第四章　水の流動に關する基本定理

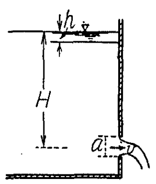
[18] 完全液體の流動

流體の運動に於ても特に個々の粒に關する場合は**運動** (Motion) と稱するも、連續して流るゝ場合には普通**流動** (Flow) と稱する。完全なる液體は流動中に於ても剪力が作用し得ざるを以て、周邊及び内部に於て摩擦抵抗 (Frictional resistance) も作用せぬ。從て全く假定的のものであるが、實際の水の流動は此假空的の運動に摩擦等に因る勢力消耗 (Consumption of Energy) の影響を加へたるものとして取扱ひ得る場合多く、從て實際水理學の基礎を爲して居る。

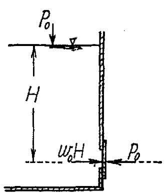
（1） **作用する力と運動の速度との關係—トリチエリーの定理** (Torricelli's theorem) 大なる水槽の側壁に於て (第106圖) 水面より H なる深さに中心を有する小なる孔を穿ち、之を扉を以て塞ぐ時は (第107圖)、

扉の内面に作用する壓力強度 $= p_1 = w_0H + p_0$

扉の外面に作用する壓力強度 = 大氣壓 $= p_0$



第 106 圖



第 107 圖

即ち扉は w_0H なる強度の水壓に依て外方に押さるる。從て扉を開放する時はその内側附近の水はこの力に依りて押し出され孔より流出する。一般に水の流出する孔を**流出孔** (Orifice) と言ふ。今,孔の面積を a, 流出の速度を v とすれば、單位時間に流出する水量即ち**流量** (Discharge) は $q = a \cdot v \cdot 1$ にして、外部より給水なき場合は同時に槽内水面は h だけ下る。今水面附近の槽内水面積を A とすれば、$A \cdot h$ なる體積の水が單位時間にその重心位置より $H - \frac{h}{2}$ だけ低き孔中心に移りたる事となり、從て槽内水は $w_0 h \cdot A\left(H - \frac{h}{2}\right)$ だけの位置の勢力 (Potential energy) を失ふ。一方孔を出づる水は速度 v を有し、單位時間に流出する $a \cdot v$ なる體積即ち $\frac{1}{g} w_0 a v$ なる質量の水は mass$\cdot \frac{v^2}{2}$ なる運動の勢力を有する。然るに完全液體の場合にして勢力の消耗なきを以て**勢力不滅律** (Law of Conservation of energy) に依り槽内水の失ひたる位置の勢力が流出水の運動の勢力に形を變へたるのみにして、その量に於ては兩者全く相等しい。從て

$$w_0 A \cdot h\left(H - \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2g} w_0 \cdot a \cdot v^3$$

然るに單位時間に槽内より去りし水量 $A \cdot h$ と孔より流出せし $a \cdot v$ とは同量なるを以て

$h = \frac{1}{A} a \cdot v$　從て　$$w_0 A \cdot h\left(H - \frac{h}{2}\right) = w_0 a \cdot v\left(H - \frac{a}{2A} v\right) = \frac{1}{2g} w_0 \cdot a \cdot v^3$$

$$\therefore \quad v^2 = 2g\left(H - \frac{1}{2} \frac{a}{A} \cdot v\right)$$

a/A が非常に小なりとすれば H に對し $\frac{1}{2}\frac{a}{A}v$ を棄て

$$v^2=2gH \quad \therefore\ v=\sqrt{2gH} \quad \therefore\ w_0H=w_0\frac{v^2}{2g} \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \ (78)$$

即ち H なる水頭を有する單位體積の水は $w_0\frac{v^2}{2g}$ なる運動の勢力と等値なる位置の勢力を有し、その値は水壓强度 w_0H を以て表はし得る。即ち靜止せる水に於ては凡ての點の單位體積の有する位置の勢力は相等しく、從て水面に於ける値と等しい。一般に**液體の單位體積の有する位置の勢力 (Potential Energy) E_p は最上位に存するものと同一にして、從て自由水面を有する場合は水面の單位體積の有する E_p と相等しい。**この特質は液體の固體と異なる重要なる性質である。

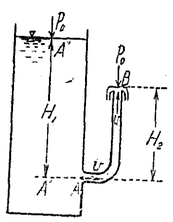
H なる水深にある孔即ち H なる水頭を有する孔より大氣中に流出する水の流速は、物體が何等の抵抗を受くる事なしに H なる高さを落下したる際に有する速度と同一である。換言すれば、水面に在りし水粒が無抵抗狀態にて H だけ自由に落下したる瞬間に有する速度に等しい。實在の水に於ては運動の際種々の抵抗を受くるを以て實際の流速は (78) よりも常に小である。尙 (78) 式の關係は伊太利の物理學者トリチエリー (Torricelli) (1608—1647) が實驗上より見出したるものにして普通 **Torricelli の定理** と呼ぶ。

(2) ベルヌーイの定理 (Bernoulli's Theorem)

(78) 式に依り

$$w_0\frac{v^2}{2g}=\frac{1}{2}\frac{w_0}{g}v^2=w_0H$$

即ち w_0H は流出孔内外の壓力强度の差にして、右邊は流出水の單位質量の有する運動の勢力である。從て一般に水のある部分の兩側に作用する壓力强度の差が w_0H なる時又は水頭の差が H なる時は、其部分は $\sqrt{2gH}$ なる流速を以て壓力の低き方に向ふて流動する。



第 108 圖

今流出孔にそれと等しき斷面積を有する管を取付け(第 108 圖)、水面より孔口 A 迄の高さを H_1, 孔口より管の出口迄の高さを H_2 とすれば、孔口の兩側の水壓の强さの差は $w_0(H_1-H_2)$ にして、之に因つて生ずる管内の流速を v とすれば勢力不滅律に依り單位體積の勢力は不變なるを以て

$$w_0(H_1-H_2)=\frac{1}{2}\frac{w_0}{g}v^2 \quad \therefore\ w_0H_1=w_0H_2+w_0\frac{v^2}{2g} \quad \cdots \ (79)$$

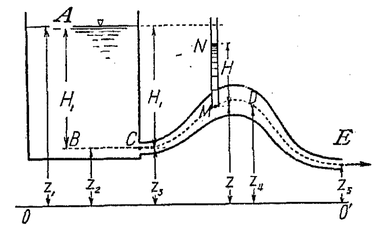
AA' 水平線を基線として勢力を計れば A' 及び A'' に於ける位置の勢力は互に等しく、且つ A 及び B に於ける位置及び運動の兩勢力の和に等しく、即ち運動に對する抵抗を無視すれば總ての點に於て單位體積の水の有する勢力は不變にして w_0H_1 に等しい。一例として第 108 圖に於ける水中の諸點の各種勢力を示せば

點	A''	A'	A	B
高さに依る位置の勢力 (E_p)	w_0H_1	0	0	w_0H_2
水壓强度に依る ,, (E_p)	0	w_0H_1	w_0H_2	0
流速に依る運動の勢力 (E_k)	0	0	$w_0\frac{v^2}{2g}=w_0(H_1-H_2)$,	$w_0\frac{v^2}{2g}=w_0(H_1-H_2)$
水の單位體積の有する全勢力 (E)	$=w_0H_1$	$=w_0H_1$	$=w_0H_1$	$=w_0H_1$

即ち單位體積の有する全勢力は不變にして、ある點に於て位置の勢力が減ずれば之に相當するたけ運動の勢力が增大するに過ぎず、これ水を完全液體と假定せる爲め運動に因る勢力の消耗なく、從て勢力不滅律の當然の結果である。

孔面積に比し水槽の水平斷面積極めて大なる時は槽内の流速極めて小にして實地上運動の勢力を無視し得るも、流出孔に接近せる部分に於ては流速漸次に增大し (第 109 圖)、槽内と雖も E_k を無視し得ざるも全勢力 $E=E_p+E_k$ は矢張り不變である。

第 109 圖



第 110 圖

次に完全液體を充たせる大なる水槽の下部に斷面一樣ならざる管を取付け (第 110 圖)、その他端 E を開放すれば水は大氣中に流出し、若し徐かに水を供給して水面の高さを不變に保てば E より流出する水の速度は一定する。此際勢力の消耗全く無しとすれば單位體積の液體の有する全勢力 E は $A, B, \ldots E$ 等の諸點に於て凡て同一である。今, 位置の勢力を表はす高さ即ち**位高** (Elevation head) を一の水平基線 oo' より計り之を z, 水壓を p, 流速を v にて表はせば各點に於て

點	A	B	C	D	E
位　高	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
壓力强度	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
流　速	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

とすれば、水面上の A に於て $p_1=p_0=$ 大氣壓, $v_1=v_2=0$; B, C を同高とすれば $z_2=z_3$, $p_5=p_0$ である。然るに全體が大氣中に置かるゝ場合は p_0 は凡ての點に共通に作用するを以て之を除外して考へて差支ない。依て

點	A	B	C	D	E
高さに依る E_p	w_0z_1	w_0z_2	w_0z_3	w_0z_4	w_0z_5
水壓に依る E_p	微小	p_2	p_3	p_4	微小
流速に依る E_k	微小	微小	$\frac{w_0}{2g}v_3^2$	$\frac{w_0}{2g}v_4^2$	$\frac{w_0}{2g}v_5^2$
$\Sigma=$ 全勢力 E	w_0z_1	$=w_0z_2+p_2$	$=w_0z+p_3+\frac{w_0}{2g}v_3^2$	$=w_0z_4+p_4+\frac{w_0}{2g}v_4^2$	$=w_0z_5+\frac{w_0}{2g}v_5^2$

本書に於ては**氣壓を加へたる場合の壓力を單に壓力** (pressure, static pressure), **氣壓を除外せる場合を水壓又は靜水壓** (water pressure) と稱して區別する。

即ち D 點の全勢力はその位置の如何に拘らず他の諸點の全勢力に等しく、從て完全液體に於ては凡ての點の全勢力は相等しい。

今 任意の點 M に於て基線上の高 z, 水壓 p, 流速 v とすれば

$$w_0z+p+\frac{w_0}{2g}v^2=w_0H_e=\text{const.} \qquad \therefore \quad z+\frac{p}{w_0}+\frac{v^2}{2g}=H_e=\text{const.} \qquad \cdots \quad \cdots \quad (80)$$

玆に w_0H_e は單位體積の水の有する全勢力にして、單位重量の有する全勢力即ち H_e を**勢力水頭** (Energy head) と稱し、勢力の消耗なき場合は凡ての點に於て相等しく之を**ベルヌーイの定理** (Bernoulli's theorem) と稱し水理學上極めて重要である。

第 110 圖に於て M 點の水壓强度は p なるを以て此點に MN なる小管を立つれば水は管中に上昇して M 點上 H の高さ迄昇り $w_0H=p$ となる。

各種の水頭を區別する爲に普通次の名稱を用ふる。

$\frac{p}{w_0}=H$…**壓力水頭** (Pressure head); $\frac{v^2}{2g}$…**流速水頭** (Velocity head)

z…**位高又は位高水頭** (Elevation 又は Elevation head)

H_e…**勢力水頭** (Energy head) 又は**全水頭** (Total head)

實際の場合は流動に對する抵抗により**水頭消耗**あるを以て (80) 式の左邊に消耗水頭を加へたるものが不變となる…[20] (1) 參照。

壓力水頭を計る爲の目盛せるガラス管を**壓力計** (Piezometer) と呼び、管下端より管内水面迄の高さ H は下端に於ける水壓の强さを示し之を **Piezometric height** と稱し、壓力水頭に等しい。

[例 5] Bernoulli の定理の應用を示す爲め 第 110 圖に於て

點	A	B	C	D	E
z, m	4.0	3.0	3.0	2.0	1.0
斷面積 a, cm²	極めて大	極めて大	20	50	10

E に於て $p=0$ なるを以て (79) 式より $v_5=\sqrt{2g(z_1-z_5)}=\sqrt{2\cdot 9.80(4-1)}=7.67$ m/sec

一秒間に流出する水の體積即ち流量 Q は $Q=a\cdot v=\frac{10}{100^2}\cdot 7.67=\frac{7.67}{1000}$ m³/sec$=7.67$ l/sec

然るに E 以外に水の流出する所なきを以て、一秒間に C, D を流過する水量は共に Q に等しく、且つ水槽に供給すべき水量に等しい。從て

$$Q_3=Q_4=Q_5=Q \quad \therefore \quad a_3v_3=a_4v_4=Q \quad \therefore \quad v_3=\frac{Q}{a_3}=3.83 \text{ m/sec} \qquad v_4=\frac{Q}{a_4}=1.53 \text{ m/sec}$$

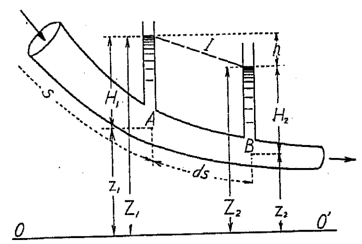
$$\therefore \quad \frac{v_3^2}{2g}=\frac{3}{4}\text{m}, \qquad \frac{v_4^2}{2g}=\frac{3}{25}\text{m}; \text{ 而して } \frac{v_5^2}{2g}=3 \text{ m}$$

