

第十三章 背 水

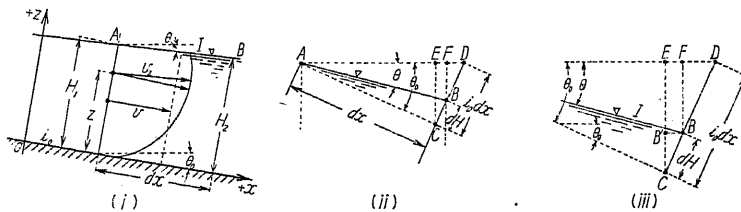
[65] 不等速定流の一般的性質

(1) 不等速定流の方程式 一般に定流に於ては流量 $Q = Av$ は断面の位置に拘らず一定不變なるを以て、若しある断面に於て水流の断面積を増大又は縮小すれば之に應じて平均流速は減少又は増大する。又、相距りたる二つの横断面 (A_1, A_2) に於ても若しその區間に於て流量の増減なければ Q は矢張り不變にして只 A と v とは Q が不變なる様に變化し、断面の大きさ、形狀又は徑深の變化する水路に於ては平均流速も必ず變化するを以て不等断面流とも言ひ得る。而て不等速流の問題は一般に運動の方程式 (Bernoulli の定理) と連続の方程式とに依りて解き得る。(104) 及び (106) 式より

$$I = \frac{v^2}{C^2 R^{2m}} + \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right), \quad Q = Av = \text{const.} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (518)$$

茲に $v = CR^m I_f^{0.5}$, $I_f \dots$ 摩擦水頭勾配, Chézy 公式 $m=0.5$, Forchheimer 公式 $m=0.7$

而て普通の流速公式は等速定流の場合即ち等断面にして水面と水路床とが平行なる場合の實驗に立脚し、且つ普通右邊の第一項は第二項より重要なるを以て、断面各點の速度 v_z の床に平行なる分速度の平均を以て其断面の平均流速 v と做し、其の方向に直角なる断面を以て水流の断面とするが、普通の開渠の場合は、勾配は微小なるを以て水平流速と鉛直断面積とを用ふるも實地上は大過ない。又、全断面の流速水頭は各點の流速水頭の平均であるが、便宜上平均流速に相當する流速水頭を用ふるを以て實際の値よりは常に過小にして、實値を表はす爲には η たけの割増を要し、又 v_z の代りに v を用ひ鉛直の分速度を無視する爲にも η たけの割増を要する。



第 571 圖

今、水路の最深線に沿ふて河床上に下流向きに x 軸、之に直角に上向きに z 軸を取り、水面迄の z の値を H にて表

はし、水面及び河床の水平に對する傾斜角を夫々 θ, θ_0 とすれば

$$i_0 = \tan \theta_0, \quad I = \tan \theta = \frac{BF}{AF} = \frac{1}{AF} (CD - CB) \cos \theta_0,$$

然るに $\overline{AF} = \overline{AB} \cdot \cos \theta = \overline{AC} \frac{\cos \theta}{\cos(\theta_0 - \theta)}$

$\therefore I = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \right) \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \cdot \cos(\theta_0 - \theta) = \left(\tan \theta_0 - \frac{dH}{dx} \right) (\cos^2 \theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0 \tan \theta) \dots (i)$

故に θ_0, θ が普通の水路の如く小なる時は $I = i_0 - \frac{dH}{dx} \dots (519)$

θ_0, θ が稍大なる時は $I = \left(\tan \theta_0 - \frac{dH}{dx} \right) \cos^2 \theta_0 \dots (520)$

即ち水面勾配 I は i_0 より水深の増大率を減じたるものである。實用的には θ_0, θ が 5° 即ち大體勾配が $1:10$ 位迄は (519) 式を用ひて差支へない。 $1:10$ 以上の勾配なる時は (520) 式を用ふる方が宜しい。今、(519) 式に依て不等速定流の一般式を書き表はせば

$$I = i_0 - \frac{dH}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R^{2m}} + (1 + \eta + \zeta) \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{v^2}{C^2 R^{2m}} + a \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{Q^2}{C^2 R^{2m} A^2} + a \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right) \dots (521)$$

茲に Q, A, R は夫々 x 断面に於ける流量、断面積及び径深にして、 $a = 1 + \eta + \zeta$

Chézy 公式に於ては $m = 0.5$ $I = i_0 - \frac{dH}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R} + a \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \dots (522)$

普通 $\eta = 0 \sim 0.20$, $\zeta = 0 \sim 0.10$ にして廣き矩形水路に對しては平均 $a = 1.085$, 普通の水路に於ては平均 $a = 1.11 \approx \frac{10}{9}$ 位にして若し $a = 1$ とする時は計算の結果に多少の餘裕を付する。

次に Δx なる有限間隔を有する二断面 A, B ...第 571 圖 (i)...に對しては

$$I = i_0 - \frac{H_2 - H_1}{\Delta x} = \frac{v_m^2}{C_m^2 R_m^{2m}} + \frac{a}{\Delta x} \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right)$$

即ち $\Delta H = H_2 - H_1 = i_0 \Delta x - a \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right) - \frac{v_m^2}{C_m^2 R_m^{2m}} \Delta x = i_0 \Delta x - a \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right) - \frac{Q^2 \Delta x}{C_m^2 R_m^{2m} A_m^2} \dots (523)$

茲に尾字 1, 2 を付せるは夫々断面 A, B に於ける水理量にして、 m を付するは兩者の平均値である。

之等の式は Bernoulli 定理 (104) 式より容易に導出し得るものである。

(2) 不等速定流の種々の状態 今 B なる廣き幅員と i_0 なる一樣なる床勾配とを有する矩形水路の等速流が、ある原因に依て不等速流を生じたる場合を考ふるに、等速流に於ては $I = I_0 = i_0$, にして且つ水深 H_0 , 平均流速 v_0 とすれば、径深は $R_0 = H_0$ にして

$$v_0 = C H_0^m i_0^{0.5} \therefore Q^2 = (B H_0 v_0)^2 = C^2 i_0 B^2 H_0^{2+2m} \dots (i)$$

故に不等速流の場合は

$$v^2 = \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = \left(\frac{Q}{B H} \right)^2 = C^2 i_0 \frac{H_0^{2+2m}}{H^2} \therefore \frac{v^2}{C^2 H^{2m}} = i_0 \left(\frac{H_0}{H} \right)^{2+2m} \dots (ii)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{1}{2g} \frac{dv^2}{dH} \frac{dH}{dx} = -\frac{1}{g} C^2 i_0 H_0^{2m-1} \left(\frac{H_0}{H} \right)^3 \cdot \frac{dH}{dx} \dots (iii)$$

(ii) 及び (iii) の關係を (521) 式に代入すれば

$$\frac{dH}{dx} = i_0 - i_0 \left(\frac{H_0}{H} \right)^{2+2m} + \frac{1}{g} C^2 i_0 \frac{H_0^{2+2m}}{H^3} \cdot \frac{dH}{dx} \quad \text{但し } a=1 \dots (iv)$$

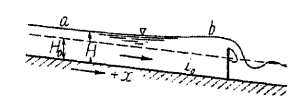
然るに常流と射流との限界水深は [41] (3) の (306) 式に依り

$$H_c = \left(\frac{Q^2}{g B^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{g} C^2 i_0 H_0^{2+2m} \right)^{\frac{1}{3}} \dots (v)$$

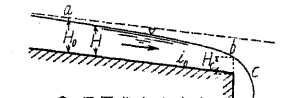
故に (v) の關係を (iv) に代入し、Forchheimer 流速公式を用ふれば、 $m = 0.7$ にして

$$\frac{dH}{dx} = i_0 \frac{H^{2+2m} - H_0^{2+2m}}{H^{2+2m} - H_c^{2+2m}} = i_0 \frac{H^{3.4} - H_0^{3.4}}{H^{3.4} - H_c^{3.4}} \dots (524)$$

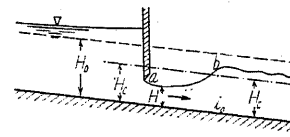
上式の右邊の値の +, - に依り、又 $H_0 \leq H_c$ 即ち等速流が常流なるか射流なるかに依り種々の状態の流れを生ずる。



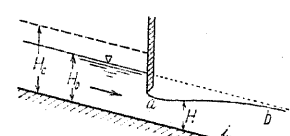
1. 地上背水 (a, b) 第 572 圖



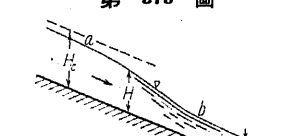
2. 低下背水 (a, b, c) 第 573 圖



3. (a, b) 第 574 圖



4. (a, b) 第 575 圖

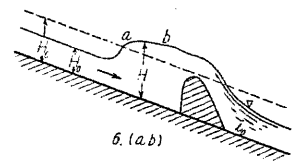


5. (a, b) 第 576 圖



5. (a, b) 第 577 圖

- I. 等速流が常流なる場合 $H_0 > H_c$.
 1. $H > H_0 > H_c$ ならば $\frac{dH}{dx} > 0$ (第 572 圖)
水深は下流に増大し堰上背水である。
 2. $H_c < H < H_0$, $\frac{dH}{dx} < 0$ (第 573 圖)
即ち水深は下流に減少し低下背水にして、下流に廣き水域あるか又は瀧の存在する場合である。
若し $H = H_c$ なる點あれば $\frac{dH}{dx} = -\infty$ にして水面は鉛直に急下する。
 3. $H < H_c < H_0$, $\frac{dH}{dx} > 0$ (第 574 圖)
 $H < H_c$ なるを以て射流となり、 $\frac{dH}{dx} > 0$ なるを以て水深は下流に増大し、常流に於て水門に依て断面を著しく縮小する時に水門の下流に生ずる。
- II. 等速流が射流なる場合 $H_0 < H_c$.
 4. $H_c > H_0 > H$, $\frac{dH}{dx} > 0$ (第 575 圖)
水深は下流に増大し等速射流の断面を水門に依て縮小する時その下流に生ずる。
 5. $H_c > H > H_0$, $\frac{dH}{dx} < 0$ (第 576 圖)
 H は下流に減じ v は漸増して $v = C R^m i_0^{0.5}$ となれば等速流となる。餘水吐 (Spillway), 急湍等の如き急傾斜の流れに生ずる。
 6. $H > H_c > H_0$, $\frac{dH}{dx} > 0$ (第 577 圖)
 H は下流に増し $H = H_c$ なる點に於て $\frac{dH}{dx} = +\infty$ 即ち水面は鉛直となり水は跳躍して障碍物を超え一時常流となる。即ち射



第 577 圖

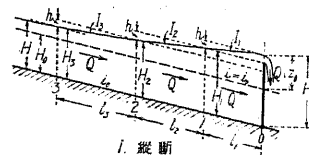
水等速流に於ては上流の背水は障碍物の附近に止まり、餘り上流には影響を及ぼさぬ。

従來不等速定流を論ずるに當り、Chézy 流速公式 $v=C\sqrt{RI}$ を用ひ C を常數として取扱ひたるも、背水問題は勿論、水深、勾配等の著しく變ずる場合は C に著しき變化あるを以て其結果は

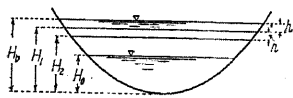
甚しき誤差を包含するに至る。従て不等速定流の場合は $v=CR^mI^{0.5}$ とし m は個々の水路に對し C を不變に保ち得る如き數値を採用せねばならぬ。

(3) 任意の断面形を有する水路の堰上背水 任意の断面形を有する水路に於て信頼し得る程度に背水を計算するには、従來の堰上背水公式 (Backwater formula) は殆んど使用し得ぬ。従て關係區域を多數の區間に分ち、水流の状態を急變せしめたる断面に於ける水深又は水面高を與へられて、其區間の勾配とその上流端の水深を求め順次に上流の區間に進むのであるが、實際の計算には (522) 式を用ひ各區毎に試算に依て水深及び水面勾配を求むるを以て頗る煩雜である。

1. 水路断面形の一様なる場合 水路の断面及び床勾配が一様なる槽狀水路 (Prismatic or cylindrical channel) にして、背水を生ずる原因を撤去すれば完全なる等速定流を生ずる如き場合は、次の方法に依て精確に背水を計算し得る。



i. 縦斷



ii. 横斷

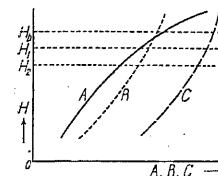
第 578 圖

等速流を不等速流に變ぜしむる原因の存在する断面を基點とし、 Q は不變なるを以て先づ此點に於ける水深 H_0 又は水面高を算定する、例へば堰を設くる時は堰頂の高さに Q を溢流せしむる爲に要する溢流深を加へたるものにして、水門の場合は Q を流出せしむるに必要な上流側水面高である。次に $H_0 - H_0 = z_0$ の $1/n$ を h とし、断面 0 を起點とし断面 1 の水深を $H_0 - h$ 、断面 2 の水深を $H_0 - 2h$... 等とする。之等の断面の位置は勿論未知にして之を求むるには (523) 式の関係を用ふ

る。即ち断面 1 の位置 l_1 を求むるには

$$I_1 = i_0 - \frac{h}{l_1} = Q^2 \left[\frac{1}{C_{m1}^2 R_{m1}^{2m} A_{m1}^2} - \frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_0^2} \right) \frac{1}{l_1} \right] \therefore l_1 = \frac{h - \frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_0^2} \right) Q^2}{i_0 - Q^2 / (C_{m1}^2 R_{m1}^{2m} A_{m1}^2)} \quad (525)$$

茲に C_{m1} , R_{m1} 及び A_{m1} は夫々第一區間の平均の流速公式係數、徑深及び断面積にして H_0 及び H_1 が與へられ、従て断面も既知なるを以て容易に算定し得るものである。但し Chézy 公式を用ふる時は $2m=1$, C は各區間の平均水深、例へば $\frac{1}{2}(H_0 + H_0 - h)$ に對する係數を用ふる。Forchheimer 公式を用ふる時は $C=const.$ にして $2m=1.4$ である。而て計算を容易なら

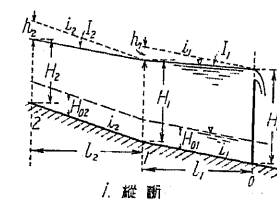


第 579 圖

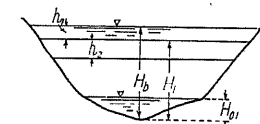
しむるには豫め種々の水深 H に對して A, R, C 等を計算し、表又は曲線 (第 579 圖) を以て表はし置けば (525) 式に依りて容易に l_1, l_2, \dots を求め得る。

