第十七章 誤差論 (Theory of Errors)

I Error of Observations

測量其の他 Observation には種々なる方法がある之れを三つに別ける。

(1) Direct Observation,

(2) Indirect Observation,

(3) Conditional Observation {a direct / b Indirect.

(1) Direct Observation.

Transit で角度を測り Tape chain 等で距離を Observe する如き觀測方法である。

(2) Indirect observation.

三角測量で或る base line と Angle を測つて他の多くの Side を Calculation により出す方法である。

(3) Conditional observation.

一つの三角形の三つの角を測る時その和が 180° になるべき一つの Condition を有するもの又は一點のまはりの角が 360° になる如きものゝ Observation.

斯くの如く或る量を測定して其値を求むるに器械器具の良否氣象關係 Observer の熟練の程度により色々の結果を生ず、然して人力の best を盡すも必ず error の幾何はあるものなり其の error を分類せんに

(i) Constant error (or systematic error)

これは或る law のもとに起るものにして相當に研究すれば或る程度迄は除くことが出來る。

（a） Theoretical errors

水準測量の中に refrection of light, Curvature of earth, より生ずる誤差又は Steel tape の temperature により——Expansion. Contraction 等をなす如きものを云ふ。つまり theoretical reduction をなし得る誤差である。

（b） Instrumental errors.

使用する 機械 Chain, tape, の Adjustment の不完全によるもので注意せば除くことが出來る。

（c） Personal errors,

Personal equation として研究されてゐるものなり。Observer の特質 (Peculiarity)によるもの、之れは人により Constant である。然し絶對に Constant に起ると云ひ得ざる場合もあり Correction を施せば error を少なくする事を得。

（ii） Mistakes (or abnormal errors)

目盛の讀み誤り 87° を 93° と讀む 23 を 32 と書くことの如し要するに觀測者の不注意により生ずる誤差である。

(iii) Accidental errors.

Constant error. mistakes を除きても error が Observation の result に入り來るものを總稱す、Temperature の急激の Change 等の豫測し得ざる不規則なる原因によるものである。

Ⅱ Most probable value.

ある Unknown quantity を何回も Observe して得た結果は Temperature その他の Correction を施すも尙 accidental error の爲めに常に一定ならず、されば是等の結果より Most Probable value を定むる必要がある。

或る一つの quantity に對して多くの result ある時は arithmetical mean が Most probable value なりと云ふことが出來る。

$l_1\ l_2\ l_3 \cdots\cdots\ l_n$ *observed value*

n = *no. of observation*

x_0 = *most probable value*

$$x_0 = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \cdots\cdots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}$$

$v_1\ v_2\ v_3 \cdots\cdots v_n$ *residual*（殘差）とす。

$$x_0 - l_1 = v_1$$
$$x_0 - l_2 = v_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_0 - l_n = v_n$$
$$nx_0 - [l] = [v]$$

$\therefore\ [v] = o$ これが most probable value の一つの性質である。

$$v_1^2 = x_0^2 - 2l_1x_0 + l_1^2$$
$$v_2^2 = x_0^2 - 2l_2x_0 + l_2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n^2 = x_0^2 - 2l_nx_0 + l_n^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[vv] = nx_0^2 - 2x_0[l] + [ll]$$

然るに $x_0 = \frac{[l]}{n}$ なれば

$$\therefore\ [vv] = n\frac{[l][l]}{n^2} - 2\frac{[l][l]}{n} + [ll]$$

$$[vv] = [ll] - \frac{[l][l]}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

次に任意の値 x をとりそれと each obsevation との差を residual ($V_1\ V_2 \cdots\cdots V_n$) とす。

$$[VV] = nx^2 - 2x[l] + [ll] \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$[VV] = [vv] + \frac{[l]^2}{n} - 2[l]x + nx^2$$

$$= [vv] + n\left(\frac{[l]}{n} - x\right)^2$$

$$\therefore\ [VV] = [vv] + n(x_0 - x)^2$$

$n(x_0 - x)^2$ *positive*

$$\therefore \quad [VV] > [vv]$$

故に arithmetical Mean 卽ち most probable value の residual の square の sum は min である。

Ⅲ Probability of errors.