故に

點	A	B	C	D	E
全水頭 H_e, m	4	4	4	4	4
位高水頭 z, m	4	3	3	2	1
流速水頭 $\frac{v^2}{2g}$, m	0	0	0.75	0.12	3.0
水壓水頭 H, m	0	1.0	0.25	1.88	0
水壓强度 ton/m²	0	1.0	0.25	1.88	0
〃 kg/cm²	0	0.1	0.025	0.188	0

即ち水壓の强さを ton/m² 單位にて表はす數字は、m(メートル)單位にて表はしたる水頭の數と全く同一である。

(3) **ベルヌーイ定理の擴張** 前項の如く斷面積一樣ならざる管中の水流を考へ(第 111 圖)



第 111 圖

$H+z=Z$ と置けば A, B 二點に於て

	位高	水壓强度	流速
A	z_1	p_1	v_1
B	z_2	p_2	v_2

Bernoulli の定理 (80) 式に依り

$$z_1+\frac{p_1}{w_0}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{w_0}+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\therefore \quad \frac{v_2^2-v_1^2}{2g}=\left(z_1+\frac{p_1}{w_0}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{w_0}\right)=Z_1-Z_2=-(Z_2-Z_1)=h \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (81)$$

h は A, B 間の水面差即ち**落差** (Fall, Head drop) にして二點間の h と一點に於ける流速とを知れば他の一點の流速を算定し得る。

A, B 二點が ds なる微小なる距離に存する時は、距離 s の增加 ds に依る Z 及び v^2 の增加も微小なるを以て之れを dZ 及び dv^2 を以て表はせば

$$Z_2-Z_1=dZ, \qquad \frac{1}{2g}(v_2^2-v_1^2)=d\left(\frac{v^2}{2g}\right) \qquad \therefore \quad d\left(\frac{v^2}{2g}\right)=-dZ$$

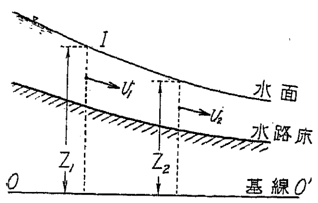
故に單位距離に對する變化は

$$-\frac{dZ}{ds}=I=+\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (82)$$

I は壓力計の自由水面の落差を距離にて除したるものにして之を**動水勾配** (Hydraulic gradient) と稱し、便宜上下流の水面低き場合を + とするを以て $-dZ/ds$ に等しい。

而て (82) 式に依り**動水勾配即ち壓力計水面の低下率…$-dZ/ds$…は流速水頭の增加率…$\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$…に等しい**。

水路の如く水面が直接大氣に接する場合(第 112 圖)に於ても同一の法則が成立し、$-dZ/ds$ を**水面勾配** (Surface slope) と稱し普通 I を以て表はす。



第 112 圖

註 I は Inclination の頭字にして日佛伊等に用ひられ、英米は Slope の頭字 S, 獨墺は J を用ふる。

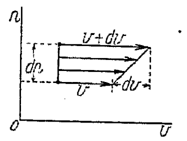
(82) 式に於て勾配零卽ち落差なき場合は $\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right)=0$ にして、單位體積又は單位質量の有する運動の勢力に變化なく、從て同一速度を保ちて流るゝ事となるも、實際の場合は抵抗に依て勢力を消耗するを以て $I=0$ なれば流速は漸減する。

[19] 整流及び渦流並に流動に對する抵抗

(1) **整流** (**Laminar flow, Stream line flow**) ある時刻に水流中に微小なる範圍の任意の一群の水分子をとり、夫等の分子が互に前後左右上下の位置を亂す事なく一團をなして流るゝ時、その流れを**整流**と名づけ、各水分子の運動の經路を**流線** (Stream line) と言ふ。此場合流れの上流部に於て(第 117 圖 i) 水と殆んど等しき比重を有する着色液を毛細管口より供給すれば流線の形を觀察し得る。整流は水が平滑なる細管，狹き間隙，砂粒間の間隙又は固體面上を薄層をなして緩かに流るゝ場合に生じ粘性に富む程整流を生じ易い。

整流に於ては水分子の速度は周壁面に於て零にして之を遠ざかるに從ひ漸次增大し、管にありては中軸線に於て最大となる (第 114 圖)。從て相隣れる分子間には粘性…[3] (1)…に因る抵抗力卽ち**摩擦抵抗力** (Frictional resistance) が速き方の運動を妨ぐる如き向きに作用し、之に打克て運動を繼續せしむるには壓力又は水頭の差が必要である。

今 相隣れる二流線 (第 113 圖) に於て間隔を dn, 速度の差を dv, 粘性係數を η とすれば、單位接面に作用する抵抗 τ は η の定義…[3] (1)…に依り

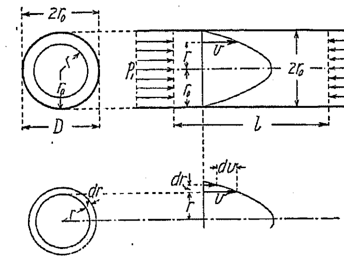


$$\tau=-\eta\frac{dv}{dn} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (83)$$

第 113 圖

η は溫度の高き程小なるを以て地下水，毛管內の流れ等の速度は溫度上昇に伴ふて著しく增大する …[3] (2) 參照。

(2) **細管中の流れ** (**Flow in small pipe**) 細管中の流れは其速度がある限度以下ならば整流である。今內徑 $2r_0$ の細管(第 114 圖)に於て長さ l の部分をとり、內部の水壓水頭は管徑に比し著しく大なるものとし、上流端の水壓を p_1 下流端のそれを p_2, 管軸より r なる距離の水分子の速度を v とすれば、流れは管軸に對して對稱的なるを以て軸に垂直なる斷面、卽ち**正斷面** (Normal section) に於て r なる半徑の圓周上に於ては v は凡て相等しく、管軸を坐標軸とする圓壔坐標を用ひ r なる半徑の假想圓壔面に作用する抵抗力 F を求むるに、流れの方向に向ふ場合を ＋ とすれば



第 114 圖

$$F=\tau\cdot(\text{圓壔面の面積})=-\eta\frac{dv}{dr}\cdot 2\pi r\cdot l$$

然るに此圓壔面內の水は上流端に於て $\pi r^2 p_1$, 下流端に於て $\pi r^2 p_2$ なる水壓を受くるを以て、壔內の水が等速運動を爲す爲には兩端の壓力差 $\pi r^2(p_1-p_2)$ と抵抗 F とは互に平衡する。

卽ち $\pi r^2(p_1-p_2)-\left(-2\pi r\cdot l\cdot\eta\frac{dv}{dr}\right)=0 \quad \therefore \quad \frac{dv}{dr}=-\frac{r}{2\eta}\frac{p_1-p_2}{l}$

$r=0$ より $r=r_0$ 迄積分すれば $\quad v=-\frac{1}{4\eta}\frac{p_1-p_2}{l}r^2+C'$, C'…積分常數

然るに管內面に接する水分子の速度 v_0 が 0 ならざる時は其點に於て $\frac{dv}{dr}$ は無限大となり、從て τ も無限大となるを以て $r=r_0$ に於て $v_0=0$ なるを要する。故に

$$v_0=-\frac{1}{4\eta}\frac{p_1-p_2}{l}r_0^2+C'=0 \quad \therefore \quad C'=\frac{1}{4\eta}\frac{p_1-p_2}{l}r_0^2$$

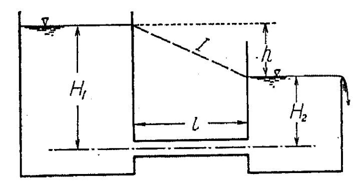
$$\therefore \quad v=\frac{1}{4\eta}\frac{p_1-p_2}{l}(r_0^2-r^2) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (84)$$

卽ち整流に於ては直徑斷面內の速度分布は管軸を軸とする拋物線を以て表はされる。今 半徑 r, 厚 dr なる環狀斷面を單位時間に流過する水量 dQ は $2\pi r\cdot dr\cdot v$ なるを以て、單位時間に管の全斷面を流過する水量卽ち**流量** (Discharge) Q は

$$Q=\int_{r=0}^{r=r_0}dQ=\int_0^{r_0}2\pi r\cdot dr\cdot\frac{1}{4\eta}\frac{p_1-p_2}{l}(r_0^2-r^2)=\frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1-p_2}{l}r_0^4 \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (85)$$

次に全斷面の平均流速を v_m とすれば $v_m=Q/\pi r_0^2$ なるを以て

$$v_m=\frac{1}{8\eta}\frac{p_1-p_2}{l}r_0^2=\frac{1}{32\eta}\frac{p_1-p_2}{l}D^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (86)$$



第 115 圖

今 $p_1=w_0H_1$, $\quad p_2=w_0H_2$ とすれば

$$p_1-p_2=w_0(H_1-H_2)=w_0h$$

$$\therefore \quad v_m=\frac{w_0}{32\eta}D^2\frac{h}{l}=\frac{w_0}{2\eta}\left(\frac{D}{4}\right)^2\frac{h}{l} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (87)$$

卽ち整流に於ては各點の流速、從て v_m は液體の粘性 η, 動水勾配 h/l, 管內徑 D 等に依て變ずるが、管內面の**粗度** (Roughness) には理論上無關係である。然るに吾人が工學上常に取扱ふ所の水流は水と固體との接面の粗滑に依て著しく流速，從て流量を異にするを以て、之等の水流は整流にあらず、從て整流に關する諸法則は一般に適用し得ない。

[例 6] C.G.S. 單位にて $\eta\fallingdotseq 0.0114$ (15°C), $w_0=981$ ダイン (=1 gr)

∴ $v_m=\frac{981}{2\cdot 0.0114}\left(\frac{D}{4}\right)^2\frac{h}{l}=435\left(\frac{D}{4}\right)^2\frac{h}{l}$, 今 $D=4$ cm, $\frac{h}{l}=\frac{1}{10000}$ とすれば

$v_m=4.35$ cm/sec.

次にある水流の正斷面に於て面積をその周邊の長即ち潤邊 (Wetted perimeter) S を以て除したる商を徑深 (Hydraulic mean depth, Hydraulic mean radius) R と名づく。圓管に於ては

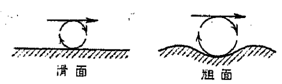
$$R=\frac{\text{斷面積}}{\text{潤邊}}=\frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0}=\frac{r_0}{2}=\frac{D}{4}$$

尙 h/l は動水勾配なるを以て之を I と置けば (87) 式は

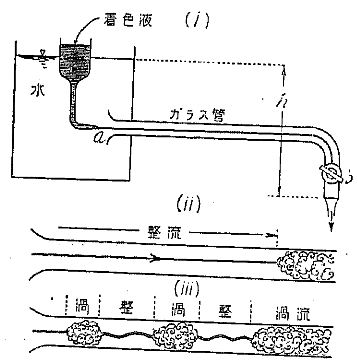
$$v_m=\frac{w_0}{2\eta}R^2I \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (88)$$

即ち一の液體に對しては w_0 及び η は既知なるを以て、平均流速 v_m は徑深 R 及び勾配 I に依て定まる、即ち $v_m \propto \frac{1}{\eta}R^2I$ である。然るに [24] に述ぶるが如く實際の水流に於ては v_m は R, I 及び潤邊の粗滑に依て定まり $v_m\propto R^mI^k$, $m=0.55\sim1.0$, $k=0.48\sim0.55$ なるを以て矢張り整流にあらざる事を示す。

(3) **渦流(Turbulent flow)** 整流に於て管面附近の流速は管軸の方に著しく急に增大するを以て水分子に浮揚力…[60] (1)…作用し、水分子は廻轉し (第116圖) 管軸に向ふ運動を起さんとする傾向を生じ、管面の凹凸甚しき程此傾向も著しい。管面附近の流速の、半徑方向の增加率は管内の平均流速の大なる程大なるを以て兩端の水壓差 h を漸增し、平均流速がある限度に達すれば浮揚力に依て周面の水分子は横の運動を起し、凡ての流線を騷亂せしめ、管面の粗なる程騷亂の程度も甚しく内部の抵抗は大となり、h を增大するも流速の增加は少ない。粘性大なるか又は完全流體の場合は上記の現象は起らぬ。斯の如き流れを渦流 (Turbulent flow) と稱し工學上の水路及び管水路の流れは殆んど凡て渦流である。



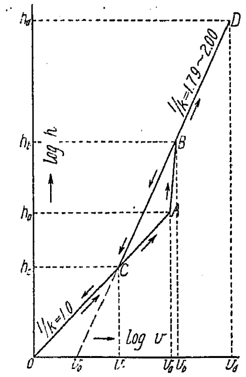
第 116 圖



第 117 圖

第117圖 (i) の如き整流に於て落差 h を徐々に增大し流速を增加せしむれば、先づ下流部に渦流を生じ (ii 圖)、更に h を增せば漸次上流迄渦流狀態となる (iii 圖)。次に渦流狀態より h を漸減すれば遂に整流に復する。

