

## 第三編 基礎壓力の分布と弾性沈下 (土壌弾性論)

### 第一章 ブーシネスクの土性論

#### 1. 土壌の應力變形率關係式

第一編土質科學に於て述べたる如く、土壌は一般に多岐多様の物理的性質を有し、従つてその力學的性質も一括して單純化することは相當の無理が伴ふわけである。故に土壌力學と稱すべきものは、恐らく材料力學 (Strength of materials) の如く單純なる弾性論の應用によつて解決することは困難であらう。土壌に關する力學に就いて基本となるべき土性論を導き出した人は、未だ佛の Boussinesq のみである (Poussée des terres : Annales de l' Ecole Normale Supérieure, 1917)。以下その論旨の概要を述べることにする。

ブーシネスクは土壌に就いて次の如き性質を先づ假定した。

- (1) 土塊は自然の状態に於ては互に内力を及ぼさない。
- (2) 土塊は非壓縮性を有する。
- (3) 粘性なき土壌では張應力は働き得ない。

今  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を以つて三主應力  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  を以つて三主變形率とする。

而して

$$-p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \dots\dots\dots(1)$$

と置きこれを平均壓力と稱する。又

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \dots\dots\dots(2)$$

これを弾性膨脹といふ。

水の場合に於ては

$$-p = A \cdot \theta \quad \text{但 } A \text{ は常數} \dots\dots\dots(3)$$

弾性體の場合には(3)の外に

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) &= B (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) &= B (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) &= B (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \text{〔但 } B \text{ は常數〕} \dots\dots(4)$$

なる關係ある故に

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1 \\ \sigma_2 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_2 \\ \sigma_3 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_3 \end{aligned} \right\} \text{〔但 } \lambda, \mu \text{ は常數〕} \dots\dots(5)$$

なる關係を得。

ブーシネスクは土壤は、水と弾性體との如上の性質を考へ且非壓縮性の假定により(3)の代りに

$$-p = D[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \text{〔但 } D \text{ は常數〕} \dots\dots(6)$$

と置き(4)の代りに

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) &= mp (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) &= mp (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) &= mp (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \text{〔但 } m \text{ は常數〕} \dots\dots(7)$$

と置いた。斯くして

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -p (1 - 2m\varepsilon_1) \\ \sigma_2 &= -p (1 - 2m\varepsilon_2) \\ \sigma_3 &= -p (1 - 2m\varepsilon_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

なる關係を導出した。従つて今  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  を三直角軸方向の垂面應力、 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  を三つの接面應力とし、これに應ずる三直角軸方向の轉位を  $u, v, w$  を以つて表せば一般に土壤に於ては下の如き應力變形率の關係 (Stress-strain relation) を得。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p \left(1 - 2m \frac{\partial u}{\partial x}\right), & \sigma_y &= p \left(1 - 2m \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \sigma_z &= p \left(1 - 2m \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \tau_{xy} &= -pm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), & \tau_{yz} &= -pm \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \tau_{zx} &= -pm \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

従つてこの應力變形率間の關係を通常の弾性論の平衡式即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

に入れてこれに非壓縮性の式即

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots(11)$$

を併せて四個の獨立式を得べきにより、これより適宜周邊條件 (Boundary conditions) に合致すべき  $u, v, w$  及  $p$  の四個の未知値を求め得べき筈である。常數  $m$  は土壤の性質によつて實驗的に決定さるべき値である。

### 2. 土壤の弾性限點

今二次元の場合を考へ

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= 0 \\ \varepsilon_3 &= -\varepsilon_1 \end{aligned}$$

と置けば

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= p (1 - 2m\varepsilon_1) \\ \sigma_2 &= p \\ \sigma_3 &= p (1 + 2m\varepsilon_1) \end{aligned}$$

従つて

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_3 + \sigma_1} = 2m\varepsilon_1 \dots\dots(12)$$

