

VIII.

平面に於ける流線及び速度ポテンシャル.

117. 速度ポテンシャル. 分速度 u, v, w が、 x, y, z, t の一意函数 ϕ の偏微分にて表はし得る場合。即

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

のとき、 ϕ を速度ポテンシャルと稱へ、水理學上極めて重要で且つ多く用ひられる。丁度引力や、磁力の法則に於けるポテンシャル函数と、其の形が似てゐる爲にかく名付けられたものである。

§. 23 に述べた流線の條件により、點 (x, y, z) に於ける水分子の運動の方向は、分速度 u, v, w の値によつて、定められる。故に其流線の微分方程式は

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}; \quad (2)$$

である。若し速度ポテンシャルが存在するときには式 (1) により流線は明に等ポテンシャル面と到る所で垂直に交る事となる。(§. 7 参照)。

又任意の點 (x, y, z) から、微長 ds を引き、その方向餘絃を l, m, n とすると、この方向への速度は $lu+mv+nw$ で、従つて

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial s}; \quad (3)$$

即ち任意の方向の流速は、其の方向に於ける ϕ の變化の程度に等しい。

若しも、 ds を $\phi = C$ の面に垂直、即ち流線の方向に引き、 $d\phi$ が等しい様に面を幾組も作り、且其の間隔を少くとれば任意の點に於ける流速の大きさは、

各隣合つた等ポテンシャル面間の距離に逆比例する。

$$\text{次に } u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

を連続の式 §. 3 式 (3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

に代入すれば

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0; \quad (4)$$

これを Laplace の方程式と云ひ、簡単にする爲に

$$\Delta^2 \phi = 0; \quad (5)$$

とかく。

§. 4 式 (5) 即ち

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

に式 (1) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \cdot \partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \cdot \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \cdot \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{但し } V^2 = u^2 + v^2 + w^2;$$

故に Euler の運動の公式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とする事が出来る。これを積分すると、 ρ は定数であるから

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Omega + \frac{p}{\rho} = F(t); \quad (8)$$

となる。

若し、定常運動の場合は、 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ にして、 $F(t) = C$ となるから

$$\frac{V^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} = C \quad (9)$$

尚、外力が重力計りのときは、 $\Omega = gz$ であるから、

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C_1 = H \quad (10)$$

となり、Bernoulli の公式を誘導する事が出来る。§. 25 式 (18)

尙式 (10) に於て V が非常に大きくなると p は殆ど 0 に近くなる。例へば非常に速に廻轉するプロペラとか、又は水力タービンの場合には、この様な事が起つて、真空部分が出来ゝる爲に仕事の能率を悪くしたり、材料の腐蝕が生じたりして、非常に不利な現象を示す。

118. 線流の定義. 今流水内の點 $O(x, y, z)$ にある水分子の速度を V とし、其の附近にある點 $P(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ に於ける水分子の速度を V' とすれば

$$V' = V + \delta V \quad (11)$$

O と P の距離が極めて近いときは、相對速度 δV の分速度は

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ \delta w &= \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

で表はされる。

$$\text{今 } a = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad c = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= \eta \delta z - \zeta \delta y + a \delta x + h \delta y + g \delta z \\ \delta v &= \zeta \delta x - \xi \delta z + h \delta x + b \delta y + f \delta z \\ \delta w &= \xi \delta y - \eta \delta x + g \delta x + f \delta y + c \delta z \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。

或は

$$u_1 = \eta \delta z - \zeta \delta y; \quad v_1 = \zeta \delta x - \xi \delta z; \quad w_1 = \xi \delta y - \eta \delta x;$$

$$u_2 = a \delta x + h \delta y + g \delta z; \quad v_2 = h \delta x + b \delta y + f \delta z; \quad w_2 = g \delta x + f \delta y + c \delta z;$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= u_1 + u_2 \\ \delta v &= v_1 + v_2 \\ \delta w &= w_1 + w_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

而して $u_1; v_1; w_1$ は P 点の O に對する廻轉運動を示し、 $u_2; v_2; w_2$ は所謂流體の歪、即 P 点の O に對する變形を示してをる。

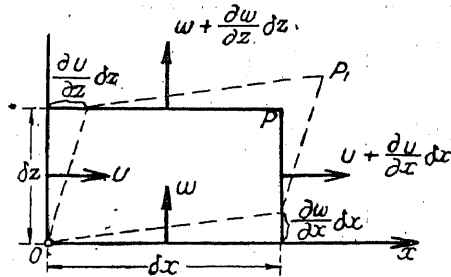


圖. 1.

圖(1)に於て流體の微小塊體 $O-P$ を考へ、 u, v, w を移動速度の分速度とすると $a \delta x; b \delta y; c \delta z$ は單位時間に起る邊長 $\delta x, \delta y, \delta z$ の變化を表はす。又 $2f, 2g, 2z$ は最初の各邊長の挟む角(直角)の變化を示すもので、圖に於ては $2g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ は δx

と δz の間の角の變化を示してをる。

若し $\xi = 0; \eta = 0; \zeta = 0$; 即

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (14)$$

である場合は $u_1 = 0; v_1 = 0; w_1 = 0$ で、其の流水の水分子は廻轉運動をしない事になる。かくの如き運動を非渦動運動と云ひ、此の様な運動をする水流を線流と云ふ。従つて式(14)は線流の定義と見るべきものである。

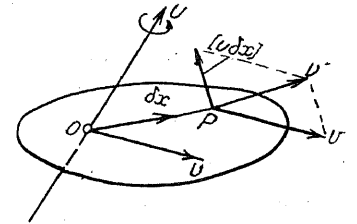


圖. 2.