第118圖は上記の實驗に於て落差 h と流速 v との關係を對數坐標を以て示すものなるが、h の增大に伴ひ v は OCA 線に沿ひ直線的に增加するも、v_a に達して渦流を生じ初むれば (A 點) その增大は極めて遲々となる。この限界の流速 v_a を**增速限界流速** (Higher critical velocity) と呼び、更に h を



第 118 圖

增して h_b (B 點) に達すれば $\log v$ は直線的に增加する。次に渦流狀態より h を漸減すれば $\log v$ は DB に沿ふて下り B を過ぎて、尙渦流を續けて同一關係を保ち h_a より小なる落差 h_c に於て初めて整流に復するが、この流速を**減速限界流速**又は單に**限界流速** (Lower critical velocity or Critical velocity) と稱する。

Reynolds (英, 1883) の實驗によれば内面の狀態同一なる滑面管に於ては

$$v_c=k\frac{\eta}{\rho\cdot 2r_0} \quad \therefore\ k=2r_0v_c\Big/\left(\frac{\eta}{\rho}\right)=\frac{Dv_c}{\nu} \quad \ldots\ \ldots\ (89)$$

茲に $D=2r_0$…管徑、$\nu=\frac{\eta}{\rho}$…動粘性係數 (Coef. of kinematic viscosity)

k は常數にして η, ρ, D, v_c 等に同一單位系を用ふれば一定値にして、英佛何れの單位を用ふるも同一數値となる。

今 C.G.S 單位を用ふれば水に於て $\rho=1$, 15°C に於て $\eta=0.01138$ ∴ $\nu=0.0114$

$k=2000$, $2r_0=D=4$ cm とすれば $v_c=k\nu/D=2000\frac{0.0114}{4}=5.7$ cm/sec

即ち $v_c<5.7$ cm/sec ならば整流なるもそれ以上の流速にては渦流を生ずる。

次に平均流速 v と動水勾配 h/l との關係を見るに整流に於ては、$v=c\left(\frac{h}{l}\right)$ なるが一般的に次の如く假定する。

$$v=c\left(\frac{h}{l}\right)^m \quad \therefore\ \log v=\log c+m\log\left(\frac{h}{l}\right)=c'+m'\log(h) \quad \ldots\ \ldots\ (90)$$

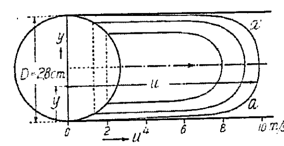
と置けば第118圖に於て

整流部 (OC), $1/k=1$; 渦流部 (DB), $1/k=1.79\sim2.0$

$1/k$ は渦流に於ては周面の性質, 主として粗度によりて異り

	鉛管	ガラス管	ワニス塗布管	新鑄鐵管	古鑄鐵管
$1/k=$	1.79	1.79	1.82	1.88	2.00

渦流狀態に於ては渦動の爲め内部の抵抗著しく大となるを以て、整流の場合に比し速度は周面附近にて急增し管軸部の速度は比較的小にして、直徑面内の速度分布は高次の拋物線に近く (第119圖)、周面より半徑方向に y なる距離の點の速度 u は周面附近に於ては $y^{\frac{1}{7}}$ に比例する (Prandtl, 獨, 1921)。周面に近き部分は水分子の速度急增し浮揚力大に運動復雜にしてこの層を特に**限界層** (Boundary layer) と呼ぶ。



第 119 圖

(4) **渦流に於ける平均流速公式 (Mean velocity formula) の理論** (3) に述べたる如く渦

流に於ては內部抵抗著しく大であるが、相隣二層の接面に作用する抵抗の强さは整流の場合と同樣に表はし得るものと假定し、η に代ふに ε を用ひ

$$\tau=-\varepsilon\frac{dv}{dn} \quad \text{茲に} \quad \varepsilon\ldots\text{抵抗係數} \qquad \cdots\cdots \qquad (91)$$

を以て表はし ε を實驗に依て求むれば次の如く表はさるゝ。

$$\varepsilon=cw_0v_mR \qquad \cdots\cdots \qquad (92)$$

茲に c…壁面の粗度に依る係數、 w_0…單位體積の水の重量、 R…徑深、 v_m…平均流速、依て (87) 式に於て η の代りに ε を入れ、$\frac{D}{4}=R$, $\frac{h}{l}=I$ と置けば

$$v_m=\frac{w_0}{2\varepsilon}R^2I=\frac{w_0}{cw_0v_mR}R^2I \qquad \therefore \quad v_m^2=\frac{1}{c}IR$$

$$\therefore \quad v_m=C\sqrt{RI}=CR^{0.5}I^{0.5} \qquad \text{茲に} \quad C=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad (93)$$

而て極めて多種の管，水路，河川等の水流に就て今日迄行はれたる無數の測定に依れば、精確には $v_m\propto\sqrt{RI}$ にあらざるも、實用の便宜上今日尙 (93) 式の形を用ひ C を壁面の粗度のみならず、R 及び I に依ても變ずるものとし、多數の實測の結果より C と**粗度係數** (Coefficient of roughness)…クツター公式の n, Bazin 公式の γ 等…, R, I 等との關係を式又は表にて表はし置き、各場合に相當する C を用ひて (93) 式の缺點を補ふて居る。(93) 式より v_m なる平均流速を以て l なる距離を流動する爲に必要なる落差 h を實用上便利なる形に表はせば

$$RI=\frac{Rh}{l}=\frac{v_m^2}{C^2}=f\frac{v_m^2}{2g}, \quad \frac{v_m^2}{2g} \quad \text{は } v_m \text{ に相當する流速水頭}$$

$$\therefore \quad h=f\frac{l}{R}\cdot\frac{v_m^2}{2g}\cdots \quad \text{茲に} \quad f=\frac{2g}{C^2}\cdots\text{單位に無關係} \qquad \cdots\cdots \qquad (94)$$

R, v_m 等が漸變 (Gradual change) する場合には微小區間 dl に對する落差を dh とし

$$dh=f\frac{dl}{R}\cdot\frac{v_m^2}{2g} \qquad \cdots\cdots \qquad (95)$$

f は C^2 に逆比例するを以て矢張り粗度係數，R 及び I に依て異る値を用ふ。

(94), (95) の式に於ては如何なる單位を用ふるも f の値は同一にして實用上極めて便利である。然るに常數なるべき C が R 及び I に依て異るは實地上不便なるを以て

$$v_m=C_1R^mI^k \qquad \cdots\cdots \qquad (96)$$

なる式を以て表はし、實測値より C_1, m 及び k を定むれば潤邊卽內壁面の粗度、斷面の形狀等同一なる限り C_1, m, k は各一定値となり、多くの場合 $k\fallingdotseq 0.5$, $m=0.58\sim0.80$ にして、前記と同樣に h を書き表はせば

$$h=f_1\frac{l}{R^\alpha}\frac{v^\beta}{2g} \quad \text{或は} \quad dh=f_1\frac{dl}{R^\alpha}\frac{v^\beta}{2g} \qquad \cdots\cdots \qquad (97)$$

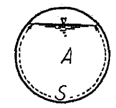
茲に $\alpha=1.00\sim1.25$, $\beta=1.75\sim2.00$ にして C_1, m, k との關係は

$$f_1=\frac{2g}{C_1^2}, \quad \alpha=\frac{m}{k}, \quad \beta=\frac{1}{k}$$

但し $v^\beta/2g$ は流速水頭 $v^2/2g$ に相當する量である。

然し之等の式に於て從來定められたる α, β の値は $\beta\fallingdotseq 1+\alpha$ にして、f_1 は v 及び長さの單位に依て異る値を用ひざるべからざるを以て實用上大なる不便を來す…**[24]** 參照。

普通工學上取扱ふ所の水流に於ては固體の壁面との接觸部附近は壁面に遠き部分に比し、速度の變化 dv/dn は急激にして τ の値極めて大に且つその他の部分に於ても抵抗係數 ε は固體面の粗度 c…(92)式… の大なる程大にして、結局流動に伴ふ勢力消耗の大部分はその附近に於て行はるゝを以て、水流全體に作用する摩擦抵抗の全部は壁面に於て作用するものと考ふるも實際上支障なし。而て流水が v なる速度を保ちて單位距離を流るゝ爲に要する勢力消耗は、壁面に於て作用する摩擦抵抗に打克つ爲に消費さるゝものと考へ得る。今 A なる斷面積を有する單位長の水が dl なる距離を流るゝ爲に dh なる落差を要するものとすれば、此間に失はるゝ位置の勢力は $E_p=w_0\cdot A\cdot 1\cdot dh$ にして此勢力は接觸面に於て作用する摩擦抵抗…單位面積に對して τ…に對して爲されたる仕事の量に等しきを以て、接面の周圍長卽ち潤邊長を S とすれば、接觸面積は $1\cdot S$ にして總摩擦力は $S\cdot\tau$, 之に打克ちて dl だけ移動するには $S\cdot\tau\cdot dl$ だけの仕事を要す、卽ち



第 120 圖

$$w_0\cdot A\cdot dh=S\cdot\tau\cdot dl \qquad \therefore \quad \tau=w_0\frac{A}{S}\frac{dh}{dl}=w_0RI \qquad \cdots\cdots \qquad (98)$$

而て實驗の結果 τ は接觸面附近の流速卽ち**底流速** (Bed velocity) 又は**周邊流速** (Peripheric velocity) の二乘と、面の粗さの程度を表はす係數 (a) とに依て表はされ、且つ平均流速は同一水路壁面に於ては底流速に略比例するを以て

$$\tau=av_m^2=w_0RI \qquad \therefore \quad v_m=\sqrt{\frac{w_0}{a}}\sqrt{RI}=C\sqrt{RI}=CR^{0.5}I^{0.5} \qquad \cdots\cdots \qquad (99)$$

卽ち (93) 式と同一の形となる。この平均流速公式は今日に於ても猶最も廣く使用されて居るが、流速の極めて小なる場合は τ は v の一乘に比例するを以て、一般的には $\tau=bv_m+av_m^2$ なる形となる。從て C を粗度のみに依て定まるものとせば平均流速を精確に表はすには不充分なるを以て、實際は C を粗度のみならず R 又は R 及び I に應じて適當に定める。

(99) 式より潤邊に於て作用する摩擦抵抗の强さ τ は

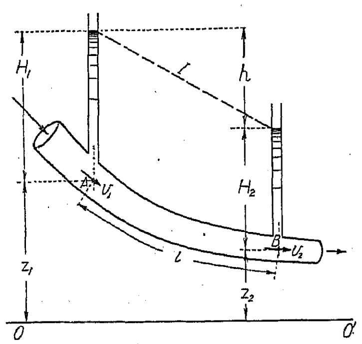
$$\tau=\frac{w_0}{C^2}v_m^2 \qquad \cdots\cdots \qquad (100)$$

一般に $v_m=C\sqrt{RI}$ なる形の平均流速公式を**シエヂー公式** (Chézy formula) と呼び、その他

の公式 $v_m=C_1R^mI^k$ 又は $h=f_1\frac{l}{R^\alpha}\frac{v^\beta}{2g}$ を**指數公式** (Exponential formula) と稱し近年急足の進歩を爲せるが、實驗上より定めたる C_1, m, k 又は f_1, α, β は凡て潤邊の狀態に依て不規則に變じ居るを以て、既知の場合より類似の潤邊に對する數値を推定する事能はざるを缺點となすも、同一水路に於て I, R 等が著しく變化する場合に適用すれば極めて合理的である。

[20] 普遍化せるベルヌーイの定理及び水流の分類

(1) 摩擦抵抗の作用する水流に對するベルヌーイの定理 (95) 式に依り R なる徑深を有する水流が v なる平均流速を以て dl なる短距離を流過する間に摩擦抵抗に對して $dh=f\cdot\frac{dl}{R}\cdot\frac{v^2}{2g}$ なる落差卽ち**摩擦水頭** (Friction head) を要する。從て $l=\overline{AB}$ なる距離 (第 121 圖) を流るゝに要する水頭 h_r は之を dl なる微小長の多數の區分に分ち其の各區の所要落差を總計して得らるゝ。卽ち之を積分の形にて表はせば



第 121 圖

$$摩擦水頭=h_r=\int_A^B f\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{v^2}{2g}\cdot dl$$

AB 間に於て水流の狀況が著しく變らぬ時は f, R, v 等の l 間の平均値 f_l, R_l, v_l を以て AB 間を流るゝものと假定するも h_r の誤差は大ならざるを以て

$$h_r=\int_A^B\frac{1}{2g}\frac{f_l}{R_l}v_l^2dl=\frac{f_l}{R_l}\frac{v_l^2}{2g}\int_A^B dl=f_l\frac{l}{R_l}\cdot\frac{v_l^2}{2g}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(101)$$