2. 不規則なる水路の場合 山間部の河谷に堰堤を設くる場合の如きは各断面各別に不規則なる形をなすのみならず、河床勾配も線形も雜多である。

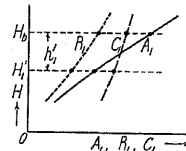
斯る場合は先づ大體一樣なる断面形及び床勾配を有する多數の區間に分割し、各區間はその平均の一樣なる断面形と床勾配とを有するものとし各區間の長さを l_1, l_2, \dots 等とする。第一區間に於ては下流端の水面高は既知なるを以て之を H_0 とし、次に第一断面の水深 H_1 を大體推定して之を H_1' とし、區間の平均断面を用ひて H_0 より H_1' 迄の水深に對して A, R, C を算定し第 579 圖と同様に水深との關係を曲線を以て表はす。但し H_0 及び H_1' のみに對して計算し、その中間は直線的に變化するものとして大差ない。



i. 縦斷



ii. l_1 平均横斷面



iii. A, R, C 曲線

第 580 圖

H_1' を定むるには $H_1' = H_0 - h_1'$ と置き l_1 全體が H_1' なる水深を有する場合に Q を流す爲に要する水面勾配 I_1' を定むる。

即ち

$$Q^2 = C_1^2 R_1^{2m} I_1' \cdot A_1^2 \therefore I_1' = \frac{Q^2}{C_1^2 R_1^{2m} A_1^2} \quad (526)$$

此場合 C の變化は免れざるを以て $2m=1$ 即ち Chézy 公式を用ふる時は、 n と H_1' に對して C を定むる。而て h_1' は I_1' なる水面勾配に依て 1 断面の有すべき水深と H_0 との差の二倍位にとる。次に第一區の水面勾配 I_1 を I_1' より多少小に假定して H_1 を定め、第 580 圖 iii の曲線に依て A_1 を知り、又 $\frac{1}{2}(H_0 + H_1)$ に對する A, R, C を曲線に依りて求め、之等の値に依て (526) 式の右邊を計算して $I_1 = \frac{Q^2}{C^2 R^{2m} A^2}$ を求め、先きに假定せる I_1 と比較する。若し兩者の差著しき時はこの I_1 と先きに假定せる I_1 との平均値を第二假定値として同様の檢算を試みる。

低下背水の場合に於ても計算の方針は同様にして唯下流端 H_0 より $H_0 + h_1'$ 迄に對し A, R, C の曲線を作る。但し h_1' は (526) 式より出したる I_1' に相當する値を用ひ、堰上の場合の如く二倍する必要はない。斯くして順次に上流の區間に移るが、計算は非常に煩雜なるを以て [69] の著者の考案せる方法に依るか、又は特に重要なる場合にのみ用ふる。

[66] 廣矩形水路に於ける背水曲線

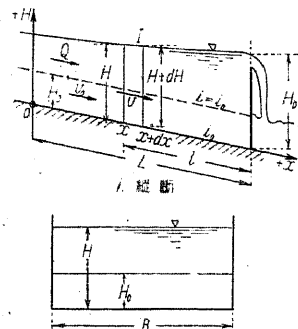
一般に在來の背水曲線の計算法は水理學上頗る不完全なるものにして、其の包含する誤差は實用上許すべからざる大きに達するを以て、後節に於て著者の考案せる合理的一般解法を記述するも、發達の道程を示すため在來計算法の大體を紹介する。

一般に背水の縦斷曲線は (521) 式に依て表はされ

$$I = i_0 - \frac{dH}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R^{2m}} + a \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{Q^2}{C^2 R^{2m} A^2} + a \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right)$$

茲に Q は一定なるも H と A , R 等の關係は斷面形に依て異り、且つ用ふる所の流速公式に依て m も異なるを以て、千態萬狀の水路に對し合理的に背水曲線を求めんとすれば實に無數の背水公式を必要とするに拘らず、現今に於ても積分容易なる少數の場合に對する數表又は曲線を有するに過ぎず、特に實在せざる假想斷面形を用ふると、流速公式に Chézy 公式を用ひ、 R と共に著しく變化すべき C を常數と假定せる事、及び流速水頭の變化を無視せる事等多くの不合理を含んで居る。

(1) Chézy 流速公式を用ふる場合 (Grashof-Bresse 公式, 佛, 1860)



第 581 圖

流速公式 $v = C \sqrt{RI} = C \sqrt{HI}$, C ... 常數, 潤邊 $S=B$, 斷面積 $A=BH$, 徑深 $R=H$

故に (524) 式に於て $2m=1$ にして

$$\frac{dH}{dx} = i_0 \frac{H^3 - H_0^3}{H^3 - H_c^3} \therefore i_0 dx = dH + \frac{H_0^3 - H_c^3}{H^3 - H_0^3} dH \dots (527)$$

茲に $H_c = H_0 \left(\frac{aC^2 i_0}{g} \right)^{\frac{1}{3}} = \text{const.}$

即ち著しく變化する C を常數と假定して居る。(527) 式を積分すれば

$$\frac{i_0 x}{H_0} = \frac{H}{H_0} - \frac{H_0^3 - H_c^3}{H_0^3} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{H^2 + H H_0 + H_0^2}{(H + H_0)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2H + H_0}{\sqrt{3} H_0} \right] + K$$

今、右邊の括弧内の式を $B \left(\frac{H_0}{H} \right)$ と置き、堰より $+x$ 断面迄の距離を l を以て表はせば、原點より堰迄は $x=L$ にして $l=L-x$ である。依て $L=x+l$ 即ち堰に於て水深は H_0 なるを以て

$$1^\circ. \quad l = \frac{H_0 - H}{i_0} + \frac{H_0}{i_0} \left(1 - \frac{H_c^3}{H_0^3} \right) \left[B \left(\frac{H_0}{H} \right) - B \left(\frac{H_0}{H_0} \right) \right] \dots \text{Grashof-Bresse} \dots (528)$$

Bresse は H_0/H の種々の値 (0.999~0.07) に對して $B \left(\frac{H_0}{H} \right)$ を計算して表を作成して背水計算を容易ならしめた。

Rühlmann (獨, 1880) は流速水頭の變化を無視し、即ち (521) 式に $a \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0$ 即ち (527) 式に $H_c=0$ と置き $H_0^3/(H^3 - H_0^3)$ を級數に展開して積分し所謂 Rühlmann 公式を發表した。

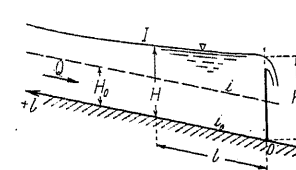
$$\frac{i_0 x}{H_0} = \frac{1}{3} \ln \frac{z}{H_0} + \frac{2}{3} \frac{z}{H_0} + \frac{1}{9} \frac{z^2}{H_0^2} - \frac{1}{27} \frac{z^3}{H_0^3} + \frac{1}{108} \frac{z^4}{H_0^4} + \dots + K = \varphi \left(\frac{z}{H_0} \right) + K,$$

$$2^\circ. \quad l = \frac{H_0}{i_0} \left[\varphi \left(\frac{H_0 - H}{H_0} \right) - \varphi \left(\frac{H - H_0}{H_0} \right) \right] = \frac{H_0}{i_0} \left[\varphi \left(\frac{z_0}{H_0} \right) - \varphi \left(\frac{z}{H_0} \right) \right] \dots \text{Rühlmann} \dots (529)$$

茲に $H - H_0 = z, \quad H_0 - H_0 = z_0,$

然るに $\varphi \left(\frac{z}{H_0} \right)$ は Bresse 公式の $B \left(\frac{H}{H_0} \right)$ と同意のものにして、唯積分常數を $K=0.4157 H_0$ とせるも、 l の値は $\varphi \left(\frac{z_0}{H_0} \right)$ と $\varphi \left(\frac{z}{H_0} \right)$ との差なるを以て K には無關係にして、從て (529) 式は (528) 式に於て $H_c=0$ と置きたる場合と全く同一の背水曲線と與ふる。而已ならず $H_0^3/(H^3 - H_0^3) = 1 / \left[\left(\frac{H}{H_0} \right)^3 - 1 \right]$ にして展開を爲さずして容易に積分し有限項を以て表はし得るものである。

(2) Hermanek 流速公式を用ひ流速水頭の變化を無視せる場合 (Schaffernak 公式, 奥, 1913)



第 582 圖

自然河川の如く粗度大なる場合は $v \propto R^{\frac{3}{2}}$ にして、 $1.5 \leq R \leq 6$ m に對し $v = 34 R^{\frac{3}{2}} I^{0.5} = C H^{\frac{3}{2}} I^{0.5}$ である。此場合距離の原點を堰の上流面に取り上流を $+$ とすれば前記の場合の x を $-l$ に、 dx を $-dl$ に換ゆれば宜しい。 $\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0$ とすれば

$$I = i_0 + \frac{dH}{dl} \therefore q = \frac{Q}{B} = C \left(i_0 + \frac{dH}{dl} \right)^{0.5} H^{\frac{3}{2}} = C i_0^{0.5} H_0^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore i_0 dl = - \frac{H^{2.5}}{H_0^{2.5} - H^{2.5}} dH \dots \dots \dots (i)$$

級數に展開して積分すれば、 $\frac{i_0 l}{H_0} = - \frac{H}{H_0} + \frac{1}{2.5} \left(\frac{H_0}{H} \right)^{2.5} + \frac{1}{6} \left(\frac{H_0}{H} \right)^6 + \frac{1}{9.5} \left(\frac{H_0}{H} \right)^{9.5} + \dots + K$

$$l=0 \text{ に於て } H=H_0 \therefore K = \frac{H_0}{H_0} - \left[\frac{1}{2.5} \left(\frac{H_0}{H} \right)^{2.5} + \frac{1}{6} \left(\frac{H_0}{H} \right)^6 + \dots \right]$$

$$\therefore \frac{H}{H_0} - \left[\frac{1}{2.5} \left(\frac{H_0}{H} \right)^{2.5} + \frac{1}{6} \left(\frac{H_0}{H} \right)^6 + \dots \right] = \varphi \left(\frac{H}{H_0} \right) \text{ と置けば}$$

$$3^\circ \quad l = \frac{H_0}{i_0} \left[\varphi \left(\frac{H_0}{H_0} \right) - \varphi \left(\frac{H}{H_0} \right) \right] \dots \text{Schaffernak} \dots \dots \dots (530)$$

氏は $\frac{H}{H_0} = 1.013 \sim 5.00$ に對して $\varphi \left(\frac{H}{H_0} \right)$ の値を計算し曲線を以て表はして居る。

(3) 任意の指數公式を用ひ流速水頭の變化を無視せる場合 (Schoklitsch 公式, チエツコ、スロヴァキヤ, 1930) 氏は $v = C R^m I^k = C H^m I^k \dots \dots \dots (i)$

と置き (1) の場合と同一の坐標を用ひ $I = i_0 - \frac{dH}{dx}$, 單位幅の流量を q とすれば

$$q = \frac{Q}{B} = C H_0^{1+m} I^k = C \left(i_0 - \frac{dH}{dx} \right)^k H^{1+m}, \quad \frac{1+m}{k} = a \text{ と置く} \dots \dots \dots (ii)$$

$$\therefore i_0 dx = \frac{H^a}{H^a - H_0^a} dH$$

$$\therefore \frac{i_0 x}{H_0} = \frac{H}{H_0} - \frac{1}{a-1} \left(\frac{H_0}{H} \right)^{a-1} - \frac{1}{2a-1} \left(\frac{H_0}{H} \right)^{2a-1} - \dots + K = \varphi_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) + K$$

$$4^\circ \quad l = \frac{H_0}{i_0} \left[\varphi_1 \left(\frac{H_0}{H_0} \right) - \varphi_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) \right] \dots \text{Schoklitsch} \dots \dots \dots (531)$$

氏は $m=0.5\sim 1.0$, $k=0.5$ に對し $H/H_0=1.01\sim 5.0$ の範圍に於てノモグラム (Nomogram) 即ち圖解法を考案して居る。

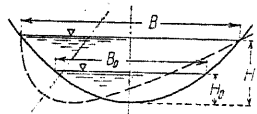
(4) 特定の指數公式を用ひ流速水頭の變化を無視せる場合 (Ehrenberger 公式, 填, 1914) 流速公式は (Gröger), $0.2 < H < 2.0$ m に對し $v=23.78 H^{0.778} I^{0.458}$; $H > 2.0$ m に對し $v=22.11 H^{0.68} I^{0.43}$, Ehrenberger は 1914 年既に此二場合に對して (3) と同一方法に依て

$$5^\circ \quad \frac{i_0 l}{H_0} = f\left(\frac{H_b}{H_0}\right) - f\left(\frac{H}{H_0}\right) \dots \dots \dots (532)$$

の $f\left(\frac{H}{H_0}\right)$ の値を計算し、1930 年には Strobel は $m=0.5$ 及び 0.75 , $k=0.5$ に對し $f\left(\frac{H}{H_0}\right)$ を計算し其の圖解法を發表して居る。

[67] 廣矩形以外の斷面に對する背水公式

(1) 廣拋物線斷面に於て流速水頭の變化を考慮せる場合の背水 (Tolkmitt 公式, 獨, 1880) 廣斷面 (Broad section) と稱するは水深に對し幅員極めて大にして、潤邊(S)=水面幅(B) と假定し得る場合である。氏は Chézy 流速公式を用ひ水深を最低床線より測り、距離 x は [66] (1)



第 583 圖

の場合と同様に下流に + にとり、 l は堰堤より上流に測る。拋物線の性質に依り

$$B = B_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^{0.5}, \quad A = \frac{2}{3} BH = \frac{2}{3} B_0 H \left(\frac{H}{H_0}\right)^{0.5}, \quad R = \frac{2}{3} H$$

$$v = C \sqrt{\frac{2}{3} HI}, \quad Q = Av = \left(\frac{2}{3}\right)^{1.5} C B_0 \frac{H^2}{\sqrt{H_0}} \sqrt{I}, \quad I = i_0 - \frac{dH}{dx}$$

$$\therefore Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{1.5} C B_0 \frac{H^2}{\sqrt{H_0}} \sqrt{i_0 - \frac{dH}{dx}} = A_0 v_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{1.5} C B_0 H_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{i_0}$$

但し斜軸 (第 583 圖點線) の場合も水理的には同一にして、且つ B/H 大なる時は圓弧其他類似の曲線にも適用し得る。

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1.5} C B_0 H_0 \sqrt{i_0} H_0}{\frac{2}{3} B_0 H \sqrt{\frac{H}{H_0}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0.5} C \sqrt{i_0} \frac{H_0^2}{\sqrt{H^3}}, \quad \therefore v^2 = \frac{2}{3} \frac{C^2 i_0 H_0^4}{H^3}$$

$$\therefore I = i_0 - \frac{dH}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{a}{2g} \frac{dv^2}{dx} = i_0 \left(\frac{H_0}{H}\right)^4 - \frac{i_0 a C^2}{g} \left(\frac{H_0}{H}\right)^4 \frac{dH}{dx}$$

$$\frac{i_0 a C^2}{g} H_0^4 = H_c^4, \quad H_c \dots \text{限界速度, と置けば}$$

$$i_0 dx = \frac{H^4 - H_c^4}{H^4 - H_0^4} dH \dots \dots \dots (i)$$

$$\therefore i_0 x = H - \frac{H_0^4 - H_c^4}{H_0^3} \left[\frac{1}{4} \ln \frac{H+H_0}{H-H_0} + \frac{1}{2} \arctan \frac{H}{H_0} \right] + K$$

$$\text{依て} \quad \frac{H}{H_0} - \left[\frac{1}{4} \ln \frac{H+H_0}{H-H_0} + \frac{1}{2} \arctan \frac{H}{H_0} \right] = F\left(\frac{H}{H_0}\right) \quad \text{と置けば} \dots \dots \dots (ii)$$

$$\frac{i_0 x}{H_0} = \frac{H}{H_0} \left(\frac{H_c}{H_0}\right)^4 + \left(1 - \frac{H_c^4}{H_0^4}\right) F\left(\frac{H}{H_0}\right) + K$$

$$\therefore l = \frac{H_0}{i_0} \left\{ \frac{H_b - H}{H_0} \left(\frac{H_c}{H_0}\right)^4 + \left(1 - \frac{H_c^4}{H_0^4}\right) \left[F\left(\frac{H_b}{H_0}\right) - F\left(\frac{H}{H_0}\right) \right] \right\} \dots \text{Tolkmitt} \dots (533)$$

