

III.

流 水 學.

19. 流量及び平均流速. 流れの横断面を、単位時間内に流過する、水の容量を流量と云ひ、普通 Q を以て表はす。

若し流れの横断面の各點に於ける、水分子が等速度で流れるものとすれば、其の流量は、此の流れの横断面積即ち流積を底面とし、速度の大きさと等しい長さを持つ、水の稜體に等しい譯であるが、實際は摩擦及び粘性の爲に、各點の水分子は異なつた速度で運動するから實際の流速を以て流量を表はす時は、極めて複雑なるものとなる、故に水理學に於ては、便宜の爲に平均流速なるものを假定し、各分子は此の平均流速で流れるものとする。而して

$$A = \text{流積}$$

$$Q = \text{流量}$$

なるとき

$$V = \frac{Q}{A} \quad (1)$$

を以て、平均流速と定義する。

従つて

$$Q = A \cdot V \quad (2)$$

其の「デイメンション」は

$$Q = L^3 T^{-1}$$

$$V = L T^{-1}$$

であつて $Q \left[\frac{m^3}{sec} \right]$, $V \left[\frac{m}{sec} \right]$ にて表はすのを普通とする。

本書中、特に明記しない限り、單に流速とあるのは平均流速の事である。

20. 潤邊及び徑深. 水路内の任意の断面に於て水に接して居る、水路の部分の長さを潤邊 (p) と云ひ。又其の断面に於ける流積 (A) を、潤邊 (p) にて除したものを、徑深 (R) と定義する。即

$$R = \frac{A}{p} \quad (3)$$

而して徑深 R の單位が長さである事は勿論である。

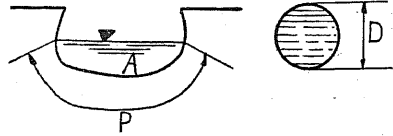


圖. 1.

21. 水流の種類. 水路内

の水流は、其の見地によつて、次の様な種類に分たれる。

(a) 或る一定の位置に於ける流れの状況の、時間的の變化に従つて、**定流**と**不定流**とに分ち。

(b) ある瞬間に於て、水流の各點に於ける、流れの状況を比較して**等流**と**不等流**とに區別し、

(c) 水流内の、分子の運動状況に従つて、

(1) 線流

(2) 渦流

渦流を更に分けて

(2a) 正流

(2b) 射流

とする。

此の外水流が全く水路を離れて、空中に放出されたもの、即ち瀧の水の如きものがある。其の場合に應じ**射出流**、**堰流**等の名稱があるが水路内の水流に對して、是等を總稱し**瀑流**と云ふ事がある。

22. **定流**及び**不定流**. 水流の任意の断面に於ける、水理狀況（流積其の形状；流量；並に断面内にある各點を通る水分子は速度の大き及び其の方向等）が時と共に變化しないものを**定流**と云ひ、其の水理狀況が、時と共に變化するもの

を**不定流**とする。

又任意の位置に於ける、各断面の流速の大き及び方向が瞬間的に凡て同じき水流を**等流**と云ひ。之れは水流の各位置の断面積が等しき場合に起るもので、若し断面積を變化すれば流速は變化する。之れを**不等流**と云ふ。

従つて等流に於ては、各連続した横断面に於ける條件の瞬間的等性を必要とし、定流に於ては、一定横断面に於ける條件の永續的等性を必要とする。

23. **流線**及び**流管**. 流線とは、流水内の、任意の點と點とを結んだ線で、其の方向は丁度其の點に於ける運動の方向と一致する様な、假想的の線である、而して任意の一點に於て、同時に二つの速度を有することが出来ないから、二つの流線は決して接着したり、交叉することは出来ない。

又流水が定常運動をなす場合には、水分子の運動徑路は、流線と一致するから、流線は水分子の路線を示すものと、看做すことが出来るが、流水が不定運動をなす場合には、此の兩者は一致しないものである。

任意の瞬間に流水の内部に、小さい閉合した曲線を考へ、其の線上の各點を通じ、其の點に對する流線を引くと、流線によつて小さい管が出来る。

之れを**流管**と云ひ、流管内に在る無数の流線を總稱して**流束**と云ふ。圖(2)