然るに完全液體に對しては (80) 式に依り $z_1+\frac{p_1}{w_0}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{w_0}+\frac{v_2^2}{2g}$ にして單位質量の有する全勢力は A 及び B に於て同一なるも、水の如く摩擦抵抗を受くる實在の液體に於ては AB 間に於て h_r なる水頭を失ふ…實際は h_r に相當する勢力は熱の勢力に變ずる…を以て、B に於て有する全勢力は A に於けるよりも h_r だけ小となる。卽ち

$$z_1+\frac{p_1}{w_0}+\frac{v_1^2}{2g}-h_r=z_2+\frac{p_2}{w_0}+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\therefore\quad z_1+\frac{p_1}{w_0}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{w_0}+\frac{v_2^2}{2g}+h_r=z_2+\frac{p_2}{w_0}+\frac{v_2^2}{2g}+\int_A^B f\frac{1}{R}\frac{v^2}{2g}dl\quad\cdots\quad(102)$$

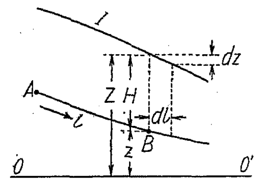
而て B を如何なる位置に取るも、その點に於て有する全水頭卽ち單位質量の有する勢力…位置水頭＋水壓水頭＋流速水頭…に起點 A より其點迄流るゝ爲に失ふ水頭卽ち摩擦水頭 h_r を加へたるものは常に A に於ける全水頭に等しく、卽ち勢力不滅律を水流に適用せるに過ぎぬ。依て任意の點 B に於ける基線上の高 z, 水壓强度 p, 流速 v とすれば

$$z+\frac{p}{w_0}+\frac{v^2}{2g}+h_r=\text{const.}\quad 茲に\quad h_r=\int_A^B f\frac{1}{R}\frac{v^2}{2g}dl=f_l\frac{l}{R_l}\frac{v_l^2}{2g}\quad\cdots\quad\cdots\quad(103)$$

今 $p=w_0H$, $z+H=Z$ と置き上式の凡ての項を l に就て微分すれば、p, z, v 從て H, Z, v は l に依て變ずる量なるを以て $\frac{dZ}{dl}+\frac{d}{dl}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{f}{R}\frac{v^2}{2g}=0$

然るに任意の點 B の附近の水面勾配又は動水勾配 I は $-dZ/dl$ を以て表はされ、$-$ 記號は l の增大に伴ひ Z が減ずる場合勾配 I が $+$ なるが爲である。

$$\therefore\quad I=\frac{d}{dl}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{f}{R}\frac{v^2}{2g}=\frac{d}{dl}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{v^2}{C^2R}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(104)$$



第 122 圖

卽ち單位長に於て　　落差＝流速水頭の變化＋摩擦水頭

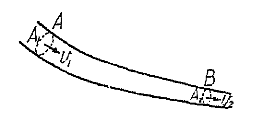
茲に $C^2=\frac{2g}{f}$ にして C は Chézy 公式の C と同一の係數である。

然るに實際の水路に於ては斷面の各點の流速 u は同じからず、平均流速 v はその平均値である。從て (104) 式に於ける流速水頭も亦各點に於ける流速水頭の平均値 $h_v=\frac{1}{A}\int_A\frac{u^2}{2g}dA$; 茲に A は斷面積, dA は各點の微面積, u はその點の流速; 依て h_r と $\frac{d}{dl}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ との比を α と置けば (104) 式は

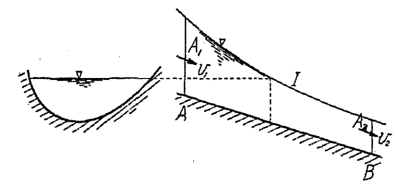
$$I=\alpha\frac{d}{dl}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{v^2}{C^2R}\quad 茲に\quad \alpha=\int_A v^2dA\Big/\int_A vdA=1.05\sim1.2\fallingdotseq1.11\fallingdotseq\frac{10}{9}\quad\cdots\quad(105)$$

α は各點速度の分布及び方向に依りて異るも常に 1 より多少大である。

(2) 水流連續性の法則 (Law of continuity of flow) 此法則は物質不滅の法則を水流に適用せるものにして、**Bernoulli の定理と共に水理上の二大法則**である。先づ管中の水流の如く固體面に圍まるゝ水流 (第 123 圖) をとり二點 A, B に於ける正斷面積 (Area of normal section) を A_1, A_2; 平均流速を v_1, v_2 とすれば單位時間に A より流入する水量は A_1v_1, B より流出する水量は A_2v_2 である。然るに固體面に圍まるゝを以て AB 間の體積は不變に、流れは連續し居りて途中に間隙の存在を許さず、且つ水の密度に變化なきを以て…實際は溫度の變化等に依り多少變ずるも水理學上は無視して差支ない…AB 間に存する水の質量は一定不變である。從て **AB の途中に於て他より水が流入し又は他に流出せざる限り、ある期間に A より流入する水の量と B より流出する量とは常に同一である。** 今期間を單位時間とすれば



第 123 圖

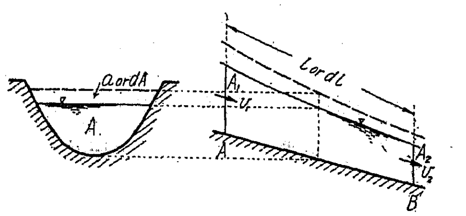


第 124 圖

$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = A \cdot v = Q = \mathrm{const.}$ (位置に無關係)… … … … … … (106)

次に開水路の如く周面の一部が自由水面なる時 (第 124 圖) は水面は昇降し得るを以て、管水路の如く例外なしに Q は斷面の位置に無關係なる事は不可能なるも、若し水面の位置及び形が不變ならば自由水面に於ても固體面に依て圍まるゝと全く同一なるを以て、矢張り (106) 式の關係は成立する。

次に開渠の AB 間 (第 125 圖) に於て漏水又は他よりの流入なき場合、ある短時間に A より流入する水量が B より流出する水量より大なる時はその差たけは AB 間に殘留する。然るに水の密度には殆ど變化なきを以て一部の水の殘留の爲に AB 間の水の體積は增大するを要し、AB の長さ l は不變なるを以て結局水流の斷面積が增大する事となる。今 dt なる短時間に起る變化を考ふるに



第 125 圖

A より流入する水量$=A_1 \cdot v_1 \cdot dt$,　B より流出する水量$=A_2 \cdot v_2 \cdot dt$

AB 間に殘留する水量$=(A_1 \cdot v_1 - A_2 \cdot v_2)dt = a \cdot l$

玆に AB 間の斷面積の增大は必ずしも一樣ならざるを以て、その平均値を a とすれば AB 間の水の體積增大は $a \cdot l$ である。

今 AB を微小なる區間 dl とし、その間に於て流速及び斷面積は A 點より B 點に一樣に變化するものとすれば、その增加率は dv/dl, dA/dl を以て表はされ、A 點に於ける値を v, A とすれば B に於ては $v+\dfrac{dv}{dl}dl$, $A+\dfrac{dA}{dl}dl$ にて表はさる。此狀態にて微小時間 dt の間に、

A より流入する水量$=v \cdot A \cdot dt$,　B より流出する水量$=\left(v+\dfrac{dv}{dl}dl\right)\left(A+\dfrac{dA}{dl}dl\right)dt$

$\therefore$　AB 間に滯溜する水量$=\left(-A\dfrac{dv}{dl}dl - v\dfrac{dA}{dl}dl\right) \cdot dt +$ 高次微小量

これたけの水量の滯溜に依り AB 間の水の體積は增加するを以て必然各點の水流斷面積も增大する。然るに AB は微小區間にしてその區間の斷面增加は一樣なりと看做し得るを以て A 點に於て、dt 間の斷面增大を dA…この dA は距離に由る變化の dA とは別のものである…とすれば、單位時間の增大率は dA/dt にして之に由る AB 間の水の體積の增加は $\dfrac{dA}{dt} \cdot dt \cdot dl$ であり、且つ前記の「AB 間に滯溜する水量」に等しい。故に

$$\frac{dA}{dt} \cdot dt \cdot dl = -\left(A\frac{dv}{dl} + v\frac{dA}{dl}\right)dl \cdot dt \qquad \therefore \quad \frac{dA}{dt} + \left(A\frac{dv}{dl} + v\frac{dA}{dl}\right) = 0$$

然るに斷面積 A 及び流速 v は距離に依ても時刻に依ても變化し、即ち l 及び t の從變數 (Dependent variable) 即ち函數 (Function) にして、$\dfrac{dA}{dt}$ は時刻に對する增加率、$\dfrac{dv}{dl}$ 及び $\dfrac{dA}{dl}$ は距離に對する增加率のみを表はすものなるを以て、普通之等の增加率は**偏微分** (Partial differential) の記號を用ひ

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \left(A\frac{\partial A}{\partial l} + v\frac{\partial A}{\partial l}\right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (v \cdot A)}{\partial l} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (107)$$

$v \cdot A$ はある時刻 t に於ける A 點の流量なるを以て

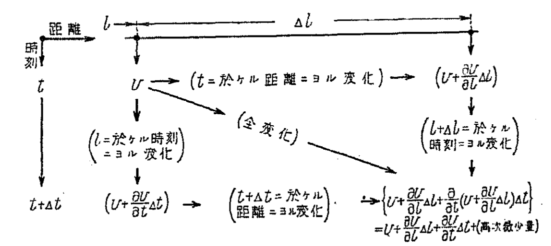
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (108)$$

管水路又は水面に變化なき開水路の如く斷面不變なる時は $\partial A/\partial t = 0$, 從て Q の變化も零にして $Q = \mathrm{const.}$ である。

(108) 式の表はす事實を**水流連續性の法則**と稱し、Bernoulli の定理と共に工學上の水流の問題は殆んどこの二大法則の應用に依て解決し得る。

(3)　不定流に對するベルヌーイの定理 (Bernoulli's theorem for unsteady flow)　一の水流に於て A 及び v が時刻に無關係なる場合は之を**定流** (Steady flow) と呼び、定流の場合に對する Bernoulli の定理は (80) 又は (103) 式に依て表はさるゝ。A 及び v が斷面の位置に依て變ずるのみならず、一の斷面に於ても時刻に依て變ずる水流も實在し、之を**不定流** (Unsteady flow) と言ふ。特別の場合として A, v の一方のみが時刻に依て變ずる場合も矢張り不定流である。

今斷面の位置をある基準斷面より流れに沿ふて計りたる距離 l を以て表はし、ある時刻より經過したる時を t を以て表はせば、最も一般的なる不定流に於ては A, v は l 及び t に依て變じ、即ち A, v は l 及び t の二變數の函數として表はす事を得る。今, 不定流に於て t に於ける狀態を見るに l なる位置に於ける流速を v とし、それより僅かに下流 $l+\Delta l$ に於ては微小量 $\Delta_1 v$ だけ增すものとすれば、單位距離に對しては $\partial v/\partial l$ だけ增加す。又一の斷面に於て時刻 t に於て流速が v なりしものが、それより $\Delta l/v$ なる時間即ち Δt 後には $\Delta_2 v$ だけ增加するものとすれば、單位時間中には $\partial v/\partial t$ だけ增加す。斯の如き場合の單位時間中の v の增加即ち加速度は l 及び t の變化に依る影響を合せ考へたるものにして、v の t に就ての全微分係數 (Total differential coefficient) dv/dt を以て表はし、l 及び t の一方のみが變ずる場合の偏微分係數 (Partial differential coef.) $\partial v/\partial l$, $\partial v/\partial t$ を以て、l, t 共に變ずる場合の加速度を書き表はせば



第 126 圖

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial l}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial l} \cdots (109)$$

玆に Δt は前記の定義により

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v} \quad 或は \quad \frac{\Delta l}{\Delta t} = v$$

上記の關係を更に圖表を以て說明すれば第 126 圖の如し。

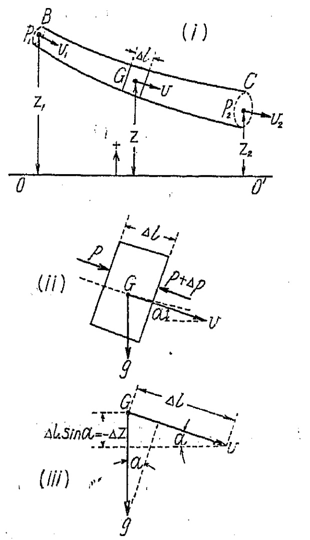
次に水流中に於て無數の流線を以て圍まるる微小斷面の流れ(第 127 圖 (i) の BC)を取り、その途中に於て Δl なる間隔の二斷面間の部分につき、作用する力と加速度との關係を求むる。微小部分の斷面積を A, 上流斷面の水壓强度 p, 下流斷面のそれを $p+\Delta p$, 重心 G の基線上の高 $+z$, G に於ける流速 v, 其の方向卽ち Δl の方向の水平となす角を α とすれば、微小部分に作用する力は