となる。此式の中左邊の分子  $\sigma_3 - \sigma_1$  は第1圖に於て界面應力  $\tau$  の二倍に等しく左邊の分母  $\sigma_3 + \sigma_1$  は同じく  $-p$  の二倍である因つて (12) 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{-p} &= 2m \varepsilon_1 \\ \text{又は} \quad \sin \varphi &= 2m \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

此式より考ふればランキンの粉體力學の滑動限界値即

$$\sin \varphi \leq \sin \theta \quad (\text{但 } \theta \text{ は限界摩擦角}) \dots\dots\dots (14)$$

は主變形率  $\varepsilon_1$  が限界値

$$\varepsilon_1 = \frac{\sin \theta}{2m} \dots\dots\dots (15)$$

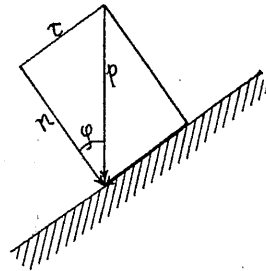
に達するとき滑動を始むることを意味してゐる。ブーシネスクは (15) の値を土壤の弾性限點 (Limite d'elasticité de terre) と稱してゐる。これによつてブーシネスクは土壤に就いて見事に弾性力學と粉體力學との連絡を成立せしめたのである。即ち換言すれば變形率の小なる間は土壤はほぼ弾性力學の範圍に於て解決し得べく、變形率が或限界値以上に達し得べき時はこゝに滑動の現象が起り、それ以後は粉體力學を以つて論すべきことを明示してゐる。

この亞弾性力學範圍内の理論に就いては其後大なる發展を見ないが、滑動限界を超えた場合の問題に就いての嚴密なる解法はブーシネスク自身の手により、後には Kötter, Reissner, Kármán 等によつて可成りの發展を見たのである(拙著材料強弱並土壓論〔岩波物理化學〕参照)。

## 第二章 弾性沈下の理論

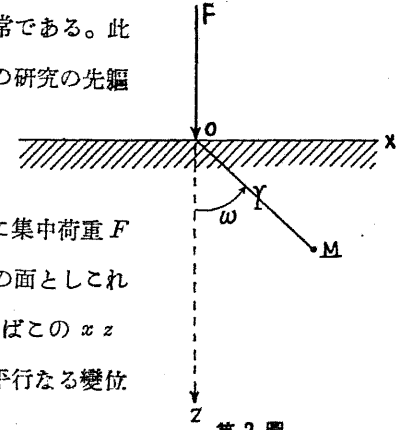
### 1. 半無限弾性體の表面に働く集中荷重

前述の如くブーシネスクの導出した土性論はその後大なる發展を遂げなかつた。



第1圖

通常基礎地盤の弾性沈下を論ずるには土を一個の弾性體と考へて普通の弾性論を應用するのが常である。此の問題に關しても、亦ブーシネスクがその研究の先驅をなしてゐる。(Boussinesq: Application des potencies.) 第2圖に示す如く半無限體(即圖中陰影を施せる部分)の表面に集中荷重  $F$  が働くものとす、今圖に於て紙面を  $xz$  の面としこれに垂直の方向に  $y$  軸があるものと考へればこの  $xz$  面に於ける  $M$  點の  $F$  による  $x$  及  $z$  に平行なる變位  $u, w$  は下の如き値で與へられる。



第2圖

$$\left. \begin{aligned} u &= K \frac{F \sin w \cos w}{r} \\ w &= -K \frac{F \sin^2 w}{r} + 2K \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{F}{r} \end{aligned} \right\} \left[ K = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right] \dots\dots\dots (16)$$

但し式中  $\lambda$  及  $\mu$  は Lamé の弾性係數であつてヤングの係數  $E$  及剛性係數  $G$  との關係を示せば下の如くである。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\sigma)} = G \end{aligned} \right\} \text{〔但 } \sigma \text{ ポアソン比〕} \dots\dots\dots (17)$$