流速水頭の變化を無視すれば H_c を含む項を除きて

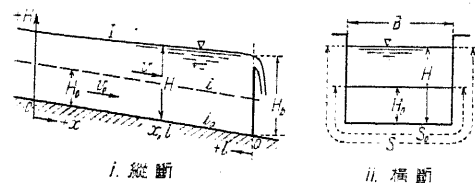
$$l = \frac{H_0}{i_0} \left[F\left(\frac{H_b}{H_0}\right) - F\left(\frac{H}{H_0}\right) \right] \dots \text{Tolkmitt} \dots \dots \dots (534)$$

Tolkmitt は $\frac{H}{H_0} = 1.005 \sim 10.00$ に對して $F\left(\frac{H}{H_0}\right)$ を計算し之に $\frac{\pi}{4}$ を加へたる値を表に示して居る。

第 103 表 Tolkmitt 堰上背水函数 $F\left(\frac{H}{H_0}\right)$ の値

$\frac{H}{H_0}$	$F\left(\frac{H}{H_0}\right) + \frac{\pi}{4}$	Δ	$\frac{H}{H_0}$	$F\left(\frac{H}{H_0}\right) + \frac{\pi}{4}$	Δ	$\frac{H}{H_0}$	$F\left(\frac{H}{H_0}\right) + \frac{\pi}{4}$	Δ	$\frac{H}{H_0}$	$F\left(\frac{H}{H_0}\right) + \frac{\pi}{4}$	Δ
1.00	$-\infty$	—	1.16	0.865	0.023	1.37	1.221	0.014	1.90	1.850	0.055
1.005	-0.102	—	1.17	0.887	0.022	1.38	1.235	0.014	1.95	1.904	0.054
1.01	+0.074	0.176	1.18	0.908	0.021	1.39	1.249	0.014	2.00	1.957	0.053
1.015	0.179	0.105	1.19	0.928	0.020	1.40	1.263	0.014	2.1	2.063	0.106
1.02	0.254	0.075	1.20	0.948	0.020	1.41	1.276	0.013	2.2	2.168	0.105
1.025	0.313	0.059	1.21	0.967	0.019	1.42	1.289	0.013	2.3	2.272	0.104
1.03	0.362	0.049	1.22	0.985	0.018	1.43	1.302	0.013	2.4	2.376	0.104
1.035	0.403	0.041	1.23	1.003	0.018	1.44	1.315	0.013	2.5	2.479	0.103
1.04	0.440	0.037	1.24	1.021	0.018	1.45	1.328	0.013	2.6	2.581	0.102
1.045	0.473	0.033	1.25	1.038	0.017	1.46	1.341	0.013	2.7	2.683	0.102
1.05	0.502	0.029	1.26	1.055	0.017	1.47	1.354	0.013	2.8	2.785	0.102
1.06	0.554	0.052	1.27	1.071	0.016	1.48	1.367	0.013	2.9	2.887	0.102
1.07	0.599	0.045	1.28	1.087	0.016	1.49	1.380	0.013	3.0	2.988	0.101
1.08	0.639	0.040	1.29	1.103	0.016	1.50	1.392	0.012	3.5	2.492	0.504
1.09	0.675	0.036	1.30	1.119	0.016	1.55	1.453	0.061	4.0	3.995	0.503
1.10	0.708	0.033	1.31	1.134	0.015	1.60	1.513	0.060	4.5	4.496	0.501
1.11	0.738	0.030	1.32	1.149	0.015	1.65	1.571	0.058	5.0	4.997	0.501
1.12	0.766	0.028	1.33	1.164	0.015	1.70	1.628	0.057	6.0	5.998	1.001
1.13	0.793	0.027	1.34	1.179	0.015	1.75	1.685	0.057	8.0	7.999	2.001
1.14	0.818	0.025	1.35	1.193	0.014	1.80	1.740	0.055	10.0	10.000	2.000
1.15	0.842	0.024	1.36	1.207	0.014	1.85	1.795	0.055	∞	∞	∞

(2) 幅員著しく大ならざる矩形水路に於て流速水頭の變化を考慮せる場合の堰上背水 (Dupuit-Masoni 公式, 佛, 伊, 1863, 1888) 潤邊 (S) は水面幅と著しく異なるを以て $S \neq B$, Chézy 流速公式を用ふる。



第 584 圖

$$S_0 = B + 2H_0 \quad \therefore B = S_0 - 2H_0$$

$$S = B + 2H = 2H + S_0 - 2H_0$$

等速流に於て $A_0 = H_0(S_0 - 2H_0)$, $R_0 = \frac{H_0(S_0 - 2H_0)}{S_0}$

$$v_0^2 = \frac{C^2 i_0 H_0 (S_0 - 2H_0)}{S_0}, \quad \therefore i_0 = \frac{S_0}{C^2 H_0 (S_0 - 2H_0)} v_0^2$$

不等速流状態に於て $Q = Av = A_0 v_0$

$$\therefore v^2 = \frac{C^2 i_0 H_0^3 (S_0 - 2H_0)}{S_0 H^2}, \quad R = \frac{H(S_0 - 2H_0)}{2H + S_0 - 2H_0}, \quad I = i_0 - \frac{dH}{dx}$$

之等の値を (522) 式に代入すれば

$$i_0 - \frac{dH}{dx} = \frac{1}{C^2} \frac{2H + S_0 - 2H_0}{H(S_0 - 2H_0)} \cdot \frac{C^2 i_0 H_0^3 (S_0 - 2H_0)}{S_0 H^2} + a \frac{d}{dx} \left\{ \frac{C^2 i_0 H_0^3 (S_0 - H_0)}{2g S_0 H^2} \right\}$$

$$\therefore i_0 dx = \frac{H^2 - \beta H_0^2 \left(1 - 2 \frac{H_0}{S_0}\right)}{H^2 - H_0^2 - 2 \frac{H_0^3}{S_0} (H - H_0)} dH \quad \text{茲に } \beta = \frac{a C^2 i_0}{g} \quad \dots \dots \dots (i)$$

$$\therefore \frac{i_0 x}{H_0} = \frac{H}{H_0} + \frac{1}{2} \frac{1 - \beta + 2\beta \frac{H_0}{S_0}}{3 - 2 \frac{H_0}{S_0}} \cdot \ln \frac{(H - H_0)^2}{H^2 + H_0 H + H_0^2 - 2 \frac{H_0^3}{S_0}}$$

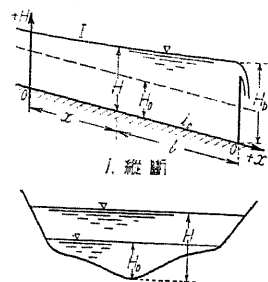
$$+ \frac{1}{3 - 2 \frac{H_0}{S_0}} \cdot \frac{-3 + 3\beta + 12 \frac{H_0}{S_0} - 6\beta \frac{H_0}{S_0} - 8 \left(\frac{H_0}{S_0}\right)^2}{\sqrt{3 - 8 \frac{H_0}{S_0}}} \cdot \arctan \frac{2H + H_0}{H_0 \sqrt{3 - 8 \frac{H_0}{S_0}}} + K \quad \dots \dots \dots (ii)$$

上式の右邊第二及び第三項を $f\left(\frac{H}{H_0}\right)$ を以て表せば

$$l = \frac{1}{i_0} (H_0 - H) + \frac{H_0}{i_0} \left[f\left(\frac{H_0}{H_0}\right) - f\left(\frac{H}{H_0}\right) \right] \quad \dots \dots \dots (535)$$

$f\left(\frac{H}{H_0}\right)$ の數表は計算されて居らぬ。1863 年 Dupuit が $a=1$ の場合の式を發表し、Masoni は 1888 年任意の a の場合の式を發表して居る。尙 (535) 式は $B_0 > \frac{2}{3} H_0$ の場合にのみ成立する。

(3) 任意の断面形に於て流速水頭の變化を無視せる場合の堰上背水 (Baticle 公式, 佛, 1921)



第 585 圖

Baticle は任意の断面形の水路に對し Chézy 流速公式を適用して C を常數と看做し、且つ次の如く置く。

$$Q = Av = A_0 v_0, \quad Q^2 = A^2 C^2 R I = A_0^2 C^2 R_0 i_0, \quad \text{即ち } A^2 R I = A_0^2 R_0 i_0,$$

$$A^2 R = z^5, \quad A_0^2 R_0 = z_0^5, \quad \therefore I z^5 = i_0 z_0^5 \dots \dots \dots (i)$$

茲に z は長さのデメンションを有し、水深を代表する符數 (Parameter) である。此の假定は三角形又は之に類似せる断面形の水路に對しては事實に近い。然るに $\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{dz} \frac{dz}{dx}$,

依て $H = H_0$ 即ち堰上點に於て $z = Z_0$, 等速流に於て $z = z_0$ とし, $\frac{dH}{dz}$

の平均を $\frac{H_0 - H_0}{Z_0 - z_0} = a$ と置き之を常數と假定すれば、 $I = i_0 - \frac{dH}{dx}$ なるを以て (i) 式は

$$\left(i_0 - a \frac{dz}{dx}\right) z^5 = i_0 z_0^5, \quad \therefore \frac{i_0 dz}{a} = \frac{z_0^5}{z^5 - z_0^5} dz,$$

即ち $\frac{i_0 dx}{a z_0} = \frac{\lambda^5}{\lambda^5 - 1} d\lambda, \dots \dots \dots \text{茲に } \lambda = \frac{z}{z_0} \dots \dots \dots (ii)$

(ii) 式を級數に展開して積分すれば

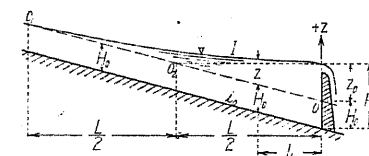
$$\frac{z}{z_0} < 1.20 \text{ に對し } F\left(\frac{z}{z_0}\right) = 1.244 + \frac{1}{5} \ln\left(\frac{z}{z_0} - 1\right) + \frac{3}{5} \left(\frac{z}{z_0} - 1\right) + \dots \dots \dots,$$

$$\frac{z}{z_0} \geq 1.20 \quad ,, \quad F\left(\frac{z}{z_0}\right) = \frac{z}{z_0} - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z_0}{z}\right)^4 + \frac{1}{9} \left(\frac{z_0}{z}\right)^9 + \frac{1}{14} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{14} + \dots \dots \dots \right]$$

$$\frac{i_0 l}{a z_0} = F\left(\frac{Z_0}{z_0}\right) - F\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \dots \dots \dots (536)$$

Baticle は $\frac{z}{z_0} = 1.00 \sim 10.00$ に對し $F\left(\frac{z}{z_0}\right)$ を計算し數表及び曲線を以て示して居る。

(4) Poirée 堰上背水公式 此公式は背水曲線を堰堤上の水面の位置を頂點として鉛直軸を有する拋物線なりと假定するものにして、水理的には何等の根據を有せぬものである。不規則なる断面及び河床勾配



第 586 圖

を有する河川の如き場合 [65] (3) の試算的方法を用ふる際、豫め水面の位置を推定するに用ひらるゝ。先づ堰堤に於て Q なる流量を溢流せしむるに必要な水頭を計算し O に於ける水面高を定め、等速流に於て之と同一の水面高を有する點 O_2 迄の距離を $L/2$ とし、 O より L なる距離の點 O_1 を以て背水の極限とし O 断面の水面點を頂點、 O に於ける上向鉛直線を

z 軸とし O_1 に於て原水面に切する拋物線を以て背水面と做す、即ち水面の上昇 z は

$$z = z_0 - i_0 l + \frac{i_0^2}{4 z_0} l^2 = z_0 - i_0 l \left(1 - \frac{i_0 l}{4 z_0}\right) \dots \dots \dots (537)$$

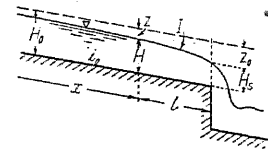
此公式は廣き矩形に近き断面を有する水路に於て $z_0 < 2.5 H_0$ の場合に於ては Rühlmann 公式に近き結果を與ふるも、而も堰堤附近及び上流に於ては常に過小なる z を與ふるを以て決して濫りに使用すべきものでない。

[68] 低下背水曲線

水路の下流に瀧、又は湖海等の廣き水域ある時は其點に於て水面低下し其の影響が上流に及びて一帯に水位低下を生ずるが、此場合水面縦斷曲線を低下背水曲線 (Drop-down curve, Senkungslinie) と名づくる。此場合の計算法は堰上の場合と同様にして、唯 x を下流に計る時 $I = i_0 + \frac{dH}{dx} = i_0 + \frac{dz}{dx}$ となる。

(1) Rühlmann の低下背水 Chézy 流速公式、廣矩形断面、 $R = H$, $\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0$

$$v = C \left(i_0 + \frac{dz}{dx}\right)^{0.5} (H_0 - z)^{1.5}$$



第 587 圖

$$\therefore \frac{i_0 x}{H_0} = \frac{1}{3} \ln \frac{z}{H_0} - \frac{2}{3} \frac{z}{H_0} + \frac{1}{9} \frac{z^2}{H_0^2} + \dots + K_1 = \varphi_1 \left(\frac{z}{H_0} \right) + K_1$$

$$\therefore l = \frac{H_0}{i_0} \left[\varphi_1 \left(\frac{z_0}{H_0} \right) - \varphi_1 \left(\frac{z}{H_0} \right) \right] \dots \text{Rühlmann} \dots (538)$$

氏は $\frac{z}{H_0} = 0.01 \sim 1.00$ に對し $\varphi_1 \left(\frac{z}{H_0} \right)$ の數表を作成して居る。

(2) Grashof-Bresse の低下背水 流速水頭の變化を考慮したる以外は (1) と同一、(527) 式に於て $H < H_0$ なるを以て $\frac{dH}{dx} = -i_0 \frac{H_0^3 - H^3}{H^3 - H_c^3}$

$$l = \frac{H - H_c}{i_0} - \frac{H_0}{i_0} \left(1 - \frac{H_c^3}{H_0^3} \right) \left[B_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) - B_1 \left(\frac{H_c}{H_0} \right) \right] \dots \text{Grashof-Bresse} \dots (539)$$

此式に於て $H_c = 0$ 即ち $\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0$ と置けば其結果は (538) 式に依て計算したるものと同一である。Bresse が $\frac{H}{H_0} = 0.00 \sim 1.000$ に對して $B \left(\frac{H}{H_0} \right)$ の値を計算して居る。

