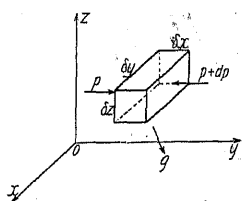


第二十一章 無 渦 運 動

[99] 完全液體の動力學に於ける基本方程式

(1) 完全液體の運動方程式...オイラーの運動方程式 (Equation of motion of perfect liquid—Euler's equation of motion) 運動しつつある完全液體中に於て δV なる微小體積を考ふればその密度 ρ は不變にして $\rho g \delta V$ なる力が常に重力の方向に作用し、その周面には面の各點に垂直に水壓が作用する。完全液體にありては運動に對する抵抗なきを以て重力と水壓との合力が零ならざる限り微體積は合成力の方向に加速され速度は刻々變ずる。而て一般運動の法則に依りある方向に於ける分力とその方向の加速度との關係は

$$(\text{重力の分力}) + (\text{水壓の分力}) = (\text{合成力の分力}) = \rho \delta V \cdot (\text{分力の方向に於ける加速度}) \quad \dots (i)$$



第 803 圖

今 任意の直角坐標 x, y, z を取り、各軸の方向に對し運動の方程式を求むるに、液體内に各稜が軸に平行なる微小直六面體を取り

各稜の長さ	$\delta x, \delta y, \delta z$
各軸方向の重力加速度	X, Y, Z
原點に最も近き隅點の坐標	x, y, z
„ „ 遠き „ „	$x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$

次に x 軸の方向に於て之に垂直なる面に作用する水壓の強さを $p, p + \delta p$ とし單位距離に對する p の變化を $\frac{\partial p}{\partial x}$ を以て表せば $\delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x$ となる。又 x 方向の加速度、即ち速度 v の x 方向の分速 v_x の單位時間の増大は全微分 $\frac{dv_x}{dt}$ を以て表はさる。これ v_x は t のみならず微小體の位置 (x, y, z) に依りても異り $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ のみにて表はし得ぬ爲である。...[20] (3) 参照。

今 δV なる微小體の x 方向の力と運動との關係を考ふるに、總て方向を有する量は坐標軸の正の向きに作用するものを+、之に反するものを-とすれば

$$\text{重力の分力} = \rho X \delta V = \rho X \delta x \delta y \delta z$$

$$x \text{ 軸に垂直にして原點に近き面に作用する水壓} = p \delta y \delta z$$

$$x \text{ 軸に垂直にして原點に遠き面に作用する水壓} = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x\right) \delta y \delta z$$

$$\text{微小體の加速度即ち } v_x \text{ の單位時間の増大} = \rho \delta x \delta y \delta z \frac{dv_x}{dt}$$

$$\therefore (i) \text{ 式に依り } \rho X \delta x \delta y \delta z + p \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x\right) \delta y \delta z = \rho \delta x \delta y \delta z \frac{dv_x}{dt}$$

y 及び z 軸の方向に對して同型の式が成立するを以て

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}, \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}, \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt} \quad \dots \quad (866)$$

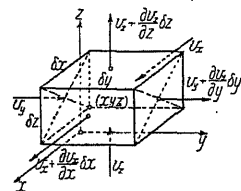
然るに v_x は x, y, z 及び t の函数なるを以て $\frac{dv_x}{dt}$ を偏微分 (Partial derivative) を以て表はせば

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

然るに $\frac{\partial x}{\partial t}$ は δt 間に於ける x 方向の位置の變化即ち v_x にして、 $\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ も夫々 v_y, v_z に相當するを以て (866) 式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \quad (867)$$

(2) 水流連続性の方程式 (Equation of continuity)...[20] (2)参照...運動する流體の連続性の方程式とは、ある時刻に一定の質量を有する流體のある部分が運動に依りてその位置と形とを如何に變ずるも常に同一の質量を有すと云ふ物質不滅の法則 (Law of conservation of mass) を式を以て表はしたものである。完全液體に於ては密度不變にして實在の液體に於てもその變化は微小なるを以て運動を取扱ふ場合には實地上之を無視して差支なく、結局考ふる部分の體積も亦不變である。従て流水中に一定體積の空間を考ふればこの空間に周面を通過して絶えず水の出入あるも、一定期間に流入する水の體積は同期間に流出する體積に等しい。今水流中に第 804 圖の如き微小直六面體の空間を考ふれば δt なる微小時間に各面より出入する水の體積は面に垂直なる流速とその面積との積...水路の流速及び正断面と流量との關係の如し...に δt を乗じたるものに等しく yz 面に平行なる面を夫々 $ABCD, A'B'C'D'$ とすれば



第 804 圖

$$\begin{aligned} ABCD \text{ 面より流入する體積 } (x \text{ 軸の方向}) &= v_x \cdot \delta y \delta z \cdot \delta t \\ A'B'C'D' \text{ 面より流出する體積 } (x \text{ 軸の方向}) &= \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \right) \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \delta t \\ \therefore \text{ 六面體内に残る水の體積} &= - \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \delta x \delta y \delta z \cdot \delta t \\ \text{同様に } y \text{ 軸方向の流動に依て残る水の體積} &= - \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \delta x \delta y \delta z \cdot \delta t \\ z \text{ 軸方向の流動に依て残る水の體積} &= - \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \delta x \delta y \delta z \cdot \delta t \end{aligned}$$

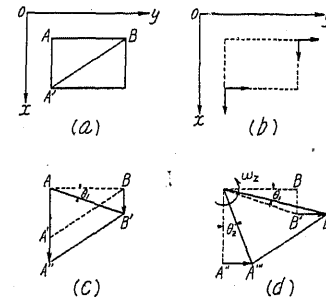
然るに六面體の體積は不變なるを以て各方向の流出入に當り残留する水量の和は常に零である。

即ち $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \dots \quad \text{連続性の方程式} \quad \dots \quad (868)$

氣體の如く密度 ρ が著しく變化する場合、上式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad \dots \quad (869)$$

(3) 渦運動 (Rotational motion) 及び無渦運動 (Irrotational motion) 第 805 圖の六面體の上面 $ABB'A'$ の内 ABA' なる三角形部分を取り各角點に於ける各軸方向の速度を示せば第 805 圖 (b) の如く、 A 點に對する各點の相對速度を示せば (c) の如し。此等の相對速度の爲に三角形 ABA' は次第に變形する。従て $\angle A$ の中分線 Aa はその原方向に對して θ なる角變位を爲し θ の値は刻々變化する。而て θ の變化は Aa 線の A を過ぎ oz 軸に平行なる軸の廻りの角變位にして三角形 ABA' の A の廻りの廻轉運動であり、従て θ の變化率 $\partial\theta/\partial t$ はその廻轉速度 (ω_z) である。而て θ 及び ω_z は $+x$ の方向より $+y$ の方向への廻轉を $+$ とする。 θ 及び ω_z の値を求むるには v_x と v_y との變化に因るものを各別に考へ且つ總ての變化が微小なる事に注意する。先づ v_x の變化のみを考ふれば δt 間に生ずる各點の變位は第 805 圖 (c) に示す如く、 A' は A'' に、 B は B' に移り直角三角形 ABA' は變化して鋭角三角形 $AB'A''$ となり $\angle A$ の中分線 Aa は Aa' に移る。



第 805 圖

依て $A'A'' = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x - v_x \right) \cdot \delta t = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \delta x \cdot \delta t$, $BB' = \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y - v_y \right) \cdot \delta t = \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \delta y \cdot \delta t$

$$\angle BAB' = \theta_1 = + \frac{BB'}{AB} = \frac{1}{\delta y} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \delta y \cdot \delta t = \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \delta t$$

且つ $\angle A'A'B - \angle A''A'B' = \theta_1$

然るに $\angle a'Aa = \angle a'AB - \angle aAB = \left(\theta_1 + \frac{1}{2} \angle A''A'B' \right) - \frac{1}{2} \angle A'A'B$

$$= \theta_1 - \frac{1}{2} (\angle A'A'B - \angle A''A'B') = \theta_1 - \frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{2} \theta_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \delta t$$

次に v_y の變化の影響を考ふるに (第 805 圖 d) $\frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x$ なる相對變位に依て A'' は A に對し $A''A'''$ だけ移動し、 B は $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ に依て B'' に移り Aa' は Aa'' に移る。故に

$$\theta_2 = \frac{A''A'''}{AA'} = \frac{1}{\delta x} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \delta x \cdot \delta t = \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \delta t$$

然るに δt は微量なるを以て θ_1 も亦微量にして、 $\angle B'A'B''$ 即ち $\delta\theta_1$ は θ_1, θ_2 に對して高次の微量なるを以て之を棄つれば θ_1 の場合と同様に

$$\angle a'Aa'' = \frac{1}{2} \theta_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta t$$

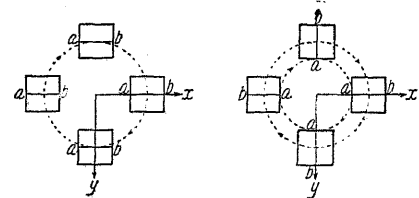
$\angle A$ の中分線 Aa の $+x$ 方向より逆時計様の角變位を $+$ とするを以て x_x 及び x_y の影

響を組合すれば、 Aa 線は δt 間に原方向 Aa に對し $\theta = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$ だけ廻轉せるを以て

$$\omega_x = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \frac{1}{\delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \dots \dots \dots (870)$$

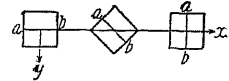
同様に $\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$

若し $\omega_x = 0$ ならば微面積 $ABB'A$ が坐標軸に對して如何に移動するも Aa の方向は不變である。同様に ω_y, ω_z が凡て零なる時は直六面體の各隅點が如何に運動するも隅角の中



第 806 圖

第 807 圖

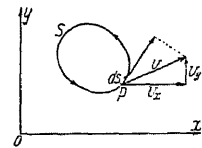


第 808 圖

分線の方法は不變である。斯の如き運動を無渦運動 (Irrotational motion) と名づけ $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ の全部又は一部が零ならぬ運動即ち自轉を伴ふ運動を渦運動 (Rotational motion) と呼ぶ。

xy 面に平行なる一の矩形が z 軸の周りを廻轉する場合に於ても第 806 圖は無渦運動、第 807 圖は渦運動にして矩形の中心が直線運動を爲す場合に於ても第 808 圖の如く $\omega_x \neq 0$ ならば渦運動である。

(4) 循環 (Circulation) 液體中に閉ぢたる環路 S を假想し S 線上の各點に於ける切線分速度 (Tangential velocity, v_t) の S に沿ふての線積分を循環と呼ぶ。 S 環路上の一點に於て速度 v の切線分速度 v_t 、路の微部分の長を ds とすれば、 $v_t ds$ を環路に沿ふて



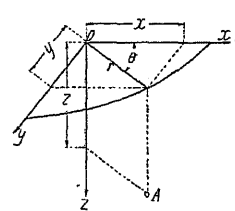
第 809 圖

一周り積分したる量にして逆時計様の周りを + とすれば循環 γ は

$$\gamma = \int_S v_t ds = \int_S \left(v_x \frac{dx}{ds} + v_y \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_S (v_x dx + v_y dy) \dots \dots (871)$$

第 806 圖の如き運動は循環運動にして速度ポテンシャルを有する。

(5) 圓筒坐標を以て表はしたる基本方程式 z 軸の周りの廻轉運動の如く z 軸に對して對稱的なる運動を取扱ふ場合には oz を軸とする圓筒坐標 (Cylindrical co-ordinates) を用ふれば便利である。今一般的に液體運動に関する基本方程式を圓筒坐標を以て



第 810 圖

表はさんに先づ任意の一點 $A(x, y, z)$ を r, θ, z を以て表はせば

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

今變化する諸量の r, θ, z 方向の成分 (Components) を夫々尾字 r, θ, z を附して表はせば

$$\text{重力の加速度 } g_r, g_\theta, g_z (=Z), \quad \text{速度 } v_r, v_\theta, v_z$$

依て (867) 及び (868) に坐標の轉換を行へば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \\ g_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \\ g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{r \partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \text{運動方程式} \dots (872)$$

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} = 0 \dots \text{連續性方程式} \dots (873)$$

運動が z 軸の周りに對稱なる時は

$$\left. \begin{aligned} g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \\ g_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \\ g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \text{運動方程式} \dots (874)$$

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} = 0 \dots \text{連續性方程式} \dots (875)$$

[100] ポテンシャルを有する運動

(1) ポテンシャルを有する運動の方程式 (Equation of potential flow) 液體の運動が無渦運動なる時は $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ にして (870) 式に依り