定常運動の場合は、流管は不變の状態にあるから、流水は丁度固定した管路内を流れる場合の様な運動をする。故に、流水を多くの流束に分けて、各流束の運動を調べると全流水の運動を知る事が出来る。而してこの事を實際に應用するときには、流水全體を 1 の流束と看做して計算する場合が多い。

流束の中心線に對して、垂直な断面を**流束断面**と云ひ。若し流管を極めて小

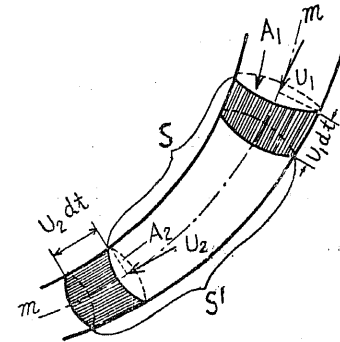


圖. 2.

さいものに採れば、其の流束内の凡ての流線は、流束断面に垂直なりと假定する事が出来る、且つ此の場合各流線に相應する流速は殆ど等しい大を有するものと看做し得るから、此の断面は平均流速で流れておると、假定して差支へない。

24. 連続の條件. 圖(2)時刻 t の時に或る流管の任意の部分 S を考へ其の兩端の流束断面積を A_1 及 A_2 とし、尙流體は不壓性で、且常に此の流管を充滿してあるものと假定して、其の流量を m で表はす。 dt 時間後には此の管内の流體は、他の部分 S' を充滿するものとする流水は密度 ρ が一定、従つて m も一定であるから、 $S = S'$ となる。又 v_1 及び v_2 を、時刻 dt に於ける、 A_1 及び A_2 の平均流速とすれば、断面 A_1 にあつた分子は dt 時間には $v_1 dt$ 支動き A_2 の分子は $v_2 dt$ だけ移動する。 dt 時間内に流管内で移動した容積は

$$S' = S - U_1 \cdot A_1 \cdot dt + U_2 \cdot A_2 \cdot dt \quad (4)$$

然るに $S = S'$ であるから

$$U_1 \cdot A_1 = U_2 \cdot A_2 \quad (5)$$

A_1 及び A_2 は、流束の任意の断面であるから、一般に

$$U \cdot A = c = \text{定數} \quad (6)$$

これが管束に對する連続の等式である。換言すれば任意の流束に於ける何れの點に於ても、流束断面と其の平均速度との相乗積は一定。即ち其の流量は一定であると言へる。

$$U \cdot A = Q \quad (7)$$

25. Bernoulli の定理. 摩擦のない單に重力の作用計り受けておる流體に於て、微小なる流束の部分 ds を考へ、其の断面積を dA とする。

$K_s =$ 流線方向の外力の和

$\alpha_s =$ 流線方向の加速度

$m =$ 質量

此の場合の外力は、上方断面に作用する壓力 $p dA$ と、下方断面に作用する壓

力 $(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds) \cdot dA$ 、並に重力の分力とである。今 φ を重力方向と流線方向とのなす角とすると、力の法則

$$K_s = m \cdot \alpha_s \quad (8)$$

により

$$p dA - (p + \frac{\partial p}{\partial s} ds) dA + mg \cos \varphi = m \alpha_s \quad (9)$$

水に於ては密度 ρ は一定であるから

$$m = \rho \cdot ds \cdot dA$$

又、上方断面の中心の位置を、水平面から、高さ z にあるとすれば

$$\cos \varphi = -\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\text{従つて} \quad mg \cos \varphi = -\rho \cdot g \cdot ds \cdot dA \frac{\partial z}{\partial s} \quad (10)$$

故に式(9)は

$$\alpha_s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} \quad (11)$$

$$\text{然るに} \quad \alpha_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (12)$$

$$\text{故に} \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} - g \frac{dz}{ds} \quad (13)$$

これを積分すると

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = -\int \frac{\partial v}{\partial t} \cdot ds \quad (14)$$

或は $\rho \cdot g = \gamma$ にあるあるから

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = -\frac{1}{g} \int \frac{\partial v}{\partial t} \cdot ds \quad (15)$$

定常運動の場合は

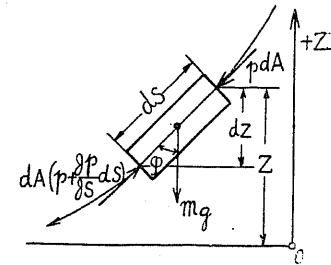


圖. 3.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

従つて
$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = H = \text{定數} \tag{17}$$