又  $x$  及  $z$  に平行なる垂面應力  $\sigma_x, \sigma_z$  及それに對應する界面應力  $\tau_{xz}$  は下の式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -K \frac{2\mu Fz}{r^3} \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{3x^2}{r^2} \right] \\ \sigma_z &= -K \frac{2\mu Fz}{r^3} \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{3z^2}{r^2} \right] \\ \tau_{xz} &= -K \frac{2\mu Fx}{r^3} \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{3z^2}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

此式に於て

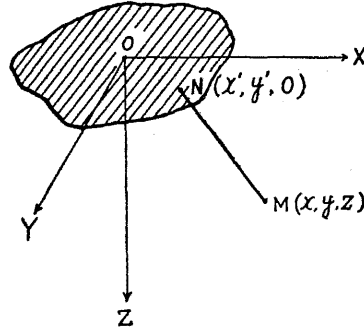
$$\frac{x}{r} = \sin w \quad \frac{z}{r} = \cos w$$

であつてこれ等は  $OM$  の方向一定ならば定數である。故に應力  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  の

値は凡て同一方向の放射線  $OM$  上では原点  $O$  より距離の自乗  $r^2$  に逆比例する値を有することが解る。

且 
$$\frac{\tau_{zz}}{\sigma_z} = \frac{x}{z}$$

なる故  $Oz$  に垂直なる面上に働く應力の合成力は原点  $O$  から射出する放射線の方角に向つてゐる。



第 3 圖

2. 半無限弾性體の表面に働く分布荷重

半無限弾性體の表面に於て分布荷重が働くとき、その弾性體内の任意の點に於ける變位及應力を求める問題は古くから Boussinesq 及 Cerruti が解いたのでプーシネスクの問題と稱して著名である。今

その大要を述べれば第 3 圖に於て  $M(xyz)$

を弾性體内の任意の一點とし、分布荷重の働く領分を  $xy$  面の原点を圍む第 3 圖中陰影を施せる部分とし、その領分中の任意の一點を  $N(x', y', 0)$  とすれば  $MN$  の距離は

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2$$

で表はし得。今  $N$  點に於ける分布荷重の強度を  $p$  を以つて表せばプーシネスクは、先づ下の如き函数を用ひた。

$$\left. \begin{aligned} X &= \iint p \log(r+z) dx' dy' \\ V &= \iint \frac{p}{r} dx' dy' \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

この上式を對數ポテンシャルと呼び下式はニュートンが萬有引力の解法に用ひた所謂ニュートンのポテンシャルである。この兩函数の積分は第 3 圖中陰影を施せる領分について行ふべきは勿論である。プーシネスクは斯くの如き二個のポテンシャル函数を用ひることによつて、如何なる分布及強度を有する分布荷重が働く

場合に於ても弾性體内の任意の一點  $M$  の變位及應力を算出することを得べき極めて一般的の式を導き出すことに成功した。

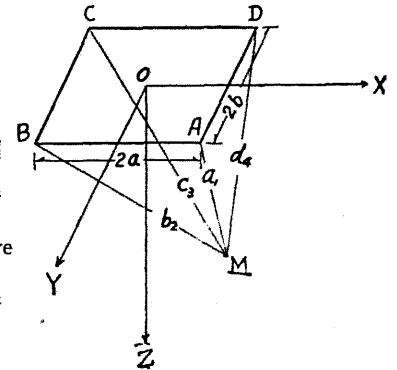
即今  $M$  點に於ける  $xyz$  軸の方向に於ける變位を  $uvw$ ,  $xyz$  軸に平行なる垂面應力を  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ , これ等に應ずる剪應力を  $\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}$  とすれば、是等は一般に下式によつて與へられる。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\lambda+\mu} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{z}{\mu} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ v &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\lambda+\mu} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{z}{\mu} \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ w &= \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} V - z \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_z &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{yz} &= -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \tau_{zx} &= -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_z &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{yz} &= -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \tau_{zx} &= -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

(20) (21) は上述の如く如何なる分布及強度の分布荷重に對しても通用さるべき驚くべき廣範圍の應用を有する式であるが、 $X$  及  $V$  の二重積分が實行上困難がある爲め、その後あまりこの式を實際に用ひる人が少なかつた。近來 Love はこの  $X$  及  $V$  の二重積分を矩形及圓形の場合に對して積分することに成功した