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y} \dots \dots (876)$$

故に若し $\phi(x, y, z, t)$ なる一の函数の x に関する偏微分係數 $\partial \phi / \partial x$ が v_x を表はす時は $\partial \phi / \partial y$, $\partial \phi / \partial z$ は夫々 v_y 及び v_z を表はす。その故は

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{ならば} \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

然るに (876) 式より $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad \therefore v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ 同様に $v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$

依て斯の如き函数 ϕ を速度ポテンシャル (Velocity potential) 又はポテンシャル函数 (Potential function) と名づく。

今 v_x, v_y, v_z の合成速度を v とすれば $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ なるを以て

$$\frac{\partial v^2}{\partial x} = 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + 2v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + 2v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + 2v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + 2v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

且 $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$ なるを以て

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x}$$

此等の關係を (866) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{と置く} \\ \text{同様に} \quad Y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial U}{\partial z} \\ \text{茲に} \quad \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} &= U + C, \quad C = \text{const.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (877)$$

即ち U は方向に無関係なる量にして流水の単位重量の有する全勢力 $\left(\frac{p}{w_0} + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$ に g を乗じたるものに相等し。 X, Y, Z なる分加速度は夫々 U の偏微分係数に等しい。この U を普通ポテンシアル (Potential) と呼ぶ。 C は積分常数にして x, y, z に無関係なるも t に依ては變じ得る。尙

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad \text{なるを以て (868) 式は}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (878)$$

液體に作用する外力 (Extraneous force) が重力のみなる場合は z 軸を鉛直上向にとれば (877) 式に於て $X=Y=0, Z=-g$ にして且運動は t に無関係即ち定流なる時は ϕ は t に無関係なるを以て $\partial \phi / \partial t = 0$ 従つて (877) の第三式より

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = -g \quad \therefore \quad zg + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C_1 (= \text{const.})$$

$$\therefore \quad z + \frac{p}{w_0} + \frac{v^2}{2g} = C \quad \dots \dots \dots (879)$$

不定流即ち時刻に依て變ずる運動に於ては (877) 式の第一第二兩式に依り C は x, y, z に無関係なるも t に依ては變じ得る。従て (879) 式はベルヌーイの定理を表はすのである。

尙 ベルヌーイの定理を用ひて流れの各點に於ける流速よりその點に於ける壓力を求め得る。即ち $z = \text{const.}$ の場合は

$$\frac{p}{w_0} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_0}{w_0} + \frac{v_0^2}{2g}$$

茲に p_0, v_0 は規準にとれる點に於ける値であつて之等を既知なりとし

$$\frac{\rho v^2}{2} = h, \quad \frac{\rho v_0^2}{2} = h_0, \quad p_0 = 0 \quad \text{と置けば壓力は}$$

$$\frac{p}{h_0} = 1 - \frac{h}{h_0} = 1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2$$

(877) 及び (878) 式を oz 軸を軸とする圓嚮坐標に直せば

$$\left. \begin{aligned} g_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad g_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ g_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (880)$$

z 軸に對して對稱的なる運動に於ては θ に無関係なるを以て

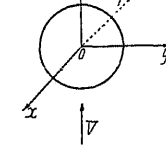
$$\left. \begin{aligned} g_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad g_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (881)$$

(880) (881) に於ては ϕ, U は共に r, θ, z, t の函數である。

(2) 静止せる球の周りのポテンシアル流 ポテンシアルを有する流れの一例として半径 a なる球が $+z$ 方向の V なる速度の平行流中に置かるゝ場合、球の周りの流れを考ふるに限界條件は

1. 球より無限に遠き點の速度は $v_x = v_y = 0, \quad v_z = V$
2. 球の表面 $F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ に於ては表面に垂直なる速度は零なるを以て表面に於ける法線の方向餘弦 (Direction cosines) を l, m 及び n とすれば

$$v_x l + v_y m + v_z n = 0 \quad \text{而て} \quad l = \frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad m = \frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad n = \frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial z}$$



$$\text{茲に} \quad G = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2} \quad \therefore \quad v_x x + v_y y + v_z z = 0$$

この二條件と連続性の方程式とを満足するポテンシアル函數を求めれば

$$\phi = Vz \left(1 + \frac{a^2}{2r^3} \right) \dots \dots \text{Dirichlet} \dots \dots (882)$$

球の表面 ($r = a$) 上の速度 $v_a^2 = \frac{9}{4} V^2 \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right)$, $z = 0$ に於て 最大速度 $v_{\text{max}} = \frac{3}{2} V$

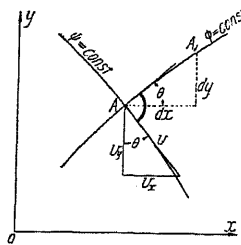
(3) ポテンシアルを有する平面運動の解法 ポテンシアルを有する運動即ち無渦運動に關する問題を解くには先づ (878) 式を満足する如き ϕ の函數形を定むべきであるが斯の如き函數形は無數に存在するを以て各場合に於て必要なる境界條件 (Boundary condition) を満足する如き形を撰定する必要がある。簡單のために運動が z に無関係即ち二次元的 (Two-dimensional) にして而も t に無関係なる場合を述べる。(878) 式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (883)$$

今 $\phi(x, y)$ なる函數ありて $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ なる性質を有する時は (876) の第三式より ϕ も亦 (883) と同型の式を満足する事を知る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{従て} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

故に $\phi = \text{const.}$ $\psi = \text{const.}$ なる二つの線は互に直交する、而て $\phi = \text{const.}$ なる線上に於ては



第 812 圖

$d\phi = 0$ にして ϕ は x, y の函数なるを以て

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} = -\frac{v_x}{v_y}$$

故に合速度 v の方向は $\phi = \text{const.}$ なる線に直交し A 點に於て水分子は ϕ 曲線に直角に即ち $\psi = \text{const.}$ なる線上を運動し、この關係は A 點の位置に拘らず成立するを以て結局水分子は $\phi = \text{const.}$ なる總ての線に直交する $\psi = \text{const.}$ なる線上を相隣れる二の ϕ 線の最短距離

の徑路を運動する。斯の如き線を流線 (Stream line)、 ψ なる函数を流函数 (Stream function) と稱する。又 $\phi = \text{const.}$ なる線上に沿ひては水の運動なく恰も實在の水に於て前後の水壓の平衡に依り靜止するが如き場合に相當し $\psi = \text{const.}$ なる線を等ポテンシャル線又は等位線 (Equipotential line) と稱し水分子はポテンシャル傾斜の最急なる方向に上り勾配に運動し實在の水流に於ける水面勾配と流れの向きとの關係に類似する。

(883) 式の關係を滿足する ϕ 及び ψ を求むるに w を以て複素ポテンシャル (Complex potential) を表はし

$$w = \phi + i\psi = F(x + iy) = F(z), \quad z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1} \quad \dots \quad (884)$$

なる關係ありとせば

$$\frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial x} = \frac{d(\phi + i\psi)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d(\phi + i\psi)}{dz}$$

$$\frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial y} = \frac{d(\phi + i\psi)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{d(\phi + i\psi)}{dz}$$

$$\therefore \frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial y} = i \frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial x} \quad \therefore \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = i \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

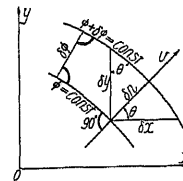
$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{故に } \phi, \psi \text{ は何れも (883) 式を滿足する。而て (884)}$$

式に於て F の函数形を知れば兩邊に於て實部、虚部は互に等しきを要するを以て

$$\phi = F(x + iy) \text{ の實數部分}, \quad \psi = F(x + iy) \text{ の虚數部分}$$

而て ϕ, ψ は (883) 式を滿足する點に於ては同一にして何れも流函数又はポテンシャル函数たり得、何れか一方を流函数に採れば他はポテンシャル函数となり之を交換すれば流線と等ポテンシャル線の入り換はる流れを得る。

次に $\phi = \text{const.}, \phi + \delta\phi = \text{const.}$ なる二等位線を考ふれば二線間の位差は常に $\delta\phi$ である。今二線間の垂直距離即ち流線に沿ふ距離を δn とすれば第 813 圖により



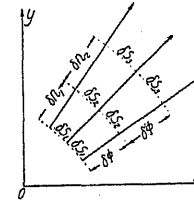
第 813 圖

$$\frac{\delta \phi}{\delta y} = \frac{\delta \phi}{\delta n} \sin \theta, \quad \frac{\delta \phi}{\delta x} = \frac{\delta \phi}{\delta n} \cos \theta$$

$$\therefore \left(\frac{\delta \phi}{\delta n}\right)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \left(\frac{\delta \phi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta \phi}{\delta y}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\delta \phi}{\delta n}\right)^2 = \left(\frac{\delta \phi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta \phi}{\delta y}\right)^2 = v_x^2 + v_y^2 = v^2$$

$$\therefore v = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \dots \quad (885)$$



第 814 圖

従て一の等位線に於て δs 間を ϕ の増加の方向に流過する水量は $\delta q = v \delta s = \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta s$ なるを以て $\delta \phi$ なる等位差を有する多くの等位線と等位線上に於て等間隔 ($\delta s_1, \delta s_2, \dots$) を有する流線とに依て生ずる總ての網目の面に於ては (第 814 圖)

$$\frac{\delta q}{\delta \phi} = v \frac{\delta s}{\delta \phi} = \frac{\delta s}{\delta n} = \text{const.} \quad \dots \quad (886)$$

故に ϕ 及び ψ の兩線中の一方を與へらるれば他方の曲線群を圖上に畫き得る。

(4) コーシーの定理 (Cauchy's theorem) z の函数 $f(z)$ が z 面上の有限領域 (Region) の周圍及び内部を通じて連続的にして且つ内部の如何なる點に於ても微分係數を有する時、即ち $f(z)$ が正則なる



第 815 圖

時はその全周に沿ひて一周する積分路を取れば $\int_S f(z) dz = 0$

一例として $f(z) = z^2$ とすれば $f'(z) = 2z$ 即ち任意の領域に於て正則である。然るに

$f(z) = \frac{1}{z}$ ならば $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ 故に $z=0$ を除けば矢張り正則である。次に



第 816 圖

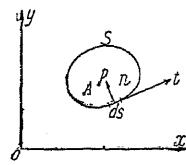
$f(z) = x^2 + iy^2$ 又は $f(z) = x^2 - iy^2$ なる時は收斂する方向に依て微分係數異り (第 816 圖) 右邊は z 即ち $x + iy$ の函数として表はし得ぬ。函数 $f(z)$ が z 面上の有限領域 (A) の周圍及び内部を通じて連続的にして且つ内部に於ては到る所正則なる時 A の内部の一點 a に於ける $f(z)$ の値は

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \dots \quad (887)$$

但し S は A の全周にして z は之を正の方向に一周するものとする。

然るに一般にポテンシャル運動は z の函数 $f(z)$ を以て表はされ、流れの場 (Stream field) の周圍に於ける狀況即ち $f(z)$ を與えらるれば場内の任意の點 a に於ける狀況を (887) 式より求め得る。而て A は有限なる事を要するも如何に大なるも差支へなきを以て實際には無限の場内に於て $f(z)$ の値が正則なる總ての點の流れの狀況を知り得る。

(5) Blasius の定理 平面運動をなす流體中の物體 (A) に働く力を求むるには ds の部分に働く x 及び y 軸の方向の分壓力を $dP_x = -p dy$ 及び $dP_y = p dx$ とすれば A に働く力は $P_x = -\int p dy$ 及び $P_y = \int p dx$, $P = P_x - iP_y$ と置けば



第 818 圖

$$P = - \int_S p(idx + dy) = -i \int_S p \frac{dz}{dz} = -i \int_S p \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{dz} = -i \int_S p \frac{(ds)^2}{dz}$$

然るに $p = h - \frac{\rho}{2}v^2$, h は常數

$$\therefore P = -i \int_S h dz + \frac{i\rho}{2} \int_S v^2 \frac{(ds)^2}{dz} = \frac{i\rho}{2} \int_S v^2 \frac{(ds)^2}{dz}$$

茲に $v^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial s} + i\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2$

$$\therefore P = \frac{i\rho}{2} \int_S \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \frac{(dz)^2 (ds)^2}{dz} = \frac{i\rho}{2} \int_S \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \dots \dots \dots (888)$$