119. Circulation. 又は Zirkulation.

流水内に任意の線 $ABCD$ を書き其の線上に微小長 ds を取り其の點に於ける流速を V とする。而して V の ds の方向への分速度 $V \cos(V \cdot ds)$ と ds との積、 $V \cos(V \cdot ds) \cdot ds$ をこの線上に積分したものを線 A から D への流れと云ひ、 $I(ABCD)$ を以て表はす。

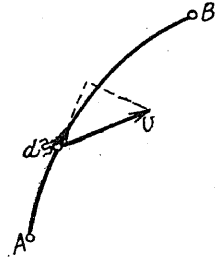


圖. 3.

$$\left. \begin{aligned} I(ABCD) &= \int_A^D V \cos(V \cdot ds) \cdot ds \\ &= \int_A^D (u dx + v dy + w dz) \\ &= \int_A^D \left(u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} + w \frac{dz}{ds} \right) ds \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

若し D が A と一致した場合、即ち閉塞線の際には、Circulation と云ひ $I(ABCA)$ となる。或は

$$\Gamma = \oint \mathcal{V} ds = \oint (u dx + v dy + w dz) \quad (16)$$

と書く事もある。

而して此の場合時計の針の廻轉と反對の方向を正とする。

若し流水が非渦動運動をなす場合には

$$\begin{aligned} \int_A^B (u dx + v dy + w dz) &= \int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_A^B \frac{\partial \phi}{\partial s} ds = \phi_B - \phi_A \end{aligned} \quad (17)$$

即ち A—B 間の流れは、A と B との速度ポテンシャルの差であつて、取扱つてをる流水の範圍内で、 ϕ が有限な一意函数である限り、其の積分の経路には無關係で、且つ一つの値を有する事が分る。此の場合全経路に対する Circulation は

$$\Gamma = \oint (u dx + v dy + w dz) = 0 \quad (18)$$

故に流水内に任意の形状をした容積を採り、其の容積内に種々の閉塞線を畫き、其の線の Circulation が恒に零なる場合、其の流水は非渦動運動をなすと定義する事も出来る。即ち速度ポテンシャルが存在すると云ふ事が非渦動運動の條件である。

120. 一平面内に於ける非渦動運動。 現實には、この様な運動は存在しないが、運動の式を數學的に取扱ふ時に極めて簡単になるから、流體の運動が到る處一平面に平行なものと假定して、取扱い、必要に応じて之れを修正する事が多い。

平面を (X, Y) 面にとれば、Z 軸の方向の速度は $w = 0$ であつて、運動は z の方向には無關係であるから、X, Y 面に平行な何れの面を取るも任意である。即ち此の平面運動の條件は

$$w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

今此の流れは定流で、非渦動運動をするものと假定する。式 (14) にある條

件式

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

の内、初めの 2 は式 (19) によつて満足せられ、終りの式は非過動運動の條件

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (20)$$

から満足せられる。

又連續の式 §. 3 式 (3) は簡単に

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

となり、これに式 (20) を代入して

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (22)$$

即ち u 及び v は、式 (20) に依つて x 並に y の函数であり、又 ϕ は式 (22) に依つて定められるものであつて、式 (20) と式 (22) とが此の場合の條件式である。

121. 流線及び流函数. §. 120 に述べた様に、速度ポテンシャルは式 (22) を満足しなければならぬ。今 Z 面上にある任意の點 z を表はすのに一般に複素數

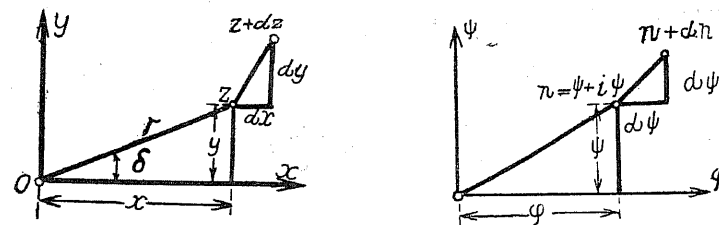


圖. 4.

$$z = x + iy \quad (23)$$

或は

$$z = r (\cos \delta + i \sin \delta) = r e^{i\delta}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

とする。この z の函数 $F(z)$ を W とし

$$\begin{aligned}
 W &= F(z) = F(x+iy) \\
 &= p(x,y) + iq(x,y) \\
 &= \phi + i\psi
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

で表はせば、 ϕ 及び ψ は (x, y) の函数で且つ實數である。

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}; \tag{25}$$

に於て

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

であるから

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{dz}; \tag{26}$$

然るに $W = \phi + i\psi$; であるから、

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{27}$$

従つて

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}; \tag{28}$$

同様に偏微分

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{dW}{dz}$$

に於て

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

従つて

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{29}$$

式 (28) と式 (29) とは等しい筈であるから

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right);$$

従つて

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}
 \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

なる共軛の関係式が得られる。これを Cauchy-Riemann の微分方程式約して コリ 方程式と云ひ、複素數の函数の基礎條件となるものである。

式 (28) 及び式 (29) により

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dW}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
 \frac{dW}{dz} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}
 \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

と書く事が出来る。

又、式 (30) から

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \tag{33}$$

而して此の兩式は、速度ポテンシャルの式 (22) と同一の形を有するもので複素數 $x+iy$ の、解析函数 $F(x+iy)$ の實部 ϕ も虚部 ψ も共に速度ポテンシャルの式 (20) を満足する事が分る。