Probability とは

$$\frac{\textit{no. of favourable ways}}{\textit{no. of allpossible ways}} < 1 \text{ である。}$$

(1) The probability of the occurrence of an event in different independent ways is equal to the sum of the several probability.

例令ば一つの袋中に a 箇の白玉と b 箇の黑玉 c 箇の赤玉ありとし、此内より一つ取り出したるものが白玉なるべき或是率は $\frac{a}{a+b+c}$ 黑玉なるは $\frac{b}{a+b+c}$ にして、白又は黑なる或是率 $P = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+}$ なり。

(2) The probability of the occnrrence of several independent events is equa to the product of the several probability.

例令ば一つの袋には a 箇の白玉と b 箇の黑玉とありとし他の一つの袋には a' 箇の白玉と b' 箇の黑玉とありとして、兩方より一つ宛取出し二つ共に白玉なるべき或是率

$$P = \frac{a}{a+b} \times \frac{a'}{a'+b'}$$

(3) The most probable event among several is that which has the gratest mathematical proability.

例令ば A・B 二箇の銅貨を投げ落し其の兩方共表又は裏の出る場合各一つ宛あり、又一方が表にて一方が裏なる場合は A の銅貨が表にて B の銅貨裏なるときと A が裏にて B が表なるときの二つの場合あり、卽ち總ての起り得る種類は四つにして兩方揃つて表又は裏なるは、各 $\frac{1}{4}$ の或是率なり一つが表、一つが裏なるは $\frac{2}{4}$ 卽ち $\frac{1}{2}$ の或是率なる故に或是率の大なる後者の方起り易し。

Occurrence of errors.

誤差が出現する性質に次の樣な三つの事實がある。

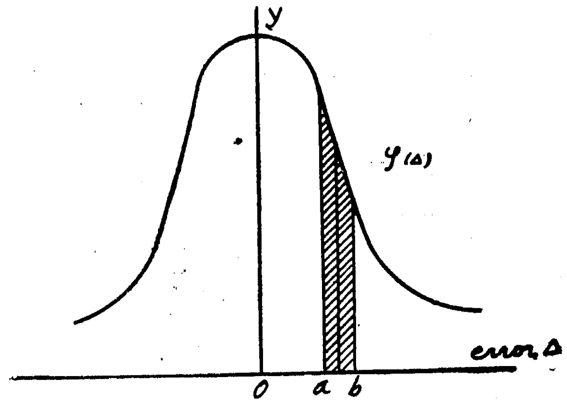
(1) Equal absolute value の $+$ error と $-$ error とは同じ probability を有す、例へば $100m$ の line を observe して $+5cm$ の error と $-5cm$ の error とは同じ回數丈生ずるのである。

(2) Observation に於て accidental errors が超過し得ざる limit あり 100 meters を測り 100 meter 以上の error はなし。

(3) Smaller errors (比較的少なる error) は lager error より大なる probability を有す例へば $100m$ を measure して $5m.m$ の error を生ずる方が $5cm$ の error を生ずるよりも其の probability が大なり。

そこで直角軸を取り性質を圖示すれば、大體次圖の樣になる。

これを probability ucrve と云ふ。



y = *Probability or frequency*

$$y = \varphi(\Delta)$$

$$y = \varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta) \cdots (1)$$

$$y = \varphi(\Delta) = 0$$

when $\Delta = \pm l$

l is certain limit (2)

$$\varphi(\Delta) = max \quad when\ \Delta = \text{'} \cdots\cdots\cdots (3)$$

ab 間の error の生ずる probability を p とすれば

$$p = \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta \quad \text{卽ち } area. \text{ になる}$$

Ⅲ Deduction of the law of errors.

