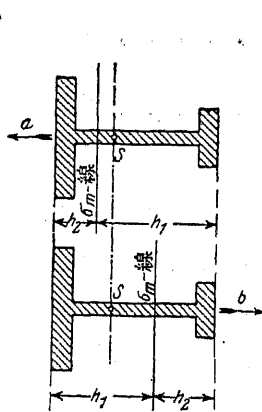


第 96 圖

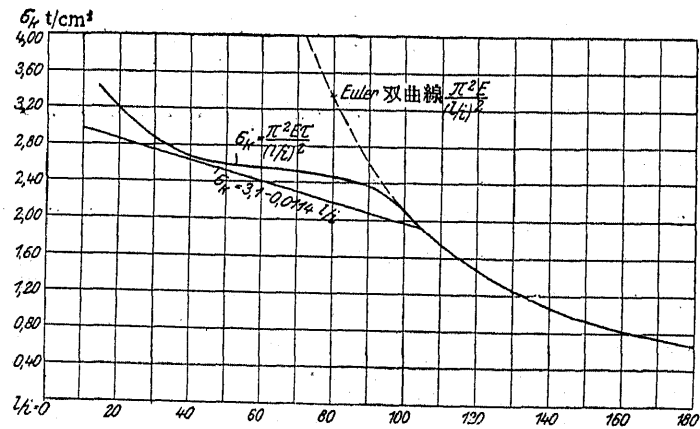
断面の腹材平面に於けるバックリングに対するものである。その差異は降伏点の附近に至つて著しくなり始める。一般に同じ慣性能率を持つものでは簡単な断面形の方が込み入つた形より大なる耐荷力を有するものである。σ_yの増加につれ、従つて繊細性が減少する程断面形の影響も増して来る。

単一の對稱軸を持ち同時にそれがバックリング平面である様な部材にてはバックリング係數 τ の値は、σ_m 線が断面重心の右にあるか左にあるか従つて異なるのである。バックリング方向 α (第 97 圖) に對して τ は計算が示す様にバックリング方向 β に對するものよりも小さい。それ故部材は充分正確なる中心荷重に對しては断面の重心のある方向にバックルするものである。この點に於て弾性限界以上にてバックルする部材は弾性限界以内にてバックルする繊細な部材と違つてゐる。茲に又非對稱部材については最初からバックリング方向は定められない。

断面形によつて定まるバックリング係數 τ の差違は少くも普通の程度の繊細な部材では實際の場合に断面形を考慮せねばならぬ程決して大きくはない。此の差違は物質の強度の特質が變



第 97 圖



第 98 圖

化するに應じてバックリング係數 τ が或る平均値に對して當然の差違を示すものと略同程度のものである。故に單一の τ の値の列で充分満足すべきで、此等の値は凡ゆるバックリング係數の中で最下の限界をなす様にバックリング實驗から定めるのが最も良い。第 98 圖は第 96 圖に示した + 断面に對する τ 線を用ひてバックリング應力を細長比の函數として、即ち Engesser-Kármán 公式

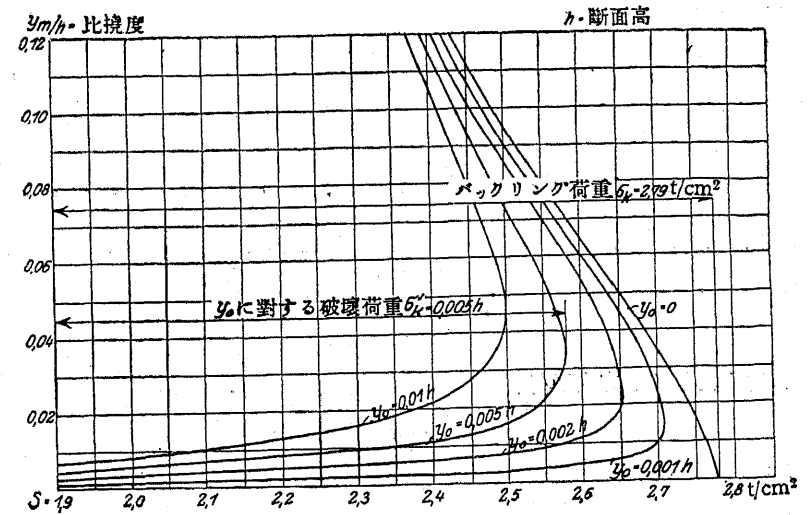
$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2} \tau \dots \dots \dots (14)$$

に依つて示し、又 Tetmajer の公式

$$\sigma_k = 3,100 - 0,0114 l/i$$

を之に對照させた。π²E は 21 220 t/cm² と假定した。圖で解る様に Tetmajer の直線は常に Engesser-Kármán の公式の値の下に存在する。降伏点を越えてバックルする部材に對しては細長比が減少すると共に式 (14) による耐荷力は非常に速に増大し l/i = 0 の時の應壓強度迄達する。l/i = 80 位から始まる中位の繊細部材に對しては Engesser の方法に従つて Tetmajer の公式から計算した τ の値(附録第 III 表参照)は猶安全度に餘裕のある良い豫備の値として一時的に用ひられるものである。

荷重 S の外に最初から離心彎曲率の存在する場合には、バックリング作用が生じない中に弾性限界を越すならば、部材は重要な點で完全弾性部材の状態と異つた状態を示す。第 92 圖の説明に於て、種々なる廻轉力率(最初の離心)に相當する撓度 y_m の線は漸近線的に最高荷重即ちバックリング荷重に接近する。そして全部同一の最高値に達せんとするものである。廻轉力率が小さい限り破壊荷重はバックリング荷重と甚だしく異なる、此の有様は最高荷重附近では撓度は荷重 S の極めて徐々なる變化に對して非常に速に増大すると云ふ特徴ある事情に基いてゐる。非弾性バックリングに於ては事情が之と全く異つて居る(第 99 圖)。荷重が増加するにつ