次に dt 時間に水分子の動いた距離は

$$dx = u dt = \frac{\partial \phi}{\partial x} dt$$

$$dy = v dt = \frac{\partial \phi}{\partial y} dt$$

この變位に對應する ψ の値の變化は

$$\begin{aligned}
 d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\
 &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dt
 \end{aligned}$$

式 (30) の條件をこれに代入すると

$$\partial\psi = 0$$

となる。

即ち分子の運動方向に對して、 ψ は常數である。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= C = \text{常數} \\ \psi(x, y) &= C \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

或は

となり、これは水分子の運動の経路を示す曲線即ち流線を表はす式である。

又式 (30) によつて分速度は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

と書く事が出来るから、式 (20) の v と、式 (35) の u とをかけ、又式 (20) の u と、式 (35) の v とをかけて差引と

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad (36)$$

となり、 $\phi = \text{定數}$ 。並に $\psi = \text{定數}$ の曲線群は互に垂直に交る事が分る。或は

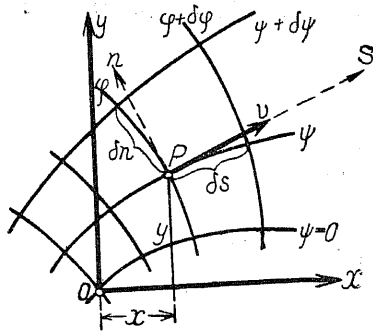
流線は等速度ポテンシャル面に垂直なる事が分る。

圖 (5) の様に點 P に於て流線に切線 s 及び等ポテンシャル線に切線 n を引けば、

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\partial\phi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial n} \\ u &= \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

今流線 ψ と無限的に近い隣りの流線 $\psi + \delta\psi$ との間の距離を、 δn とすればその間を通る流量は

$$v \cdot \delta n = \delta\psi \quad (38)$$



圖・5.

故に任意の二つの流線 ψ_i 及び ψ_k の間の流量は

$$q = \int_k^i v \cdot \delta n = \psi_i - \psi_k \quad (39)$$

故に ψ を流函數と稱す。

又式 (37) の初の式から重要な結論が導き出される。

即ち等ポテンシャル線と流線とのある一群を考へ、其の $\delta\psi$ 及び $\delta\phi$ が共に等しい場合には、速度 v の大きさは其の隣り合せのポテンシャル線との距離 δs に反比例するし、又隣り合せの流線との距離 δn に反比例する事が分る。

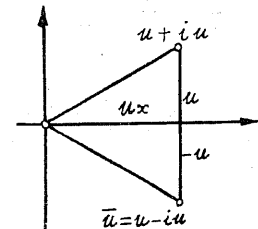
式 (20) と式 (35) とから

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &= \bar{V} = u - iv \end{aligned} \quad (40)$$

但し

$$\bar{V} = \bar{V}(z)$$

解析函數は $z = x + iy$ であるから、 \bar{V} は W を z に付て微分して得られる、 \bar{V} は實軸に對し $u + iv$ にて與へられる流速の鏡像即ち所謂共軛速度として作る事が出来る。



圖・6.

是等複素數の取扱に對しては、等角寫像の方法を用ひるのが便利で、特に水理學に於ては盛に用ひられてをる、其の詳細に付ては函數論を参照。

122. 應用.

a) 源泉及び吸込み.

$$W = c \log_e z \quad (41)$$

なる z に付ての解析函數が與へられた場合、其の微分係數は

$$\frac{dW}{dz} = \frac{c}{z} = \frac{c}{x + iy}$$

又 $z = re^{i\delta}$ であるから

$$W = c \log_e re^{i\delta} = c \log_e r + ci\delta \quad (42)$$

故に $z = re^{i\delta} = re^{i(\delta+2k\pi)}$; 但し $k = 0; 1, 2, 3, 4$ (43)

故に z の一つの値に無数の $W_k = c \log r + ci(\delta + 2k\pi)$ の値が對應し、其の各々は $2ik\pi$ 丈異つてをる。今 $W = c \log r + ci\delta$ に付て考へる。 $W = \phi + i\psi$ であるから、速度ポテンシャル函数及び流函数として

$$\left. \begin{aligned} \phi &= c \log_e r \\ \psi &= c\delta \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

になる。

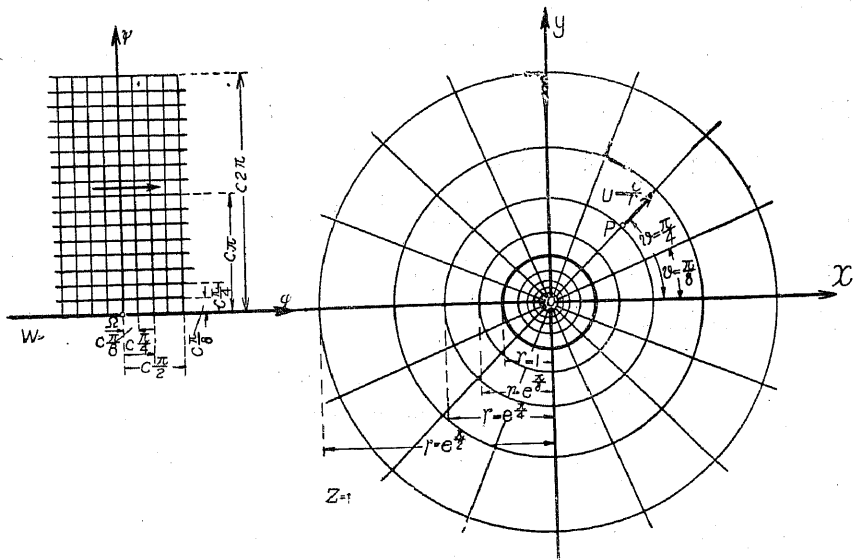


圖. 7.