今 Direct observation により x を測定するものとす。

M_1 M_2 M_3 ………… M_n ….. …… observed value とす。

observed value.	true value.	error	probability.
M_1	x	Δ_1	$\varphi(\Delta_1)$
M_2	x	Δ_2	$\varphi(\Delta_2)$
……………	……………	……………	……………

Δ_1 Δ_2 Δ_3 …… 等の error が同時に起る probability P は次の如し

$$P = \varphi(\Delta_1)\varphi(\Delta_2)\varphi(\Delta_3)\cdots\cdots \text{なり}$$

x が most probable value なるためには

probability P. max なるを要す

$$\log P = \log\varphi(\Delta_1) + \log\varphi(\Delta_2) + \log\varphi(\Delta_3) + \cdots\cdots$$

$$\frac{d\log P}{dx} = \frac{d\log\varphi(\Delta_1)}{d\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{dx} + \frac{d\log\varphi(\Delta_2)}{d\Delta_2}\frac{d\Delta_2}{dx} + \cdots\cdots = 0$$

and $\quad \Delta_1 = M_1 - x \qquad M_1 = const \qquad \therefore \frac{d\Delta_1}{dx} = 1$

$$\frac{d\Delta_1}{dx} = \frac{d\Delta_2}{dx} = \frac{d\Delta_3}{dx} = \cdots\cdots = \frac{d\Delta n}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{d\log P}{dx} = \frac{d\log\varphi(\Delta_1)}{d\Delta_1} + \frac{d\log\varphi(\Delta_2)}{d\Delta_2} + \cdots\cdots = 0$$

Δ_1 Δ_2 ………… を上下にかける。

$$\Delta_1\frac{d\log\varphi(\Delta_1)}{\Delta_1 d\Delta_1} + \Delta_2\frac{d\log\varphi(\Delta_2)}{\Delta_2 d\Delta_2} + \cdots\cdots = 0 \quad \cdots\cdots(A)$$

又 most probable value なるときは

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots\cdots = 0 \quad \cdots\cdots(B)$$

(A) (B) が同時に成立する とを要す。

then $\quad \dfrac{d\log\varphi(\Delta_1)}{\Delta_1 d\Delta_1} = \dfrac{d\log\varphi(\Delta_2)}{\Delta_2 d\Delta_2} = \cdots\cdots = K$

or $\quad \dfrac{d\log\varphi(\Delta)}{\Delta d\Delta} = K$

$$\frac{d\log\varphi(\Delta)}{d\Delta} = K\Delta$$

By integration

$$\log\varphi(\Delta) = K\frac{\Delta^2}{2} + c$$

$$\therefore \quad \varphi(\Delta) = e^{K\frac{\Delta^2}{2} + c} = Ce^{+\frac{\Delta^2}{2}K}$$

これ即ち Equation of Probability curve. である。

Determination K and C

$$\varphi(\Delta) = max \ when \quad \Delta = 0$$

as Δ *increase* $y = \varphi(\Delta)$ must be decrease

We must have $\frac{1}{2}K = -h^2$

$$\therefore \quad \varphi(\Delta) = Ce^{-h^2\Delta^2}$$

and $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\Delta)\,d\Delta = 1$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-h^2\Delta^2}d\Delta = 1 \qquad or \quad \int_{-\infty}^{+h^2\Delta^2} e\, d\Delta = \frac{1}{C}$$

as $\quad \varphi(+\Delta) = \varphi(-\Delta)$

$$\therefore \quad 2\int_0^{\infty}e^{-h^2\Delta^2}d\Delta = \frac{1}{C}$$

put $\quad h\Delta = t \qquad hd\Delta\ dt$

$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt = \frac{h}{2C}$ special case of Gamma function. Definite Integral

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt = \int_0^{\infty}e^{-v^2}dv = A$$

$$A^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(t^2+v^2)}\,dvdt$$

put $\quad v = tu \qquad dv = tdu$

$$\therefore \quad A^2 = \int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}e^{-t^2(1+u^2)}\,tdt$$

然るに $\int_0^\infty e^{-t^2(1+u)} t\,dt = \left[-\frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{2(1+u^2)}\right]_0^\infty = \frac{1}{2(1+u^2)}$

$$\therefore\quad A^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}(tan^{-1}\infty - tan^{-1}0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{h}{2C} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

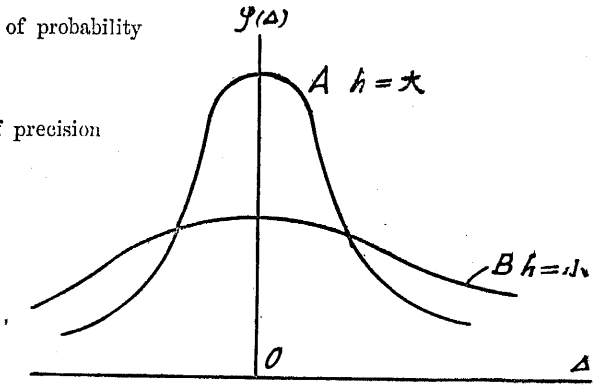
$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

$$\therefore\quad \varphi(\varDelta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varDelta^2}$$

Equation of probability of errors

h を the measure of precision と云ふ。

h が大なる場合には精度が高くして h 小なる場合は精度が低いのである。



V Principle of the Least square.