(Trans. Roy. Soc. A Vol. 228)。

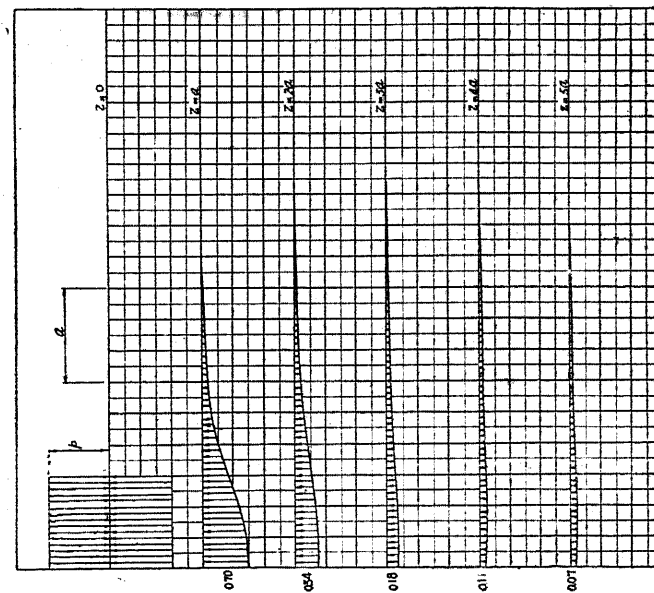
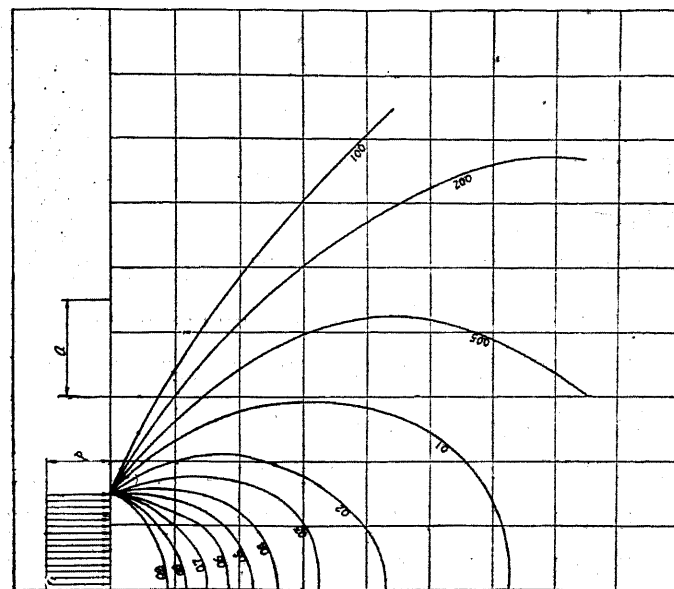