第 99 圖

れ始め撓度が極めて徐々に増大したる後、間もなく尙比較的小い撓度に相當した最高荷重に到達する。此の最高荷重は始めの離心率の大きさに依り非常に影響されるものである。此の點からは撓度は荷重が減じつつも尙非常に速に増大する。

我々はこれらの結果から次の事實が得られ、又 Kármán の實驗によつても満足される。

弾性限界以上でバックルする短材に於ける最初の彎曲率の影響は繊細部材に於けるよりも著しく大きい。

弾性範囲に於ては ($\tau=1$) 耐荷力は l/i の自乗に逆比例して増加する。それ故繊細部材はバックリング長の變化に對して非常に敏感である事になる。 $\tau < 1$ なるが如き部材に於ては $(l/i)^2$ が増加するためにその耐荷力の減少する影響は一部分は l/i と共に非常に速に増加する τ の作用に依つて高められる。之は細長比の増加と共に短い部材の耐荷力は非常に緩かに減少するものであると云ふ結果となる。第 98 圖を一見すればこの考察が確められる。約 $l/i=40$ から 90 位までの範囲ではバックリング應力線は略横軸に平行である。従つて計算上相當して換算されたバックリング長によつて考慮される部材端の固定度は弾性範囲に於ける耐荷力には非常に影響するが、非弾性範囲に於ては餘り影響しないものである。

36. 剪力の影響

今迄考へなかつたバックリング荷重の大きさに對する剪力の影響につき簡単に説明する事が尙残つてゐる。 Q_x を x 點における剪力とし、 G' を全變形の範囲における剛性係數とし、更に x を断面の形狀に關する數とすれば、弾性曲線の完全なる微分方程式は次の様になる

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{TJ} + \frac{x}{G'F} \frac{dQ_x}{dx}$$

茲に非弾性範囲に於ける計算をも含む様に E をバックリング弾性係數 T によつて置換へた。不安定平衡の場合には $M_x = Sy$ であるから

$$\frac{dQ_x}{dx} = S \frac{d^2y}{dx^2}$$

となる、故に微分方程式は次の様になる。即ち

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left(1 - \frac{Sx}{G'F}\right) + \frac{S}{TJ} y = 0 \dots \dots \dots (15)$$

式 (15) は前に説明した微分方程式と同一の構造を示してゐる。今

$$a' = \sqrt{\frac{S}{TJ \left(1 - \frac{Sx}{G'F}\right)}}$$

とおけば、前節と同じく不安定平衡状態の導入に對する條件

$$a'l = \pi$$

からバックリング荷重に對する方程式は

$$S'_k - \frac{\pi^2 TJ}{l^2} \left(1 - \frac{S'_k x}{G'F}\right) = 0$$

となる。今 $\frac{T}{G'} \sim \frac{E'}{G'} = \nu$ とおけば

$$S'_k \left[1 + \pi^2 \nu \left(\frac{i}{l}\right)^2\right] = \frac{\pi^2 TJ}{l^2}$$

となる。故に

$$S'_k = \frac{\pi^2 TJ}{l^2 \left[1 + \pi^2 \nu \left(\frac{i}{l}\right)^2\right]} = \frac{\pi^2 TJ}{(\gamma l)^2} \dots \dots \dots (16)$$

となる。但し

$$\gamma = \sqrt{1 + \pi^2 \nu \left(\frac{i}{l}\right)^2}$$

である。従つてバックリング荷重は變形に剪應力の影響を考慮に入れる事により幾分小さくなる。何となれば計算上バックリング長 l を γl に増加して剪力の影響が考慮されるからである。

ポアソン係數 m は固體に於ては 3 と 4 の間で變化する。従つて $\nu = \frac{2(m+1)}{m}$ の値は 8/3 と 5/2 の間に存在する事になる。今前述の場合に比較的不利なる關係 $\nu = 8/3$ を假定し(1-形断面に對して) $x = 2$ と選ぶ時は次の表を得る。

$l/i =$	20	30	40	50	100	150
$\gamma =$	1.063	1.028	1.016	1.010	1.003	1.002
$\frac{S'_k}{S_k} =$	99.5	99.7	99.8	99.8	99.8	99.8

茲に S_k は剪力の影響を考慮せざる時の耐荷力である。

耐荷力の減少はそれ故總て問題になる細長比に對して非常に微小なものであるから實際には考へなくてよい。文献に短材においては剪力の影響を考へるべきであるといふ陳述を屢々見受けるが之は誤まれるものであり、そう熟慮を要しないで式 (16) は $S'_k = S_k \frac{1}{1 + \pi^2 \nu \left(\frac{i}{l}\right)^2}$ と書き得る事から明かである。之はバックリング弾性係數 T とバックリング應力 $\frac{S'_k}{F}$ が組合されたときに正しきものと考へられる。しかし之はバックリング應力 $\frac{S'_k}{F}$ に屬すべきもので、 $\frac{\pi^2 TJ}{l^2}$ は S_k にて置換へられないものである。短材においては係數 $1 + \pi^2 \nu \left(\frac{i}{l}\right)^2$ は勿論 1 とは非常に異つて居る、併し此の影響はバックリング弾性係數 T の相應する増加によつて消され合ふものである。