流れの方向に作用する水壓 $=p\cdot A-(p+\Delta p)\cdot A=-\Delta p\cdot A$

微小部分の重量の流れの方向に於ける分力 $=w_0\cdot A\cdot\Delta l\cdot\sin\alpha$

この二力の合力の作用に依り微小部分は流れの方向に於て dv/dt なる加速度を得るものとすれば (109) 式に依り

$$-A\cdot\Delta p+w_0\cdot A\cdot\Delta l\cdot\sin\alpha=\frac{w_0}{g}\cdot A\cdot\Delta l\cdot\frac{dv}{dt}=\frac{w_0}{g}\cdot A\cdot\Delta l\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial l}\right)$$



第 127 圖

兩邊を $A\cdot\Delta l$ にて除し微分係數の形に書き直せば

$$-\frac{\partial p}{\partial l}+w_0\sin\alpha=\frac{w_0}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial l}\right),\quad \text{然るに}\quad \sin\alpha=-\frac{\Delta z}{\Delta l}=-\frac{\partial z}{\partial l}\quad \text{なるを以て}$$

$$-\frac{1}{w_0}\frac{\partial p}{\partial l}-\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}\right)=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial l}+\frac{1}{w_0}\frac{\partial p}{\partial l}+\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}=0\quad\cdots\quad(110)$$

今,水壓强度を水頭 H を以て表はせば $p=w_0H$ なるを以て (104) 式同樣

$$\frac{\partial z}{\partial l}+\frac{1}{w_0}\frac{\partial p}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial l}+\frac{\partial H}{\partial l}=+\frac{\partial Z}{\partial l}=-I\ \text{(動水勾配)}$$

$$\therefore\quad I=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}\quad\cdots\quad(111)$$

(110) 式を l に就て B より C 卽ち 0 より l 迄積分すれば

$$z_2-z_1+\frac{1}{w_0}(p_2-p_1)+\frac{1}{2g}(v_2^2-v_1^2)+\frac{1}{g}\int_0^l\frac{\partial v}{\partial t}dl=0$$

$$\therefore\quad z_1+\frac{p_1}{w_0}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{w_0}+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int^l\frac{\partial v}{\partial t}dl\quad\cdots\quad(112)$$

故に一般に
$$z+\frac{p}{w_0}+\frac{v^2}{2g}+\frac{1}{g}\int^l\frac{\partial v}{\partial t}dl=\text{const.}\quad\cdots\quad(113)$$

卽ち最後の項を除けば完全液體に對する Bernoulli の式 (80) 又は (103) となる。

(113) 式中の末項 $\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial l}dl$ に於て $\frac{1}{g}$ は單位重量…重量は重力單位 (gravity unit)…の水の質

量を表はし、$\partial v/\partial t$ はある斷面に於ける水の加速度にして、$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$ はその斷面に於て流れの方向に作用する力を示し、$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}dl$ はこの力に依て dl 間に爲さるゝ仕事の量を表はす。故に此項は單位重量の水が B より C 迄流るゝ間に增加する運動の勢力である。元來 Bernoulli の定理はある時刻に於て二斷面に於ける單位重量の水の有する全勢力が相等しき事を意味するを以て (113) 式の示す事實は Bernoulli の定理を加速度を有する水流に擴張したものと考ふる事を得る。又 (103) 及び (104) 式の場合の如く水流自身が抵抗に對して仕事を爲す場合はその仕事の量に相當する位高及び運動の勢力が他の勢力…主として熱勢力に變じ水及び周壁の溫度を高むる…に變ずるに過ぎぬを以て、加速度を有する水流にして摩擦抵抗を受くる場合に於ても (103) 及び (104) 式の場合と同樣に、之に依る勢力消耗量を表はす項を附加すれば宜しい。卽ち (104) 及び (111) 式より

$$I=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{f}{R}\cdot\frac{v^2}{2g}\quad\cdots\quad f=\frac{2g}{C^2},\quad v=C\sqrt{RI}\quad\cdots\quad(114)$$

(103) 及び (113) 式より

$$z+\frac{p}{w_0}+\frac{v^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_0^l\frac{\partial v}{\partial t}dl+\int_0^l\frac{f}{R}\cdot\frac{v^2}{2g}dl=\text{const.}\quad\cdots\quad(115)$$

(114) 及び (115) 式は最も一般的なる水の運動を表はす式にして、不定流の問題は之等と (108) 式卽ち水流連續性の式とを解く事に依て解決する事が出來る。

(4) 水流の分類 (Classification of flows) 前項 (3) に於て定義せる定流に於て、更に斷面及び流速が總ての斷面に於て相等しき時は之を**等速流**又は**等速定流** (Uniform flow, Uniform steady flow) と呼び、一定流量を流す管水路も此種に屬する。若し斷面の位置に依りて斷面積又は流速が異る場合は**不等速流** (Non-uniform flow 又は Variable flow) と名づく。

(108) 式に於て $\partial A/\partial t=0$ ならば $\partial Q/\partial l=0$, $Q=\text{const.}$ にして定流であり、定流にして且つ $\frac{\partial v}{\partial l}$, $\frac{\partial A}{\partial l}$ の何れか一方が零ならば他も亦零にして、流速 v 及び斷面積 A は共に斷面の位置に依て變化せず、卽ち等速流である。故に不定流卽ち $\partial A/\partial t\neq 0$ ならば $\partial Q/\partial l\neq 0$ にして $\partial v/\partial l$ 及び $\partial A/\partial l$ の一方又は兩方が零なる能はざるを以て、不定流の場合に等速流は存在し得ぬ。

例へば河川に於ける洪水又は感潮部の如くある斷面に於て水位が刻々變化し從て斷面積は勿論、流速及び流量も變化するを以て一般に定流にあらず。然しその變化が極めて徐々にして單位時間に AB 間に滯溜する水量が Q に比して極めて小なる時は實地上定流と看做して差支ない。卽ち長雨に因る河川の小洪水の如き場合である。而て河川は多くの場合定流なるもその流路は斷面勾配等一樣ならず、且つ迂餘曲折ありて A 及び v は斷面に依て異なる故に一般には不等速流であるが、改修河川の如く均整なる線形,斷面,勾配を有するものは相當の長區間に亘て等速流狀態を保つ場合もある。人工水路のある區間の如く直線にして斷面及び水面勾配が一樣なる水路に於て一定の流量を流す場合は常に等速流であるが、取入水量を急に增減する時は不定流となり、此場合水流の斷面は變化するも水路の斷面形は一定し居るを以て、實際上の取扱は天

然河川の如く斷面形が不等なる場合、即ち**不等斷面不定流** (Unsteady flow in non-uniform channel) に比し稍簡單なるを以て之を**等斷面不定流** (Unsteady flow in uniform channel) と名づけて區別する。

現在の水理學に於ては等速定流は取扱最も簡單にして如何なる場合に對しても實地上不自由なき程度に進歩し居り、不等速定流は普通水理工學上最も重要なるを以て近年特に著しき發達を爲せるも猶未解決の重要問題が多く殘されて居る。等斷面形にして不定流の場合はその變化の著しからざる場合辛じて近似的に取扱ひ得るも、不等斷面形の不定流は極めて複雜なる問題にして現今に於ても一般的には殆んど解決の見込みなきのみならず變化の稍急なる場合、例へば潮汐の進退する河川の水流の如きは流速の實測困難なる爲め實驗的の研究も容易でない。

次に上記の水流分類を一括すれば

(I) 時刻に依て變ぜぬ水流	定流 (Steady flow)
1. 斷面が位置に依て變ぜぬ場合	等速定流 (Uniform steady flow)
2. 斷面が位置に依て變ずる場合	不等速定流 (Non-uniform steady flow)
(II) 時刻に依て變ずる水流	不定流 (Unsteady flow)
1. 水路の斷面形一樣の場合	等斷面不定流 (Unsteady flow in uniform channel)
2. 水路の斷面形が一樣ならざる場合	不等斷面不定流 (Unsteady flow in non-uniform channel)

尙壓力隧道，管水路の場合は斷面は時刻に依て變ぜぬも、壓力差又は落差が時刻に依て變ずる爲め流速が時刻に依て變ずるを以て一種の不定流であり、その運動は (115) 式に依て表はさるゝ。

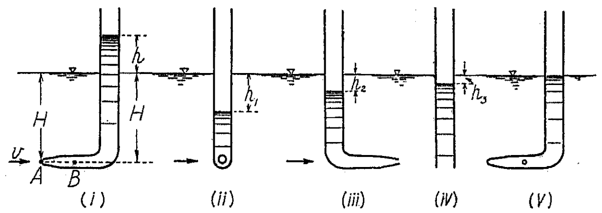
(5) 水流の種類と之を表はす基礎方程式 (Fundamental equations) の總括　連續せる水流に於て凡ての變化が極めて徐々に起り之による勢力消耗は摩擦抵抗に因るものに比して極めて小なる場合、各種の水流を表はす基礎方程式は次表の如し。斷面の急變，急屈曲等の爲め勢力消耗ある場合は摩擦抵抗の場合と同樣に、水頭損失卽ち單位重量の水の勢力消耗を表はす項を附加すれば足り、若し短區間に於て急變化起り變化の爲の損失勢力が其區間の摩擦損失に對し極めて大なる時は、實地上後者を無視して差支ない。

水流の種類	水流連續性の方程式	運動の方程式
(I) 等速定流 (Uniform steady flow)	$\begin{cases} Q=v\cdot A=\text{const.} \\ A=\text{const.},\ v=\text{const.} \\ \dfrac{dp}{dl}=I=\text{const.} \end{cases}$	$\begin{cases} h_r=f\dfrac{l}{R}\dfrac{v^2}{2g},\quad I=\dfrac{f}{R}\dfrac{v^2}{2g},\quad v=C\sqrt{RI} \\ \text{又は} \\ h_r=f_1\dfrac{l}{R^\alpha}\dfrac{v^\beta}{2g},\quad I=\dfrac{f_1}{R^\alpha}\dfrac{v^\beta}{2g},\quad v=C_1R^mR^k \end{cases}$
(II) 不等速定流 (Non-uniform steady flow)	$\begin{cases} Q=v\cdot A=\text{const.} \\ \text{或は}\ \dfrac{dQ}{dl}=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=0,\quad \dfrac{\partial A}{\partial t}=0 \end{cases}$	$\begin{cases} z+\dfrac{p}{w_0}+\dfrac{v^2}{2g}+\displaystyle\int_0^l\dfrac{f}{R}\dfrac{v^2}{2g}dl=\text{const.} \\ \text{又は}\ I=\dfrac{d}{dl}\left(\dfrac{v^2}{2g}\right)+\dfrac{v^2}{C^2R},\quad C^2=\dfrac{2g}{f} \end{cases}$
(III) 不定流 (Unsteady flow)	$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial t}\neq 0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\neq 0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial t}+\dfrac{\partial Q}{\partial l}=\dfrac{\partial A}{dt}+\dfrac{\partial(vA)}{\partial l}=0 \end{cases}$	$\begin{cases} z+\dfrac{p}{w_0}+\dfrac{v^2}{2g}+\dfrac{1}{g}\displaystyle\int_0^l\dfrac{\partial v}{\partial t}dl+\int_0^l\dfrac{f}{R}\dfrac{v^2}{2g}dl=\text{const.} \\ I=\dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{v^2}{2g}\right)+\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{v^2}{C^2R} \end{cases}$

注意　上式中 f は長さの單位に無關係なる常數なるも f_1 は長さの單位を異にすればその數値を變ずる…[19] (4) 參照。

[21] ベルヌーイ定理の簡單なる應用

(1) ピトー管 (Pitot tube) の理論　下端を直角に曲げたるガラス管の下部を流水中に入れ屈曲部を流れに平行に上流に向くれば、管端孔の外側に於ては流水の速度 v 存在し、內側に於ては水は靜止し管內の水面は h だけ上昇する… (第 128 圖) (i)。



第 128 圖

今，孔中心の水深を H, 管內水面の上昇を h とし、孔中心線上に於ける內外の二點 A, B に對し Bernoulli の定理 (80) 式を適用すれば

$$\overset{\text{A}}{z+\frac{p_1}{w_0}+\frac{v^2}{2g}}=\overset{\text{B}}{z+\frac{p_2}{w_0}+0}\quad\text{或は}\quad H+\frac{v^2}{2g}=H+h$$

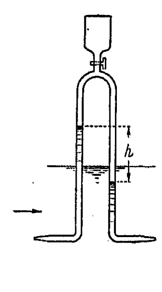
$$\text{(i)}\qquad h=\frac{v^2}{2g}\quad\text{又は}\quad v=\sqrt{2gh}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (116)$$

屈曲部が流れに直角に向ふ場合 (ii) 及び流れに平行に下流に向ふ場合 (iii) は孔の內外の二點に對して Bernoulli の定理を適用し得ざるも，實驗の結果は 第 128 圖 (ii), (iii) の如く何れも管內の水面は多少下り