(3) Schaffernak 低下背水 Hermanek 流速公式、他は (1), (2) と同一、

$$i_0 dl = \frac{H^{3.5}}{H_0^{3.5} - H_c^{3.5}} \cdot dH = \left(\frac{H}{H_0} \right)^{3.5} \left[1 - \left(\frac{H}{H_0} \right)^{3.5} \right]^{-1} \cdot dH$$

大括弧内を展開して積分すれば

$$\frac{i_0 l}{H_0} = \frac{1}{4.5} \left(\frac{H}{H_0} \right)^{4.5} + \frac{1}{8} \left(\frac{H}{H_0} \right)^8 + \dots + K_1 = \Psi \left(\frac{H}{H_0} \right) + K_1$$

$$l = 0 \text{ に於て } H = H_c \therefore K_1 = -\Psi \left(\frac{H_c}{H_0} \right)$$

$$\therefore l = \frac{H_0}{i_0} \left[\Psi \left(\frac{H}{H_0} \right) - \Psi \left(\frac{H_c}{H_0} \right) \right] \dots \text{Schaffernak} \dots (540)$$

$H_0/H = 1.04 \sim 5.0$ に對し $\Psi \left(\frac{H}{H_0} \right)$ を計算し曲線を以て表はして居る。

(4) Tolkmitt 低下背水 Chézy 流速公式、廣拋物線断面

$$H < H_0, \quad i_0 dx = \frac{H^4 - H_c^4}{H^4 - H_0^4} dH = dH - (H_0^4 - H_c^4) \frac{dH}{H^4 - H_0^4}$$

$$\text{積分して } i_0 x = H - \frac{H_0^4 - H_c^4}{H_0^3} \left[\frac{1}{4} \ln \frac{H_0 + H}{H_0 - H} + \frac{1}{2} \arctan \frac{H}{H_0} \right] + K_1$$

$$F_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) = \frac{H}{H_0} - \left[\frac{1}{4} \ln \frac{H_0 + H}{H_0 - H} + \frac{1}{2} \arctan \frac{H}{H_0} \right] \text{ と置けば}$$

$$\frac{i_0 x}{H_0} = \frac{H}{H_0} \left(\frac{H_c}{H_0} \right)^4 + \left[1 - \left(\frac{H_c}{H_0} \right)^4 \right] F_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) + K_1$$

$$\therefore l = \frac{H_0}{i_0} \left\{ \frac{H_c - H}{H_0} \left(\frac{H_c}{H_0} \right)^4 + \left[1 - \left(\frac{H_c}{H_0} \right)^4 \right] \left[F_1 \left(\frac{H_c}{H_0} \right) - F_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) \right] \right\} \dots \text{Tolkmitt} \dots (541)$$

氏は $H/H_0 = 0.00 \sim 0.995$ に對し $F_1 \left(\frac{H}{H_0} \right)$ を計算し表を作成して居る。

第 104 表 Tolkmitt 低下背水函数 $F_1 \left(\frac{H}{H_0} \right)$ の値

$\frac{H}{H_0}$	$F_1 \left(\frac{H}{H_0} \right)$	Δ	$\frac{H}{H_0}$	$F_1 \left(\frac{H}{H_0} \right)$	Δ	$\frac{H}{H_0}$	$F_1 \left(\frac{H}{H_0} \right)$	Δ
1.000	∞	—	0.90	1.103	0.014	0.70	0.739	0.013
0.995	1.889	∞	0.89	1.075	0.028	0.69	0.726	0.013
0.990	1.714	0.175	0.88	1.049	0.026	0.68	0.713	0.013
0.985	1.610	0.104	0.87	1.025	0.024	0.67	0.701	0.013
0.980	1.536	0.074	0.86	1.002	0.023	0.66	0.688	0.013
0.975	1.479	0.055	0.85	0.980	0.022	0.65	0.676	0.012
0.970	1.431	0.048	0.84	0.960	0.020	0.64	0.664	0.012
0.965	1.391	0.040	0.83	0.940	0.020	0.63	0.652	0.012
0.960	1.355	0.036	0.82	0.922	0.018	0.62	0.640	0.012
0.955	1.324	0.031	0.81	0.904	0.018	0.61	0.628	0.012
0.950	1.296	0.028	0.80	0.887	0.017	0.60	0.617	0.011
0.945	1.270	0.026	0.79	0.870	0.017	0.55	0.561	0.056
0.940	1.246	0.024	0.78	0.854	0.016	0.50	0.506	0.055
0.935	1.224	0.022	0.77	0.838	0.016	0.45	0.454	0.052
0.930	1.204	0.020	0.76	0.823	0.015	0.40	0.402	0.052
0.925	1.185	0.019	0.75	0.808	0.015	0.35	0.351	0.051
0.920	1.166	0.019	0.74	0.794	0.014	0.30	0.300	0.051
0.915	1.149	0.017	0.73	0.780	0.014	0.20	0.200	0.100
0.910	1.133	0.016	0.72	0.766	0.014	0.10	0.100	0.100
0.905	1.117	0.016	0.71	0.752	0.014	0.00	0.000	0.100

(5) Schoklitsch 低下背水 指數公式 $v = CH^m I^{0.5}$, 廣矩形, $\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0$,

$$I dx = i_0 dx + dH \quad \therefore I = i_0 + \frac{dH}{dx} \quad \therefore i_0 dx = -\frac{H^a}{H^a - H_0^a} dH$$

$$\therefore \frac{i_0 x}{H_0} = \frac{1}{a+1} \left(\frac{H}{H_0} \right)^{a+1} + \frac{1}{2a+1} \left(\frac{H}{H_0} \right)^{2a+1} + \dots + K_1 = \Psi_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) + K_1$$

$$\therefore l = \frac{H_0}{i_0} \left[\Psi_1 \left(\frac{H}{H_0} \right) - \Psi_1 \left(\frac{H_c}{H_0} \right) \right] \dots \text{Schoklitsch} \dots (542)$$

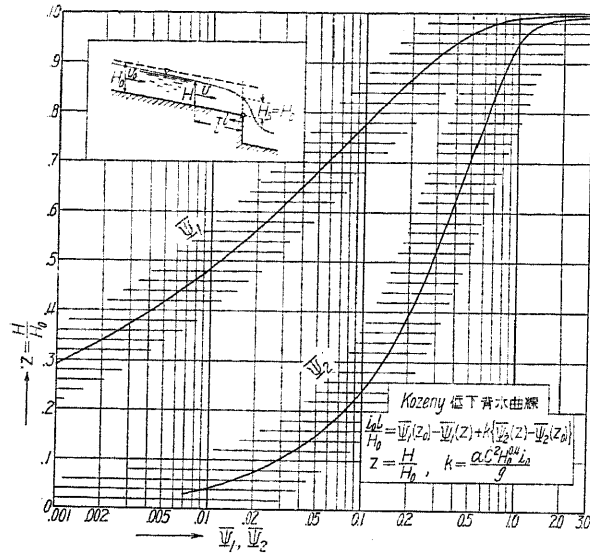
(6) J. Kozeny の低下背水 (境, 1928) Forchheimer 流速公式 $v = CH^{0.7} I^{0.5}$, $C = \frac{1}{n_2}$, 廣矩形, 流速水頭の變化を考慮す。

$$q = \frac{Q}{B} = v_0 H_0 = CH_0^{1.7} i_0^{0.5} = v H \quad \therefore v = \frac{q}{H} = \frac{CH_0^{1.7} i_0^{0.5}}{H} \dots (i)$$

$$v = CH^{0.7} I^{0.5}, \quad q = CH^{1.7} I^{0.5} \quad (521) \text{ 式に依り}$$

$$\frac{dH}{dx} - \frac{a}{g} C^2 H^{0.4} i_0 \left(\frac{H_0}{H} \right)^3 \frac{dH}{dx} + \left[\left(\frac{H_0}{H} \right)^{3.4} - 1 \right] i_0 = 0 \dots a = \frac{10}{9} \dots (543)$$

$$\frac{a}{g} C^2 H^{0.4} i_0 = k, \quad \frac{H_0}{H} = \frac{1}{z} \text{ と置けば (543) 式は}$$



第 588 圖 Kozeny 低下背水曲線

然るに $H_0 = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \therefore z_0 = \frac{H_0}{H_0} = \frac{1}{H_0} \sqrt{\frac{C^2 H_0^{0.4} i_0}{g}} = \left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

(7) 在來背水公式の誤差 上記の諸背水公式は假空的の断面形を用ひ、或は背水區域に於て水深著しく變化するに拘らず、Chézy 公式の C を不變と假定し、而も其の大多數は流速水頭の變化を無視せるを以て、夫等の結果が甚しく不精確なるは止むを得ぬ所である。

先づ Chézy 流速公式に於て C を不變とする爲の誤差の程度を知るために、實際 C の不變なる Hermanek 式を用ひたる Schaffernak 公式 (530) の與ふる背水に對し、Chézy 式を用ふる Rühlmann 公式 (529) の誤差を求むるに、同一の背水を生ずる點の位置は $H_0 = 2H_0$ の場合 +10% 位の相違を生ずる。

次に流速水頭の變化を無視する爲の誤差を明かならしむる爲、之を考慮せる Bresse 公式 (528) に對し、之を無視せる Rühlmann 公式 (529) の誤差を求むれば、流速の大なる程、堰き上げの著しき程、誤差は大にして $i_0 = 1:1000$, Bazin 流速公式の $\gamma = 0.16$ に於て次の誤差を生ずる。

$H_0 = 2H_0$ の場合、誤差 +50%; $H_0 = 10H_0$ の場合、誤差 +9%

次に、水面幅を無限大と假定する爲の誤差を知る爲に Dupuit-Masoni 公式 (535) に對する Bresse 公式 (528) の誤差を求むるに、 $i = 1:1000$, $H_0 = 2\text{ m}$, $a = 1.0$, $H_0 = 2H_0$ の場合、堰より、水深 $H = 1.01H_0$ なる断面迄の距離の誤差 $\Delta l\%$ を求むれば、幅員の小なる程、流速の大なる程、誤差は大にして $B = 4\text{ m}$, $C = 100$ に於ては Δl は -50% に達する。

今、普通の水路に於て生ずべき各種の誤差を示せば

Chézy 式を用ふる爲の誤差	+0~+10%
流速水頭の變化を無視する爲の誤差	+0~+50%
幅員を無限大と假定する爲の誤差	-0~-50%

特殊の場合に +, - の誤差が消し合ふ事あるも、一般に著しき誤差を生ずる...[69] (4) 第 607 圖 参照。

次に従來發表されたる背水公式を一括表示する。

$$\frac{i_0 dx}{H_0} = \frac{z^{3.4} - k z^{0.4}}{z^{3.4} - 1} dz = -\frac{z^{3.4} - k z^{0.4}}{1 - z^{3.4}} dz$$

$$= \left[-\sum_{n=1}^{\infty} z^{3.4n} + k \sum_{n=0}^{\infty} z^{3.4n+0.4} \right] dz$$

... .. (ii)

積分して $\frac{i_0 x}{H_0} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3.4n+1} z^{3.4n+1}$

$$+ k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3.4n+1.4} z^{3.4n+1.4} + K$$

$$= -\Psi_1(z) + k \Psi_2(z) + K$$

と置く

$x=0$ に於て $H=H_0$, $x=l$ に於て

$H=H$, 今 $\frac{H_0}{H} = z_0$ と置けば

$$\frac{i_0 l}{H_0} = \Psi_1(z_0) - \Psi_1(z) + k [\Psi_2(z) - \Psi_2(z_0)]$$

... .. (544)

第 105 表 堰上及び低下背水公式

著 者	發表年	流速公式	断面形	流速水頭	數表又は曲線	
					堰上 (H/H_0)	低下 (H/H_0)
1 Grashof-Bresse (佛)	1860	$C\sqrt{HI}$	廣 矩 形	考慮	1/0.999~1/0.07	0.999~0.00
2 Dupuit-Masoni (佛,伊)	1863 1888	,,	普通矩形	,,	無	無
3 Rühlmann (獨)	1880	,,	廣 矩 形	無視	1.01~6.0	0.990~0.00
4 Tolkmitt (,)	1881	,,	廣拋物線形	考慮	1.005~5.0	0.995~0.00
5 Schaffernak (獨)	1913	$34H^{0.75}I^{0.5}$	廣 矩 形	無視	1.013~5.0	0.2~1:1.04
6 Ehrenberger (,)	1914	$23.78H^{0.775}I^{0.458}$ $22.11H^{0.58}I^{0.43}$,,	,,	1.000~5.00	無
7 Baticle (佛)	1921	$Q^2 \propto I z^5 = i_0 z_0^{5k}$	類似梯形	,,	1.001~10.0	無
8 Kozeny (獨)	1928	$\frac{1}{n} H^{0.7} I^{0.5}$	廣 矩 形	考慮	無	0.1~0.95
9 Schoklitsch (テフコ)	1930	$CH^m I^{0.5}$,,	無視	1.01~5.0	無
10 Flamant (佛)	?	Dupuit-Masoni 公式の近似式				
11 Poirée (佛)	?	水理的根據なし				

* z ...水深を代表する符數 (Parameter)

[69] 背水の合理的解法 (N.M.)