[104] (5) の 1 参照。

(6) 迴轉する液體 (Rotating liquid, Lamb) 液體が重力のみの作用の下に、一定且一樣の角速度を以て鉛直軸 z の周りに迴轉する場合を考ふるに假定により

$$v_x, v_y, v_z = -\omega y, \omega x, 0$$

$$X, Y, Z = 0, 0, -g$$

この場合連続性方程式は必然的に満足せられ、運動方程式は

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \dots \dots \dots (i)$$

$$\therefore \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - gz + \text{const.} \dots \dots \dots (ii)$$

自由表面 $p = \text{const.}$ は z 軸の周りの拋物線迴轉面になる。又

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = 2\omega$$

なるを以て速度ポテンシャルは存在せず、従つてこの種の運動は完全流體即ち剪力の働きの得ない液體中には發生し得ない。

次に角速度 ω を z 軸よりの距離 r の函数なりと考へ、速度ポテンシャルが存在する爲に必要なる函数形を定むる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = 2\omega + r \frac{d\omega}{dr}$$

速度ポテンシャルが存在する爲には之が零なることを要する。従つて $\omega r^2 = \mu = \text{const.}$

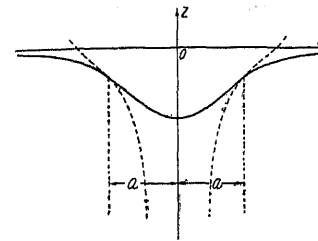
任意の點の速度は μ/r 従つて

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{r^2} - gz \dots \dots \dots (iii)$$

速度ポテンシャル ϕ は極座標を用ふれば $\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -\frac{\mu}{r}$

$$\therefore \phi = -\mu\theta + \text{const.} = -\mu \arctan \frac{y}{x} + \text{const.} \dots \dots \dots (889)$$

即ち速度ポテンシャルは循環函数 (Cyclic function) にして、自由表面の形は $r^2 z = \text{const.}$ 即ち双曲線迴轉面となる。



第 819 圖

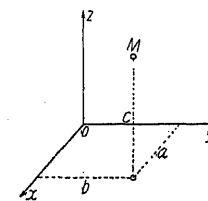
上の二種の渦を組み合はせたる場合を考へ、 $r=0$ より $r=a$ 迄の間は第一の場合とし速度を ωr にて表はす。 $r>a$ の部分は第二の場合とし速度を $\frac{\omega a^2}{r}$ とする、但し ω は常數を表はす。各部分の自由表面の形は C を常數として

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - a^2) + C, & r=0 \text{ より } r=a \text{ 迄} \\ z &= \frac{\omega^2}{2g}\left(a^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) + C, & r>a \end{aligned} \right\} \dots (890)$$

この二つの z の値は $r=a$ に於て一致する。この渦を Rankine's combined vortex と云ふ。 $r=0$ に於ける水面の低下は靜水面より $\omega^2 a^2/g$ である。

[101] ラグランジュの方程式

(1) ラグランジュの運動方程式 (Lagrangian equation of motion) オイラーの運動方程式は x, y, z なる點に於ける流速の變化と力との關係を表はすものなるが、ラグランジュの方程式はある特定の水分子の運動を追跡しその運動が時刻に依て如何に變ずるかを表はすものにして波動 (Wave motion) の問題に多く用ひらる。



第 820 圖

今ある時刻に於て $x=a, y=b, z=c$ なる位置に在る水分子は唯一にして a, b, c が與へらるればその分子は定まる。此水分子が最初の時刻より t だけ經過したる時の位置 x, y, z を求むるに此等の坐標は a, b, c 及び t の函数を以て表はし得る。

$$x = f_x(a, b, c, t), \quad y = f_y(a, b, c, t), \quad z = f_z(a, b, c, t)$$

此水分子が δt なる時間に三軸の方向に各 $\delta x, \delta y, \delta z$ だけ移動したりとすれば、各分速度及び分加速度は

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

依て (866) 式と同様に

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots \dots \dots (891)$$

然るに此場合 a, b, c, t は變數にして x, y, z は從變數なるを以て上式の兩邊に夫々 $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ を乗じて邊々加へ合すれば

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial a} = X \frac{\partial x}{\partial a} + Y \frac{\partial y}{\partial a} + Z \frac{\partial z}{\partial a} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} \dots \dots \dots (892)$$

但し右邊最後の項は $\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial \rho}{\partial a}$ なる關係に依る。(891) 式の各邊に $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$ を乗じて加へ合はすれば b の變化に因る關係を表はす式を得。又同様に c の變化に對する式を得る。從て

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial a} &= 0 \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) \frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) \frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial b} &= 0 \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) \frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) \frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \text{ラグランジュの運動方程式} \dots (893)$$

X, Y, Z が U なるポテンシャルを有する時は...[100] (1) 参照

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} = X \frac{\partial x}{\partial a} + Y \frac{\partial y}{\partial a} + Z \frac{\partial z}{\partial a}$$

故に (893) 式を書き換ふれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial a} &= -\frac{\partial}{\partial a} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) \\ \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial b} &= -\frac{\partial}{\partial b} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) \\ \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial c} &= -\frac{\partial}{\partial c} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \dots (894)$$

(2) 連続性の方程式 (Equation of continuity) 次に水流の連続性に依りある時刻に δV なる體積を有する微小部分は t なる時刻後、運動に依りて如何に位置と形とを變ずるもその體積は一定不變なるを以て、今 $t=0$ に於て $x=a, y=b, z=c$ なる點に重心を有し、 $\delta a, \delta b, \delta c$ なる邊長と δV なる體積とを有する直六面體が運動に依り t に於て重心が x, y, z 點に移りたる時その體積は立體幾何學に依り次の如く表さる。

$$\delta V = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \cdot (\delta a \cdot \delta b \cdot \delta c) \dots (i)$$

然るに $\delta a \cdot \delta b \cdot \delta c$ は $t=0$ の時の體積にして t に於ても同一なるを以て $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ 故に

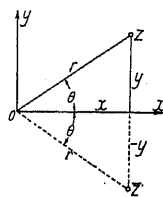
$$\rho \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \rho_0 \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)} \dots (895)$$

茲に $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}$ は (i) 式中の行列式を示し、右邊はその $t=0$ に於ける値にして非壓縮性の流體即ち液體に於ては $\rho = \rho_0$ にして、 $a = x_0, b = y_0, c = z_0$ にあつた水分子の運動を考へれば

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1 \dots (896)$$

[102] 等角寫像

(1) 複素變數の圖示法 $z = x + iy$ なる複素變數 (Complex variable) を一平面上の直交軸に依て表すには ox を實軸, oy を虚軸に取り x, y を坐標とする點 z を定むれば z 點は複素數 $z = x + iy$ を表はす。而て此の平面を數平面 (Complex plane) と名付く。今 $oz = r, oz$ 線の x



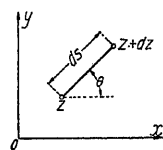
軸と爲す角を θ とすれば

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

同様に $\bar{z} = x - iy$ なる複素數は次の如く表はし得る。

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos \theta - i \sin \theta) = re^{-i\theta}$$

r を z 又は \bar{z} の絶対値 (Absolute value, modulus), θ を偏角 (Amplitude) と呼ぶ。一般に複素數の乗除は $re^{\pm i\theta}$ の形に變へて容易に求め得べく



第 821 圖

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = (r_1 / r_2) [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$1/z = (1/r) e^{-i\theta} = (1/r)(\cos \theta - i \sin \theta), \quad z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\ln z = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan(y/x)$$

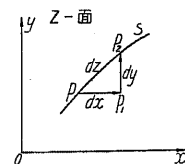
$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \cos \theta + i \sin \theta$$

若し $\zeta = v_x + iv_y = f(x + iy) = f(z)$ なる關係あらば

$$\frac{d\zeta}{ds} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + i \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + i \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \sin \theta$$

一般に數平面にては實軸を水平に、虚軸を鉛直にとる。

(2) 等角寫像 (Conformal projection) ある平面圖形 A をその内部の相交る二曲線の交角が對應二曲線の交角に等しき如き他の圖形 a に投射する時 a を A の等角寫像と言ふ。

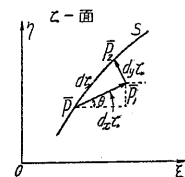


二つの數平面の各々に於て一點を表す複素變數 z 及び ζ の間に $\zeta = f(z)$ 又は $z = F(\zeta)$ なる關係が存する時は、 f, F が解析函數 (Analytic function) ならば、夫々 $df/dz=0, dF/d\zeta=0$ の點を除けば一方は他方の等角寫像である。之を證明する爲に z 面上の線分 PP_2 と ζ 面上の $\bar{P}\bar{P}_2$ との關係を求むるに P 點が S 曲線上を移動し P より P_2 に移る時に \bar{P} は S 曲線上を \bar{P} より \bar{P}_2 に移るものと考ふれば

$$\zeta = \xi + i\eta = f(z) = f(x + iy)$$

$$\therefore d\zeta = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + i \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + i \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dy + i(dx + i dy)$$

即ち x が dx だけ増加し P が P_1 に移れば ζ は $d\zeta = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + i \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx$ だけ増加し \bar{P} は \bar{P}_1 に移りその移動の方向は $\tan \theta_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} / \frac{\partial \xi}{\partial x}$ である。次に $P_1(x + dx, y)$ 點が y 軸の方向に dy だけ移動して P_2 に移れば \bar{P}_1 は $\tan \theta_2 = -$

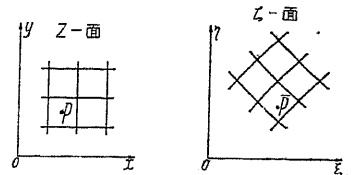


第 822 圖

$\frac{\partial \xi}{\partial x} / \frac{\partial \eta}{\partial x}$ の方向に $|d_x \zeta| = \left| -\frac{\partial \eta}{\partial x} + i \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| dy$ だけ移動して \bar{P}_2 に移る。従て $d_x \zeta$ 及び $d_y \zeta$ の絶対値の比は

$$\begin{aligned} |d_x \zeta| : |d_y \zeta| &= \left| dx \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2} \right| : \left| dy \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2} \right| \\ &= |dx| : |dy| \dots \dots \dots (897) \end{aligned}$$

∴ 三角形 AP_1P_2 及 $\bar{A}\bar{P}_1\bar{P}_2$ にして、對應する各角は等しく従つて對應する各邊の比も亦相等し、即ち $\left| \frac{d_x \zeta}{dx} \right| = \left| \frac{d_y \zeta}{dy} \right| = \left| \frac{dz}{dz} \right|$ 従て z と ζ との間に $\zeta = f(z)$ 又は $z = F(\zeta)$



第 823 圖

なる關係成立すれば、一方の圖形は之に對應する他方の圖形の等角寫像である。依て $\zeta = f(z)$, $z = F(\zeta)$ を寫像函數 (Projective function) と稱する。

普通流れの實狀を表はす數平面を z 面、複素ポテンシャルを表はすものを w 面とし、
 $z = x + iy, w = \phi + i\psi \dots \dots \dots (898)$

従て適當なる寫像函數 f_1, f_2, \dots, f_n に依て z 面の圖形を順次 z_1, z_2, \dots, z_n 面に寫像し、遂に $w = z_n$ とすれば $w = f_n f_{n-1} \dots f_1(z) = f(z)$ なる寫像函數を求め得る。又實際の流速を $v e^{i\theta}$ とし、速度に平行にして、その大きさの逆数を大きとする量を表はす面を ζ とすれば

$$\zeta = \frac{1}{v} e^{i\theta} = \frac{1}{v_x - i v_y} = -\frac{dz}{dw} \dots \dots \dots (899)$$

従て ζ 面上の圖形を假定して之と w との函數關係を求め得れば、積分に依て z 面に相當する z 面上の流れの狀況を知り得る...[103] (4) の 1。

(3) 寫像の特異點 (Singular point of transformation) 互に寫像關係を有する z_1 及び z 兩面に於て $\frac{dz}{dz_1} = 0$ 又は ∞ なる點あらば此點に於ては等角性を欠き之を特異點と稱し其周圍の微小面分(普通は圓)を除外して考ふる。 z_1 面上の z_{10} 點に於て特異點を有する時は z 及び z_1 に接近せる點を夫々 z_0 , z_{10} とし $\frac{z - z_0}{(z_1 - z_{10})^n} = f(z_{10}) \neq 0$ 又は ∞ となる如く n を定むる。



第 824 圖

今 $z_1 - z_{10} = r e^{i\theta}$ と置けば $z - z_0 = r^n e^{i n \theta} f(z_{10})$ 即ち z_1 面上の角 $\angle \theta$ は z 面上の角 $\angle n\theta$ に相應する。