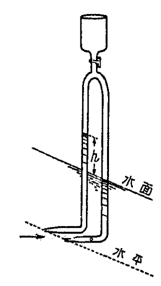
$$\text{(ii)}\qquad h_1=c_1\frac{v^2}{2g},\qquad c_1\fallingdotseq 1.0$$

$$\text{(iii)}\qquad h_2=c_2\frac{v^2}{2g},\qquad c_2=0.2\sim 0.4$$

(iv) の如き直管を流れに垂直に立つれば矢張管內の水面は多少下る。(v) は (i) と同樣の管なるも管の尖端を閉ぢ屈曲部に於て兩側に小孔を穿ちたるものにして、尖端を上流に向け流れに平行に置けば管內の水面は殆んど外水面と一致する。



第 129 圖

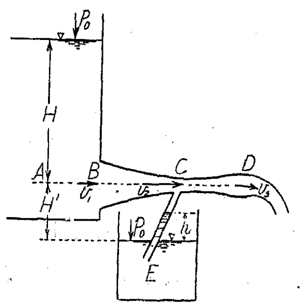


第 130 圖

(i) の如き管を**ピトー管** (Pitot tube) と稱し水面の上昇 h を測定して流速 v を求むるに使用さるゝが h を精確に讀む事が困難なる爲め、實際は第 129 圖及び第 130 圖の如き裝置を用ふる。第 129 圖 は (i) と (iii) と組合はせ其上端を連絡し、小空氣ポンプを付して管上部の氣壓を減じ、h を不變に保ちて兩水面を適度の高さ迄引き揚げて讀み得る。第 130 圖は (i) と (v) とを組合せたるものにして h は殆んど

其儘流速水頭を表はすを以て最も廣く使用さるゝ。

（2） **吸上作用** 途中に於て管徑を著しく縮小せる BCD（第 131 圖）なる管を以て水槽の水を流出せしむれば、縮小部に於て v は極めて大となり反對に壓力は著しく低下す、依て他の管を以て此點と遙かに下位にある水槽とを連絡すれば槽内の水を吸上ぐる事が出來る。



第 131 圖

點	A	B	C	D
斷面積	甚大	a_1	a_2	a_3
流　速	微小	v_1	v_2	v_3
壓力水頭	$\frac{p_0}{w_0}+H$	$\frac{p_1}{w_0}$	$\frac{p_2}{w_0}$	$\frac{p_3}{w_0}$

A より D 迄を連續せる水流として Bernoulli の定理を適用すれば

$$\frac{p_0}{w_0}+H=\frac{p_1}{w_0}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{w_0}+\frac{v_2^2}{2g}=\frac{p_0}{w_0}+\frac{v_3^2}{2g} \qquad \therefore \quad \frac{v_3^2}{2g}=H \qquad \therefore \quad v_3=\sqrt{2gH}$$

然るに水槽極めて大にして相當期間は水流に變化なきものとすれば、不等速定流なるを以て

$$Q=v_2\cdot a_2=v_3\cdot a_3 \qquad \therefore \quad v_2=\frac{a_3}{a_2}v_3$$

依て

$$\frac{p_2}{w_0}+\frac{v_2^2}{2g}=\frac{p_0}{w_0}+\frac{v_3^2}{2g} \quad \text{より} \quad \frac{p_2}{w_0}=\frac{p_0}{w_0}-\frac{1}{2g}(v_2^2-v_3^2)=\frac{p_0}{w_0}-\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{a_3^2}{a_2^2}-1\right)$$

$$\therefore \quad \frac{p_2}{w_0}=\frac{p_0}{w_0}-H\left(\frac{a_3^2}{a_2^2}-1\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (117)$$

即ち $a_2<a_3$ ならば p_2 は大氣壓 p_0 よりも小なるを以て下水槽の水は EC 管内に h だけ上昇する、h は

$$\frac{p_2}{w_0}+h=\frac{p_0}{w_0} \qquad \therefore \quad h=\frac{1}{w_0}(p_0-p_2)=H\left(\frac{a_3^2}{a_2^2}-1\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (118)$$

若し $h>H'$ 即ち $H\left(\frac{a_3^2}{a_2^2}-1\right)>H'$ にして且つ $\frac{p_0}{w_0}\geqq h\geqq H'$ ならば下槽の水を吸上げ得る。但し C の壓力强度は零以下に下る事を得ざるを以て、流速を如何に大ならしむるも $\frac{p_0}{w_0}$ 以上の高さ迄吸上ぐる事は出來ぬ。

[22] 水理學上の單位及びデイメンシヨン

（1） 單位 (Units)

1. 流速 **(Velocity)** 水流中の一點に於て之を流過する水分子の、流れの平均方向に於ける速度をその點の流速と言ふ。定流に於てはある點の流速は常に相等しく、不定流に於ては刻々變する。普通，流速は一秒間に流過する距離を以て表はす。我國及び歐洲大陸に於てはメートル (meter)

單位を用ふ事に定められ居るも、今日に於ては尙種々の單位を使用して居る。

日本，歐洲大陸，南米等	毎秒メートル	米/秒 (m/sec), (m-sec)
日本舊單位	毎秒　尺	尺/秒
英米，印度，加奈陀等	毎秒　呎	呎/秒 (ft/sec)

其他特種の場合に用ふる單位は

實驗等に用ふる小水流に於て	cm/sec (cm-sec)
地下水，濾過水等速度極めて小なる場合	cm 又は mm/sec,　m/hour, m/day
洪水波，潮波等の傳播速度	km/hour, m/sec
同上舊單位	里/時
英米單位	mile/hour, ft/sec

2. 斷面積 **(Sectional area)** 水流の平均方向に垂直なる斷面をその水流の斷面又は**正斷面** (Normal section) と云ひ、その面積を水流又は水路の斷面積と云ひ、單位は平方米 (sq. m, m²), 平方糎 (sq. cm, cm²) を用ひ、舊單位にては平方尺，英米 sq. ft...平方呎...等を用ふる。

3. 流量 **(Discharge)** 水流のある斷面を單位時間に流過する水の體積を流量 (Discharge) と呼び、普通用ふる單位は

日本，歐大陸，南米等	大流量の場合	立米/秒 (cu. m/sec, m³/sec)
	小流量又はポンプ	リツトル/秒 (l/sec, 1-sec)
日本舊單位		立方尺/秒（個）
英米		立方呎/秒 (cu. ft/sec, ft³/sec)

其他次の如き單位を用ふる事もある。

送水管，ポンプ等の流量	立方米/分 (m³/min)
〃　舊單位	立方尺/分
〃　英米國	立方呎/分
〃　英　國	Imperial gallon/min
〃　米　國	U. S. gallon/min
灌漑用水，日本舊單位	石/分，石/秒

上記の諸單位の中、重要なるもの丶相互の關係は卷末附錄第 1 表に示す。同一の横列にある數字は同一の流量を種々の單位を以て表はしたるものにして、例へば横列に於て 1 m³/sec なる流量は

$$1\ \mathrm{m^3/sec}=60\ \mathrm{m^3/min}=35.315\ \mathrm{ft^3/sec}=35.936\ \text{立方尺/sec}\fallingdotseq 36\ \text{個}=5.5432\ \text{石/秒}$$

斷面積，流速，流量等は長さ及び時の同一單位を用ふるを便とするを以て、大なる水流にては凡て長さに m，時に秒を用ひ、小なるものに於てはなるべく cm, sec を用ふるを可とする。

（2） 諸單位のデイメンシヨン **(Dimension of units)** ある量の**デイメンシヨン** (Dimension) とはその量の含む各基本單位の羃數を言ふ。今各基本單位を質量 (mass) $[M]$，長さ (length)

$[L]$, 時 (time) $[T]$ を以て表はせば、水路の長, 幅, 水深, 水頭等は長さの一乘のみにて表はさるゝを以てそのデイメンシヨンは $[L]^1$ 卽ち $[L]$, 體積は長さの三乘を以て表はさるゝが故にデイメンシヨンは $[L]^3$, 力は 質量·加速度 にして加速度は長さを時の二乘にて除したるものなるが故にデイメンシヨンは $[L][M][T]^{-2}$, 壓力强度は力を面積にて除したるものなるを以て $[L][M][T]^{-2}/[L^2]=[L]^{-1}[M][T]^{-2}$ にて表はさる。

次に水理學上重量なる量のデイメンシヨンを表示する。

第 28 表　種々の量のデイメンシヨン

量	記　號	質量 $[M]$	長 $[L]$	時 $[T]$
長, 幅, 高, 水深, 潤邊, 水頭 等	l, B, z, H, S, H, etc.	0	1	0
質量 (重量/g)	M, m	1	0	0
時間	T, t	0	0	1
力, 重量, 水壓, 摩擦力	F, W, P, F	1	1	−2
同上の强度	w, p	1	−1	−2
勾配, 角度	I, i, a, θ	0	0	0
斷面積, 面積	A, a	0	2	0
曲率 (Curvature)	$1/\rho$	0	−1	0
曲率半徑 (Radius of Curvature)	ρ	0	1	0
流速	V, v, u	0	1	−1
加速度	a	0	1	−2
流量	Q, q	0	3	−1
力の能率 (Moment of force), 偶力	M	1	2	−2
粘性係數 (Coef. of viscosity)	η	1	−1	−1
動粘性係數 (Coef. of kimetic Visc.)	ν	0	+2	−1
水流の內部摩擦の强さ	τ, ε	0	2	−1
密度 (Density)	ρ	1	−3	0
單位體積の重量	w_0, w	1	−2	2
比重 (Specific gravity)	γ	0	0	0
勢力 (Energy)	E, E_p, E_k	1	2	−2
平均流速係數 C, $(v=C\sqrt{RI})$	C	0	0.5	−1
摩擦損失係數 f, $\left(h_r=f\dfrac{l}{R}\dfrac{v^2}{2g}\right)$	f, f_r	0	1	−1

(3) デイメンシヨン方程式 (Dimensional equation) 及び單位を變ずる場合の係數の變化

物理的現象を表はす方程式に於ては其の各項のデイメンシヨンは凡て相等しい。

例へば流速公式のデイメンシヨン方程式に於て

$$v=C\sqrt{RI} \qquad \therefore\ [L]^{-1}[T]^{-1}=[C][L]^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore\ [C]=[L]^{\frac{1}{2}}[T]^{-1}$$

從て係數 C は用ふる單位に依てその値を異にする。

今長さの單位に meter を用ひたる場合の係數の値を C_1, 尺を用ひたる場合の値を C_2 とし、時に同一の單位を用ふれば

$$\lambda=C_2/C_1=\left(\frac{3.3}{1}\right)^{\frac{1}{2}}=1.8166\fallingdotseq 1.82$$

卽ち係數 C の兩數値の比は各單位の實際の長さの逆比を C の長さのデイメンシヨン乘したるもの卽ち

$$\lambda=\frac{\text{尺單位の係數}(C_2)}{\text{米單位の係數}(C_1)}=\left(\frac{\text{1mの長}}{\text{1尺の長}}\right)^{C\ \text{の長さのデイメンシヨン}}$$

若し m-sec 單位を尺及び分の單位に變ずれば係數 C_3 は

$$\lambda'=\frac{C_3}{C_1}=\left(\frac{\text{1mの長}}{\text{1尺の長}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\text{一秒の時間}}{\text{一分の時間}}\right)^{-1}=\left(\frac{\text{1mの長}}{\text{1尺の長}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\text{一分間の秒數}}{1}\right)$$

次に方程式のある項にデイメンシヨン不明なる量を含む時は、方程式の凡ての項は同一のデイメンシヨンを有すべき事に依り、容易に不明なるデイメンシヨンを求め得る。

例へば (97) 式中の f_1 のデイメンシヨンが不明なりとして、之れを $[f_1]=[M]^x[L]^y[T]^z$ と假定すれば

(97) 式　　$h=f_1\cdot\dfrac{l}{R^\alpha}\cdot\dfrac{v^\beta}{2g}$

デイメンシヨン方程式　$[M]^0[L][T]^0=[M]^x[L]^y[T]^z\cdot\dfrac{[L]}{[L]^\alpha}\cdot\{[M]^0[L][T]^{-1}\}^\beta\cdot\dfrac{1}{[M]^0[L][T]^{-2}}$

$$=[M]^x[L]^y[T]^z\cdot[L]^{1-\alpha}\cdot[L]^{\beta-1}[T]^{-\beta+2}$$

$$\therefore\quad [M]^0[L][T]^0=\cdot[M]^x[L]^{y+1-\alpha+\beta-1}[T]^{z+2-\beta}$$

然るに各單位のデイメンシヨンは相等しきを要するを以て

$$x=0,\quad y+1-\alpha+\beta-1=y+\beta-\alpha=1,\quad z+2-\beta=0$$

$$\therefore\quad x=0,\quad y=1+\alpha-\beta,\quad z=\beta-2$$

故に　$[f_1]=[L]^{1+\alpha-\beta}\cdot[T]^{\beta-2}$

今例として Unwin の管水路摩擦水頭 h の公式を取れば、ft−sec 單位に於て新鑄鐵管に對し $f_1=0.0215$, $\alpha=1.168$, $\beta=1.95$ にして　$h=f_1\dfrac{l}{D^\alpha}\dfrac{v^\beta}{2g}$