(a) Equal weight. 同じ Condition で Observation を行ふ場合、即ち同温、同壓等 equal precisin 即 h が constant と考へ得る場合に $f(x_1 y_1 z_1 \cdots\cdots)$ を observe して次の如き $M_1\ M_2\ M_3$ ……なる observed values を得たり。

然らば
$$\left.\begin{array}{l} f(x_1 y_1 z_1\cdots\cdots) - M_1 = \varDelta_1 \\ f(x_1 y_1 z_1\cdots\cdots) - M_2 = \varDelta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} n$$

The probability of $\varDelta_1$ is $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varDelta_1^2}$

〃 〃 〃 $\varDelta_2$ is $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varDelta_2^2}$

……………… ………………………………

then $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3$ ……の如き error が同時に生ずる probability は

$$P = \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2(\varDelta_1^2+\varDelta_2^2+\varDelta_3^2+\varDelta_n^2)}\ となる$$

x, y, z ……が Most. Probable Value なるためには

$P = max$ なるを要し

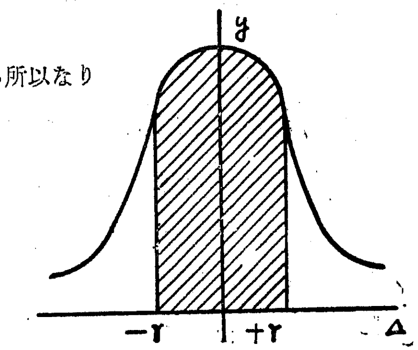
即ち $\varDelta_1^2 + \varDelta_2^2 + \varDelta_3^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \varDelta_n^2 = min$ となる

斯くの如く residual の square の sum を min にすることにより most probable value を得らる

これ Method of Least square の名ある所以なり

VI Comparison of Precision

most Probable value の精度を表はすのに便宜上次の一つの中何れか一つを採る。



1. Probable error (推差) を比較にとる場合

$$\int_{-r}^{+r} \varphi(\varDelta)\, d\varDelta = 0.5 = \frac{1}{2}$$

これは $0 \sim r$ 間の probabililty が $r \sim \infty$ 迄の probability と等しき特別の error を probable error と云ふ。

$$\int_{-r}^{+r} \varphi(\varDelta)\, d\varDelta = \int_{-r}^{+r} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varDelta^2}\, d\varDelta \qquad h\varDelta = t$$

$$h\,d\varDelta = dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hr} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hr}\left(1 - \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1.2} + \cdots\cdots\right) dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{hr - \frac{(hr)^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{(hr)^5}{5}\right\} = \frac{1}{2}$$

∴ $hr \doteqdot 0.47694$ ∴ $\gamma = \frac{0.47694}{h}$

(2) Mean square error or mean error (ε)

之れは一組の obsevation に出現する各々の observation error を正負に論なく平方したものゝ平均値の平方根である。

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta_1^2+\Delta_3^2+\Delta_3^2+\cdots\cdots+\Delta_n^2}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n}$$

次に ε と h との關係を求むる爲めに或る error Δ と Δ+dΔ 間の error の probability は φ(Δ)dΔ なり。n_Δ を Δ と Δ+dΔ 間の error の數とすれば

$$\varphi(\Delta)d\Delta = \frac{n_\Delta}{n} \qquad or \qquad n_\Delta = n\varphi(\Delta)d\Delta$$