又 z_1 面上の速度を $v'_x - i v'_y$, その大きさ即ち絶対値を V' z 面上の速度を $v_x - i v_y$, その大きさ即ち絶対値を V とすれば

$$v'_x - i v'_y = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dz_1} = (v_x - i v_y) \frac{dz}{dz_1} \therefore V = V' \left| \frac{dz_1}{dz} \right| \dots \dots \dots (900)$$

即ち寫像の特異點に於ては一の面上の有限なる速度は他の面の無限大の速度に相當し得る。

[103] 二次元的ポテンシャル運動

(1) 二次元運動の解法 一般に完全液體の定流に於ては

$$w = \phi + i\psi, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = v_x - i v_y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i v_x + v_y = i \frac{\partial w}{\partial x} \therefore \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

この偏微分方程式の一般解は $w = f(z) = f(x + iy)$

この式が如何なる流れを表はすかを知らるには次の二方法がある。

1. $f(z)$ の函數形を假定して限界の形狀を調べる。
2. 與へられたる限界條件を満足する函數 $f(z)$ を求むる。

又複雑なる流れに對し有効なる方法は

3. 限界條件として $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\zeta}$ 即ち速度を假定する...[102] (2) 参照。
4. 既知の類似の場合を參考して Cauchy の積分公式に適合する如き流線及び等位線を假定し限界條件を満足する如く之を調整する (Prášil-Kulka 法)。

1 及び 3 に多く用ひらるゝ方法は等角寫像の性質を保有し且つ寫像關係の既知なる一つ又は數種の直交曲線網目(面分)を中介として w と z 又は ζ の關係を求むるものである。例へば求むる場合に對し w と z 又は ζ 面上の面分を夫々 t, t' 面上の上半面全部に寫像し得る場合は t, t' の間には次の一次函數に依て表はさるゝ關係がある。 $t = \frac{at' + b}{ct' + d}$ 但し $ad - bc > 0$

茲に係數 a, b, c, d は t 及び t' 面の實軸上の對應する三點を與へらるれば唯一に定まる。此種の補助の寫像函數としては既知の諸函數又は 1 に於て假定する簡單なる函數をその儘適用するが次に此目的に對して有用なる主なる關係を擧ぐる。

(i) z 面の實軸を w なる補助面の單位半徑の圓即ち單位圓に寫像する一次函數

$$w = a \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}, \quad |a| = 1, \quad \Im(\beta) \neq 0 \quad \text{茲に} \quad \beta = \Re(\beta) + i\Im(\beta), \quad \bar{\beta} = \Re(\beta) - i\Im(\beta)$$

最後の條件を $\Im(\beta) > 0$ とすれば z 面上の上半面が w 面上の單位圓の内部に寫像さるる。

(ii) z 面の單位圓を w 面の單位圓に寫像する一次函數

$$w = a \frac{z - \beta}{\beta z - 1}, \quad |a| = 1, \quad |\beta| \neq 1$$

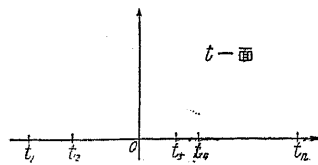
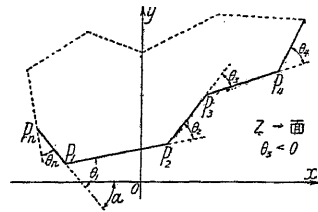
若し $|\beta| < 1$ ならば此函數は兩單位圓の内部を内部に寫像せしむる。而て兩單位圓の内部を一對一に且等角に寫像する解析函數は一次函數のみである。

(iii) Schwarz-Christoffel の定理に依る寫像

$$\frac{dz}{dt} = A \prod_{k=1}^n (t_k - t)^{-\frac{\theta_k}{\pi}} \quad \text{茲に} \quad A \text{ は複素常數, } t_k \text{ は實常數}$$

且 $t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad \sum_{k=1}^n \theta_k = 2\pi \dots \dots \dots (901)$

なる關係があれば z 面上の多角形は t 面上の上半面に寫像さる(第 825 圖)。此定理を證明するには t が t 面の實軸上に於て t_1 の左側の區域を移動すれば $\prod (t_k - t)^{-\frac{\theta_k}{\pi}}$ は實數なるを以て dz の傾きは一定 (α) 即ち z は直線上を移動する。 $t_1 < t < t_2$ ならば $\prod_{k=1}^n (t_k - t)^{-\frac{\theta_k}{\pi}} = e^{i\theta_1} (t - t_1)^{-\frac{\theta_1}{\pi}} \prod_{k=2}^n (t_k - t)^{-\frac{\theta_k}{\pi}}$ にして $e^{i\theta_1}$ の乘數は實數である。即ち dz の傾きは $\theta_1 + \alpha$ で、以下順次に $t_2 < t < t_3$ ならば dz



第 825 圖

の傾きは $\theta_1 + \theta_2 + a$ となる。 $t = \pm\infty$ に於ては

$$\frac{dz}{dt} = (t)^{-\frac{n-1}{2} \frac{\theta_k}{\pi}} = (t)^{-2} = 0$$

即ち $t = +\infty$ と $t = -\infty$ は z 面上にては同一の點に對應する。

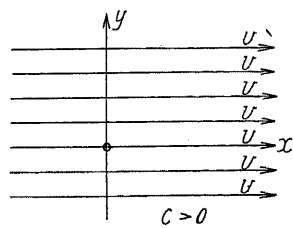
若し角頂點 P_n が t の無限遠點に對應するならば $t_n = \infty$ にして

$$\frac{dz}{dt} = A \prod_{k=1}^{n-1} (t_k - t)^{-\frac{\theta_k}{\pi}}$$

[103] (4) 参照。

(iv) 二つ以上の流れ (流れの型) の組合せ 二つの複素ポテンシアル w_1, w_2 を知る時 $w = w_1 + w_2$ が表はす流れを考へる。 $\frac{dw}{dz} = (v_{x1} + v_{x2}) - i(v_{y1} + v_{y2})$ 即ち各點に於ける速度は個々の速度を組合せたものである。

(2) 函數形を假定する解法 ((1) の 1) 試算法にして屢々使用される方法である。



第 826 圖

$\phi + i\psi = F(x+iy)$ なる關係を有する ϕ 及び ψ は總てポテンシアル流を表はし得るが、 F の函數形に依て表はす所の流れが異なるを以て次に種々の函數形の表はす流れを示す。

$$1. w = \phi + i\psi = f(z) = cz = c(x+iy) = cr(\cos\theta + i\sin\theta)$$

c は實常數 ... (902)

$$\therefore \phi = cx, \quad \psi = cy$$

$$\therefore v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = c, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

$$\therefore v = v_x = c \quad (\text{第 826 圖})$$

故に c が $+$ なる場合は v なる等速度を以て $-x$ より $+x$ の方向に一様に流れ、流線は總て x 軸に平行なる直線である。

$$2. \phi + i\psi = c(x+iy)^2 = cz^2, \quad c(\text{常數}) > 0 \quad (\text{第 827 圖})$$

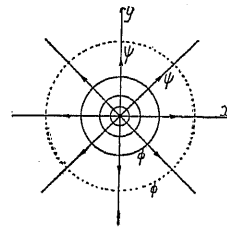
兩邊の實數部及び虚數部を夫々等しと置き

$$\phi = c(x^2 - y^2), \quad \psi = 2cxy$$

即ち $\phi = \text{const.}$ なる曲線は ox, oy を軸とする直角双曲線、 $\psi = \text{const.}$ は ox, oy を漸近線とする直角双曲線である。 $\phi = \text{const.}$ を等位線とすれば $\psi = \text{const.}$ は流線にして yoa なる壁に限らるゝ流れを示し $\psi = \text{const.}$ を等位線とすれば $y'oa'$ なる壁に限らるゝ流れを表はす。

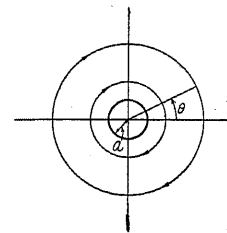
3. $z = x+iy = ce^{\phi+i\psi}$ (第 828 圖) 此場合は便宜上逆函數の形を以て表はされてゐる。

$$x = ce^{\phi} \cos \psi, \quad y = ce^{\phi} \sin \psi \quad \therefore x^2 + y^2 = c^2 e^{2\phi}, \quad y = x \tan \psi \dots \dots \dots (903)$$



第 828 圖

故に $\phi = \text{const.}$ なる線は O を中心とする圓弧、 $\psi = \text{const.}$ の線は O より出づる放射線にして、 ϕ を等位線とし c が正值ならば水が O より流出して四方に流るゝ流出點 (Source) の場合、又負値ならば水が四方より O に流入する流入點 (Sink) の場合を表はす。又 $\psi = \text{const.}$ を等位線とすれば水分子が O の周りを公轉する場合の無渦過動にして、一般に閉ぢたる流線を循環する流れを循環流 (Circular flow) と言ふ。

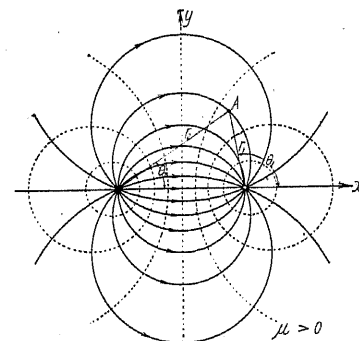


第 829 圖

4. 圓の周りの循環流 (第 829 圖) 3 の $\psi = \text{const.}$ を等位線とする場合に於て $r = \sqrt{x^2 + y^2} = a$ なる半径の圓の外側の部分のみを取れば a なる半径の圓の周りの循環流を表はし、 r を循環として圓嚮坐標を以て表はせば

$$w = \phi + i\psi = \gamma \frac{i}{2\pi} \ln z = -\gamma \frac{\theta}{2\pi} + \gamma \frac{i}{2\pi} \ln r$$

$$\therefore \phi = -\gamma \frac{\theta}{2\pi}, \quad v_\theta = -\frac{\gamma}{2\pi r} \dots \dots \dots (904)$$



第 830 圖

$$5. \phi + i\psi = w = -\mu \ln \frac{z-a}{z+a} \dots (\text{第 830 圖}) \dots (905)$$

今 x 軸上の二點 $(x+a, y=0)$ 及び $(x-a, y=0)$ より任意の點 A 迄の距離を夫々 r_1, r_2 とし夫等の $+x$ 軸と爲す角を θ_1, θ_2 とすれば $z-a = r_1 e^{i\theta_1}, z+a = r_2 e^{i\theta_2}$ なる關係あり、從て

$$\phi = -\mu \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \psi = -\mu(\theta_1 - \theta_2)$$

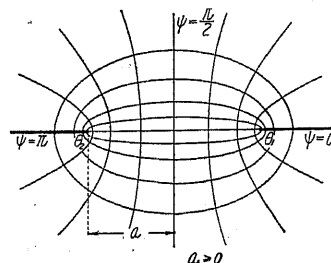
$\phi = \text{const.}, \psi = \text{const.}$ なる曲線は互に直交し前者は x 軸上に中心を有する圓弧、後者は y 軸上に中心を有する圓弧である。前者を等位線、後者を流線とすれば $\mu > 0$ の時は水が O_2 より出て圓弧に沿ふて流れ O_1 に入る場合、即ち Sink and source を表はし、反對に ϕ を流線とすれば O_1 又は O_2 の周りの偏心的公轉を表はす。

$$6. z = x+iy = a \cosh w = a \cosh(\phi + i\psi) \dots (\text{第 831 圖}) \dots (906)$$

$$\therefore x = a \cosh \phi \cdot \cos \psi, \quad y = a \sinh \phi \cdot \sin \psi$$

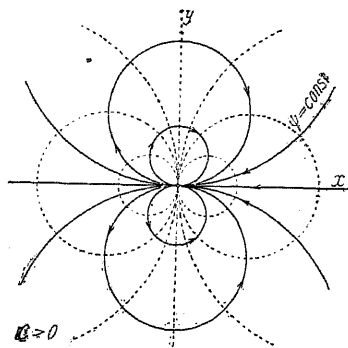
故に $\phi = \text{const.}$ は橢圓、 $\psi = \text{const.}$ は双曲線を表はし、その方程式は夫々

$$\frac{x^2}{a^2 \cosh^2 \phi} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2 \phi} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \psi} = 1$$