然るに $D=4R$ にしてデイメンシヨンは同一なるを以て $[f_1]$ の式は同一である。從て

$$[f_1]=[L]^{1+1.168-1.95}\cdot[T]^{1.95-2}=[L]^{0.218}[T]^{-0.05}$$

今 m-min 單位を用ふる場合に於ても α, β が變らざるものとすれば係數 f_1' は

$$\frac{f_1'}{f_1}=\left(\frac{1}{3.28}\right)^{0.218}\cdot\left(\frac{60}{1}\right)^{0.05}=0.945$$

次に Williams & Hazen の管水路の公式は ft-sec 單位にて　$h=K\dfrac{l\cdot v^{1.87}}{D^{1.25}}$

前場合と同樣デイメンシヨン方程式より係數 K のデイメンシヨンを求むれば　$[K]=[L]^{-0.62}[T]^{1.87}$

單位を m-sec に變ずれば係數 K' は時の單位は不變なるを以て　$K'=K\left(\dfrac{1}{3.28}\right)^{-0.92}=2.089\,K$

[23] 水流の相似律

(1) 等速定流に於ける摩擦抵抗 (**Frictional resistance in uniform steady flow**) 一般に等速定流の場合に於て流體の受くる抵抗力 F は長さ l, 流速 v, 流體の比重 ρ 及び粘性 η の函數にして

$$F \propto l^x v^y \rho^s \eta^z$$

を以て表はすことを得る。依て之に前節のディメンション方程式の理論を適用すれば

$$[M][L][T]^{-2}=[L]^x\cdot[L]^y[T]^{-y}\cdot[M]^z[L]^{-3z}\cdot[M]^s[L]^{-s}[T]^{-s}$$

各單位のディメンションは相等しきを要するを以て

$$1=z+s,\qquad 1=x+y-3z-s,\qquad -2=-y-s$$

s を既知と考へて此聯立一次方程式を解けば

$$x=2-s,\qquad y=2-s,\qquad z=1-s$$

$$\therefore\quad F\propto l^{2-s}v^{2-s}\rho^{1-s}\eta^{s}=\rho l^2v^2\left(\frac{\eta}{vl\rho}\right)^s$$

今 $\left(\dfrac{\eta}{vl\rho}\right)^s$ を一の函數と考へて　　$F=\rho l^2v^2\cdot\varphi\left(\dfrac{vl\rho}{\eta}\right)$　… … … … … (119)

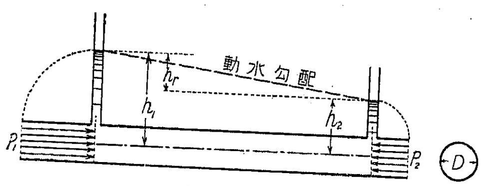
と置けば、$vl\rho/\eta$ はディメンション無き數にして、從て函數 φ は單位に無關係である。$\eta/\rho=\nu$ は動粘性係數なるを以て

$$F=\rho l^2v^2\cdot\varphi\left(\frac{vl}{\nu}\right)=\rho l^2v^2\cdot\varphi(\boldsymbol{R}),\quad 茲に\quad \frac{vl}{\nu}=\boldsymbol{R}\qquad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (120)$$

$\boldsymbol{R}$ を**レーノーツ常數** (Reynolds' number, 英, 1883) と稱し、動水學上最も重要なる常數の一である。

即ち等速定流の如き場合流水の受くる抵抗力は ρ, l^2, v^2 及び $\varphi(\boldsymbol{R})$ に比例する。

(2) 管內の等速定流に於ける摩擦抵抗と流速との關係並に水流の相似律 (**Dynamical similarity of flow**) 內面の性質一樣なる場合は粗度を表はす係數は常數にして且つ φ 中の寸法 l に管徑 D を用ふれば



第 132 圖

接觸面積＝管長$(l)\cdot\pi\cdot$管徑$(D)=\pi\cdot l\cdot D$

なるを以て

$$F=\pi\cdot\rho lDv^2\cdot\varphi(\boldsymbol{R}),\qquad \boldsymbol{R}=\frac{vD}{\nu}$$

等速運動なるを以て抵抗力は、上流端斷面の水壓と下流端斷面の水壓との差に等しく即ち

$$F=P_1-P_2=\varDelta p_1-\varDelta p_2=\frac{\pi}{4}D^2(p_1-p_2)=\frac{\pi}{4}D^2\cdot\varDelta p=\pi\cdot\rho lDv^2\cdot\varphi(\boldsymbol{R})$$

$$\therefore\quad \frac{\varDelta p}{l}=\rho\frac{v^2}{D}\varphi(\boldsymbol{R})\qquad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (121)$$

$$\varDelta p=wh_1-wh_2=\rho g(h_1-h_2)\qquad \therefore\ h_r=h_1-h_2=\varphi(\boldsymbol{R})\cdot\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g}\qquad\cdots\ \cdots\ (122)$$

但し一定の數値は φ に含ましめた。

整流の場合は實驗上 $\varDelta p/l\propto v^{+1}$ なるを以て (120) 式に於ける函數 φ は $\varphi\left(\dfrac{vD}{\nu}\right)\propto\dfrac{\nu}{vD}$, 故に (121) 式より

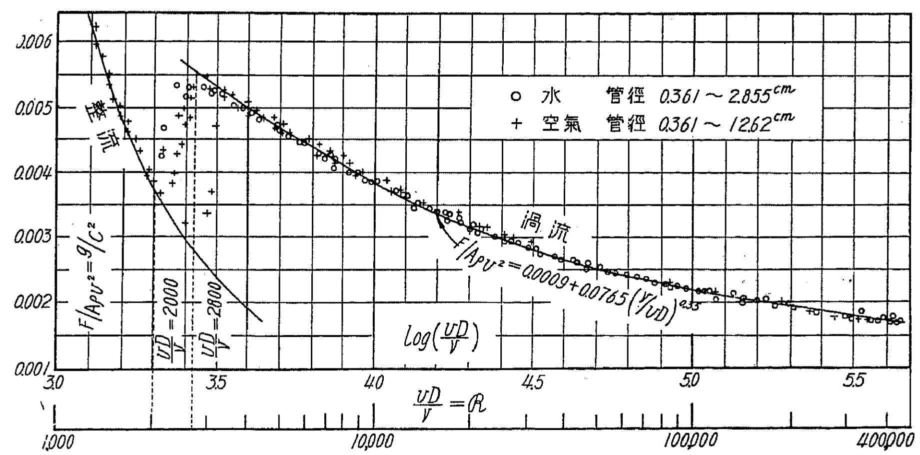
$$\frac{\varDelta p}{l}\propto v\propto\frac{\nu}{vD}\cdot\rho\frac{v^2}{D}=k\cdot\rho\cdot\nu\frac{v}{D^2}\qquad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (123)$$

渦流に於ては實驗上 $\varDelta p/l\propto v^n$, $n=1.75\sim2.0$

$$\therefore\quad \frac{\varDelta p}{l}\propto\frac{\rho v^2}{D}\left(\frac{\nu}{vD}\right)^{2-n}=k_1\frac{\rho v^n\nu^{2-n}}{D^{3-n}},\ 及び\ h_1-h_2=h_r=k_2\cdot l\frac{v^n\nu^{2-n}}{D^{3-n}}\qquad\cdots\ \cdots\ (124)$$

茲に k_1, k_2 等は內面の粗度に依て異る係數である。

(121) 式に依り $\varDelta p\cdot\dfrac{D}{\rho lv^2}$ と $\dfrac{vD}{\nu}$ との關係は若し內面の性質同一ならば ρ, l, v, D, ν 及び $\varDelta p$ の値に拘らず、即ち如何なる液體が如何なる管內を流るゝ場合に於ても常に同一の曲線を以て表はさるべき筈にして、今日迄の無數の實驗は之を實證して居る。氣體に於ては密度 ρ は壓力 p に依て異るも $\varDelta p$ が極めて小、從つて ρ が殆んど不變なる範圍に於ては矢張り同一の曲線を以て表はし得る (第 133 圖)。

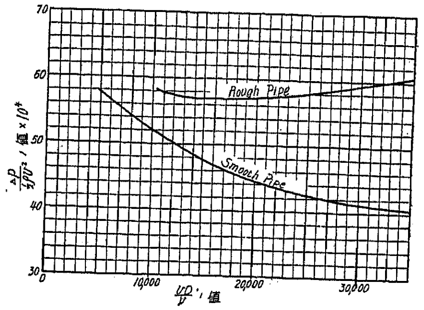


第 133 圖

尙 (124) 式に依り $F\propto v^2$ の場合は $\varphi(\boldsymbol{R})$ は一の常數となり、粘性は抵抗に直接關係せざる事となる。

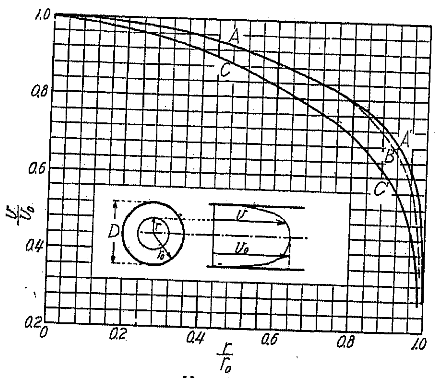
$$n=2,\qquad \varDelta p=k_1\cdot\rho\frac{l}{D}v^2=k_1\cdot\rho\cdot2g\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g}\quad\cdots\ k_1,\ 常數\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (125)$$

若し $n\neq2$ なる時は $\frac{vD}{\nu}$ の値を一定にすれば管徑異り、又は異種の液體を流すも k_1 は同一の値を得るを以て兩者の間に相似律が成立し、從て實驗に便利なる小管又は液體を用ひて k_1 を定むれば、之を如何なる場合にも適用し得る。水中を運動する固體，流水中に靜止する固體に作用する抵抗力、又は流水の受ける抵抗力卽ち水頭損失等を小規模の模型實驗に依て定め得るは上記の理論に基くものであるが、兩者に於て大さ又は液體の性質が著しく異る場合は精確を期し難い。

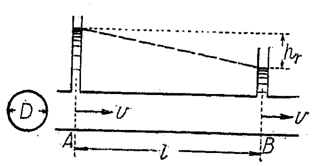


第 134 圖

Stanton (英, 1911) が管水流の水平直徑上の流速分布を實驗せるに、粗面管 ($n=2$) に於ては D の大小に拘らず略一定の分布…第135圖の CC' 線はある點の流速 v と管軸の流速 v_0 との比…となり、平滑管 ($n<2$) に於ては vD/ν を一定とせる時は同一分布 (AA'線) となるも、然らざる場合は周邊部は異る分布 (AB 線) を示して居る。

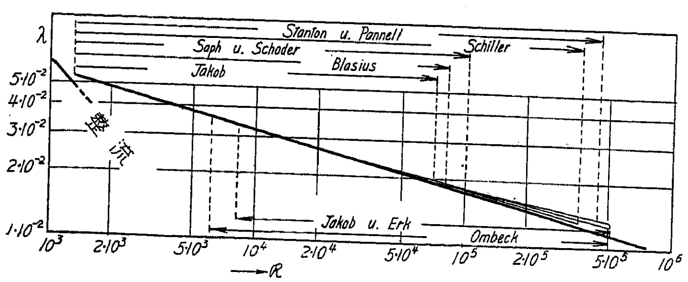

第 135 圖

內面平滑なる直線管路の中間部に於て l なる長さの區間の兩端 A, B (第136圖) の壓力の差を Δp, 平均流速を v とすれば $\Delta p/l$ は略 v^2 に比例する。ρ…密度, $\Delta p=w_0h_r$ とすれば


第 136 圖

$$\frac{\Delta p}{l}=\lambda\frac{\rho}{2D}v^2 \qquad \therefore\ h_r=\lambda\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g} \quad \cdots\ (126)$$

λ は潤邊の狀態同一なる限り $\boldsymbol{R}$ のみの函數にして、流體の種類，管徑等に無關係なるが、整流に於ては $\lambda=\frac{64}{\boldsymbol{R}}$, 渦流に於ては實驗者に依て多少異るも第137圖に示す如く $\boldsymbol{R}$ に對して略一定し、Blasius に據れば