(1) 合理的解法の原理 現存の背水曲線計算法は實用上充分なる精度を有せざるのみならず、水理學上の根據頗る曖昧であるが、何れも相當煩雜なる計算の上斯の如き不完全の域を脱する事能はざりし理由は

- a. 背水曲線を有限項の函數を以て表はさんが爲 C の一定せざる Chézy 流速公式を用ひ、廣断面の場合のみを考慮せる事。一般に $v = CR^m I^{0.5}$ に於て $\frac{1}{m}$ が整数にして而も廣断面又は矩形の場合の外有限項函數を以て表はし得ず、而も後者に於ては單一なる數表又は曲線を以て表はし得ぬ。
- b. m が一般的値をとる時背水函數は廣断面の場合に限り無限級數を以て表はさるゝも、數表の計算は a. の場合に比して著しく煩雜である。Schaffernak, Schoklitsch 等の公式は其最も簡單なる場合にして、Rühlmann 式は a. に屬すべきものなるに拘はらず無限級數を用ひて無用の手数を加へたるに過ぎぬ。

而て Chézy 式を用ひざるものとすれば背水函數は一般に無限級數となり、更に流速水頭の變化を考慮すれば一種の断面に對して二つの級數を生じ、個々の断面形に對して函數表を作成することは殆んど望みがない。

次に述ぶる著者の解法は斷面積、潤邊及び徑深等を實用上充分なる精度に表はし得る一般式を用ひ、流速水頭の變化を考慮し且つ各水路に對し最も適切なる普遍的流速公式を用ひて、漸變す

る二組の級数群に依てあらゆる場合の背水曲線を表はさんとするものである。

今、断面 A 及び潤邊 S を水深 H の或乗冪として単一項を以て表はせば

$$A = aH^s, S = bH^k, R = \frac{A}{S} = \frac{a}{b}H^{s-k} \dots \dots \dots (545)$$

茲に a, b, \dots の断面形に對しては常數とす、 s, \dots 断面函數の冪數、 k, \dots 潤邊函數の冪數

S を單一項を以て表はすことは斷面積の場合に比すれば多少無理の點あり、從つて b を一の斷面に對して常數に取れば水深に依て k に多少の變化あるは免れざる所なるも、次に述ぶる著者の解法に於ては各水深に相當する k の値を使用し得るのみならず、多くの場合 S/S_0 の形を以て式の中に入るを以て之に基き誤差は決して著しき程度に達せず、勿論從來の如く廣斷面として $S=S_0=B$ と假定するものに比し理論上より見て著しく合理的なるは勿論、後節に述ぶる種々の場合の實驗に照して誤差の微小なるは明かである。(545) 式に依り

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{H}{H_0}\right)^s, \frac{S}{S_0} = \left(\frac{H}{H_0}\right)^k, \frac{R}{R_0} = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{s-k}, z_0 = CR_0^m i_0^{0.5}$$

$$\therefore \frac{v_0^2}{C^2} \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 R^{-2m} = i_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^{-2s-2m(s-k)}$$

及び $\frac{v_0^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 = -KH_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^{-2s-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{H}{H_0}\right)$, 茲に $K = as \frac{v_0^2}{gH_0}$

1. 堰上背水の場合 上記の値を背水曲線の一般微分方程式 (521) 式に代入すれば

$$i_0 - \frac{dH}{dx} = i_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^{-2s-2m(s-k)} - KH_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^{-2s-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{H}{H_0}\right)$$

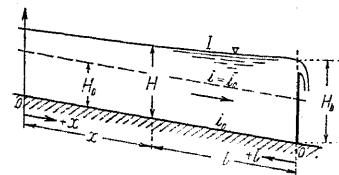
依て $\frac{H}{H_0} = y$ と置けば $d\left(\frac{H}{H_0}\right) = dy = \frac{dH}{H_0}$

$$\therefore \frac{i_0}{H_0} dx = \frac{dy}{1-y^{-2s-2m(s-k)}} - K \frac{y^{-(2s+1)}}{1-y^{-2s-2m(s-k)}} \dots \dots \dots (546)$$

然るに m は使用流速公式に依り、 s 及び k は與へられたる断面形に依て定まるを以て、 $2s+2m(s-k)=r$ と置けば

$$\frac{i_0 dx}{H_0} = \frac{dy}{1-y^{-r}} - K \frac{y^{-(2s+1)}}{1-y^{-r}} dy = \frac{y^r}{y^r-1} dy - K \frac{y^{r(2s+1)-1}}{y^r-1} dy \dots \dots \dots (547)$$

上式に於て $r > 1, y > 1$ にして右邊の y の函數は共に收斂級數に展開し得るを以て x より $x+l$ 迄即ち H より H_0 迄積分すれば

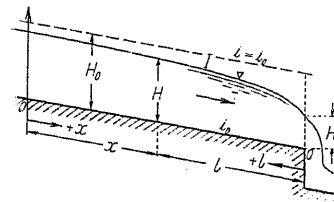


$$\frac{i_0 l}{H_0} = \Phi_1 \left(\frac{H_0}{H_0}\right) - \Phi_1 \left(\frac{H}{H_0}\right) - K \left[\Phi_2 \left(\frac{H_0}{H_0}\right) - \Phi_2 \left(\frac{H}{H_0}\right) \right]$$

$$\dots \dots \dots (548)$$

茲に $H_0 = H_{x+l}, H = H_x, K = as \frac{v_0^2}{gH_0}, a = \frac{10}{9}$

第 589 圖 堰上背水



第 590 圖 低下背水

$$\Phi_1 \left(\frac{H}{H_0}\right) = \Phi_1(y) = \int \frac{y^r}{y^r-1} dy,$$

$$\Phi_2 \left(\frac{H}{H_0}\right) = \Phi_2(y) = \int \frac{y^{r(2s+1)-1}}{y^r-1} dy$$

$$r = 2s + 2m(s-k), y = \frac{H}{H_0} > 1$$

背水の影響する範圍は理論上、無限大にして $l = \infty$ に於て $H = H_0$ 即ち $y = 1$, 此點に於ては Φ_1, Φ_2 共に無限大となるを以て、 $y = y_1 = 1.001$ 即ち $\frac{H}{H_0} = 1.001$ を以て Φ_1 及び Φ_2 の數値計算上の極限とする。

2. 低下背水の場合 此場合は $H/H_0 < 1$ なるを以て積分の都合上 $z = \frac{1}{y} = \frac{H_0}{H} > 1$ と置けば (547) 式は

$$\frac{i_0 dx}{H_0} = -\frac{z^{-2} dz}{1-z^r} + K \frac{z^{2s+1} dz}{1-z^r} = \frac{z^{-2} dz}{z^r-1} - K \frac{z^{2s+1} dz}{z^r-1} \dots \dots \dots (549)$$

$r > 1, z > 1$ にして右邊の z の函數は共に收斂級數に展開し得るを以て、 x より $x+l$ 迄即ち H より H_0 迄積分すれば

$$\frac{i_0 l}{H_0} = \Psi_1 \left(\frac{H_0}{H_0}\right) - \Psi_1 \left(\frac{H_0}{H}\right) - K \left[\Psi_2 \left(\frac{H_0}{H_0}\right) - \Psi_2 \left(\frac{H_0}{H}\right) \right] \dots \dots \dots (550)$$

茲に $\Psi_1 \left(\frac{H_0}{H}\right) = \Psi_1(z) = \int \frac{z^{-2}}{z^r-1} dz, \Psi_2 \left(\frac{H_0}{H}\right) = \Psi_2(z) = \int \frac{z^{2s+1}}{z^r-1} dz$

此場合に於ても Ψ_1 及び Ψ_2 は $z=1$ に於て無限大となるを以て積分の上端を $z = \frac{H_0}{H} = 1.001$ 即ち $y = \frac{H}{H_0} = 0.999$ に取る。

(2) 背水函數の計算

1. 堰上背水の場合 $r = 2s + 2m(s-k)$ 中、 s, \dots 断面函數の冪數、 m, \dots 流速公式の徑深の冪數、 k, \dots 潤邊函數の冪數...にして開水路、暗渠等の自由水面を有する總ての水路を通じ

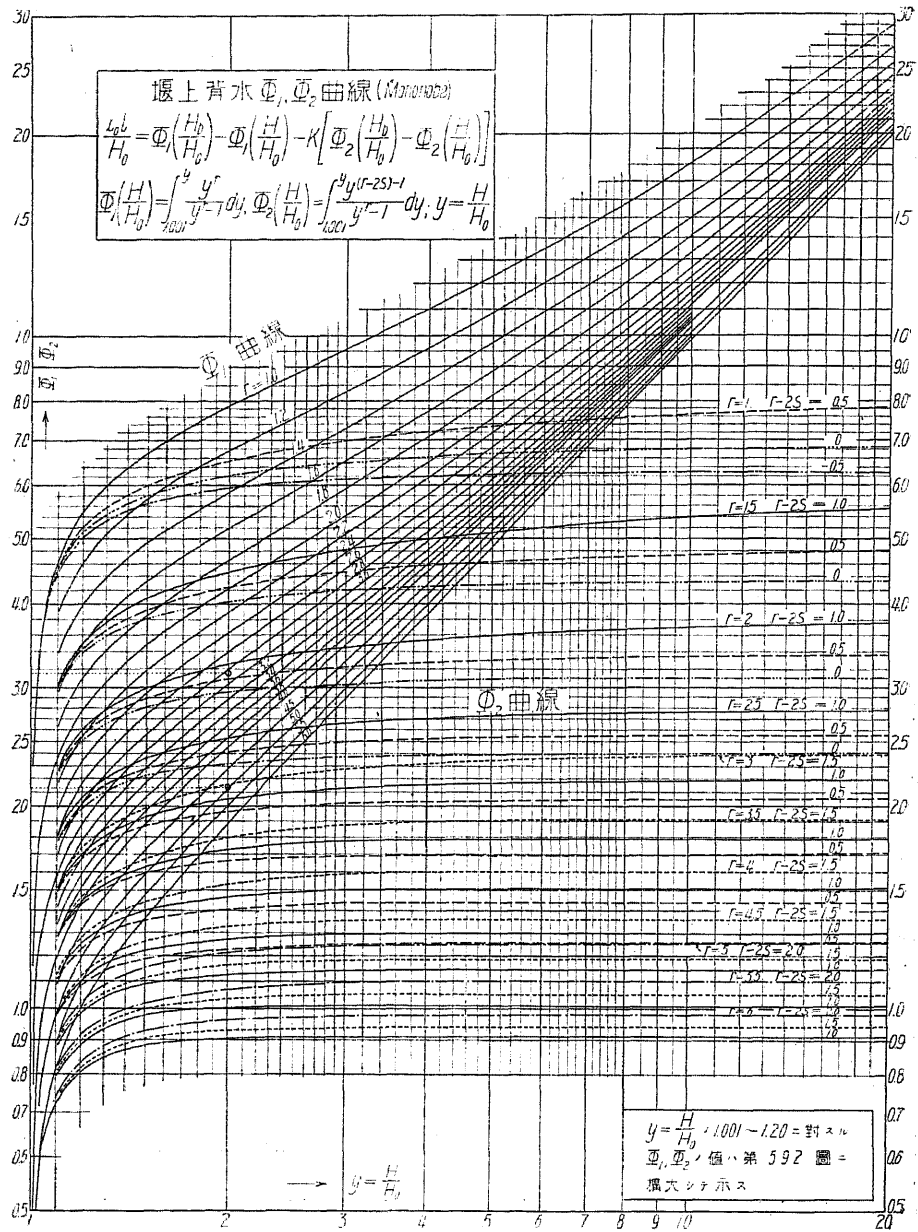
$$1 < r < 6, 0.5 < s \leq 2.0$$

なるを以て (547) 式の右邊兩項の $\frac{1}{y^r-1}$ は收斂級數に展開する事を得、夫等の積分 Φ_1 及び Φ_2 は次の無限級數を以て表はす事を得る。

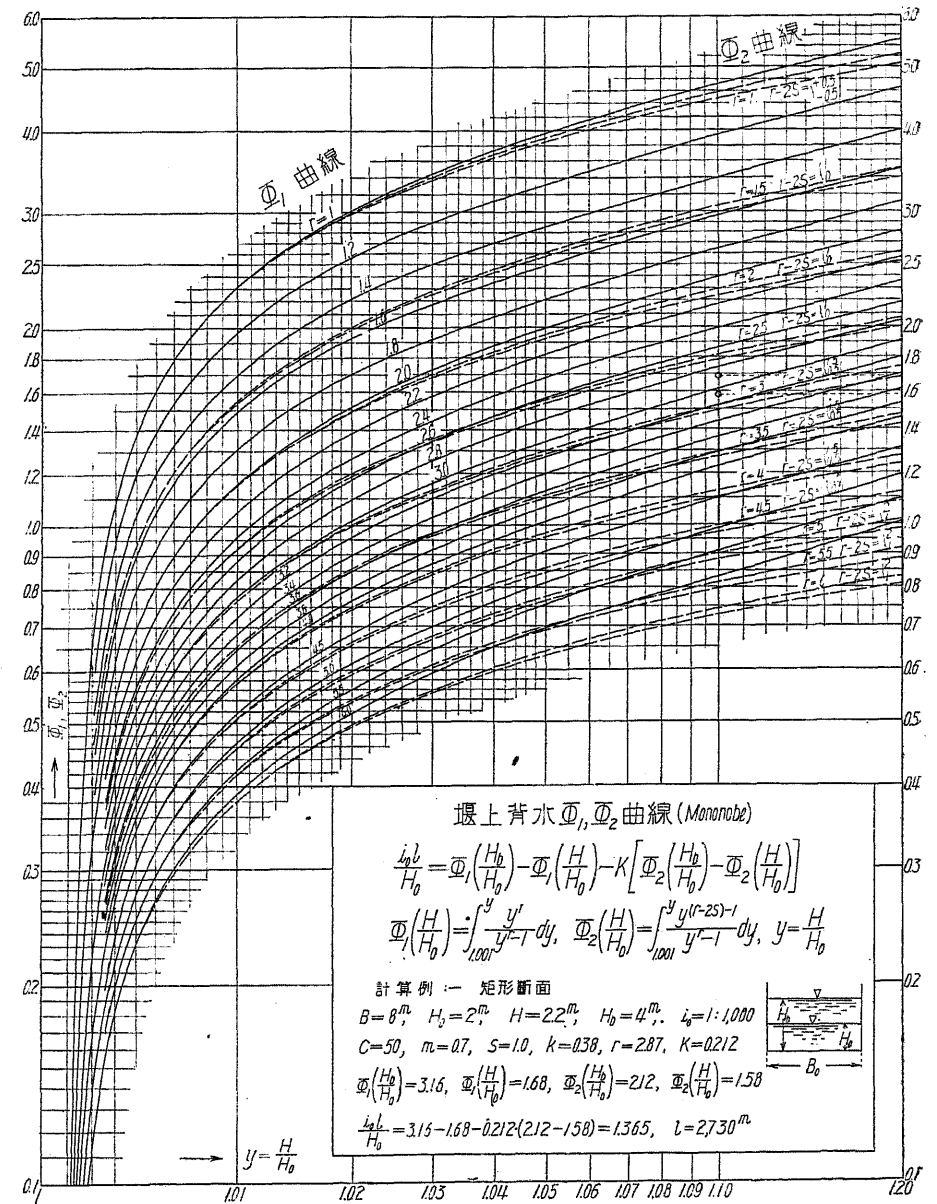
$$\Phi_1(y) = y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{-(nr-1)}}{nr-1}, \Phi_2(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{-(nr+2s)}}{nr+2s} \dots \dots \dots (551)$$

然るに實際の數計算に於て y が 1 に近き場合は級數の收斂頗る徐々にして意想外の手數を要するが、 r 及び s が共に整數なるか又はある特種の値を有する時は普通の積分法に依て有限項を以て表はし得るを以て、實際の數表の作成には之等の場合に對して Φ_1 及び Φ_2 を直接計算し、 r 及び s の中間の値に對しては挿入法に依て求むる。