圖(7)に於ては、 Z 面及び W 面を示す。 W 面に於て ψ 軸に平行な線は $\phi = c \log r = \text{定数}$ 、即ち $r = \text{定数}$ であるから、 Z 面に於ては、原点の周りの同心圓に對應變移する。又 ϕ 軸に平行な線は、 $\psi = c\delta = \text{定数}$ であるか

ら Z 面に於ては、原点 O を通る直線になる。而して、 Z 面に於て $\delta = 0$ から $\delta = 2\pi$ 迄の間の直線は W 面に於ては丁度 $\psi = 0$ から $\psi = c \cdot 2\pi$ 迄の間の線に對應する。又 $r = 1$ の時は $\phi = 0$ であり、 Z 面に於ては所謂單位圓になり、 W 面に於ては ψ 軸に相應する。若し $r > 1$ の時は ϕ は正であり $r < 1$ のときは ϕ は負である。従つて Z 面に於ける單位圓の外側のものは W 面に於ける幅 $c \cdot 2\pi$ を有する ϕ 軸の正方向に於けるの一帶に相應し、之れに反して單位圓の内側のものは W 面に於て ϕ の負の方向に相應す。

若しも、 W 面に於ける $\phi = \text{定数}$ 、 $\psi = \text{定数}$ の線を單なる平行の流の等ポテンシャル線及び流線と考へると、これ等は式(41)によつて計算した Z 面に於ける流れの等角寫像となる、即ちこゝでは O を通じ發散する直線は流線を示すし、同心圓は等ポテンシャル線を、表はしてをる。

任意の點 P に於ける流速は流線の方向で示されるから

$$V = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{c}{r} \quad (45)$$

即ち V は原点 O から P 迄の距離に逆比例する、 V_a を P_a の流速とし、 P_a の O からの距離を r_a とすると、 $V_a = \frac{c}{r_a}$ であるから

$$V = V_a \frac{r_a}{r} \quad (46)$$

此の圖に示す様に、原点 O から凡ての方向に、發散する流れを源泉と稱し、反對に原点 O に向つて、凡ての方向から流れ込むものを吸込みと云ふ。

今 E を以て單位時間の涌泉量とすれば、半径 r の部分で厚を 1 にとれば

$$E = V \cdot 2\pi r \cdot 1 = 2\pi c = 2\pi V_a r_a \left[\frac{m^3}{sec} \right] \quad (47)$$

吸込そのときは

$$E_i = -E$$

従つて

$$V = \frac{E}{2\pi r} \left[\frac{m}{sec} \right]$$

$$\phi = \frac{E}{2\pi} \log r \left[\frac{m^3}{\text{sec}} \right]$$

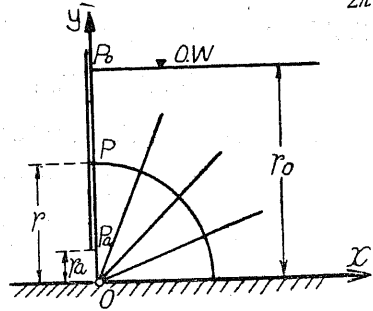


図. 8.

V_o, V, V_a をそれぞれ点 P_o, P, P_a に對應する速度とし、 r_o, r, r_a をその O から O 距離とする。又エネルギーの等式 §. 25 式 (15) により

$$\frac{V_o^2}{2} + gr_o = \frac{V^2}{2} + gr + \frac{p}{\rho};$$

但し p は實用壓力。

$$\frac{p}{\gamma} = r_o - r - \frac{V^2 - V_o^2}{2g} \quad (48)$$

P_a に於ては、 $p = 0$ であるから

$$\frac{V_a^2}{2g} = r_o - r_a + \frac{V_o^2}{2g} \quad (49)$$

となる。一方、式 (46) によつて

$$V_a = \frac{V_o r_o}{r_a}; \quad V = \frac{V_o r_o}{r}$$

故に式 (49) は

$$\frac{V_o^2}{2g} \left(\frac{r_o^2}{r_a^2} - 1 \right) = r_o - r_a;$$

従つて

$$\frac{V_o^2}{2g} = \frac{r_o - r_a}{\frac{r_o^2}{r_a^2} - 1} r_a^2 = \frac{r_a^2}{r_o + r_a};$$

又

$$\frac{V_o^2}{2g} = \frac{V_o^2 \cdot r_o^2}{2g \cdot r} = \frac{r_o^2}{r_o + r_a} \cdot \frac{r_o^2}{r^2};$$

これを式 (48) に代入して

$$\frac{p}{\gamma} = r_o - r - \frac{r_a^2}{r_o + r_a} \left(\frac{r_o^2}{r} - 1 \right); \quad (50)$$

水門の扉單位幅に及ぼす壓力 D は

例題. 前に述べた様な、吸込みに相當するものは、水門を開けた場合、其の孔口 r_a が水深 r_o に比して極めて小さい時に起る。圖 (8)。

此の時は流れは明に孔口に向つて放射状に集まるから、孔口は吸込みと、考へられる。水底を X 軸に、水門を Y 軸にとると前の圖 (7) に於ける第一限象に相當したものが出来る。

$$D = \int_{r_a}^{r_o} p dr = \gamma \left\{ r_o(r_o - r_a) - \frac{1}{2}(r_o^2 - r_a^2) + \frac{r_a^2 r_o^2}{r_o + r_a} \left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_a} \right) + \frac{r_a^2}{r_o + r_a} (r_o - r_a) \right\} \\ = \gamma (r_o - r_a)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{r_a}{r_o + r_a} \right) \quad (51)$$