第 4 圖

今吾々が地盤載荷試験に屢々用ふる矩形の場合についての應力を求むるには第4圖の如く幅  $2a$  長  $2b$  の  $ABCD$  なる載荷面を有し、且その荷重は  $p$  なる等布強度なりとすれば、 $M$  より  $ABCD$  に到る距離を  $a_1, b_2, c_3, d_4$  で表すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= p \left[ \tan^{-1} \frac{b-y}{a-x} + \tan^{-1} \frac{b+y}{a-x} - \tan^{-1} \frac{z(b-y)}{(a-x)a_1} \right. \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{z(b+y)}{(a-x)d_4} + \tan^{-1} \frac{b-y}{a+x} + \tan^{-1} \frac{b+y}{a+x} \right. \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{z(b-y)}{(a+x)b_2} - \tan^{-1} \frac{z(b+y)}{(a+x)c_3} \right] \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} &= p \left[ \tan^{-1} \frac{a-x}{b-y} + \tan^{-1} \frac{a+x}{b-y} - \tan^{-1} \frac{z(a-x)}{(b-y)a_1} \right. \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{z(a+x)}{(b-y)b_2} + \tan^{-1} \frac{a-x}{b+y} + \tan^{-1} \frac{a+x}{b+y} \right. \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{z(a-x)}{(b+y)d_4} - \tan^{-1} \frac{z(a+x)}{(b+y)c_3} \right] \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= - \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} &= p \log \frac{(z+a_1)(z+c_3)}{(z+b_2)(z+d_4)} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -p \left[ \frac{a-x}{(b-y)^2+z^2} \left( \frac{b-y}{a_1} + \frac{b+y}{d_4} \right) + \frac{a+x}{(a+x)^2+z^2} \right. \\ &\quad \left. \left( -\frac{b-y}{b_2} + \frac{b+y}{c_3} \right) \right] \dots(22) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -p \left[ \frac{b-y}{(b-y)^2+z^2} \left( \frac{a-x}{a_1} + \frac{a+x}{b_2} \right) + \frac{b+y}{(b+y)^2+z^2} \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{a-x}{d_4} + \frac{a+x}{c_3} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= p \left[ \frac{z}{(a-x)^2+z^2} \left( \frac{b-y}{a_1} + \frac{b+y}{d_4} \right) - \frac{z}{(a+x)^2+z^2} \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{b-y}{b_2} - \frac{b+y}{c_3} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= p \left[ \frac{z}{(b-y)^2+z^2} \left( \frac{a-x}{a_1} + \frac{a+x}{b_2} \right) - \frac{z}{(b+y)^2+z^2} \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{a-x}{d_4} + \frac{a+x}{c_3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = p \left[ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{d_4} \right]$$



第 6 圖

第 5 圖

なる値を得従つて是等を (21) に入れば直ちに任意の一點  $M$  に於ける應力の値を得。今正方形即  $a = b$  なる載荷面に對して  $y = 0$  の縦斷面に於ける  $\sigma_x$  の値を計算して圖示すれば第5圖の如くなる、尙この等値線を示せば第6圖の如し(工學士木村二郎：表面に角柱荷重を受けたる土壤内の應力)、鐵道省土質調査委員會報告第一輯)。是等は Kögler 等が實際の土壤に就いて實驗し、實測した應力分布と極めてよく似てゐる。

尙載荷重面中央に於ける地表の沈下即  $z$  軸の方向の變位を計算すれば

$$w = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \times 7.052 ap \dots\dots\dots (23)$$

となり、Goldbeck が實驗上導出した建物の沈下がその載荷面積の平方根に比例するといふ説と一致してゐることが解る。

尙此の問題に就いてブーンネスクのポテンシアル論とは全く別個の方法として級數を用ふることによつて、色々の人々(特に英國學派の人々)が解法を出してゐる。我邦に於ては寺澤寛一博士が此の問題に關して長論文を完成し「彈性體は載荷の爲めにその兩側の表面が原平面より隆起することなし」といふ定理を出してゐる(Terazawa: Journ. College of Science, Tokyo. Vol. 37. 1916)。工學士松村孫治君は、地下に彈性を異にする地層が存在する場合及び彈性體の彈性係數が深さによつて變化する場合に就いての此の問題に付いて一研究を發表し、或場合に於ては載荷重中央の沈下が必ずしも(23)の示す如く載荷面積の平方根に比例するとは限らないといふ重要な結論を得てゐる(松村孫治：土木學會誌第十七卷第九號第十一號)。基礎沈下の問題については如上の如く彈性力學の範圍に屬する限り、相當多くの理論的研究が既に發表されてゐるが、これが實際的の價値に就いては未だ充分なる實驗によつて檢證せらるゝに至らない。これは土壤自身が完全彈性體に非ざることにも歸因しやうが、それよりも一般に地盤をなす土壤が極めて不均質であり従つて各地に於て行はるゝ實驗の結果が多種多様になり、單純に一般化し難いことに歸因するであらう。何れにしてもこの沈下の問題は未だ今後の土性力學上の一大研究題目たるに違ひない。