斯くして求めたる積分値に依り Φ_1 及び Φ_2 の曲線群を作成すれば、殆んど如何なる場合の堰

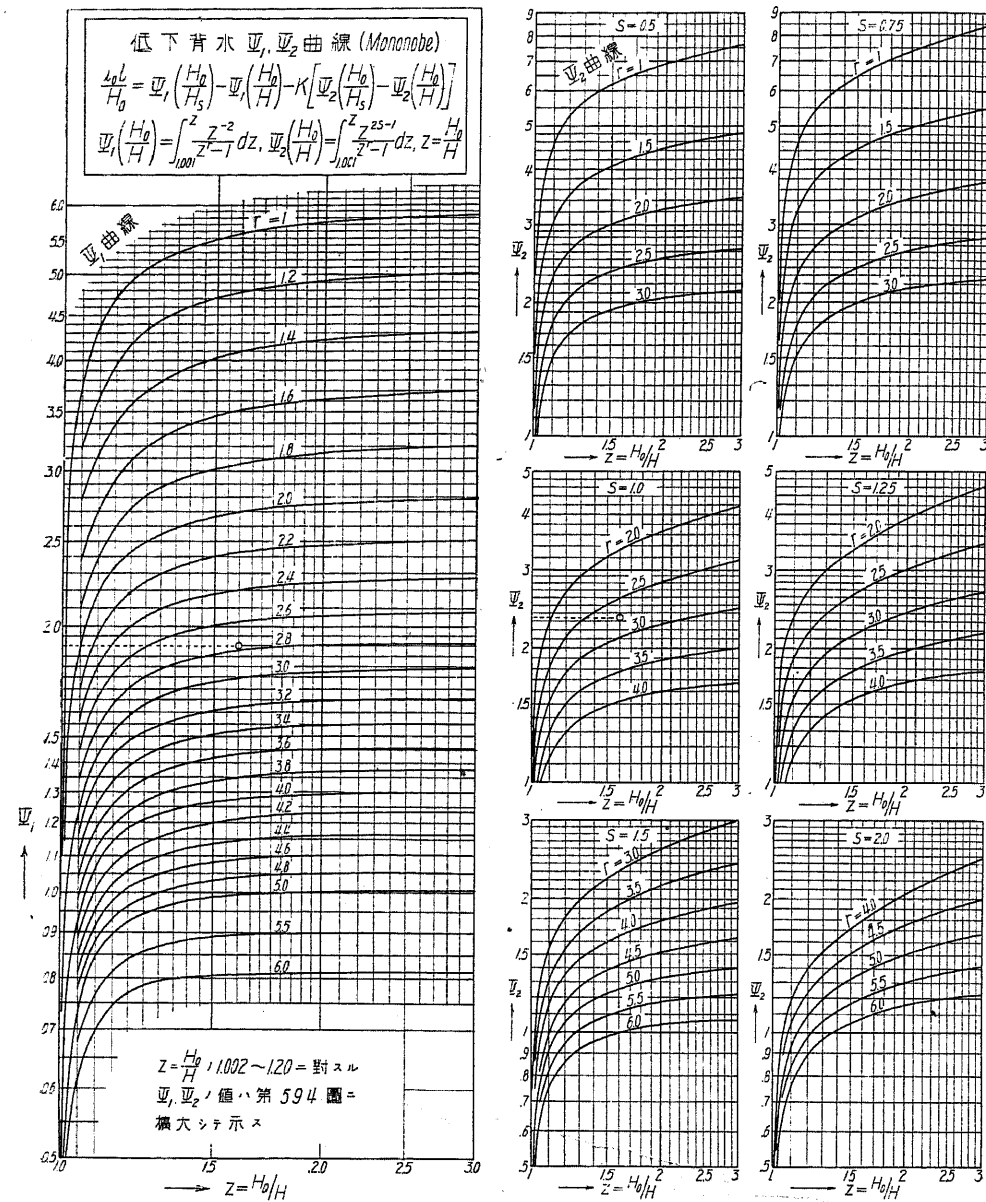


第 591 圖 堰上背水 Φ_1, Φ_2 曲線 (N.M.)

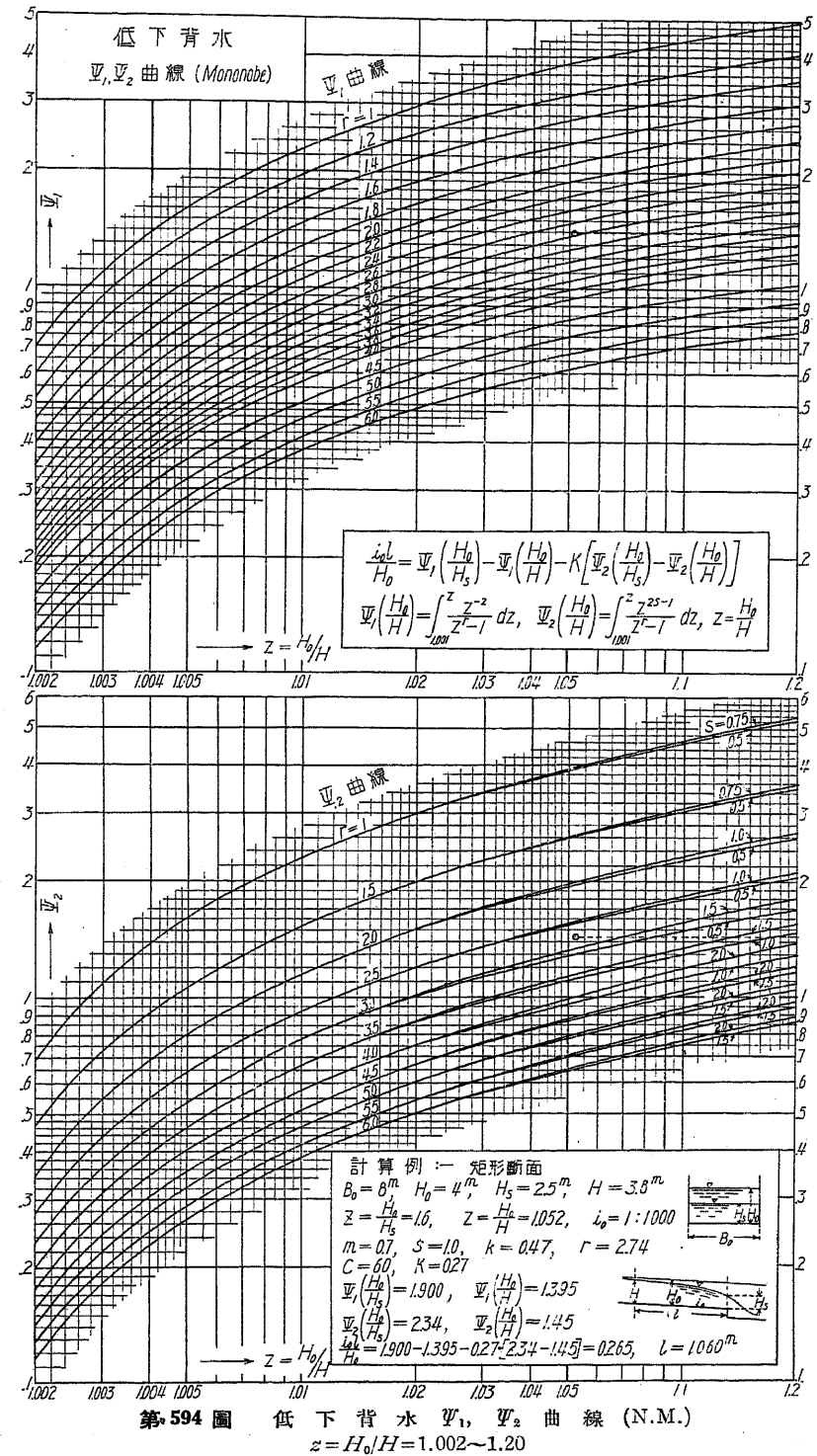


第 592 圖 堰上背水 Φ_1, Φ_2 曲線 (N.M.)

$v = H/H_0 = 1.001 \sim 1.20$



第 593 圖 低下背水 Ψ_1, Ψ_2 曲線 (N.M.)



第 594 圖 低下背水 Ψ_1, Ψ_2 曲線 (N.M.)
 $z = H_0/H = 1.002 \sim 1.20$

上背水と雖も容易に正確に計算し得る。依て $r=1\sim 6$, $r-2s=-0.5\sim +2.0$ に對して ϕ_1 及び ϕ_2 の値を計算して曲線群を作成し第 591 圖及び第 592 圖に之を示した。從來發表されたる背水曲線の圖表は r 及び s の僅かに一つの組合せに過ぎず、圖中の ϕ_1 及び ϕ_2 の或一つの曲線に相當する。

例へば Grashof-Bresse 公式に於ては廣矩形断面なるを以て

$$A=BH, S=B, \therefore s=1, k=0; \text{ 且つ } v=CR^{0.5}I^{0.5} \text{ にして,}$$

$$m=0.5 \therefore r=3.0, r-2s=1.0$$

Tolkmitt 公式は廣拋物線断面に Chézy 流速公式を用ひたるを以て $m=0.5$ にして

$$A=\frac{2}{3}BH, S=B=B_0\sqrt{\frac{H}{H_0}}, R=\frac{2}{3}H \therefore s=1.5, k=0.5 \therefore r=4.0$$

而て Rühlmann 公式の如きは $s=1, r=3$ の場合に於て更に ϕ_2 を棄てたるものである。

2. 低下背水の場合 此場合背水函数は $\Psi_1(z)=\int \frac{z^{-2}}{z^r-1} dz, \Psi_2(z)=\int \frac{z^{2s-1}}{z^r-1} dz$ にして何れも z の無限級数として表はされ

$$\Psi_1(z)=-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-(nr+1)}}{nr+1}, \Psi_2(z)=-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-nr+2s}}{nr-2s} \dots \dots \dots (552)$$

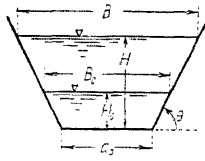
而て r 及び s の整数値又は特別の値に對しては積分式は有限項を以て表はさるゝを以て、夫等の數値を計算すれば中間の r 及び s に對しては挿入法に依て容易に積分値を求め得る。依て $r=1\sim 6, s=0.5\sim 2.0$ に對して Ψ_1 及び Ψ_2 の値を計算し第 593 及び第 594 圖に曲線群を以て之を示した。

(3) 斷面積、潤邊及び徑深 普通用ふる水路に於ては斷面形の如何に複雑なる場合と雖も直線形、拋物線及び圓弧の組合せに依て充分精確に表はし得るを以て、之等三種の場合に對し水深と A, S, R 又は s 及び k の關係を計算して曲線を以て表はし置けば、任意の斷面形に於て所要の水深に對する s 及び r を容易に求め得る。

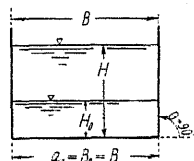
1. 直線形断面 此場合一般的に斷面積 A を表はせば

$$A=a_0H+aH^2 \text{ 茲に } a=\cot \theta, \theta \dots \text{岸線の、底線の延長に對する傾角}$$

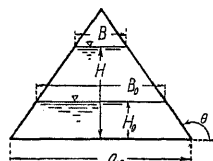
梯形 (第 595 圖)	矩形 (第 596 圖)	三角形 (第 597 圖)	V 字形 (第 598 圖)
$a_0 = a_0$	$a_0 = B = B_0$	a_0	0
$\cot \theta$	+	0	+



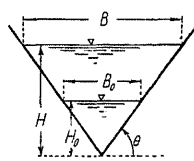
第 595 圖



第 596 圖



第 597 圖



第 598 圖

$$\therefore \frac{A}{A_0} = \frac{a_0H+aH^2}{a_0H_0+aH_0^2} = \frac{y+\frac{a}{\mu}y^2}{1+\frac{a}{\mu}} = y^k \text{ と置く} \dots \dots \dots (553)$$

$$\text{茲に } y = \frac{H}{H_0}, \mu = \frac{a_0}{H_0}, \frac{a}{\mu} = \frac{H_0}{a_0} \cot \theta$$

次に潤邊 S に對しては $S=a_0+2H\sqrt{1+a^2}$

$$\therefore \frac{S}{S_0} = \frac{a_0+2H\sqrt{1+a^2}}{a_0+2H_0\sqrt{1+a^2}} = \frac{1+2y\sqrt{\frac{1+a^2}{\mu^2}}}{1+2\sqrt{\frac{1+a^2}{\mu^2}}} = y^k \text{ と置く} \dots \dots \dots (554)$$

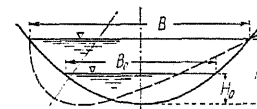
然る時は y の冪數 s 及び k は $y=H/H_0$ に依て變するを以て、 $y=0.1$ より 20 迄に對し $\frac{a}{\mu}$ 及び $\frac{1+a^2}{\mu^2}$ の種々の値に對して s 及び k を計算し曲線群を以て表はせば第 601 圖の如し。

2. 拋物線断面 $A=\frac{2}{3}BH, A_0=\frac{2}{3}B_0H_0, B=B_0\sqrt{\frac{H}{H_0}}$

$$\therefore \frac{A}{A_0} = y^{\frac{3}{2}} = y^k \therefore s=1.5 = \text{const.}$$

$$S=2H_0 \left[\sqrt{y \left(y + \frac{B_0^2}{16H_0^2} \right)} + \frac{B_0^2}{16H_0^2} \ln \frac{\sqrt{y} + \sqrt{y + \frac{B_0^2}{16H_0^2}}}{\frac{B_0}{4H_0}} \right]$$

$$\therefore \frac{S}{S_0} = \frac{\sqrt{y \left(y + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2} \right)} + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2} \ln \frac{\sqrt{y} + \sqrt{y + \frac{B_0^2}{16H_0^2}}}{\frac{B_0}{4H_0}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2}} + \frac{1}{16} \frac{B_0^2}{H_0^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{B_0^2}{16H_0^2}}}{\frac{B_0}{4H_0}}} = y^k \text{ と置く} \dots (555)$$



第 599 圖

$y=0.1\sim 20$ に就き B_0/H_0 の種々の値に對し k の値を算出し第 602 圖に曲線群を以て示す。

3. 圓形断面 半徑を r とし潤邊の中心角の $\frac{1}{2}$ を θ とする。

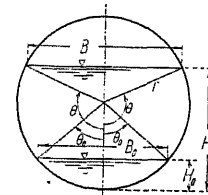
$$A=r^2 \arccos \left(\frac{r-H}{r} \right) + (H-r)\sqrt{2Hr-H^2}$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\arccos(1-x) + (x-1)\sqrt{2x-x^2}}{\arccos(1-x_0) + (x_0-1)\sqrt{2x_0-x_0^2}} = y^k \text{ と置く} \dots (556)$$

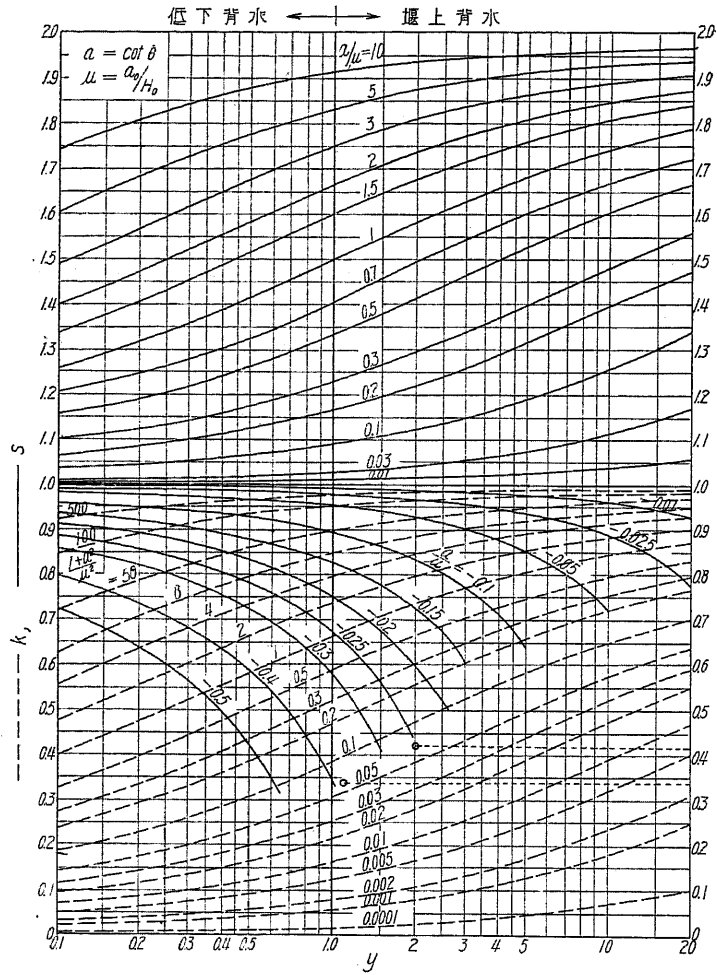
$$\text{茲に } x = \frac{H}{r}, x_0 = \frac{H_0}{r}, y = \frac{H}{H_0} = \frac{x}{x_0}$$

$$S=2\theta r = 2r \arccos \left(\frac{r-H}{r} \right) \therefore \frac{S}{S_0} = \frac{\arccos(1-x)}{\arccos(1-x_0)} = y^k \dots (557)$$