これを Bernoulli の公式 と云ひ、定流の場合の水頭方程式である。而して此の式は、後に述べる様に別に Euler の運動の公式からも求める事が出来るもので、全水理學に於ける最も重要な基本公式である。

Bernoulli の公式 (17) に mg をかけると

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{g}{\rho} p + mgz = E \tag{18}$$

第一項は質量 m の有する運動エネルギーを、又 mgz は其の位置のエネルギーを示し、 $\frac{g}{\rho} p$ は質量 m の有する壓力のエネルギーである。

故に Bernoulli の公式は摩擦なき定流にあつては、或る質量の水の有する全エネルギーは時間的に不変であり、且つ任意の流線に沿ふた、凡ての點に於て其の大きさが等しい事を表はしたもので、換言すれば、完全流體に於て所謂エネルギーの損失がないときには、此の 3 の形態のエネルギーは互に他のものに變化し得るもので、若し 1 の形態のエネルギーの量が減少すれば、其の量丈他の形態のエネルギーの量が増加する事を示してある。

26. 水頭或はヘッド. 式 (17) の $\frac{v^2}{2g}$; $\frac{p}{\gamma}$; z の項は、共に長さの單位を有してゐるが單位重量を有する物體の質量は $\frac{1}{g}$ であるから、其の大きさはそれぞれ單位重量の水の有するエネルギーの大きさに等しい。かくの如く單位重量の水の有するエネルギーの大きさを、同一單位の長を以て示したものを、水頭又はヘッドと名付ける。

従つて $\frac{v^2}{2g}$ は單位重量の水の有する運動エネルギーの大きさを示した長さでこれを速度水頭。同様に $\frac{p}{\gamma}$ を壓力水頭。 z を高度水頭。 H を總水頭と稱す。即ち Bernoulli の定理は定流に於ては流管の各點に於ける全水頭は常に不変である事を示してある。

依て式 (17) を一般的に示すと、流線に沿つた任意の點 (1), (2), (3)

……に於て

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \dots = H \tag{19}$$

之れを圖示すれば圖 (4) の様になる

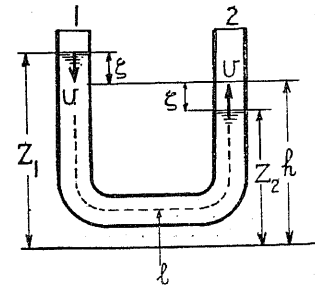
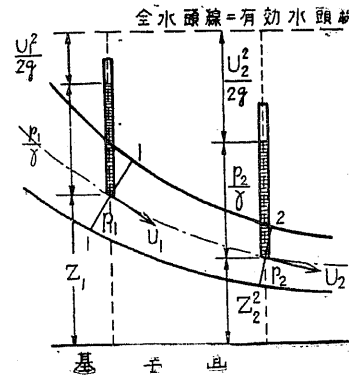


圖. 5.

27. 不定流のエネルギーの等式. §. 25 式 (14) を、ある瞬間に於て流線の

任意の 2 點 (1) 及び (2) に取れば

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \int_0^{s_1} \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \int_0^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds \tag{20}$$

或は
$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 - \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds \tag{21}$$

今圖 (5) の様な兩端の開いた断面の F なる U 字管内に、完全流體が靜止してゐるとする。勿論此の場合、兩管内の水位は同一平面にあるが、若し、或る任意の原因の爲に此の平衡が破れたとすると、水は自重の爲に管内を動搖する。即ち不定運動が起る、速度 v は連続の法則に従ひ到處其の大きさが等しいが、其の大きさは時と共に變化する。式 (21) に於て

$$v_1 = v_2, \quad p_1 = p_2, \quad z_1 = b + \zeta, \quad z_2 = b - \zeta;$$

故に
$$2g\zeta = \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (22)$$

$\frac{\partial v}{\partial t}$ は位置には無関係であるから式 (22) は

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{dv}{dt} \cdot l. \quad (23)$$

従つて
$$2g\zeta = \frac{dv}{dt} \cdot l. \quad (24)$$

又
$$v = \frac{d\zeta}{dt}$$

故に
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{2g}{l}\zeta \quad (25)$$