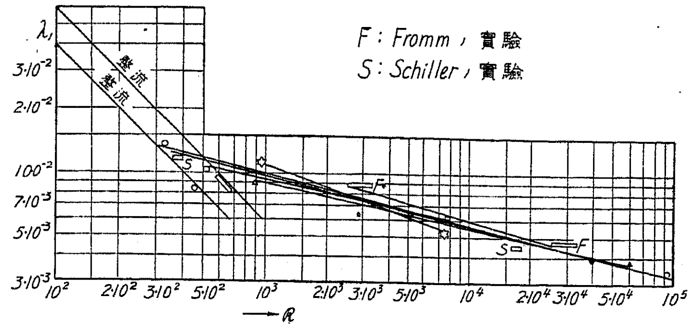


第 137 圖　引拔眞鍮管，鉛管，ガラス管，$D=8\sim101$ mm

$$\lambda=0.3164\boldsymbol{R}^{-0.25}\cdots\ (127)$$

管の形狀が著しく異る時は λ は同一の $\boldsymbol{R}$ に對しても多少異る。圓形以外の斷面に對しては

$$\frac{\text{斷面積}}{\text{潤邊}}=\frac{A}{S}=R\ (\text{徑深})$$



第 138 圖　種々の斷面形に於ける $\boldsymbol{R}$ と λ_1 との關係

$$h_r=\lambda_1\frac{l}{R}\frac{v^2}{2g},\quad \lambda=\mu\boldsymbol{R}^x \quad \cdots\ \cdots\ (128)$$

λ_1 と $\boldsymbol{R}$ との關係は第138圖に示す如く圓形，正方形，矩形，三角形，星形等に依て x は多少異なり、平均 $\lambda_1=0.0559\cdot\boldsymbol{R}^{-0.25}$ である。

(3) 重力の影響著しき場合の抵抗力　孔より流出する水流、障碍物に會して水面に波動を生ずる流れ等の場合は、粘性のみならず重力の影響が重大にして後者に於ては粘性の影響は却て微小である。此場合の F は l, v, ρ, ν 及び g の函數にして

$$F\propto l^x\cdot v^y\cdot\rho^z\cdot\nu^s\cdot g^r$$

ディメンション方程式: $[M][L][T]^{-2}=[L]^x\cdot[L]^y[T]^{-y}\cdot[M]^z[L]^{-3z}\cdot[L]^{2s}[T]^{-s}\cdot[L]^r[T]^{-2r}$

$$\therefore\ [M],\quad 1=z;\qquad [L],\quad 1=x+y-3z+2s+r;\qquad [T],\quad -2=-y-s-2r$$

$$\therefore\ x=2-s+r,\quad y=2-s-2r,\quad z=1;\qquad \therefore\ F\propto\rho l^2v^2\cdot\left(\frac{\nu}{vl}\right)^s\cdot\left(\frac{lg}{v^2}\right)^r$$

$$\therefore\ F=\rho l^2v^2\phi\left(\frac{\nu}{vl},\ \frac{lg}{v^2}\right)\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (129)$$

卽ち此場合は $\frac{\nu}{vl}$ 及び $\frac{lg}{v^2}$ が共に一定なる場合に於てのみ相似律が成立する。然るに同一の液體を用ふる時は ν 及び g は一定なるを以て

$$\frac{\nu}{vl}=\text{const.}\quad \therefore\ v\propto\frac{1}{l};\qquad \frac{lg}{v^2}=\text{const.}\quad \therefore\ v\propto\sqrt{l}$$

卽ち兩條件の要求が同じからざるを以て相似律を滿足する事は不可能にして、從て模型實驗に依て係數を確實には定め得ぬ。

水面に著しき波動を生ずる場合は抵抗に因る勢力消耗は大部分波動を起す爲に費さるゝを以て ν の影響を無視し

$$F=\rho l^2v^2\phi\left(\frac{lg}{v^2}\right)\qquad \therefore\ \frac{lg}{v^2}=\text{const.}\qquad \therefore\ v\propto\sqrt{l}\cdots\ \cdots\ \cdots\ (130)$$

(4) 模型實驗の理論 (Theory of model experiments)　大規模の水流に於て實測に依て種々の水理學的關係を求めんとすれば精密なる測定困難にして、且つ多くの條件に對して因果關係を明かならしむるには多大の時日と費用とを要する。從て小なる模型を用ひて種々の關係を實驗

し、更に理論的關係を應用して規模大なる實際の水流の諸現象を推定せんとする方法が 19 世紀末に起り、近年に至り長足の進步を遂げ、實際の計畫及び工事に於て重要なるものは凡て豫め模型實驗に依て適否を試驗するに至り、特に純水理學的の問題に於て偉大なる功果を擧げ、現今吾人の用ふる水理學上の公式は殆んど凡て室內實驗の結果に基きたるものである。下記の關係は動粘性の影響を無視せる場合である。

	長	面積	體積	質量	速度	時間	流量	水頭	勾配	抵抗力	單位時間勢力
模型	l	a	v	m	u	t	q	h	i	f	e
實物	$L=nl$	$A=n^2a$	V	M	U	T	Q	H	I	F	E

1. 落體の速度,　$u=\sqrt{2gh}$,　$U=\sqrt{2gH}$,　$\therefore\ U/u=\sqrt{n}$　或は　$U=\sqrt{n}\cdot u$
2. 一定高を落下するに要する時間,　$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$,　$T=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$　$\therefore\ T/t=\sqrt{\dfrac{H}{h}}$　$\therefore\ T=\sqrt{n}\cdot t$
3. 流量,　$q=au$.　$Q=AU$　$\therefore\ \dfrac{Q}{q}=\dfrac{n^2a\cdot\sqrt{n}u}{a\cdot u}=n^{2.5}$　$\therefore\ Q=n^{2.5}\cdot q$
4. 勾配,　$i=\dfrac{h}{l}$,　$I=\dfrac{H}{L}$　$\therefore\ I=i$
5. 力, 抵抗力, …水の密度 ρ は同一,　$f=m\cdot g$,　$F=M\cdot g$

$$m=\frac{\rho l^3}{g},\quad M=\frac{\rho L^3}{g}\quad \therefore\ \frac{F}{f}=\frac{L^3}{l^3}\quad \therefore\ F=n^3\cdot f$$

6. 單位時間の勢力 (馬力, キロワット等),　$e=\rho qgh$,　$E=\rho QgH$

$$\therefore\ \frac{E}{e}=\frac{QH}{qh}=\frac{n^{2.5}q\cdot H}{q\cdot h}\quad \therefore\ E=n^{3.5}\cdot e$$

7. 力率 (Moment of force),　$\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}}=\dfrac{n^4}{1}$　$\therefore\ \mathfrak{M}=n^4\cdot\mathfrak{m}$
8. 仕事 (Work),　$\dfrac{W}{w}=\dfrac{n^4}{1}$　$\therefore\ W=n^4\cdot w$

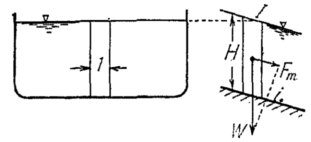
（5） **水流の洗掘作用 (Scouring) に關する模型實驗**　洗掘作用は掃流作用とも言ひ、流速, 流量のみならず、洗掘さるゝ土砂粒の大さに關係するを以て相似律は成立せず、從て模型實驗の結果より實際の場合を正しく推定する事は困難である。

	長	幅	水深落差	潤邊	勾配	流速	流量	一粒に對する平均掃流力	同最大	砂粒平均徑	流速係數
模型	l	b	h	s	i	v	q	f_m	f	d	c
實物	$L=nl$	$B=mb$	$H=nh$	S	I	V	Q	F_m	F	D	C

1. **流量**　$c=C$ とすれば

$$\frac{Q}{q}=\frac{V\cdot H\cdot B}{v\cdot h\cdot b}=\sqrt{n}\cdot n\cdot m=n^{1.5}\cdot m,\quad \frac{I}{i}=\frac{H}{L}\cdot\frac{l}{h}=\frac{n}{m}\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (131)$$

2. **掃流力**　F_m＝單位床面上の鉛直水柱の重量の流れの方向に於ける分力×流れの方向に於ける砂粒の投射面積$=w_0HI\cdot\dfrac{1}{4}\pi D^2$



第 139 圖

實際の最大掃流力　$F=\zeta F_m=\zeta w_0HI\cdot\dfrac{\pi}{4}D^2$

砂粒の抵抗力　R＝水中に於ける重量×摩擦係數 (ϕ)

$$=\phi(w-w_0)\frac{\pi D^3}{6},\qquad w\ldots\text{砂の單位體積の重量}$$

平衡條件は　$F=R$　$\therefore\ D=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\gamma-1}\cdot\dfrac{\zeta}{\phi}HI$,　玆に　$\gamma=w/w_0$

今　$k=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\gamma-1}\cdot\dfrac{\zeta}{\phi}$　と置けば　$D=kHI$

k は實物と模型とに於て略同一なるを以て $\dfrac{D}{d}$ を e と置けば

$$e=\frac{D}{d}=\frac{kHI}{khi}=\frac{HI}{hi}\qquad \therefore\ i=\frac{H}{h}\cdot\frac{d}{D}I$$

水深 H, h に代ふるに徑深 R, r を用ふれば

$$\therefore\ \frac{D}{d}=e=\frac{RI}{ri}\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (132)$$

次に　$V=C\sqrt{HI}$,　$v=c\sqrt{hi}$

$$\therefore\ \frac{D}{d}=e=\frac{V^2}{v^2}\cdot\frac{c^2}{C^2}=\left(\frac{Q}{q}\cdot\frac{a}{A}\right)^2\left(\frac{c}{C}\right)^2\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (133)$$

從來の多數の實驗, 實測の結果 $C\propto(VR)^\beta$,　$c\propto(vr)^\beta$ なるを以て

$$\frac{C}{c}=\left(\frac{VR}{vr}\right)^\beta=\left(\frac{Q}{A}\cdot\frac{a}{q}\cdot\frac{A}{S}\cdot\frac{s}{a}\right)^\beta=\left(\frac{Q}{q}\ \frac{s}{S}\right)^\beta$$

今幅に對して水深小に $s\fallingdotseq b$, $S\fallingdotseq B$ とすれば

$$\left.\begin{aligned}e&=\frac{D}{d}=\left(\frac{Q}{q}\right)^2\left(\frac{a}{A}\right)^2\left(\frac{Q}{q}\ \frac{s}{S}\right)^{-2\beta}=\left(\frac{Q}{q}\right)^{2(1-\beta)}m^{-2(1-\beta)}n^{-2}\\ \therefore\ \frac{Q}{q}&=m\cdot n^{\frac{1}{1-\beta}}\cdot e^{\frac{1}{2(1-\beta)}}\end{aligned}\right\}\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (134)$$

天然河川に對し

$$\beta=\frac{1}{8}\qquad \therefore\ \frac{Q}{q}=m\cdot n^{\frac{8}{7}}\cdot e^{\frac{4}{7}}\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (135)$$

Manning 或は Forchheimer 流速公式…[24] (5), (6) 參照…を用ふれば

$$C\propto R^\beta,\quad c\propto r^\beta\quad \therefore\ \frac{C}{c}=\left(\frac{A}{a}\ \frac{s}{S}\right)^\beta=n^\beta,\quad (S\fallingdotseq B,\ s\fallingdotseq b)$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ e&=\frac{D}{d}=\left(\frac{Q}{q}\right)^2m^{-2}\cdot n^{-2-\beta}\\ \frac{Q}{q}&=e^{0.5}\cdot m\cdot n^{1+\frac{\beta}{2}}\end{aligned}\right\}\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (136)$$

Manning 公式に依れば　$v=CR^{\frac{2}{3}}I^{\frac{1}{2}}$　$\therefore\ \beta=\dfrac{1}{6}$

$$\therefore \quad e=\frac{D}{d}=\left(\frac{Q}{q}\right)^2\cdot m^{-2}\cdot n^{-\frac{16}{3}}, \qquad \frac{Q}{q}=e^{0.5}\, m\cdot n^{\frac{13}{12}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (137)$$

Forchheimer 公式　$v=CR^{0\cdot 7}I^{0\cdot 5}$, 　$\therefore \ \beta=0.2$

$$\therefore \quad e=\frac{D}{d}=\left(\frac{Q}{q}\right)^2 m^{-2}\cdot n^{-2.2}, \qquad \frac{Q}{q}=e^{0.5} m\cdot n^{1.1} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (138)$$

然るに

$$\left(\frac{Q}{q}\right)^2=\left(\frac{A}{a}\ \frac{V}{v}\right)^2=\left(\frac{A}{v}\right)^2\frac{C^2RI}{c^2ri}=(mn)^2\cdot n^{2\beta}\cdot n\cdot m^{-1}\cdot n=m\cdot n^{4+2\beta}$$

$$\therefore \quad e=m\cdot n^{4+2\beta}\cdot m^{-2}n^{-2-\beta}=m^{-1}\cdot n^{2+\beta} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (139)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Manning 公式} & e=m^{-1}\cdot n^{\frac{13}{6}} \\ \text{Forchheimer 公式} & e=m^{-1}\cdot n^{2.2} \end{array}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (140)$$

卽ち洗掘作用の模型實驗に於ては設備の可能なる範圍に於て、(140) 式の何れかを滿足する如く e, m 及び n を定めざるべからず、普通 e は使用砂の粒の大さに依て定まり m は實驗設備の大さに依るを以て、上式の條件を滿足する如く n を定むる。

次に洗掘土砂の總量に關しては洗掘期間に依るを以て更に複雜なる關係を生ずる。