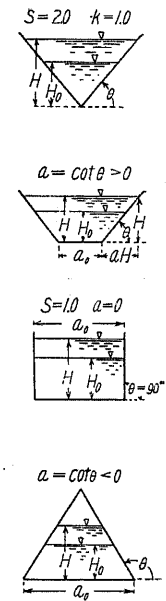
$y=0.1\sim 20$ に就き $x_0 = \frac{H_0}{r}$ の種々の値に對し s 及び k の値を算出して第 603 圖に示す。



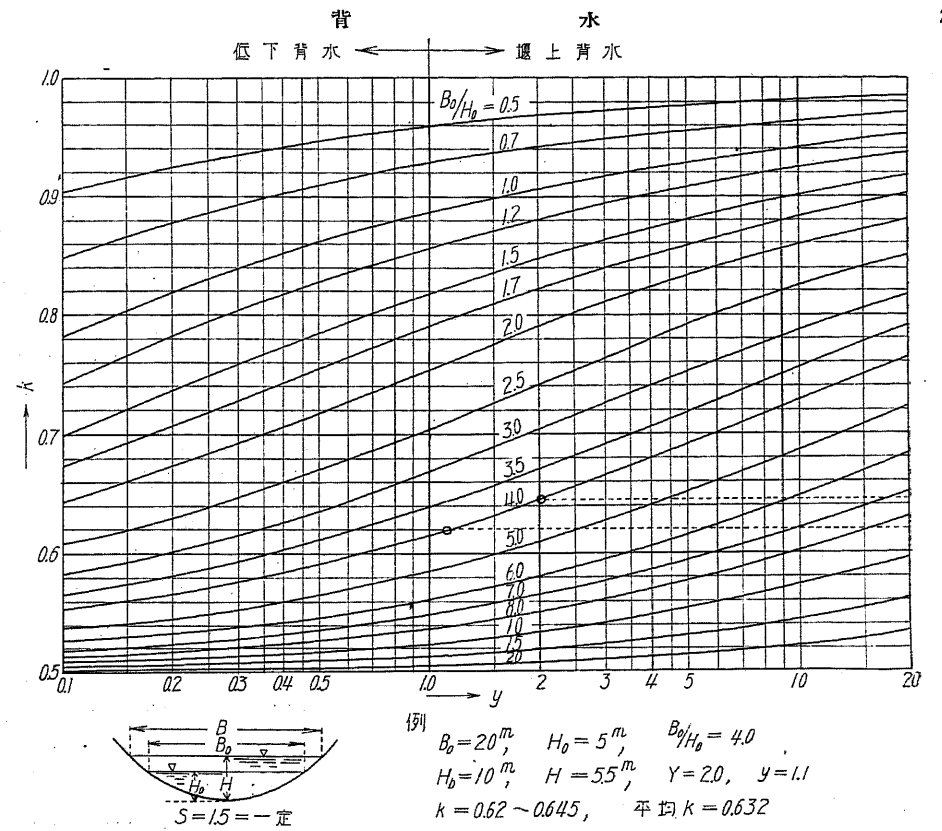
第 600 圖



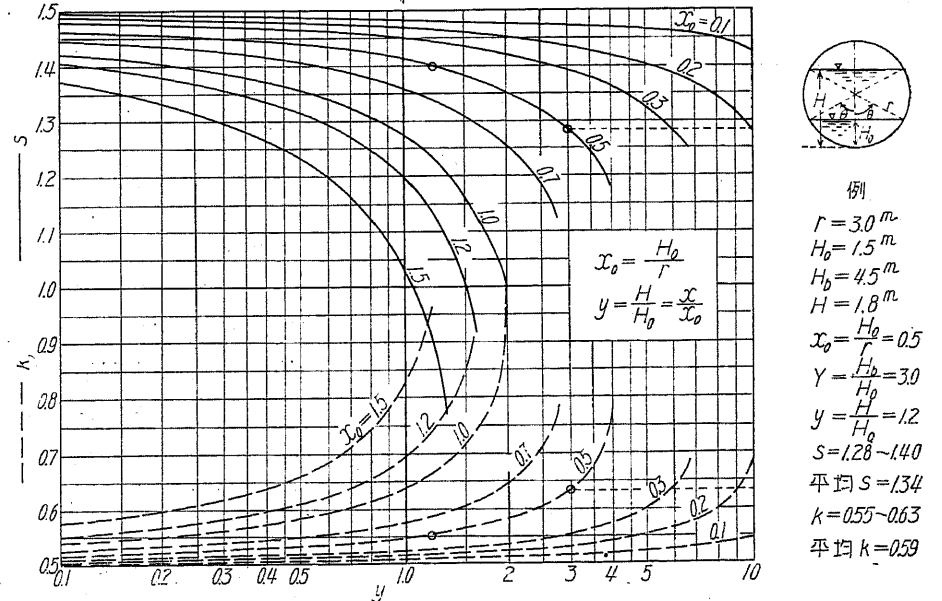
第 601 圖 直 線 形 斷 面 (N.M.)



例 矩形断面
 $a_0 = 8^m, H_0 = 2^m$
 $H_b = 4^m, H = 22^m$
 $Y = 2.0, y = 1.1$
 $\mu = 4, a = 0$
 $\frac{a}{\mu} = 0, \frac{l+a^2}{\mu^2} = 0.0625$
 $S = 1.0 = \text{一定}$
 $k = 0.34 \sim 0.42$
 平均 $k = 0.38$



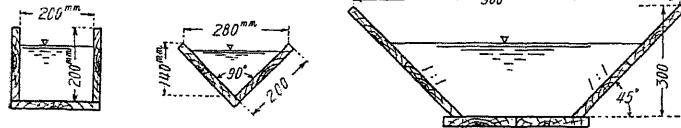
第 602 圖 拋 物 線 斷 面 (N.M.)



第 603 圖 圓 形 斷 面 (N.M.)

(4) 實驗竝に在來公式の誤差

1. 實驗水路及び實驗方法 實驗水路は第 604, 605 及び 606 圖に其斷面形を示す如く, (a) 各邊 20 cm の矩形, (b) 各邊 20 cm の直角 V 字形及び (c) 底邊 30 cm 兩側法 1:1, 最大深 30 cm の梯形の三種の



第 604 圖

第 605 圖

第 606 圖

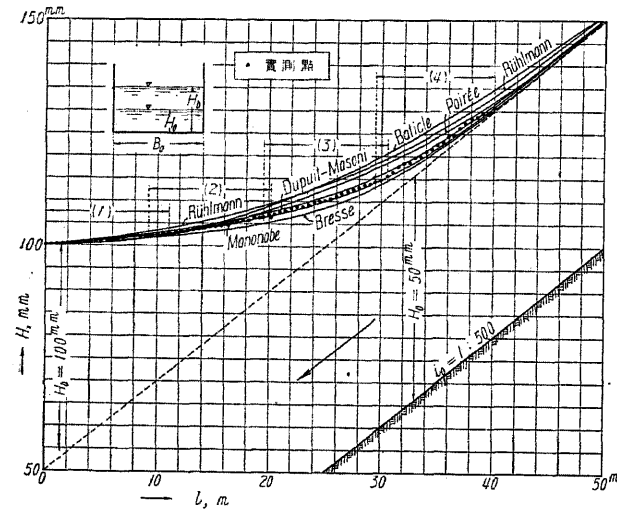
木樋を用ひ、長はさ (a), (b) 各 13 m, (c) 12 m にして、同一斷面に於ても粗度の影響を究むるため内面を入念に鈹仕上げせる滑面水路と、之に 20 番亜鉛引鐵線 3/8"

目の金網を張りたる粗面水路との兩種を使用した。床勾配は堰上の場合には 1:500 に一定し、低下の場合には 1:500, 1:1000 及び 1:2000 の三種となし計 12 組の實驗を行ひ、夫等の結果と著者竝に在來公式に依る計算値とを比較對照して、著者公式の實驗と極めてよく一致すること、在來公式の誤差の著大にして到底實用に耐えざる事とを明かならしめた。

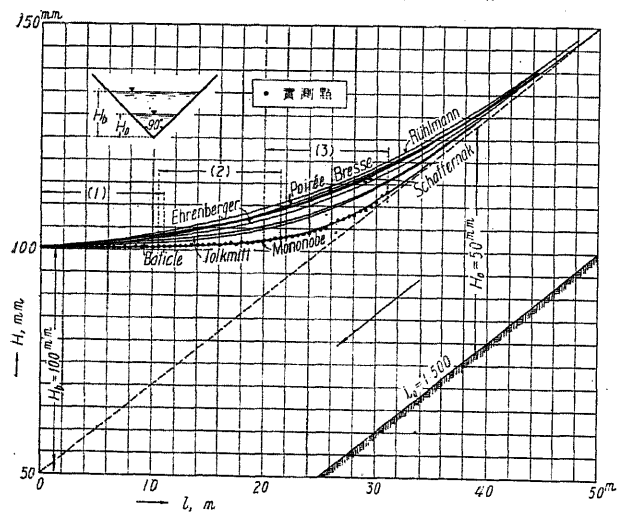
而して從來背水曲線の實測の至難とせられたる主因は、極めて長き等齊水路を要すると考へられたる爲なるが、理論上より見て堰上水深 H_0 が等速流水深 H_c の 2 倍なる場合の背水曲線は $H_0/H_c=2.0$ より $H_0/H_c=1.6$ 迄、同 1.6 より 1.2 迄、1.2 より 1.05 迄等の如き多くの背水曲線を接続せしめたものに等しきを以て、以下に述ぶる實驗に於ては一背水曲線に對し 3 組以上 9 組の測定値を連結して全體の背水曲線を得た。

2. 堰上背水 堰上背水の實驗は合計 5 組なるも茲に代表的場合として滑面矩形及び滑面 V 字形の二場合を掲ぐる。

i. 滑面矩形水路 (第 607 圖) 等速流に於て種々の水深に對して實驗せ



第 607 圖 滑面矩形水路

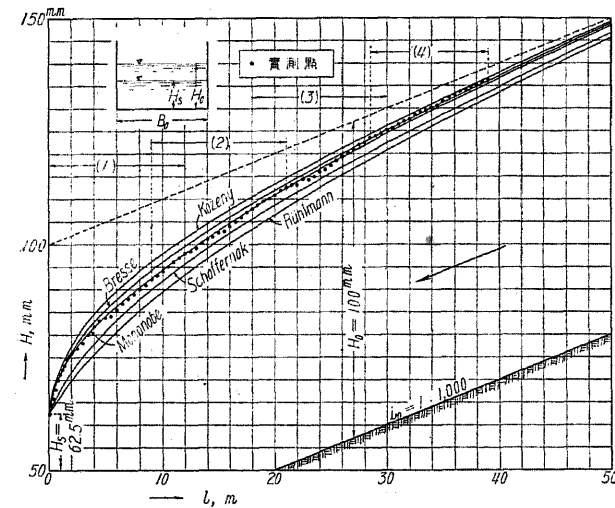


第 608 圖 滑面 V 字形水路

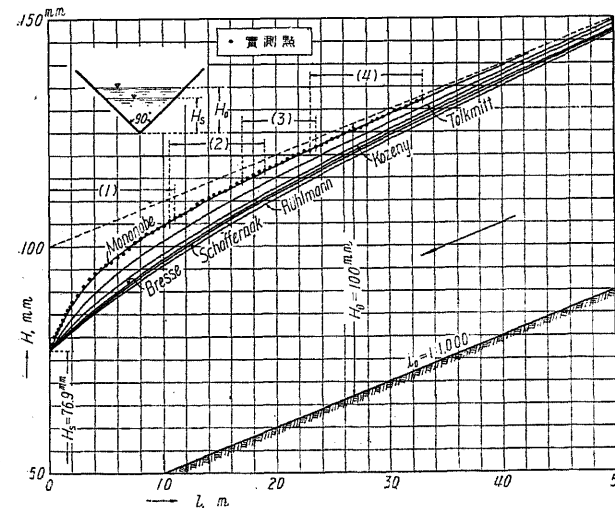
る結果 $v=CR^m i^{0.5}$ 中 $m=0.65$ にして、背水は $i_0=1:500$, $H_0=50$ mm, $H_c=100$ mm, $v_c=0.49$ m/sec の場合に就て測定し、其結果を第 607 圖に黑點を以て示す。尙、比較のため著者その他の公式に依る計算背水曲線を同圖に示す。

ii. 滑面 V 字形水路 (第 608 圖) 此場合、等速流平均流速は $v=CR^{0.7} i^{0.5}$ を以て表はされ i_0, H_0, H_c 等は i. の場合と同じく、實測値と各公式計算値との比較を第 608 圖に示す。

3. 低下背水 低下背水の實驗は計 7 組に就き行ひたるも、次に例として矩形及び V 字形斷面の滑面の場合を掲ぐる。



第 609 圖 滑面矩形水路



第 610 圖 滑面 V 字形水路

上記の實驗に徹して明かなる如く、矩形水路に於ける堰上背水の場合に於ては Chézy 流速公式を用ひ C を常數と假定する結果は背水距離を過大ならしめ、即ち $i_0 l/H_0$ の誤差は正である。廣斷面の假定は反對に $i_0 l/H_0$ を過小ならしめ其誤差の絕對値は前者の數倍に達し、次に流速水頭變化を無視する爲の誤差は $i_0 l/H_0$ を過大ならしめ其影響は粗度小に勾配急なるに従つて甚しい。

i. 滑面矩形水路 (第 609 圖) 2. の
i. と同一の水路にして
 $i_0=1:1000$, $H_0=100$ mm,
 $H_c=62.5$ mm, $v_c=0.422$ m/sec,
 $Z=H_0/H_c=1.60$

堰上背水の場合と同様に實測値竝に各公式計算値との比較を第 609 圖に示す、著者の計算値は充分によく實測と一致する。

ii. 滑面 V 字形水路 (第 610 圖) 2. の
ii. と同一の水路にして
 $i_0=1:1000$, $H_0=100$ mm,
 $H_c=76.9$ mm, $v_c=0.33$ m/sec,
 $Z=H_0/H_c=1.30$