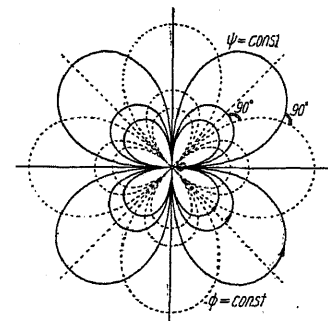


第 831 圖

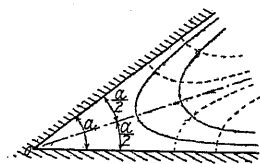
にして $\theta_1(x=+a, y=0)$; $\theta_2(x=-a, y=0)$ を共通の焦点とする。 $\psi = \text{const.}$ 即ち双曲線を流線とすれば x



第 832 圖



第 833 圖



第 834 圖

軸上に於て θ_1 より $+\infty$ に及ぶ隔壁と θ_2 より $-\infty$ に達する隔壁との間の間隙...幅 $2a$...を通りて x 軸の一侧より他側に流るゝ場合、又は両側より θ_1, θ_2 なる間隙に流入する場合又は θ_1, θ_2 より流出して両側に流るる場合を表はし、 $\phi = \text{const.}$ を流線とすれば隔壁の位置に細長き source 及び sink ありて一方より出て他方に流入する場合を表はす。

7. $w = \phi + i\psi = \frac{c}{z} = \frac{c}{x+iy}$... (第 832 圖) ... (907)

$\therefore \phi = \frac{c}{r} \cos \theta = \frac{cx}{x^2+y^2}, \psi = -\frac{c}{r} \sin \theta = -\frac{cy}{x^2+y^2}$

$\phi = \text{const.}$ は x 軸上に中心を有し原点 O を過ぐる圓、 $\psi = \text{const.}$ は y 軸上に中心を有し原点を過ぐる圓にして O より流出して再び O に流入する流れを表はし、 O の左右にある sink と source が接近して重なり合ひたる場合にして、之を出入點 (Doublet) と云ふ。 $\psi = \text{const.}$ を流線に取れば O の左右に並ぶ流出及び流入點より成る出入點である。

8. $w = \frac{c}{z^2}$ 即ち $\phi + i\psi = c(x+iy)^{-2}$... (第 833 圖)

$\therefore \phi = \frac{c(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \psi = -\frac{2cxy}{(x^2+y^2)^2}$

$\phi = \text{const.}, \psi = \text{const.}$ 共に双紐線 (Lemniscate) にして前者は x, y 軸を軸とし、後者は 45° の斜線を軸とし何れも原点を出入點とする流れを表はし得る。

9. $\sqrt{\phi + i\psi} = c(x+iy)^{\frac{\pi}{a}}$... (第 834 圖) ... (909)

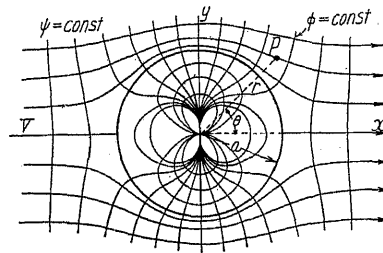
$\therefore \phi = cr^{\frac{\pi}{a}} \cos \frac{\pi\theta}{a}, \psi = cr^{\frac{\pi}{a}} \sin \frac{\pi\theta}{a}$

Ox 及びこれと a なる角をなす線を壁とする場合の内側の流れ、 ψ を等位線とすれば壁を流出溝又は流入溝とする場合を表はす。

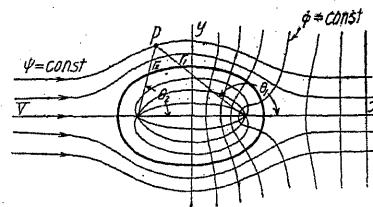
10. $\phi + i\psi = V(x+iy) + Va^2(x+iy)^{-1} = V\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$... (第 835 圖) ... (910)

$\therefore \phi = V\left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \theta, \psi = V\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin \theta$

半徑 a なる圓壻が x の正の向きに一樣なる速度 V を有する流れの中に静止する場合にして、圓壻内部の線は圓心に出入點ある場合の流れを示す。又静止液體中を圓壻が $-V$ なる速度にて運動する場合は、この流れの全體に $-V$ なる速度を組合せて $\phi + i\psi = V\frac{a^2}{z}$ とすれば宜しい。



第 835 圖

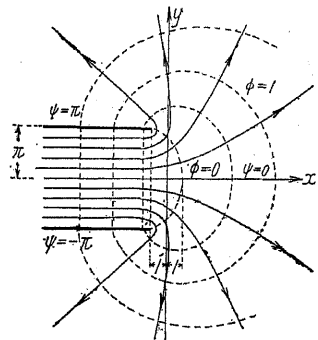


第 836 圖

11. $\phi + i\psi = Vz - \mu \ln \frac{z-a}{z+a}$... (第 836 圖) ... (911)

$\therefore \phi = Vx - \mu \ln \frac{r_1}{r_2}, \psi = Vy - \mu(\theta_1 - \theta_2)$

之は 10' の場合の圓壻の代りに橢圓狀の壻を用ひた場合である。壻の内部の線は壻内部に sink 及び source ある場合の流れの状態の一部を示す。壻断面は眞の橢圓にあらずして之に酷似せる形である。



第 837 圖

12. $z = w + e^w$... (第 837 圖) ... (912)

$\therefore x = \phi + e^\phi \cos \psi$

$y = \psi + e^\phi \sin \psi$

平行なる二直線壁の内側を流れて極めて廣き水域に流出する場合、又は水域より逆に流入する場合を表はす。但し圖の場合は ϕ は $+x$ の方に増すを以て流出を示す。

一般に完全液體が固體面に沿ふて流るゝ場合はその面を表はす線即ち限界線は必ず流線の一つを爲す、従て $\phi + i\psi = F(x+iy)$ なる函数形は $\psi = \text{const.}$ の表はす線が限界線を表はし得る如きものなる事を要する。

(3) 與へられたる限界条件を満足する函数形を求むる方法 ... (1) の 2... 此方法は直接法なるも、之に依て解き得る場合は少い。

$w = \phi + i\psi = f(z)$ を z の冪級數 (Power series) を以て表は

し、限界条件を満足する爲に必要な冪數及び常數を定むる。

$w = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^{-k}, A_k, B_k$ は複素常數 ... (913)

今一例として z 面上に於て原点を中心とする、半徑 a なる圓の外部の流れを取る。... (2) の 10 と同一の場合 (第 838 圖)。

圓より無限に遠き部分に於ては圓の影響消えて $+x$ 方向の V なる速度の流れのみなるを以て

$v_x - iv_y = \left[\frac{dw}{dz} \right]_{z=\infty} = V \therefore A_1 = V, A_{k \neq 1} = 0$

茲に $k \geq 2$ に対して $B_k = 0$ と置けば $w = Vz + B_0 + \frac{B_1}{z}$

然るに $r = a$ に於ては $v_r = 0$ なるを以て

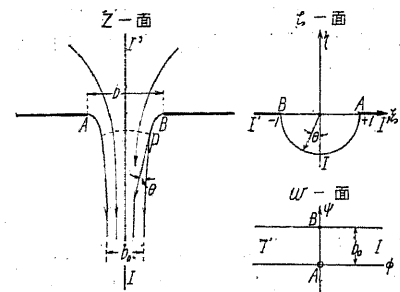
$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{r=a} = 0 = \left(V - \frac{B_1}{a^2} \right) \cos \theta \quad \therefore B_1 = a^2 V$$

又 $r = a$ は一つの流線なるを以て之を $\psi = \text{const.} = 0$ に取り、且つ $z = ai$ は $\phi = 0$ 線上にありとすれば、

$$B_0 = 0 \quad \therefore w = V \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

(4) $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$ 即ち速度を假定する方法...[102] (2) 参照

1. b_0 なる幅の底間隙より流出する場合 流れの状況を求めるに實際の流れ (第 839 圖) の考察に依り z 面の上半面の無限遠に於ては總て $v=0$ にして、且つ縦軸上に於ては左右對稱の關係上 v



第 839 圖

は y 軸に沿ひ、又下半面に於ては水脈の兩側線 AI 及び BI 共に流線にして速度の大きは一定に、且つ y の $-\infty$ (I) に於ては總ての流線上の速度は相等しくして y 軸に平行である。依てこの速度を便宜上 1 にとれば z 面に於て速度は $I'AIBI'$ (第 839 圖) を以て表はされ AIB は半径 1 の半圓となる。

次に等角寫像法に依て z と w との函数關係を求めれば

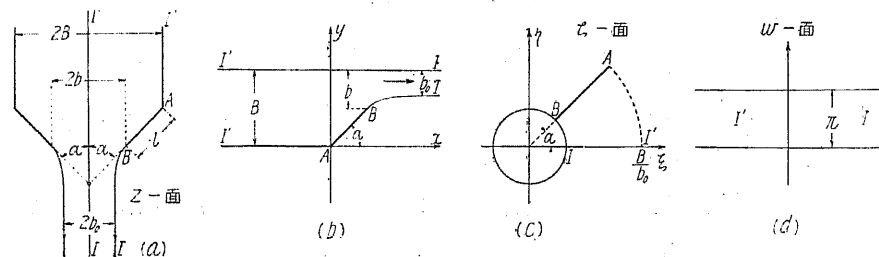
$$w = \frac{b_0}{\pi} \ln \frac{2z}{z^2 + 1} \quad \therefore z = \int \zeta dw = -\frac{b_0}{\pi} \left(\zeta + i \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right) \quad \dots \dots \dots (914)$$

B 點に於て $z = \frac{b}{2}, \zeta = -1$

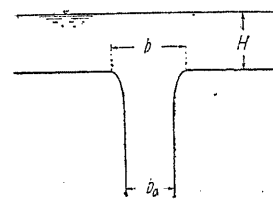
$$\therefore z = r = \frac{b}{2} = \frac{b_0(2 + \pi)}{2\pi} \quad \therefore b = \frac{b_0(2 + \pi)}{\pi} \quad \text{即ち} \quad \frac{b_0}{b} = \frac{\pi}{2 + \pi} = 0.611$$

有限なる水槽の底間隙流出の場合の收縮係數は [46] (6) に示す如く 0.611 より多少大である。

2. 有限水槽の底の間隙より流出する流れ 實際の流れは第 840 圖 (a) の如く、便宜上鉛直方向を z 面の横軸に取り對稱なる半部分を示せば (b) の如し、今 1. の場合と同様の考察に依りて



第 840 圖



第 841 圖

z 面を (c) の如く定め收縮係數 $C_c = 2b_0/2b$ を求めれば [46] (6) に示す値を得る。

平底の場合 ($\alpha = 90^\circ$) は

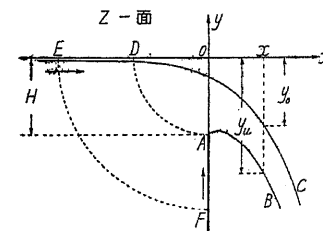
$$\frac{1}{C_c} = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{C_c} \frac{B}{b} - C_c \frac{b}{B} \right) \arctan \left(C_c \frac{b}{B} \right) \quad \dots \quad (915)$$

又無限の廣さ、水深 H なる槽より流出する場合の理論收縮係數は

$$\frac{1}{C_c} = 1 + \frac{1}{\pi} \left(C_c \frac{b}{H} + \frac{H}{C_c b} \right) \ln \frac{1 + \frac{C_c b}{H}}{1 - \frac{C_c b}{H}} \quad \dots \dots \dots (916)$$

3. 鋭線堰の溢流水脈 (第 842 圖) 此場合流れの限界面は堰背線 AF のみ既知にして且つ AF 面より遠き上流の E に於ては水面は原水面即ち x 軸と略々一致する。又 O 點より上流側の稍遠き點即ち半径 R なる圓上に於ては流れは求心的に O に向ふを以て、 O を流入點とし等位線は半径 R の弧 EF なりと考ふるを得。水脈の堰縁より充分遠き部分 BC に於ては速度は一樣となり、流量は水脈の厚さ BC を以て表はし得る。従て $ECBAFE$ なる限界の内部の流れを考ふれば足る。然るに水脈の自由表面 EC 及び AB は未知にして、之を求むるには先づ上側水面に對し、横距 x に於ける上面の縦距を y_0 、下面の夫れを y_u とすれば Bernoulli 定理に依り $v = \sqrt{2gy_0}$ 、 $\sqrt{2g}$ を單位に取れば $v = \sqrt{y_0}$ 。従て上側水面の坐標は定まり下側水面に於ては $v = \sqrt{y_u}$ 。