この場合の静水壓 D_s は

$$D_s = \gamma \frac{(r_o - r_a)^2}{2};$$

勿論これは完全流體としての計算であるから、實際のものに對する近似的解法に過ぎない。

b) 二平面に限りられた隅の流れ. 此の流れは式

$$W = cz^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (52)$$

但し $c =$ 常數

$\alpha =$ 平面のなす角

によつて定められる。

$$Z = re^{i\delta}$$

とすると

$$W = c \cdot r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{i \frac{\pi \cdot \delta}{\alpha}} = cr^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\cos \frac{\pi \cdot \delta}{\alpha} + i \sin \frac{\pi \delta}{\alpha} \right);$$

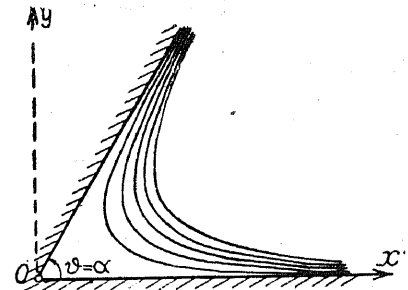


圖. 9.

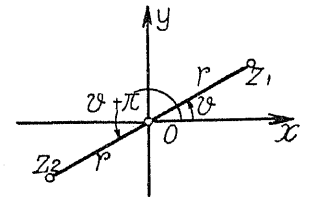


圖. 10.

故に

$$\begin{aligned} \phi &= cr^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi \cdot \delta}{\alpha}; \\ \psi &= cr^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi \cdot \delta}{\alpha}; \end{aligned} \tag{53}$$

$\delta = 0$ 及び $\delta = \alpha$ に對しては $\psi = 0$; 即ち $\delta = 0$ 及び $\delta = \alpha$ の線は流線 $\psi = 0$ に相應するもので、即ち境界線に相當する。

1) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ の場合、式 (52) は

$$W = cZ^2 = cr^2 e^{2i\delta} \tag{54}$$

となる、この場合 W の一つの値に對し Z の二つの値がある、即ち $Z_1 = re^{i\delta}$, $Z_2 = re^{i(\delta+\pi)}$; 而して $Z_2^2 = r^2 e^{2i(\delta+\pi)} = r^2 e^{2i\delta} = Z_1^2$ となる。

X 軸の上方にある Z_1 の點は、全 W 面に對應し、 X 軸の下方にある Z_2 の點は第二 Riemann 面に對應する。

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ であるから、式 (53) により

$$\begin{aligned} \phi &= cr^2 \cos(2\delta) = cr^2 (\cos^2 \delta - \sin^2 \delta) = c(x^2 - y^2) \\ \psi &= cr^2 \sin(2\delta) = 2cr^2 \sin \delta \cos \delta = 2cxy \end{aligned}$$

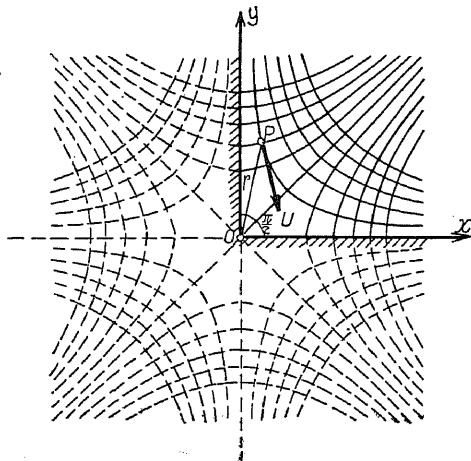


圖. 11.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2cx \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2cy \\ V &= \sqrt{u^2 + v^2} = 2cr \end{aligned}$$

V_a を點 P_a に於ける速度とすると $V_a = 2cr_a$

$$V = V_a \frac{r}{r_a}$$

W 面に於ける $\phi = c =$ 常數なる線は、 Z 面に於ては $x^2 - y^2 =$ 定數。である線の一

群に相應し、その主軸は X 軸となる、 W 面に於ける $\phi = -c$ の線は $y^2 - x^2 =$ 定數であるから Y 軸を主軸とする線の一群となる。又 W 面に於ける $\phi = c$ の線は $2xy = c =$ 常數であるから Z 面に於て象限 1 及び 3 に於て座標軸を漸近線とする双曲線に相應し、同様し W 面に於ける $\phi = -c$ の線は、象限 2 及 4 にある双曲線となる。

2) $\alpha = \pi$ の場合

$$\begin{aligned} \phi &= cr \cos \delta = cx; \\ \psi &= cr \sin \delta = cy; \\ u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = c; \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

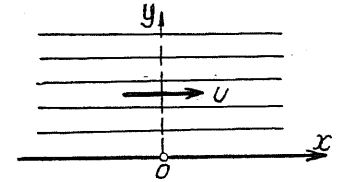


圖. 12.