これは単絃運動の微分方程式であるから $\zeta = 0; t = 0;$ 且つ $\alpha = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ にとすると

$$\zeta = A \sin(\alpha \cdot t) \quad (26)$$

$A =$ 振幅

週期 T は
$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \quad (27)$$

28. 損失水頭. §.(25). に於ける公式は、摩擦の無い完全流體としての水流の等式であつたが、實際に於けるものは不完全流體であるから、粘性、摩擦等による所謂エネルギーの消費が存在する。エネルギー保存の法則に依れば、エネルギーの量は何等かの形態によつて保存せられ、其の總量には増減はない譯であるが流水の運動に於ては摩擦等によつて、力學的のエネルギーの一部は熱或は音等の、非力學的エネルギーに變化し、且つ夫等は再び力學的エネルギーに復歸しない。故に流水の力學的見地から、是等の非力學的エネルギーを**失はれたエネルギー**。又其のエネルギーに相應する水頭を**損失水頭**と名付ける。

而してこの損失水頭或は消費せられた**エネルギー**の大きさは實驗に依つてのみ知る事の出来る値である。

今損失水頭を h で示し Bernoulli の公式を補修すると一般に

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + h = H \quad (28)$$

となる。

次に完全流體に於ける理想的の流束に對し、實際の場合に於ける流束では其の内部の各流線間に、應剪力が生ずる計りでなく、其の流束の表面に於ても、應剪力が生ずるから、これに對して或る假定を設ける事とする。即ち流束の表面に起る應剪力の影響を全部内部の應剪力によるものと假定し、これに相應する水頭を h' とし、内部のものに相應する水頭を h'' とすると式 (19) は

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = h' + h'' \quad (29)$$

或は $h_1 + h'' = h$ とすれば

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = h \quad (30)$$

是等は定流にのみ適用せられる公式であるが、若し時間的平均値が、定流と看做し得る様な場合には、不定流にも準用する事が出来る。

然らざる場合には一般に

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = h + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (31)$$

となる。故に流束に於て上述の假定をしておくこと、式 (30) と式 (31) とは不完全流體に對する Bernoulli の一般公式と見る事が出来る。

今 $dQ \left[\frac{m^3}{sec} \right]$ を任意の流管の流量と考へると $r \cdot dQ \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right)$ は單位時間に流束断面を通過する流水の**エネルギー**であるから

$$r dQ \left[\left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) \right] - \frac{r}{g} dQ \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds = r dQ \cdot h = W \quad (32)$$

而して W は、断面 (1)–(2) の間の内部抵抗に打ち勝つ爲に消費せられた仕費の量である。

是等の公式 (30), (31) 並に (32) は、微小断面積を有する、流束に対してのみ適用せられるものであるが、實用上は、普通の大きな断面積を有するものにも利用して差支がない。只此の場合には、 v 及び p の値は其の断面の平均値を採用し、 z は其の断面の重心の高度とすればよい。

若し精密なる計算をなす場合は、此の全断面を無数の微小面積の流管束に分ち、式 (32) を全断面に付て積分する。即ち

$$\begin{aligned} r \int_{(A)} \left[\left(-\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{r} + z_1 \right) - \left(-\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{r} + z_2 \right) \right] dQ - \frac{r}{g} \int_{s_1}^{s_2} \int_{(A)} \frac{\partial v}{\partial t} dQ \\ = r \int_{(A)} dQ \cdot h \end{aligned} \quad (33)$$

上式を簡単にする爲に

$$\int_{(A)} v^2 dQ = \alpha V^2 Q \quad (34)$$

とおく。

而して V は断面 A に對する平均流速、 Q は全断面 A の流量、 α は未知の係数で、全断面 A に不均等に分布されてをる流速に因る運動エネルギーに對する修正値である。

$$dQ = v \cdot dA; \quad Q = V \cdot A$$

$$\text{であるから} \quad \alpha = \frac{\int_{(A)} v^3 dA}{V^3 \cdot A} \quad (35)$$

若し流速の分布状態が法則的にか、又は實測に依つて分るときは、 α を定める事が出来る。人工水路に於ては水路面の粗度により、

$$\alpha = 1.04 \sim 1.15$$

$$= 1.11 \quad (\text{St. Venant})$$

$$= 1.093 \quad (\text{Jasmund})$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \int_{(A)} \frac{dv}{\partial t} dQ &= \int_{(A)} v \frac{\partial v}{\partial t} dA = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(A)} v^2 dA = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' V^2 A) \\ &= \alpha' A V \frac{\partial V}{\partial t} = \alpha' Q \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{但し} \quad \int_{(A)} v^2 dA &= \alpha' V^2 A \\ \alpha' &= \frac{\int_{(A)} v^2 dA}{V^2 A} \end{aligned} \quad (37)$$