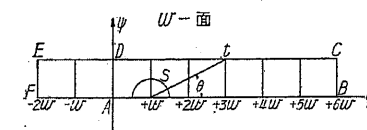
依てポテンシャル流れの條件 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ を満足する如き解析函数を Cauchy の積分公式に依つて求むる。而て水脈の上下兩面 EC 及び AB を單一の式を以て與ふる事は不可能にして、 y に對しては一



の條件を満足し得るに過ぎず。流れの條件式は二元二次の微分方程式なるを以て四通りの解を與ふる。依て積分常數を除外する爲、 $\sqrt{2g}$ 及び水頭 H を共に單位に取り $\sqrt{2g} = 1, H = 1$ とし、此場合のポテンシャル函数を ϕ とし實際の夫れを θ とすれば、相似律に依り

$$\theta = H^2 \sqrt{2g} \cdot \phi \quad \dots \dots \dots (917)$$

$$w = \phi + i\psi$$



第 842 圖

流れを w 面に表はすに、 O を中心とする AD 圓弧を一の等位線とし $\phi = \text{const.} = 0$ に取り、 EF 線のポテンシャルを $-2w$ 、 BC 線の夫れを $6w$ に取れば z 面の限界線 $ABCDEF$ は w 面上に於ては $ABCDEF$ なる矩形の周邊を以て表はされ、水脈の表面の點は t 、内部の點は s に依て表はさる。依て任意の内點 s

のポテンシャル ϕ を求むるに、Cauchy 積分法に依り t を $ECBF$ の周邊に沿ふて移動して s に相當する z の値 $z(s)$ を求むれば

$$z(s) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{z(t) dt}{t-s}, \quad t \dots \text{變數}, \quad s \dots \text{常數} \quad \dots \dots \dots (i)$$

限界面上の s に對しては s 點を ϕ 軸上に取り之を中心として π だけ廻轉せしむれば、 t 點は全限界線上を一周する。

$$z(s) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{z(t) dt}{t-s} \dots \dots \dots (ii)$$

$t-s$ は二つの複素数の差なるを以て偏角を θ , 動径 (st) を r とすれば

$$\frac{dt}{t-s} = d[\ln(t-s)] = d \ln r + i d\theta \dots \dots \dots (iii)$$

(iii) を (ii) に代入し且つ $z = x + iy$, x 及び y は s 又は t の函数なるを以て實部と虚部とに分ちて

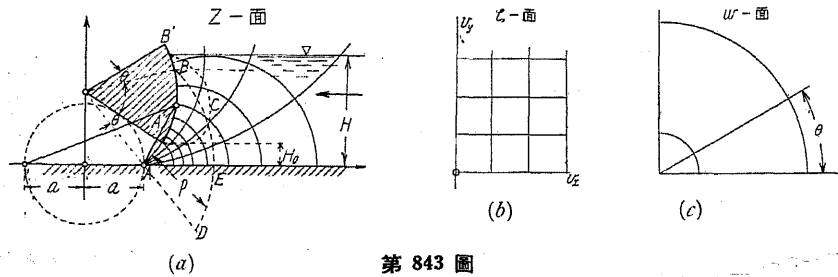
$$\pi x(s) = \oint x(t) d\theta + \oint y(t) \cdot d \ln r, \quad \pi y(s) = -\oint x(t) \cdot d \ln r + \oint y(t) d\theta \dots \dots (918)$$

同様に w 面の網目の各隅点を s として、之に相應する x 及び y を求めて z 面上の位置を知るを以て極めて煩雜である。

實際の水脈の流線及び等位線の網を畫くには z 面上の下面の限界線を實驗上の夫れと合せ、上面線を假定し等角なる網目を得る爲に數回の修正を爲して兩面共實驗上の形と一致せしむる。網目を定むれば各點の流速及び壓力を知り得る... (7) 参照。

4. テンター堰 (Taintor gate)... [103] (2) 5. 参照 (Kulka)... テンター堰を h たけ揚げたる場合の流りに於ては z 面、即ち速度を坐標とする面に於ては方形網目となり、之を w 面に表せば扇狀面分にて表は

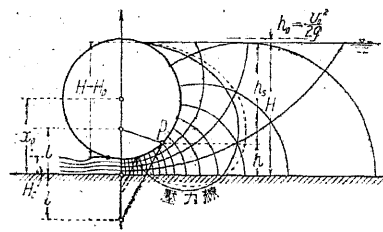
され w と z 面との間の寫像函数は $w = -\mu \ln \frac{z-a}{z+a}, \quad \zeta = \frac{a^2 - z^2}{2a\mu}$



第 843 圖

閉塞時堰面に作用する水壓 p は各點の水深に比例し求心的に作用し AB 線と DEB 線との間の半徑方向の距離を以て表はされ少しく開きたる場合 H_0 は壓力急に減少し $A'B$ と $A'CB'$ の兩線間の半徑距離を以て示さる。

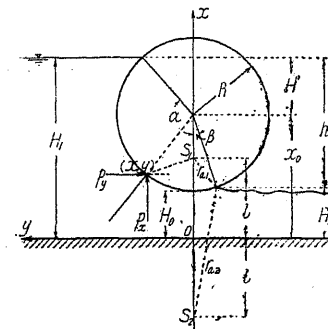
5. 轉動堰 (Rolling gate) (Kulka) 4. と同様の方法に依て半開の場合の流れの状況及び壓力の分布を



第 844 圖

尙同一の場合に對し W. Kaufmann (獨, 1931) が [103] (2) 5. より理論的に求めたる水壓の強さは次の如し。但し S_1, S_2 ... 循環流の中心

求むれば第 844 圖に示す如し。但し筒徑 50 cm, 開き高 $H_0 = 7.75$ cm の模型實驗と比較したるものにして壓力分布を示す曲線は實線は計算値、點線は實驗値である。半開の場合の總壓力 P を求むるには閉塞及び半開の場合に對し壓力曲線と筒面との間の面積を測り A 及び A' とし且つ閉塞時の總壓力 P は既知なるを以て $P' = \frac{A'}{A} P$ にして少しく開けば P は急減し特に浮力即ち鉛直力は著しく減ずる。



第 845 圖

$$p_v = w_0 \left[\frac{H_1^2}{2} - H_2 \left(H_1 - \frac{H_2}{2} \right) - \frac{h_0^2 r_{01}^2 r_{02}^2}{4R^2 H_1 H_2} \right] \dots \dots \dots (919)$$

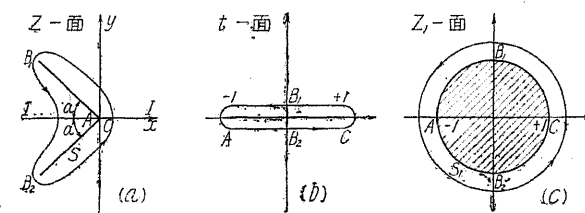
$$p_x = w_0 R^2 \left[\frac{H_1}{R} (\sin \alpha + \sin \beta) + \frac{1}{4} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \frac{\alpha + \beta}{2} \right] - w_0 \frac{h_0 (x_0 r_{01} r_{02})^2}{4R^2 l^2} \left\{ \frac{R^2}{l} \left[\arcsin \frac{x_0 (H_1 - x_0) + R^2}{H_1 R} + \arcsin \frac{x_0 (H_2 - x_0) + R^2}{H_2 R} + \pi \right] + x_0 \left[\frac{1}{H_1} \sqrt{R^2 - (H_1 - x_0)^2} + \frac{1}{H_2} \sqrt{R^2 - (x_0 - H_2)^2} \right] \right\} \dots \dots \dots (920)$$

(5) 求むる所の流れを等角寫像法によつて既知の流れに換ゆる方法即ち z 面の變換 (Transformation) に依る方法

1. 隅角の周りの循環 (第 846 圖) z の上半面に Schwarz-Christoffel の定理を應用して

$$\frac{dz}{dt} = A (-1-t)^{-\frac{\pi-\alpha}{\pi}} (-t)(1-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} = A \frac{t}{t-1} \left(\frac{t-1}{t+1} \right)^{1-\frac{\alpha}{\pi}} \dots \dots A \text{ は常數}$$

然るに $t = \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) \therefore \frac{dz}{dz_1} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dz_1} = \frac{A}{2} \frac{z_1^2 + 1}{z_1^2} \left(\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} \right)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}}$



第 846 圖

即ち隅角の周りの循環流は圓の周りの循環流に換へ得る。

圓の周りの循環流は [103] (2) 4 に依り

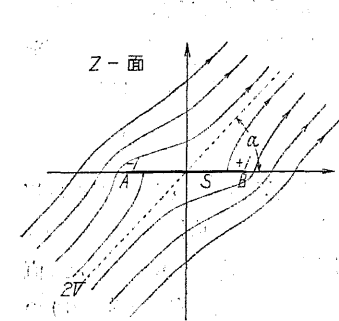
$$w = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln z_1$$

而て Blasius の式に依り z 面の隅角

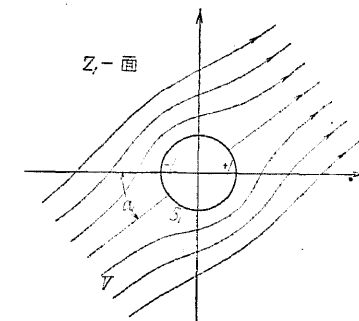
の周りの循環流に依て隅角の受くる力 P の二分力は次式より求め得る。

$$P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2} \int_S \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = -\frac{\rho\gamma^2 i}{4\pi^2 A} \int_{S_1} \left(\frac{z_1+1}{z_1-1} \right)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{dz_1}{z_1^2+1} = \frac{\rho\gamma^2}{4\pi A} \cos \alpha \dots (921)$$

2. $2V$ なる速度の平行流が平板に斜にあたる場合 (第 847 圖) z 面上の平板 AB を z_1 面上の單



第 847 圖



第 848 圖

位圓に寫す函数は

$$z = \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right)$$

にして流れが x 軸に α たけ傾斜する場合は

$$w = V \left(z_1 e^{-i\alpha} + \frac{1}{z_1 e^{-i\alpha}} \right)$$

$$\therefore \frac{dw}{dz} = V e^{-i\alpha} \left(1 - \frac{2i\alpha}{z_1^2} \right) \frac{dz_1}{dz}$$

板の受くる力の分力を

P_x, P_y とすれば

$$P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2} \int_{S_1} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \int_{S_1} \left(\frac{dw}{dz_1}\right)^2 \frac{dz_1}{dz} dz_1 = \frac{i\rho}{2} V^2 e^{-2ia} \int_{S_1} \left(1 - \frac{e^{-2ia}}{z_1^2}\right)^2 \frac{2z_1^2}{z_1^2 - 1} dz_1$$

$z_1 = e^{i\theta}$ と置いて θ に就て $\theta=0$ より 2π 迄積分すれば 0 となる。即ち $P_x = P_y = 0$

$$\text{尚} \quad \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty} = \left(\frac{dw}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dz}\right)_{z_1=\infty} = 2Ve^{-ia}$$

3. 羽根車の中心の流れ (Flow through an impeller) (W. Schulz, 1928).