即ち X 軸に平行な流速 $v = c$ を有する平行な流れである。

3) 一般に式 (45) により、 r 及それに垂直な方向に於ける分速度は

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\pi}{\alpha} cr^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos\left(\frac{\pi \delta}{\alpha}\right) \\ V_\delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \delta} = -cr^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin\left(\frac{\pi \delta}{\alpha}\right) \cdot \frac{\pi}{\alpha} \\ V &= \sqrt{V_r^2 + V_\delta^2} = \frac{\pi}{\alpha} cr^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \end{aligned}$$

點 O に於ては

$$\begin{aligned} \alpha < \pi \text{ のとき } & V = 0 \\ \alpha > \pi \text{ のとき } & V = \infty \end{aligned}$$

c) 同じ強さの源泉及び吸込み.

$$W = c \log \frac{z-l}{z+l} \quad (c \text{ 及び } l \text{ は定數}) \tag{55}$$

r_1 及び r_2 を Z 面に於ける點 $P(x, y)$ の $B_1(+l, 0)$ 及 $B_2(-l, 0)$ からの距離とし、 δ_1 及び δ_2 を B_1P ; B_2P の X 軸となす角とする。

$$z-l = x-l+ig = r_1 e^{i\delta_1}$$

$$z+l = x+l+ig = r_2 e^{i\delta_2}$$

式 (55) により

$$W = c \log \frac{r_1 e^{i\delta_1}}{r_2 e^{i\delta_2}} = c \log \frac{r_1}{r_2} + ci(\psi_1 - \delta_2) = \phi + i\psi$$

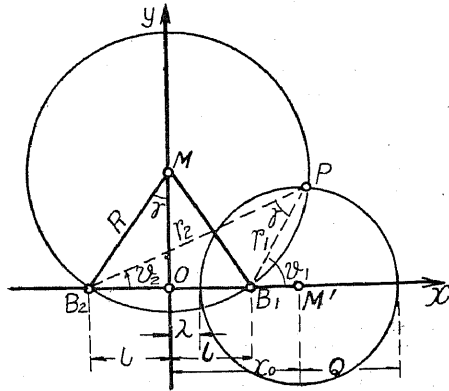


図. 13

或は

$$\left. \begin{aligned} \phi &= c \log \frac{r_1}{r_2}; \\ \psi &= c(\delta_1 - \delta_2) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

W 面に於て、 $\psi =$ 定数なる線に對應する、Z 面の線は $\delta_1 - \delta_2 =$ 常數なる故、點 $(\pm l, 0)$ を通り、Y 軸の上に其の中心を置く圓の群である。

$$R = \frac{l}{\sin r} = \frac{l}{\sin\left(\frac{\psi}{c}\right)}$$

W 面に於て定數に對するものは、Z 面に於ては點であつて、それは

$$\frac{r_1}{r_2} = \mu = \text{常數} \quad (57)$$

なる關係がある。従つて

$$r_1^2 = \mu^2 r_2^2$$

と云ふ條件が成立する。

即ち $(x-l)^2 + y^2 = \mu^2 [(x+l)^2 + y^2]$

或は $x^2 + y^2 - 2lx \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2} + l^2 = 0$

この式は X 軸上に中心のある多くの圓を示す。今圓の式を

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2 + y^2 &= \rho^2 \\ x_0 &= l \cdot \varepsilon; \quad \rho^2 = x_0^2 - l^2 \end{aligned} \quad (58)$$

とし

とすれば

$$\rho = \sqrt{l^2 \varepsilon^2 - l^2} = l \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (59)$$

上式と比較して

$$\varepsilon = \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}$$

x_0 並に ρ によつて、 $\phi =$ 定數に相應する、Z 面上の圓を決定することが出来る。

$\frac{\phi}{c} = \log \frac{r_1}{r_2}$; の正の値に對應して、 $r_1 > r_2$ 並に $\mu > 1$ を得るし、それから $\varepsilon > 0$;

$x_0 < 0$ となつて、この $\frac{\phi}{c}$ に對する圓は Y 軸の左側にある。これに反して、 $\frac{\phi}{c} < 0$ に對して、 $x_0 > 0$ となる。これらは圖 (14) に示してある。

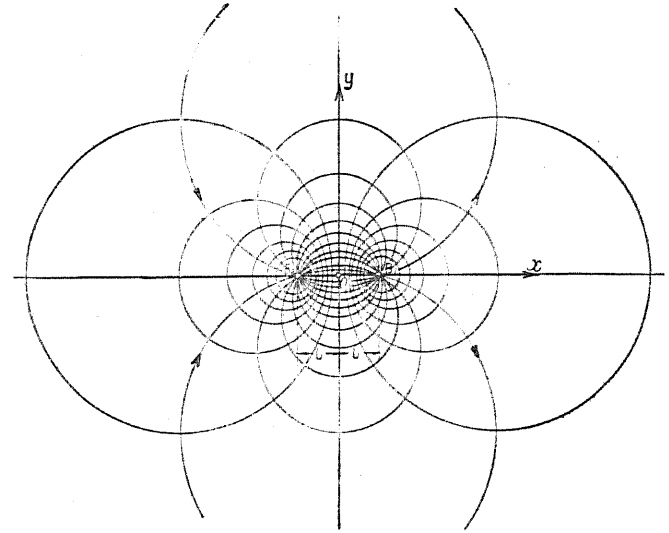


圖. 14

式 (56) を

$$\phi = c \log r_1 - c \log r_2; \quad \psi = c\delta_1 - c\delta_2 \quad (60)$$

の形に書いて、 $\phi =$ 常數を等ポテンシャル線、又 $\psi =$ 常數を流線と考へると解析函数 (55) は $E = \pm 2\pi c$ を有する源泉及び吸込みの重り合を示す式となる。