而して α' は不均等の流速に對する修正係数で人工水路に於ては

$$\text{或は} \quad \alpha' = 1.03 \sim 1.05$$

實用的には $\alpha = \alpha' = 1$ とする事が多い。

p に對しても同様にして平均値を求め、 z は全断面の重心の高度を採用すれば

損失した仕事の量は

$$rQ \left[\left(\frac{\alpha V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{r} + z_1 \right) - \left(\frac{\alpha V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{r} + z_2 \right) \right] - \frac{r}{g} \alpha' Q \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} dt = W \quad (38)$$

或は rQ で割つて

$$\left[\frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{p}{r} + z \right]_1^2 = h + \frac{\alpha'}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds \quad (39)$$

$$\text{而して} \quad h = \frac{W}{rQ} \quad (40)$$

で損失水頭を示す。定流の場合には式 (33) 及 (39) に於て、時間 t に關する項が無くなる。

29. 渦動運動及び非渦動運動。 (VIII) 参照、所謂渦の現象を示す運動を渦

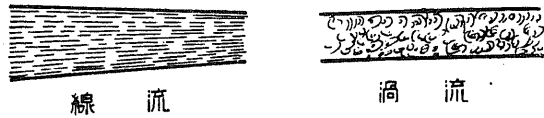


圖. 6.

動運動と云ひ、普通の流水の運動には多少の渦動運動が伴ふもので、非渦動運動の起る事は極めて

稀である。然し流水の運動を非渦動運動と看做す時は、計算が甚だ簡単になるから屢々非渦動運動と假定して、計算する場合が多い。

而して非渦動運動をなす流水を線流と云ひ、渦動運動をなすものを渦流と云ふ。線流は極めて遅い流速の場合にのみ起るもので、Reynolds が硝子管内に水を

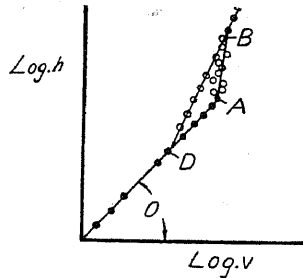


圖. 7.

流し、同時に有色の液體をこれに流し込んで實驗した結果、線流は或る一定の流速に達すると、渦流に變ずる事を發見した。この線流より渦流に移る限界の流速を臨界速度と名付けた。又反對に渦流をなす流水の流速を次第に減じた場合には、上記の臨界速度より遙に低い一定の速度に達し、初

めて線流に變ずるものにして前者を高部臨界速度後者を低部臨界速度と稱する。

臨界速度 v_k の値は、 $D =$ 管徑 [m] とすれば

$$v_k = \frac{1}{43.79(1 + 5.0337\tau + 0.060221\tau^2)D}, \quad \left[\frac{m}{sec} \right]$$

$l =$	8°	10°	12°	
$v_k =$	$\frac{0.0178}{D}$	$\frac{0.0168}{D}$	$\frac{0.0159}{D}$	
v_k	0.220	0.210	0.199	$D = 80 [mm]$
v_k	0.044	0.042	0.039	$D = 400 \text{ ''}$
v_k	0.018	0.017	0.016	$D = 1000 \text{ ''}$

斯くの如く臨界速度は極めて低いものであるから、技術的に取扱ふ流水の運動は凡て臨界速度以上のもので、線流の場合は殆ど起らない。而して Bernoulli の定理は後に述べる様に、流水が非渦動運動をなし且つ定常状態をなす流速に對