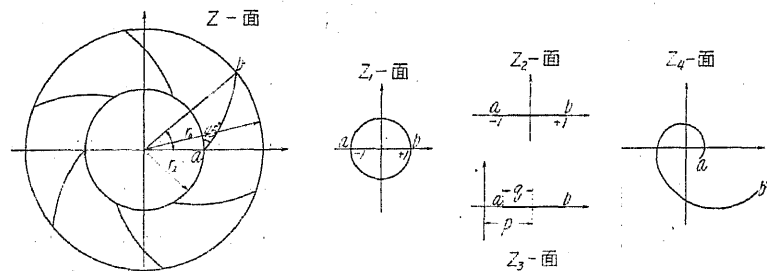
$$z_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right), \quad z_3 = p + qz_2, \quad z_4 = z_3^{1+mi}, \quad z = z_4^{\frac{1}{n}} \quad \text{茲に } n \dots \text{羽根の數}$$

然るに羽根の上にて

$$z_1 = e^{i\theta} \quad \therefore \quad z = (p + q \cos \theta)^{\frac{1+mi}{n}}; \quad z = \rho e^{i\varphi} \quad \text{と置けば}$$

$$\ln \rho = \frac{1}{n} \ln(p + q \cos \theta), \quad \varphi = \frac{m}{n} \ln(p + q \cos \theta) \quad \therefore \quad \rho = e^{\frac{m}{n} \varphi}$$

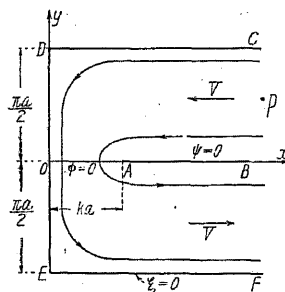
$\therefore z_4$ 面上の ab は對數螺旋 (Logarithmic spiral) である。



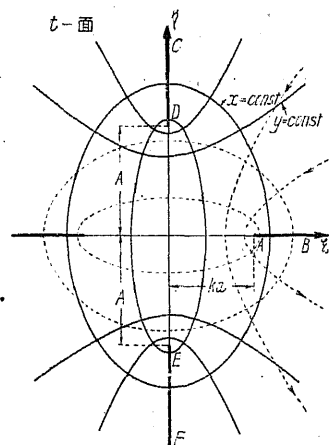
第 849 圖

$$\theta=0 \text{ に於て } \rho = r_b = (p+q)^{\frac{1}{n}}, \quad \theta=\pi \text{ に於て } \rho = r_a = (p-q)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \quad p = \frac{1}{2}(r_b^n + r_a^n), \quad q = \frac{1}{2}(r_b^n - r_a^n)$$



第 850 圖



第 851 圖

故に z 面の羽根の周りの流れは圓嚮の廻りの流れに換ふる事が出来る。

4. 折返しの流れ CDEF なる周壁と AB なる隔壁との間を折り返して流れる場合にして

$$t = \xi + i\eta = A \sinh \frac{z}{a}$$

t なる関係を有する t 面に移せば周壁 CDEF は直線 $\xi=0$ となり、隔壁 AB は $\eta=0, \xi>0$ なる直線となる。従て流れの形は (2) の 6 の場合となり

$$t = ka \cosh(Cw) = A \sinh \frac{z}{a}, \quad z=ka \text{ にて } \phi=0, \psi=0 \text{ とすれば}$$

$$A = \frac{ka}{\sinh k} \quad \therefore \quad \cosh(Cw) = \frac{\sinh \frac{z}{a}}{\sinh k}$$

$$\therefore \quad \cosh(C\phi) \cos(C\psi) = \frac{\sinh \frac{x}{a} \cos \frac{y}{a}}{\sinh k}, \quad \sinh(C\phi) \sin(C\psi) = \frac{\cosh \frac{x}{a} \sin \frac{y}{a}}{\sinh k}$$

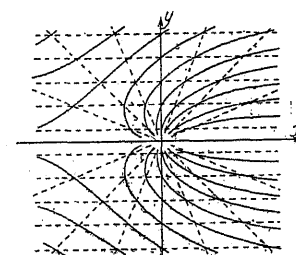
充分遠き点 P にては、 $x=\infty$ にて $\phi=Vx, \psi=Vy$ なるを以て

$$C = \frac{1}{Va} \quad \therefore \quad \cosh \frac{w}{aV} = \frac{\sinh \frac{z}{a}}{\sinh k} \dots \dots \dots (922)$$

(6) 既知の流れの組合せに依る方法 (Method of superposition) 求むる所の流れを既知の二つ以上の流れの組合せとして表はし得る時は容易に複雑なる流れを解き得る。

1. 平行流内の一みに流出点を置きたる場合 x 軸に平行なる平行流の速度を V , 流出点の強さを c とし流出点を原点に取れば

$$w = w_1 + w_2 = (\phi_1 + \phi_2) + i(\psi_1 + \psi_2) = \phi + i\psi = Vz + c \ln z \dots \dots \dots (923)$$



第 852 圖

今 $V=1, c=\frac{1}{\pi}$ とすれば

平行流の流函数は $\psi_1=y$, 流出点の流函数は $\psi_2=\frac{\theta}{\pi}$, 但し θ は流線が x 軸と爲す角である。流れの状況は第 852 圖に示す如くである。

$\psi=1$ なる流線の内側の流れは $\psi=1$ なる固体面の内側の流出点の流れを表はし、 $\psi=1$ の外側の流れは $\psi=1$ なる曲線の形の障碍物を平行流中に置きたる場合の周囲の流れを表はす。

2. 圓嚮の周りの平行流と循環流との組合せ (第 853 圖) x 軸を平行流に平行に取り圓嚮の軸を原点とし、平行流を $w_1 = \phi_1 + i\psi_1$, 循環流を $w_2 = \phi_2 + i\psi_2$, 循環量を γ とすれば、

$$w_2 = \phi_2 + i\psi_2 = \gamma \frac{i}{2\pi} \ln z = -\gamma \frac{\theta}{2\pi} + \gamma \frac{i}{2\pi} \ln r$$

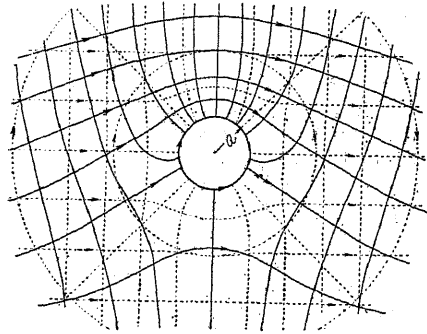
$$\therefore \quad \phi_2 = -\gamma \frac{\theta}{2\pi}, \quad \psi_2 = \frac{\gamma}{2\pi r} \dots \dots \dots (924)$$

圓嚮坐標を用ふれば

$$w = w_1 + w_2 = \phi + i\psi = V\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta}\right) + \gamma \frac{i}{2\pi} (\ln r + i\theta) \dots \dots \dots (925)$$

$$\therefore \quad \phi = V\left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \theta - \gamma \frac{\theta}{2\pi}$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = V \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -V \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{\gamma}{2\pi r}$$



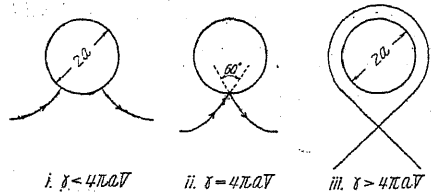
第 853 圖

圓障の表面に於て $v_\theta = 0$ の點を求むるに

$$0 = -2V \sin \theta - \frac{\gamma}{2\pi a} \quad \therefore \sin \theta = -\frac{\gamma}{4\pi a V}$$

即ち r の値に依て位置は異り之を第 854 圖の i, ii, iii に示す。

圓障に働く力は (5) 1 の場合の如く Blasius の式を用ひて求め得るも此場合は簡単に次の如く計算し得る。



第 854 圖

$$\frac{p}{\rho} = C - \frac{v^2}{2} = C - \frac{v_\theta^2}{2}, \quad \text{茲に } v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

$$r = a \text{ にては } v_r = 0$$

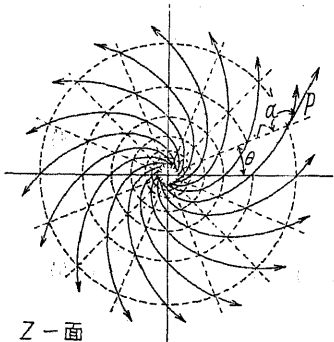
圓障の單位長に作用する力の x 及び y 方向の分力は

$$P_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta = -\frac{a\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left(2V \sin \theta + \frac{\gamma}{2\pi a}\right)^2 \cos \theta d\theta = 0$$

$$P_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta = -\frac{a\rho}{2} \int_0^{2\pi} 2 \cdot \frac{\gamma}{2\pi a} \cdot 2V \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\rho \gamma V}{\pi} \left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -\rho \gamma V \dots (926)$$

即ち完全液體に於ては流れの方向の P_x は零なるも直角の方向には $P_y = \rho \gamma V$ なる力が $+y$ の向きに作用する。

今 $\gamma = 4\pi a V$ 即ち第 854 圖 (ii) の場合の P_y を求め $P_y = C_a \rho a V^2$ より C_a を計算すれば $C_a = \frac{\gamma}{aV} = 4\pi$ となり Ackeret の實驗に於ける最大値 $C_a = 9$ に比して大に過ぎる。之は實際の循環量が假定せる値に達せぬ爲である。



第 855 圖

3. 一點より流出又は一點に流入する螺旋流 流出點と循環流の組合せとして表はされ

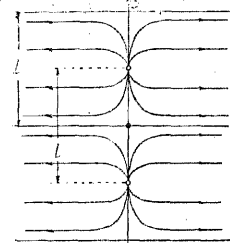
$$w = w_1 + w_2 = c(1 + i \tan \alpha) \ln z \dots \dots \dots (927)$$

α は流線の一點に於ける動徑と切線との角, $c = \frac{Q}{2\pi}$,

Q は流出流量。

流線の式は $r = ke^{-\theta \cot \alpha}$ 即ち對數螺旋線になる。流線の向きを逆に考ふれば流入點の場合である。

4. 流出又は流入點を有する水路内の流れ 無数の流出點を



第 856 圖

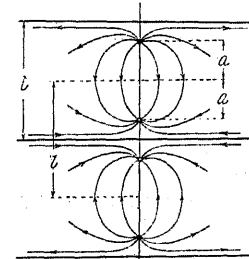
虚軸の方向に水路幅 l と等しき間隔に配置せる場合、坐標原點に在る一の流出點に屬する流れの部分として表はさる。 Q を流量として

$$w = C \ln \sinh \frac{\pi z}{l}, \quad C = \frac{Q}{2\pi} \dots \dots \dots (928)$$

$$\therefore \phi = \frac{C}{2} \ln \left(\sinh^2 \frac{\pi x}{l} + \sin^2 \frac{\pi y}{l} \right), \quad \psi = C \arctan \left(\frac{\tan \frac{\pi y}{l}}{\tanh \frac{\pi x}{l}} \right)$$

$Q > 0$ ならば流出點、 $Q < 0$ ならば流入點の場合となり後者は直線上に等間隔に配列せる井の地下水の流れを表はす。地下流の如く實際の速度が $v_x = k \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v_y = k \frac{\partial \phi}{\partial y}$ ならば $C = \frac{Q}{2\pi k}$ とする。

5. 水路中に於て幅の方向に列ぶ流出及び流入點 y 軸上に流出及び流入兩點の組の中心が水路幅と等しき間隔に配置されたる場合として表はし得る (第 857 圖)。



第 857 圖

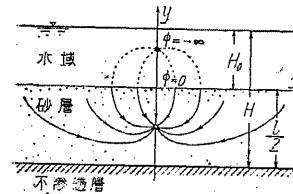
水路の中心線

$$w = C \ln \frac{\tanh \frac{\pi(z-ia)}{2l}}{\tanh \frac{\pi(z+ia)}{2l}} \dots \dots \dots (929)$$

$$C > 0, \quad C = \frac{Q}{2\pi} \quad \text{又は} \quad \frac{Q}{2\pi k}$$

第 858 圖に於て $y = -\frac{l}{2}$ を不透層としそれより $y = 0$ 迄の間を砂層、 $y > 0$ を自由水域と考ふれば、 $y = -a$ に紙面に垂直なる集水渠を埋設しその單位長より水量 Q を汲み出す場合に相當する。(929) 式より

$$\phi = \frac{C}{2} \ln \left[\frac{\cosh \frac{\pi x}{l} - \cos \frac{\pi(y-a)}{l}}{\cosh \frac{\pi x}{l} + \cos \frac{\pi(y+a)}{l}} \cdot \frac{\cosh \frac{\pi x}{l} + \cos \frac{\pi(y+a)}{l}}{\cosh \frac{\pi x}{l} - \cos \frac{\pi(y-a)}{l}} \right]$$

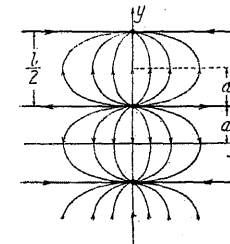


第 858 圖

$$\psi = C \left[\arctan \frac{\sin \frac{\pi(y-a)}{l}}{\sinh \frac{\pi x}{l}} - \arctan \frac{\sin \frac{\pi(y+a)}{l}}{\sinh \frac{\pi x}{l}} \right]$$

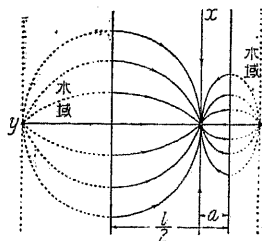
6. 水路の兩壁に流出點と流入點が向ひ合ひに存在する場合 (第 859 圖及び 860 圖) 水路幅を $l/2$ として

$$w = C \ln \frac{\sinh \frac{\pi(z-ia)}{l}}{\sinh \frac{\pi(z+ia)}{l}}, \quad C > 0, \quad C \dots \text{流出點の強さ} \dots (930)$$