流速の式は

$$\frac{dW}{dz} = c \frac{d}{dz} \left(\log \frac{z-l}{z+l} \right) = \frac{2c \cdot l}{z^2 - l^2} = \frac{c}{z-l} - \frac{c}{z+l}$$

$$z-l = r_1 e^{i\delta_1}$$

$$z+l = r_2 e^{i\delta_2}$$

とすれば

$$\frac{dW}{dz} = \frac{c}{r_1} e^{-i\delta_1} - \frac{c}{r_2} e^{-i\delta_2} = u-iv \quad (61)$$

即ち

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|^2 = u^2 + v^2 = V^2$$

又式(61)から直接に、 V の値を求めることが出来る。

$$V = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{\frac{c^2}{r_1^2} + \frac{c^2}{r_2^2} - \frac{2c^2}{r_1 r_2} \cos r}$$

然るに

$$2 \cos r = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 4l^2}{r_1 r_2};$$

故に

$$V = c \sqrt{\frac{r_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - 4l^2) + r_1^2}{r_1^2 r_2^2}} = \frac{2lc}{r_1 r_2} \quad (62)$$

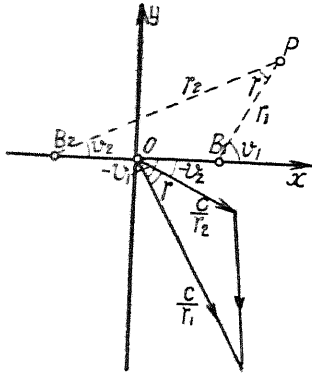


図. 15.

の周りの残りの圓は流線となり、 B_1 及び B_2 を通ずる圓は等ポテンシャル線となる。堰體の半径を ρ 、其の床からの引き上げられた高を λ 、とすると、 $r_0 = \rho + \lambda$ 、 $l = \sqrt{r_0^2 - \rho^2}$ が定まる。流速 V は式(63)によつて、 P_a に於ける V_a が與へられれば直ちに決定する。

V_a を或る定つた點、 P_a の已知の流速とすると

$$V_a = \frac{2lc}{r_{a1} r_{a2}}$$

であるから

$$V = V_a \frac{r_{a1} r_{a2}}{r_1 r_2}; \quad (63)$$

例題. この問題は、轉堰又は弧形堰に於ける流速關係を研究する際に應用されるものである。

今圖(16)に於て B_1 の周りの偏心圓の一つを堰體、 Y 軸を水路の底と考へると、點 B_1

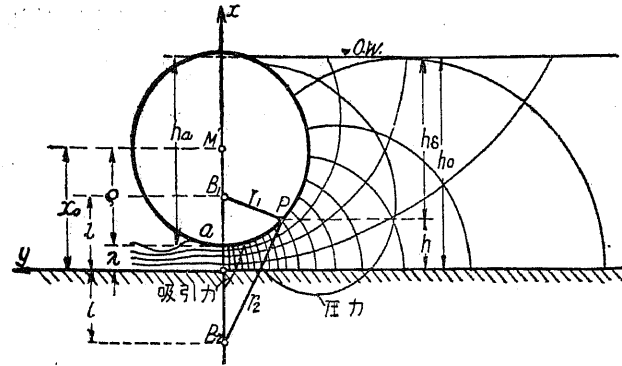


圖. 16.

この堰體に及ぼす壓力の計算は前述の場合と同じであつて

$$\frac{p}{\gamma} = h_s - \frac{V^2 - V_0^2}{2g};$$

但し h_s は静水壓を示す。

a 點に於ては $p = 0$ であるから(近似的に)

$$0 = h_a - \frac{V_a^2 - V_0^2}{2g} \quad (64)$$

従つて

$$\frac{p}{\gamma} = h_s - h_a - \frac{V^2 - V_a^2}{2g};$$

或は

$$\frac{p}{\gamma} = h_s - h_a - \frac{V_a^2}{2g} \left(\frac{r_a \cdot r_{a+2}}{r_1 r_2} \right)^2 + \frac{V_a^2}{2g}.$$

V_0 は V_a に比して極めて小さいから式(64)に於て $h_a = \frac{V_a^2}{2g}$ としても大した誤差を生じない。従つて上式は

$$\frac{p}{\gamma} = h_s - \frac{V_a^2}{2g} \left(\frac{r_a \cdot r_{a+2}}{r_1 r_2} \right)^2 \quad (65)$$

となる。

この計算を全體に付て行つた結果は圖示の通りに、上では壓力を生じ下では吸引力を生ずる。

同様な方法を、弧形堰に付て行つたものが圖(17)である。

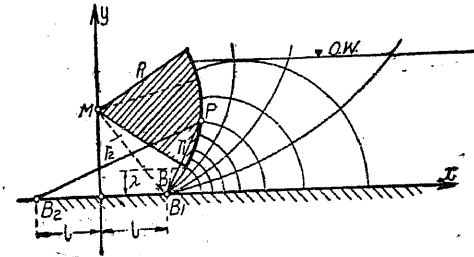


圖. 17.

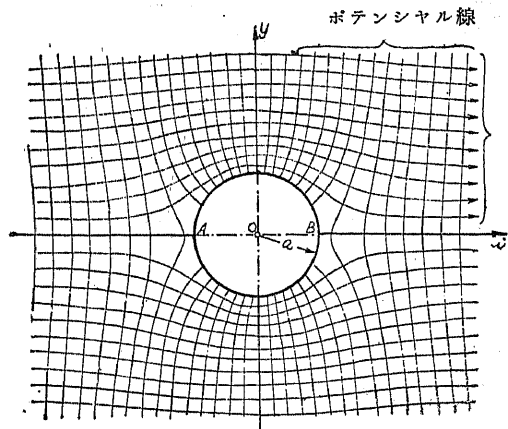


図. 18.

d) 圓柱の周囲の流れ.