Δ と Δ+dΔ の間の error の平方の和は $\Delta^2 n\Delta$ である。

卽 $\Delta^2 n\varphi(\Delta)d\Delta$ となる。

∴ −a と +a 間に於ける error の square の和は

$$n\int_{-a}^{+a}\Delta^2\varphi(\Delta)d\Delta$$

$$\therefore \varepsilon^2 = \frac{n\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2\varphi(\Delta)d\Delta}{n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2\varphi(\Delta)d\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\Delta^2 d\Delta$$

$$h\Delta = t \qquad d\Delta = \frac{dt}{h}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^2dt = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\left\{-\left[\frac{t}{2e^{t^2}}\right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}dt\right\}$$

然して $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\therefore \varepsilon^2 = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2h^2}$$

$$\varepsilon = 1.4826\,\gamma$$

3 Average error. (η.)

Average error とは sign に關係なしに error を sum せるものゝ平均なり

$\eta = \frac{[\Delta]}{n}$ Δ と Δ+dΔ 間の error の數 $= n_\Delta = n\varphi(\Delta)d\Delta$

然して其 error の total sum は $2n\int_0^\infty \Delta\varphi(\Delta)d\Delta$

$$\therefore \eta = 2n\int_0^\infty\frac{\Delta\varphi(\Delta)d\Delta}{n} = 2\int_0^\infty\Delta\varphi(\Delta)d\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Delta e^{-h^2\Delta^2}d\Delta$$

$$h\Delta = t \qquad d\Delta = \frac{dt}{h} \qquad \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,h}\int_0^\infty te^{-t^2}dt$$

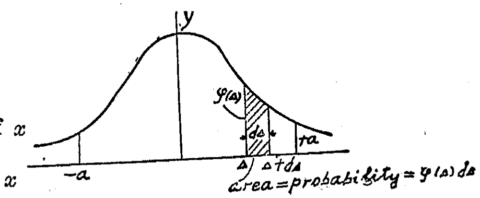
$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}\,h}\left[-e^{-t^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,h} = \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

	ε (Mean)		γ (Probable)		η (Average)
ε	1.0000 ε	=	1.4826 γ	=	1.2533 η
γ	0.6745 ε	=	1.0000 γ	=	0.8453 η
η	0.7979 ε	=	1.1829 γ	=	1.0000 η

VII Law of propagation of errors.

1. Mulitiplication.

$$X = ax$$



ε. mean square error of x

E. 〃 〃 〃 〃 x

$E^2 = a^2\varepsilon^2$ or $E = a\varepsilon$

1. *chain* $= \varepsilon$ の error ありたりとす、或る dist を observe して a chain とせば全體の error は $a\varepsilon$ なり。

2. Addition or Subtraction.

$$X = x \pm x_1$$

observed value x errors of x Δ' Δ'' …………

observed vblue x_1 〃 〃 x_1 Δ'_1, Δ''_1 …………

mean error of x $\varepsilon^2 = \dfrac{[\Delta\Delta]}{n}$

〃 〃 〃 x_1 $\varepsilon_1^2 = \dfrac{[\Delta_1\Delta_1]}{n}$

mean error of $X = E$ say

$$E^2 = \frac{[(\text{error of } X)^2]}{n}$$

error of $X' = \Delta' \pm \Delta'_1$

〃 〃 $X'' = \Delta'' \pm \Delta''_1$

……………………………

Square

$$\text{Sum}\begin{cases}(\text{Error of } X')^2 = \Delta'^2 \pm 2\Delta'\Delta'_1 + \Delta_1'^2 \\ (\ 〃 \ 〃 \ X'')^2 = \Delta''^2 \pm 2\Delta''\Delta''_1 + \Delta_1''^2 \\ \text{…………………………………………} \end{cases}$$

$$\Sigma(\text{Error of } X)^2 = [\Delta\Delta] \pm 2[\Delta\Delta_1] + (\Delta_1\Delta_1]$$

そこで　$\Delta' + \Delta'' + \Delta''' \text{ ……………………} = 0$

$\Delta'_1 + \Delta''_1 + \Delta'''_1 \text{ ……………………} = 0$

$\therefore\ 2[\Delta_1\Delta] = 0$

$$\therefore\ \frac{\Sigma(\text{Error of } X)^2}{n} = \frac{[\Delta\Delta]}{n} + \frac{[\Delta_1\Delta_1]}{n}$$

$$\therefore\ E^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 \quad or \quad E = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2}$$

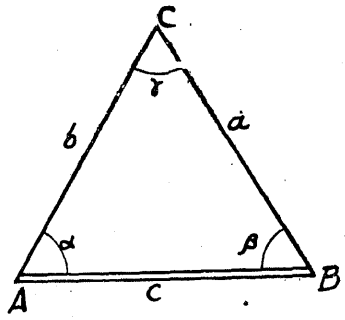
3. Linear function.