實測値と各公式の計算値を第 610 圖に示す。

上記の實驗に徹して明かなる如く、矩形水路に於ける堰上背水の場合に於ては Chézy 流速公式を用ひ C を常數と假定する結果は背水距離を過大ならしめ、即ち $i_0 l/H_0$ の誤差は正である。廣斷面の假定は反對に $i_0 l/H_0$ を過小ならしめ其誤差の絕對値は前者の數倍に達し、次に流速水頭變化を無視する爲の誤差は $i_0 l/H_0$ を過大ならしめ其影響は粗度小に勾配急なるに従つて甚しい。

V 字形水路に於ては、流速公式及

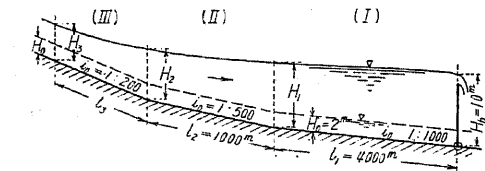
び流速水頭に因る誤差は矩形水路の場合と略同様なるも、廣矩形斷面の假定は實際と甚しく隔離し、極めて

過大なる $i_0 l/H_0$ を與ふるを以て合成誤差は +50% 以上に達する場合もある。

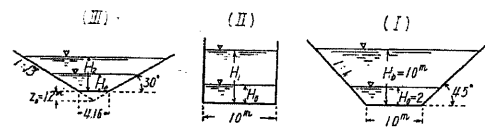
次に低下背水の場合に於ても矩形水路に於ては流速公式の $m=0.5$ 並に流速水頭の無視は $\frac{i_0 l}{H_0}$ を過大ならしめ正の誤差を生ずるが、廣矩形の假定は $\frac{i_0 l}{H_0}$ を過小ならしむるを以て各公式の誤差は正負二種にして最大 +90% を超ゆる場合もある。

V 字形水路に於ては廣矩形の假定並に流速水頭の無視は $\frac{i_0 l}{H_0}$ を著しく大ならしめ、更に流速公式の不適當も之を過大ならしむるを以て、結局甚大なる正の誤差を生じ Rühlmann 公式の如きは最大誤差 +400% 以上に達する。

(4) 断面形の變化する水路の堰上背水計算例 第 611 圖及び第 612 圖に示す如き床勾配及び断面形の異なる三種の堰面水路 (Prismatic channels) I, II 及び III の連結せる水路に於て等速流状態の水深が總て一樣とし、水路の流量 $30 \text{ m}^3/\text{sec}$, 等速流水深 $H_0=2 \text{ m}$ なる場合に水路の下流端に於て $H_0=10 \text{ m}$ に堰上ぐる時の各接續點に於ける水深を求むる。



第 611 圖



第 612 圖

I. 梯形断面 $a_0=10 \text{ m}$, 法勾配 $1:1$, $i_0=1:1000$, $H_0=2 \text{ m}$, $H_b=10 \text{ m}$, $A_0=24 \text{ m}^2$,

$$v_0 = \frac{Q}{A_0} = \frac{30}{24} = 1.25 \text{ m/sec},$$

$$R_0 = \frac{24}{10+2 \cdot 2\sqrt{2}} = 1.532 \text{ m}$$

Forchheimer 流速公式を用ひ $v_0 = CR_0^{0.7} i_0^{0.5}$,

$$\therefore C = \frac{v_0}{R_0^{0.7} i_0^{0.5}} = \frac{1.25}{1.532^{0.7} \sqrt{1000}} = 29.3$$

$$\therefore \text{粗度係数 } n_2 = \frac{1}{C} = 0.034$$

II. 矩形断面 $a_0=B_0=10 \text{ m}$, $i_0=1:500$, $H_0=2 \text{ m}$, $A_0=20 \text{ m}^2$, $v_0=\frac{30}{20}=1.5 \text{ m/sec}$,

$$R_0 = \frac{20}{10+2 \cdot 2} = 1.43 \text{ m}, \quad \therefore C = \frac{1.5}{1.43^{0.7} \sqrt{500}} = 26.2 \quad \therefore n_2 = \frac{1}{C} = 0.038$$

III. 類似三角形 $a_0=2 \cdot \sqrt{3} z_0=4.16 \text{ m}$, 法勾配 $1:\sqrt{3}$, $i_0=1:200$, $H_0=2 \text{ m}$,

$$A_0 = \cot 30^\circ [(H_0+z_0)^2 - z_0^2] = 15.23 \text{ m}^2, \quad R_0 = \frac{15.23}{4.16+2 \cdot 4} = 1.252 \text{ m}, \quad v_0 = \frac{30}{15.23} = 1.97 \text{ m/sec},$$

$$C = \frac{1.97}{1.253^{0.7} \sqrt{200}} = 23.8 \quad \therefore n_2 = \frac{1}{C} = 0.042$$

1. 著者の計算法

I. $Y = \frac{H_b}{H_0} = \frac{10}{2} = 5, \quad a = \cot \theta = 1, \quad \mu = \frac{a_0}{H_0} = \frac{10}{2} = 5, \quad \frac{a}{\mu} = 0.2, \quad \frac{1+a^2}{\mu^2} = 0.08$

今 I. の上流端に於て水深 $H_1=6 \text{ m}$ 即ち $y_1 = \frac{H_1}{H_0} = 3.0$ と假定すれば第 601 圖より $s=1.26 \sim 1.32$. 平均 $s=1.29$, $k=0.50 \sim 0.56$ 平均 $k=0.53$

$$m=0.7 \text{ に取れば } r=2s+2m(s-k)=3.64, \quad r-2s=1.06, \quad K_1 = as \frac{v_0^2}{gH_0} = \frac{10}{9} \cdot 1.29 \cdot \frac{1.25^2}{9.8 \cdot 2} = 0.114$$

$$(548) \text{ 式より } \frac{i_0 l_1}{H_0} = \Phi_1 \left(\frac{H_b}{H_0} \right) - \Phi_1 \left(\frac{H_1}{H_0} \right) - K_1 \left[\Phi_2 \left(\frac{H_b}{H_0} \right) - \Phi_2 \left(\frac{H_1}{H_0} \right) \right]$$

$$\text{然るに } l_1=4000 \text{ m} \quad \therefore \frac{i_0 l_1}{H_0} = \frac{4000}{2 \cdot 1000} = 2.0$$

$$\text{第 591 圖及び第 592 圖の } \Phi_1, \Phi_2 \text{ 曲線圖より } \Phi_1 \left(\frac{H_b}{H_0} \right) = \Phi_1(5) = 5.70, \quad \Phi_2 \left(\frac{H_b}{H_0} \right) = \Phi_2(5) = 1.72$$

故に此場合 (548) 式の第二項即ち流速水頭の變化に因る項は、第一項即ち摩擦勾配の項に比して微小なるを以て試算的に $\frac{H_1}{H_0} = 3.0$ とし $\Phi_2 \left(\frac{H_1}{H_0} \right)$ を求むれば $\Phi_2(3) = 1.71$

$$\therefore \frac{i_0 l_1}{H_0} = 2.0 = 5.70 - \Phi_2 \left(\frac{H_1}{H_0} \right) - 0.114(1.72 - 1.71), \quad \therefore \Phi_2 \left(\frac{H_1}{H_0} \right) = 3.70$$

然るに第 591 圖より $\Phi_2=3.70$ に對する H_1/H_0 を求むれば 3.02 にして殆んど 3 に等しい。故に

$$H_1 = 3.02 H_0 = 6.04 \text{ m}$$

$$\text{II. } H_1=6.04 \text{ m}, \quad H_1/H_0=3.02, \quad a=0, \quad \mu = \frac{B_0}{H_0} = 5, \quad \frac{a}{\mu} = 0, \quad \frac{1+a^2}{\mu^2} = 0.04$$

$$\therefore s=1.0$$

依て $H_2=4 \text{ m}$ と假定すれば $\frac{H_2}{H_0} = 2.0$, 故に第 601 圖より $k=0.36 \sim 0.41$, 平均 $k=0.385$

$$\therefore r=2.86, \quad r-2s=0.86; \quad K_2 = \frac{10}{9} \cdot 1 \cdot \frac{1.5^2}{9.8 \cdot 2} = 0.128, \quad \frac{i_0 l_2}{H_0} = \frac{1000}{2 \cdot 500} = 1.0,$$

$$\Phi_1 \left(\frac{H_1}{H_0} \right) = 4.24, \quad \Phi_2 \left(\frac{H_1}{H_0} \right) = 2.23, \quad \frac{H_2}{H_0} = 2.05 \text{ と假定すれば } \Phi_2 \left(\frac{H_2}{H_0} \right) = 2.13$$

$$\therefore \frac{i_0 l_2}{H_0} = 1.0 = 4.24 - \Phi_2 \left(\frac{H_2}{H_0} \right) - 0.128(2.23 - 2.13) \quad \therefore \Phi_1 \left(\frac{H_2}{H_0} \right) = 3.24 - 0.01 = 3.23$$

$$\therefore \frac{H_2}{H_0} = 2.07 \quad \therefore H_2 = 2.07 H_0 = 4.14 \text{ m}$$

$$\text{III. } H_2=4.14 \text{ m}, \quad \frac{H_2}{H_0} = 2.07, \quad a_0=4.16 \text{ m}, \quad a = \cot \theta = \sqrt{3}, \quad \mu = \frac{4.16}{2} = 2.08,$$

$$\frac{a}{\mu} = \frac{1.732}{2.08} = 0.833, \quad \frac{1+a^2}{\mu^2} = 0.391$$

第 601 圖より $s=1.45 \sim 1.53$, 平均 $s=1.50$, $k=0.56 \sim 0.64$, 平均 $k=0.60$

$$\therefore r=4.54, \quad r-2s=1.54; \quad K_3 = \frac{10}{9} \cdot 1.5 \cdot \frac{1.97^2}{9.8 \cdot 2} = 0.33$$

(i) $\frac{H_3}{H_0} = 1.1$ なる断面の H_2 断面よりの距離を l_3 とすれば

$$\frac{i_0 l_3}{H_0} = \Phi_1 \left(\frac{H_2}{H_0} \right) - \Phi_1 \left(\frac{H_3}{H_0} \right) - K_3 \left[\Phi_2 \left(\frac{H_2}{H_0} \right) - \Phi_2 \left(\frac{H_3}{H_0} \right) \right] = 2.33 - 1.09 - 0.33(1.33 - 0.99) = 1.128$$

$$\therefore l_3 = 1.128 \cdot 2 \cdot 200 = 450 \text{ m}, \quad l = l_1 + l_2 + l_3 = 5450 \text{ m}$$

(ii) $\frac{H_3}{H_0} = 1.01$ 迄の距離を l_3 とすれば、 $\frac{i_0 l_3}{H_0} = 2.33 - 0.51 - 0.33(1.33 - 0.50) = 1.55$

$$\therefore l_3 = 1.55 \cdot 400 = 620 \text{ m}, \quad l = l_1 + l_2 + l_3 = 5620 \text{ m}$$

(iii) $l_3=600 \text{ m}$ に於ける水深 H_3 を求むるに、 $\frac{H_3}{H_0} = 1.014$ と假定すれば $\Phi_2 \left(\frac{H_3}{H_0} \right) = 0.57$

$$\frac{i_0 l_3}{H_0} = \frac{600}{2 \cdot 200} = 1.5 = 2.33 - \Phi_2 \left(\frac{H_3}{H_0} \right) - 0.33(1.33 - 0.57) = 0.58$$

$$\therefore \frac{H_2}{H_0} = 1.0137 \approx 1.014, \quad H_2 = 2.028 \text{ m} \approx 2.03 \text{ m}$$

2. Rühlmann 公式 (529) 式... $\frac{i_0 l}{H_0} = \varphi_r \left(\frac{H_2}{H_0} \right) - \varphi_r \left(\frac{H_1}{H_0} \right)$, 氏の數表より

$$I. \quad \frac{i_0 l}{H_0} = 2.0 = 5.3958 - \varphi_r \left(\frac{H_1}{H_0} \right) \quad \therefore \varphi_r \left(\frac{H_1}{H_0} \right) = 3.3958 \quad \therefore \frac{H_1}{H_0} = 3.036, \quad H_1 = 6.07 \text{ m}$$

$$II. \quad \frac{H_1}{H_0} = 3.036, \quad \varphi_r \left(\frac{H_2}{H_0} \right) = 3.3958 - 1.0 = 2.3958 \quad \therefore \frac{H_2}{H_0} = 2.099, \quad H_2 = 4.10 \text{ m}$$

$$III. (i) \quad \frac{H_2}{H_0} = 1.1 \text{ に於ては } \frac{i_0 l}{H_0} = 2.3958 - 0.8353 = 1.5605 \quad \therefore l_3 = 1.5605 \cdot 400 = 624 \text{ m}$$

$$(ii) \quad \frac{H_2}{H_0} = 1.01 \quad ,, \quad \frac{i_0 l}{H_0} = 2.3958 - 0.0067 = 2.3891 \quad \therefore l_3 = 2.3891 \cdot 400 = 956 \text{ m}$$

$$(iii) \quad l_3 = 600 \text{ m} \quad ,, \quad \varphi_r \left(\frac{H_2}{H_0} \right) = 2.3958 - 1.5 = 0.8958 \quad \therefore H_2 = 1.115 \cdot 2 = 2.23 \text{ m}$$

3. Bresse 公式... (528) 式 前同様に試算を用ひ

$$I. \quad \frac{H_1}{H_0} = 3.03, \quad H_1 = 6.06 \text{ m}; \quad II. \quad \frac{H_2}{H_0} = 2.088, \quad H_2 = 4.18 \text{ m}$$

$$III. \quad \frac{H_2}{H_0} = 1.1 \text{ に對し } l_3 = 570 \text{ m}, \quad \frac{H_2}{H_0} = 1.01 \text{ に對し } l_3 = 836 \text{ m}, \quad l_3 = 600 \text{ m に對し } H_2 = 2.16 \text{ m}$$

4. Tolkmitt 公式... (533) 式

$$I. \quad \frac{H_1}{H_0} = 3.01, \quad H_1 = 6.02 \text{ m}; \quad II. \quad \frac{H_2}{H_0} = 2.033, \quad H_2 = 4.07 \text{ m}$$

$$III. \quad \frac{H_2}{H_0} = 1.1 \text{ に對し } l_3 = 467 \text{ m}, \quad \frac{H_2}{H_0} = 1.01 \text{ に對し } l_3 = 649 \text{ m}, \quad l_3 = 600 \text{ m に對し } H_2 = 2.04 \text{ m}$$

第 106 表 各 公 式 の 比 較

	H_1	H_2	H_2 $l_3 = 600 \text{ m}$	l_3 $H_2/H_0 = 1.1$	l_3 $H_2/H_0 = 1.01$
Mononobe	6.04 m	4.17 m	2.03 m	450 m	620 m
Rühlmann	6.07	4.10	2.23	624	956
Bresse	6.06	4.18	2.16	570	836
Tolkmitt	6.02	4.07	2.04	467	649