極めて長い圓柱が、無限的に廣い流水の内に樹つてを流るものとし、圓柱の軸は、流れの運動面に垂直であると假定する。而してこの流の有様は

$$W = c\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \quad (66)$$

にて表はされ得るものとす。

$c =$ 常數; $a =$ 半徑

$$W = \phi + i\psi = c\left\{x + iy + \frac{a^2(x - iy)}{x^2 + y^2}\right\}$$

従つて

$$\phi = cx\left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\psi = cy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = c\left[1 + \frac{a^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right]$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2ca^2x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (67)$$

W 面に於て、 $\phi =$ 常數の線に對應する、 Z 面に於ける線は、 X 軸に對蹠をなす3次の線であり、又 $\psi =$ 常數の線に對應するものは Y 軸に對蹠をなす3次の線である。又 $x = \infty; y = 0$ に於ては、 $u = c; v = 0$ であるから $V_\infty = c$ となる、従つて圓柱から遠く離れた處では、 X 軸の方向に平行な流れとなる。

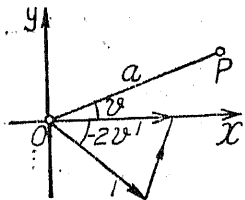


圖. 19.

W 面に於ける $\psi = 0$ の線は、 Z 面に於て

$y = 0$ 及び $x^2 + y^2 = a^2$ に對應す、即ち Z 面に於ける流線は X 軸及び圓柱の圓周となる。

故に此の流線は所謂前の堰水點 A に於て兩方に分れ後の堰水點 B に於て再び合併する。この點に於ては $x = \pm a, y = 0$ であるから $u = 0; v = 0$ 、従つて $V = 0$ になる。

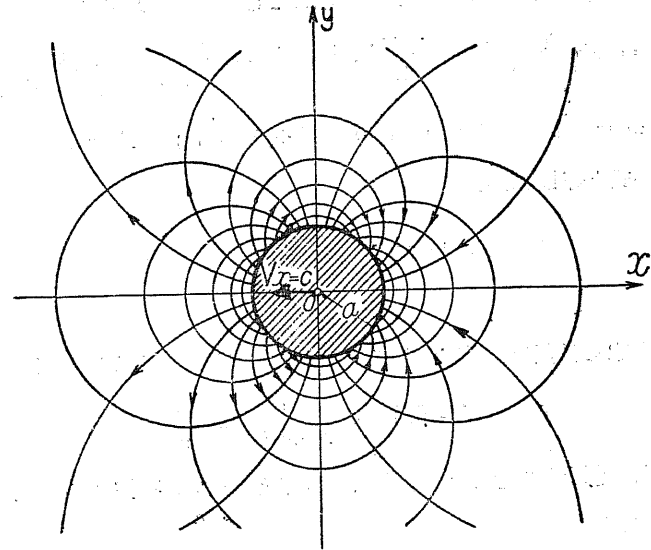


圖. 20.

若しも、圓柱が流れに對して $V_x = -c; V_y = 0$ で動いてをるときには

$$u = \frac{ca^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad v = -\frac{2ca^2x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (68)$$

$$\phi = \frac{ca^2x}{x^2 + y^2}; \quad \psi = -\frac{ca^2y}{x^2 + y^2} \quad (69)$$

となる。

W 面に於ける $\phi =$ 定數の線に相應する、 Z 面に於けるものは、 $x^2 + y^2 - \frac{ca^2x}{\phi} = 0$ なる、原點 O を通る2つの圓の群であり、その中心は X 軸の

上にあつて、原点 O から $x_0 = \frac{ca^2}{2\phi}$; 離れてをる。又 $\psi =$ 定數に對應するものは O を通り中心が Y 軸にある圓の 2 群であつて、中心は原点 O から $y_0 = -\frac{ca^2}{2\psi}$ 丈離れてをる。

後者は無限的に靜な流れの流線を表はす。圖 (20) は圖 (18) の流れの圖から誘導する事が出来る、此の圖の定點 B_1 及び B_2 を限りなく近くして遂に dx になる様にする、 $Edx = M$ とおく、然るときは式 (60) により

$$\phi = c \cdot dx \cdot \frac{d(\log r)}{dx} = \frac{Edx}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} = \frac{M \cos \delta}{2\pi r} = \frac{m \cos \delta}{r}$$

但し $m = \frac{M}{2\pi}$; 又 $x = r \cos \delta$; $x^2 + y^2 = r^2$; $ca^2 = m$ とすれば式 (69) はこの式と等しくなる。

同様にして $\psi = -\frac{m \sin \delta}{r}$;

を得る。

かゝる流れの状態を二重源泉と云ひ、 $M = Edx$ を二重源泉の能率と云ふ。

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{ca^2}{x^2 + y^2} = \frac{m}{r^2};$$

次に圓柱の靜止してをるとききの壓力の分布を見るに、圓柱より遠き所の壓力を p_0 とすれば

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho (c^2 - V^2)$$

圓周上の點を考ふるに、 X 軸と交る點に於て $V = 0$ であるから、 p は最大値を有し、 Y 軸と交る所では $V = 2c$ であるから、 p は最小値で $p_0 - \frac{3}{2} \rho c^2$ となる。

X 軸又は Y 軸に對して、對蹠な點に於ける流速の大きさは等しいから、其の壓力も等しい譯である。従つて水が圓柱に及ぼす壓力は相互に消し合つて全體としては零になる。即ち圓柱を固定せしむるに外力を加へる必要はない事となる。