$X = ax \pm bx_1 \pm cx_2 \pm$ ……………………の場合も同樣に

E　ε　ε_1　ε_2 ……… *each mean errors*

$$E^2 = (a\varepsilon)^2 + (b\varepsilon_1)^2 + (c\varepsilon_2)^2 + \text{…………}$$

4. General function.



$X = f(x_1\ y_1\ z_1 \text{……………})$

$x = x_0 + x'$　　x' *error*

$y = y_0 + y'$　　y' 〃

$z = z_0 + z'$　　z' 〃

…………………………………

Expand by Taylor's Theorem.

$$X = f(x_0\, y_0\, z_0 \text{………}) + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 x' + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 y' + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 z' + \text{……}$$

$$X - X_0 = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 x' + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 y' + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 z' + \text{…………}$$

$$E^2 = (a\,\varepsilon_x)^2 + (b\,\varepsilon_y)^2 + (c\,\varepsilon_z)^2 + \text{………………}$$

Where $a = \left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right)_0$　$b = \left(\dfrac{\delta f}{\delta y}\right)_0$　etc.

Ex. for 4.　$a = \dfrac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha$

$$da = \frac{\delta a}{\delta\alpha}d\alpha + \frac{\delta a}{\delta\gamma}d\gamma.$$

c = *constant* (*assume.*)

$$\therefore\ da = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\, d\alpha - \frac{c\sin\alpha\cos\gamma}{\sin^2\gamma}d\gamma = a\cot\alpha\, d\alpha - a\cot\gamma\, d\gamma$$

$$Ea = a\sqrt{\cot^2\alpha\varepsilon_\alpha^2 + \cot^2\gamma\varepsilon_\gamma^2}$$

5. Dependent value.

$Y = aX + a'X'$

Indepenent の場合には次の如し

$EY^2 = (a\,EX)^2 + (a'\,EX')^2$

Dependent の場合には

$$X = bx + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

$$X' = b'x + b'_1 x_1 + b'_2 x_2$$

$$Y \quad X \quad X' \quad x \quad x_1 \quad x_2$$

$$E \quad E_X \quad E'_X \quad \varepsilon \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2$$ *mean erron.*

Then

$$E_X^2 = (b\varepsilon)^2 + (b_1\varepsilon_1)^2 + (b_2\varepsilon_2)^2$$

$$E_X^{2\prime} = (b'\varepsilon)^2 + (b'_1\varepsilon_1)^2 + (b_2\varepsilon_2)^2$$

$Y = aX + a'X'$ *substitute* $X \; X'$

$$Y = a(bx + b_1x_1 + b_2x_2) + a'(b'x + b'_1x_1 + b'_2x_2)$$

$$= (ab + a'b')x + (ab_1 + a'b'_1)x_1 + (ab_2 + a'b'_2)x_2$$

$x, x_1, x_2,$ ………………… は independent value なり

$$E^2 = (ab + a'b')^2\varepsilon^2 + (ab_1 + a'b'_1)^2\varepsilon_1^2 + (ab_2 + a'b'_2)^2\varepsilon_2^2$$

$$= a^2(b^2\varepsilon^2 + b_1^2\varepsilon_1^2 + b_2^2\varepsilon_2^2) + a'^2(b'^2\varepsilon^2 + b_1'^2\varepsilon_1^2 + b_2'^2\varepsilon_2^2)^2$$

$$+ 2a'a(bb'\varepsilon^2 + b_1b'_1\varepsilon_1^2 + b_2b'_2\varepsilon_2^2)$$

$$\therefore \quad E^2 = a^2E_X^2 + a'^2E_X^{2\prime} + 2a'a(bb'\varepsilon^2 + b_1b'_1\varepsilon_1^2 + b_2b'_2\varepsilon_2^2)$$

VIII Adjustment of observation and precision in direct observation.