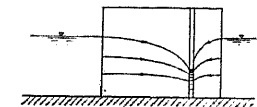


第 859 圖

$$\phi = \frac{C}{2} \ln \frac{\cosh \frac{2\pi x}{l} - \cos \frac{2\pi(y-a)}{l}}{\cosh \frac{2\pi x}{l} - \cos \frac{2\pi(y+a)}{l}}, \quad \psi = -C \arctan \frac{\sin \frac{2\pi a}{l} \sinh \frac{2\pi x}{l}}{\cos \frac{2\pi a}{l} \cosh \frac{2\pi x}{l} - \cos \frac{2\pi y}{l}}$$

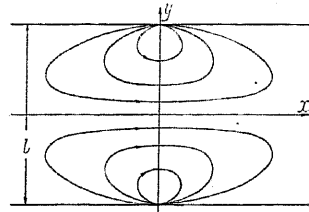


(平面圖)



(横断面)

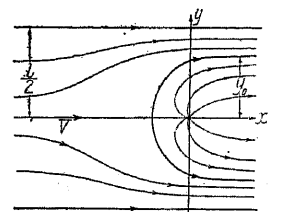
第 860 圖



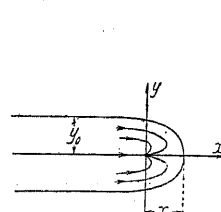
第 861 圖

$$\coth \frac{\pi x_0}{l} = -\frac{l\gamma}{C\pi}, \quad \frac{y_0}{l} = \frac{\pi C}{2\pi C + l\gamma}$$

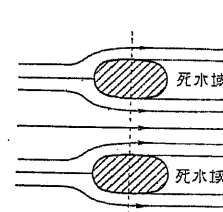
實際の水流に於ては如何なる形の障礙物にても (第 864 圖) その下流に於て原平行流に直角なる方向の最大幅に相當する部分は渦に依て充され流量には無關係なるを以て、第 863 圖の如く無限に長き障礙物の場合と同一と考へて差支へない。



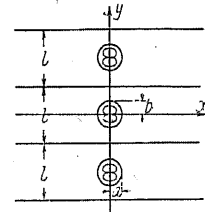
第 862 圖



第 863 圖



第 864 圖



第 865 圖

9. 水路の中央に圓柱を立てたる場合 (第 865 圖) V なる速度の x 方向の平行流中の y 軸上に l なる間隔に出入點を配置し、兩者の流れの境界線と等しき形の断面を有する柱を立てたる場合となり

$$w = Vz + C \coth \frac{\pi z}{l}, \quad C > 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (933)$$

$$C = \frac{\pi}{l} \mu, \quad \mu \dots \text{出入點の強さ}$$

地下水の問題に於ては $C = Q/2\pi k$ にして、 x 及び y 軸を水平と考ふれば第 860 圖の如く流入點は兩側に水域ある土地の一侧に片寄りたる井の場合を近似的に表はす。

7. 水路の兩側壁に出入點 (Doublet) ある場合 (第 861 圖) y 軸上に l なる等間隔に出入點がある場合

$$w = C \coth \frac{\pi z}{l}, \quad C > 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (931)$$

茲に $C = \frac{\pi}{l} \mu$, $\mu \dots$ 出入點の強さ

8. 橢圓類似の頭又は尾を有する水路中の障礙物の周りの流れ (第 862, 863 圖) V なる速度の平行流と y 軸に l なる等間隔に配列せる流出點との組合せにして、 l は水路幅、平行流と流出又は流入流線との境界線は障礙物の周邊に相當する。

$$w = C \ln \sinh \frac{\pi z}{l} + Vz \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (932)$$

$C \dots$ 流出又は流入點の強さ

$C > 0$ ならば $x_0 < 0$ 橢圓頭の場合

$C < 0$ ならば $x_0 > 0$ 橢圓尾の場合

x_0 は y 軸より障礙物の尖端迄の距離、 y_0 は原點より極めて遠き部分の障礙物の幅にして水路幅 l と x_0 及び y_0 との關係は

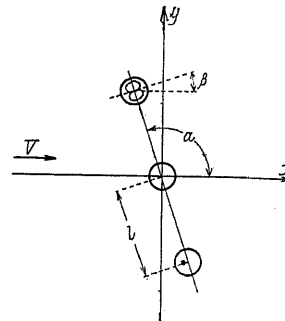
境界線の形は a を長径、 b を短径とすれば $b/l = 0.3$ の時 $a/b = 1.04$ にて $\frac{b}{l}$ が極めて小さき時は殆ど圓であり一般には $\frac{C}{V}$ の大きさに依て a, b は定まる。

$$x=0, y=b \text{ に於て } v_x = V + \frac{C\pi}{l} + \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi b}{l}\right)}{\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi b}{l}\right)\right]^2}$$

$$x=0, y=\frac{l}{2} \text{ に於て } v_x' = V + \frac{C\pi}{l} \quad \therefore V < v_x' < v_x$$

$$\phi = Vz + C \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}} \quad \psi = Vy - C \frac{\sin \frac{2\pi y}{2}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}$$

10. 平行線に傾斜せる直線上に配置せる圓柱* (第 866 圖) x 軸の方向に a なる傾きを爲す直線上に軸が x 軸と β なる傾きを爲す出入點を l なる間隔に配置する場合に相當する



第 866 圖

$$w = Vz + Ce^{-i(\alpha-\beta)} \cot \frac{\pi z e^{-i\alpha}}{l} \quad \dots \quad \dots \quad (934)$$

$C = \frac{\mu\pi}{l}$, $\mu \dots$ 出入點の強さ

l, a が與へられれば V/C 及び β は柱の大き及び速度零の點 (Stagnation points) が柱面の上にある事より決定される。

$$\phi = Vz + C$$

$$\frac{\sinh \frac{\pi}{l} \eta \cosh \frac{\pi}{l} \gamma \sin(\alpha-\beta) - \sin \frac{\pi}{l} \xi \cosh \frac{\pi}{l} \xi \cos(\alpha-\beta)}{\sinh^2 \eta \cos^2 \xi + \cosh^2 \eta \sin^2 \xi}$$

$$\psi = Vy + C$$

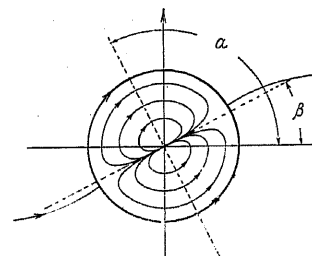
$$\frac{\sinh \frac{\pi}{l} \eta \cosh \frac{\pi}{l} \gamma \cos(\alpha-\beta) + \sin \frac{\pi}{l} \xi \cosh \frac{\pi}{l} \xi \sin(\alpha-\beta)}{\sinh^2 \eta \cos^2 \xi + \cosh^2 \eta \sin^2 \xi}$$

茲に $\xi = x \cos a + y \sin a$, $\eta = y \cos a - x \sin a$

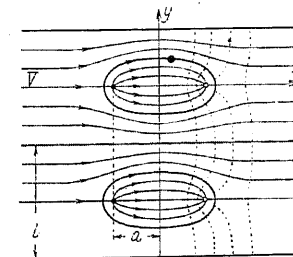
$$z = \frac{l}{2} e^{i\alpha} \text{ に於ける速度は } \frac{dw}{dz} = V - \frac{C\pi}{l} e^{-i(2\alpha-\beta)}$$

この速度の x 軸に對する傾角 θ は

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\sin(2\alpha-\beta)}{\frac{l\gamma}{C\pi} - \cos(2\alpha-\beta)}$$



第 867 圖

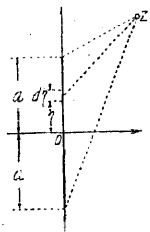


第 868 圖

11. 水路の中央に橢圓狀の柱を樹てたる場合 (第 868 圖) 圓柱を樹てたる場合 ... 9... の出入點の代りに流れの方向に並ぶ流出點及び流入點を考ふ。 $C \dots$ 流出及び流入點の強さ

$$w = Vz + C \ln \frac{\sinh \frac{\pi(z+a)}{l}}{\sinh \frac{\pi(z-a)}{l}} \quad \dots \quad \dots \quad (935)$$

* 幾何學的の圓ではない。



第 869 圖

$$\phi = Vx + \frac{C}{2} \ln \frac{\cosh \frac{2\pi(x+a)}{l} - \cos \frac{2\pi y}{l}}{\cosh \frac{2\pi(x-a)}{l} - \cos \frac{2\pi y}{l}}$$

$$\psi = Vy + C \left(\arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{l}}{\tanh \frac{\pi(x+a)}{l}} - \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{l}}{\tanh \frac{\pi(x-a)}{l}} \right)$$

此場合柱の断面は楕圓に近き形なるも正確に楕圓ではない。

12. 流出溝又は流入溝 (第 869 圖) 流出又は流入溝を長さ $d\eta$ の微小部分に分ち之等の微小部分を流出又は流入點と考ふ。但し流出溝の強さ... 單位長の流出量 C ... を一様と考へる。

$$dw = \frac{C}{2a} \ln(z - i\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned} \therefore w &= \frac{C}{2a} \int_{-a}^a \ln(z - i\eta) d\eta \\ &= \frac{C}{2ia} \left\{ (z + ia) \ln \frac{z + ia}{z - ia} - 2ia \right\} \end{aligned}$$

第 871 圖の如き場合は

$$\begin{aligned} w &= \frac{C}{2ia} \left\{ (z - il) \ln \frac{z - i(l-a)}{z - i(l+a)} - (z + il) \ln \frac{z + i(l+a)}{z + i(l-a)} \right. \\ &\quad \left. + ia \ln \frac{[z - i(l-a)][z - i(l+a)]}{[z + i(l+a)][z + i(l-a)]} \right\} \end{aligned}$$

(7) Prášil-Kulka の圖式試算法 前記の諸方法に依て解き得ざるか又は極めて煩雜なる場合に利用し得る近似法である。未知の限界面を實驗又は類似の他の例に依て假定し内部の流れに對して直交網目を入る。

先づ流線及び等位線を書き各網目が直交なるかはその二つの對角線を入れて夫等が直交するか否かに依て容易に見分け得る。

[52] の (4) の場合即ち鋭縁堰溢流に於て上面を $v = \sqrt{y_0}$ 、下面を $v = \sqrt{y_u}$ と假定すれば

$$\text{上面各點の速度の比, } v_1 : v_2 : v_3 : \dots = \sqrt{y_{a1}} : \sqrt{y_{a2}} : \sqrt{y_{a3}} : \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

$$\text{下面各點の速度の比, } v_1 : v_2 : v_3 : \dots = \sqrt{y_{u1}} : \sqrt{y_{u2}} : \sqrt{y_{u3}} : \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

(i) (ii) を満足し且つ實驗と合致する如く上面を定め其の次の流線を定むるには間隔 a_1, a_2, \dots が y_{01}, y_{02}, \dots に逆比例するを以て

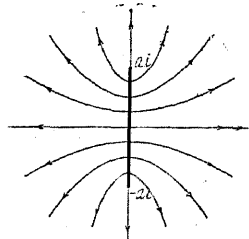
$$a_1 : a_2 : \dots : a_n = v_n : v_{n-1} : \dots : v_2 : v_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (iii)$$

且つ各流線間は同一の流量を流すを以て

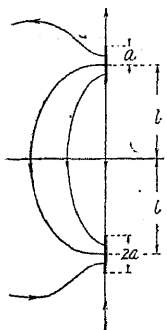
$$q = v_1 a_1 = v_2 a_2 = \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (iv)$$

以下の網目は對角線網目を利用して入る λ を便とする。

而て (i) (ii) 及び (iii) の總てを満足すれば網目は精確である。若し (i) 式の v が (iii) 式の v より大な

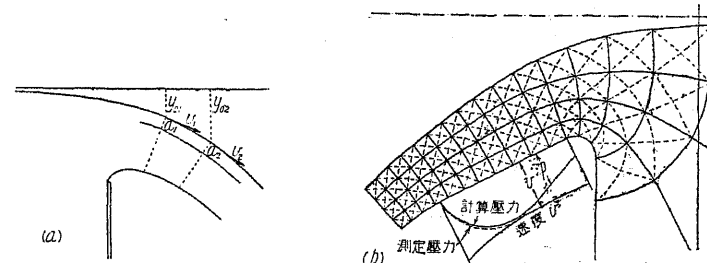


第 870 圖



第 871 圖

らばその點の上側水面を少し上げて y_0 を小にする。堰堤の溢流水脈に對し Prášil 及び Kulka の求めたる流況圖の例は次の如し。



第 872 圖