1. Epual weight.

或る未知數の most probable value に對する信賴の degree は特殊 error の一により示すことを得。

今之に關する Bessel 氏の公式を求めんに

unknown true value を x とし true errer を $\varDelta_1 \varDelta_2$…………とせば

Single observation の mean error は

$$\varepsilon^2 = \frac{[\varDelta^2]}{n}$$

より求むることを得べし

然るに吾人は true Value と true error は知らずして probable Value x_0 と

residual $v_1 v_2 v_3$ ………………… v_n を得るに過ぎざるを以て

$l_1 \; l_2 \; l_3$ …………… を observed value とせば

$x_0 = \dfrac{[l]}{n}$ $\qquad [v] = 0$ なれば

$$\left.\begin{aligned} x_0 - v_1 &= l_1 = x - \varDelta_1 \\ x_0 - v_2 &= l_2 = x - \varDelta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_0 - v_n &= l_n = x - \varDelta_n \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) 式を相加ふれ $[v] = 0$ なれば

$$nx = nx - [\varDelta] \cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) より x_0 を求め $x_0 = x - \dfrac{[\varDelta]}{n}$ (1) に代入せば

$$\left.\begin{aligned} nv_1 &= (n-1)\varDelta_1 - \varDelta_2 - \varDelta_3 \\ nv_2 &= -\varDelta_1 + (n-1)\varDelta_2 - \varDelta_3 \\ nv_3 &= -\varDelta_1 - \varDelta_2 + (n-1)\varDelta_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3)$$

(3) 式を夫々自乘せば

$$\left.\begin{aligned} n^2v_1^2 &= (n-)^2\varDelta_1^2 + \varDelta_2^2 + \varDelta_3^2 \cdots\cdots -2(n-1)\varDelta_1\varDelta_2 \cdots \\ n^2v_2^2 &= \varDelta_1^2 + (n-1)^2\varDelta_2^2 + \varDelta_3^2 \cdots\cdots 2(n-1)\varDelta_1\varDelta_2 \cdots \\ nv_3^2 &= \varDelta_1^2 + \varDelta_2^2 + (n-1)^2\varDelta_3^2 \cdots\cdots -2(n-1)\varDelta_1\varDelta_3 \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

(4) 式を相加ふれば $[\varDelta_1\varDelta_2]$ $[\varDelta_1\varDelta_3]$ $[\varDelta_2\varDelta_3]$………… 如き term は 0 なるを以て

$$n^2[v^2] = \left\{(n-1)^2 + (n-1)\right\}[\varDelta^2]$$

$$\therefore \quad [v^2] = \frac{n-1}{n}[\varDelta^2] = (n-1)\varepsilon^2$$

or $\quad \varepsilon^2 = \dfrac{[v^2]}{n-1} \quad$ *or* $\quad \varepsilon = \sqrt{\dfrac{[vv]}{n-1}}$ …………(5) for each observation

次に ε_0 を x_0 の mean error とせば

$$x_0 = \frac{l_1+l_2+l_3+\cdots\cdots\cdots}{n}$$

$$= \frac{1}{n}l_1 + \frac{1}{n}l_2 + \frac{1}{n}l_3 + \cdots\cdots\cdots$$ なれば propagation of error により

$$\varepsilon_0^2 = (\frac{1}{n}\varepsilon)^2 + (\frac{1}{n}\varepsilon)^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = n\frac{1}{n^2}\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^2}{n}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

	mean error	probable error
For each obsenation	$\varepsilon = \sqrt{\frac{[v_1v]}{n-1}}$	$r = q\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$
For arithmetical mean	$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$	$r_0 = q\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$

$q = 0.6745$

—— Example of Adjustment of Direct Observation ——

(1) In equal weight.

No.	observed angles	residual v	v^2
1	35°−42′−35″	+2	4
2	〃 35	+2	4
3	〃 20	−13	169
4	〃 05	−28	784
5	〃 75	+42	1764
6	〃 40	+7	49
7	〃 10	−23	529
8	〃 30	−3	9
9	〃 50	+17	289
10	〃 30	−3	9

Mean 35°−42′−33″ $[vv] = 3610$

probable error $r_0 = 0.6745\sqrt{\frac{3610}{10(10-1)}} \quad \pm 4.''3$

Most probable value 35°−42′−33″ ±4.″3