し、誘導したものであるから線流でない普通の渦流に、Bernoulli の定理を適用する爲には、流水は線流なりと假定し渦動運動によつて生ずるエネルギーの損失は之れを摩擦による損失水路の内に含めると。此の公式は其の儘用ひる事が出来る。かくの如くにして二點間に流れが存在する時は、假定した流線上の二點間に Bernoulli の公式を差支なく適用する事が出来る。

30. 動水壓、靜水壓. §. 28 式 (30) に於て $z_1 = 0; z_2 = z$ とすれば

$$p_2 = p_1 + \gamma z - \gamma h - \gamma \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad (41)$$

この p_2 を動水壓と稱し $v_2 = 0$ のときに最大値となる。

又靜水の場合には $h = 0; v_2 = 0, v_1 = 0$ であるから

$$p_2 = p_1 + \gamma \cdot z \quad (42)$$

となり、この場合の p_2 を靜水壓と云ひ、常に動水壓よりも大きい。

又一般に $\gamma \frac{v^2}{2g}$ は或る大きさの壓力に變換し得るものであるからこれを堰水壓と云ふ事がある。

31. 壓力水頭線及び有效水頭線.

圖 (8) に於て流速中心線に沿ふた各點の壓力水頭を求め、其の壓力水頭の高さを連結した $1' \sim 2'$ の様な線を壓力水頭線と云ひ又各點に於ける任意の基準面に付ての力學的エネルギーに相應する水頭の和、即 $\frac{v^2}{2g}$

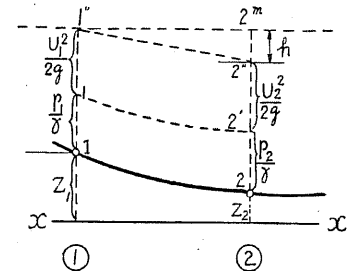


圖. 8.

$+\frac{p}{\gamma} + z$ の高 He を求め、其の點を結んだ線を其の基準面に對する有效水頭線と稱し、各點に於ける有效水頭線の高さは、其の點に於ける單位重量の水が其の基準面に付て仕事をなし得る能力の大きさを示すものである。

若し損失水頭なき場合には Bernoulli の定理に従ひ、有效水頭線は水平線となるけれども、損失水頭のある場合は總水頭線は水平であるが、有效水頭線は水

平線とならない。又損失水頭が距離に比例して起る場合には、其の有効水頭線は直線をなすも若し然らざるときには、曲線又は折線となる。

故に有効水頭線の勾配又は落差によつて、其の区間のエネルギーの消費の程度を知る事が出来る。

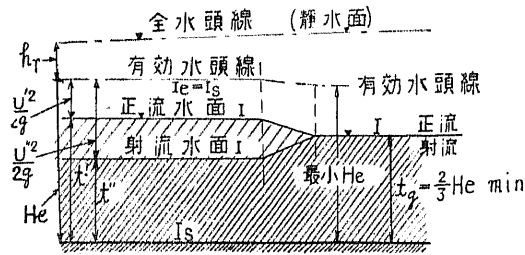


圖 9.

のときは、

$$H_c = \frac{Q^2}{2g \cdot b^3 \cdot t^2} + t \quad (45)$$

$A = b \cdot t$ 及び Q に付て次の條件

$$\frac{Q^2}{2g \cdot b^2} = \text{定数} = K \quad (46)$$

が與へられた場合には

$$H_c = \frac{t^3 + K}{t^2} \quad (47)$$

この方程式に對する

t の正數根を t' 及 t'' とする。

次に有効水頭 H_c を最小ならしめる t の値は

$$\begin{aligned} \frac{dH_c}{dt} &= 0 = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot b^2 \cdot t^3} \\ t g &= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = \sqrt[3]{2K} = \sqrt[3]{\frac{a^2 I}{g}} \quad (48) \end{aligned}$$

但し後に述べる様に I を水面勾配とすると一般に

$$Q = V \cdot A = c \sqrt{R \cdot I} \quad b, t \doteq C \sqrt{t \cdot I} \cdot b, t$$

斯くの如き $t g$ を値を與へられた H_c に對する限界水深と云ひ、前記の t' 及 t'' は

$$t' > t g > t'' \quad (49)$$

である。 t' の場合の水流を正流、 t'' の場合の水流を射流と名付ける。射流とは河の瀬に於ける流れの様なもので、水深が浅く其の流速が急速なるもので、正流と云ふのは普通河の流れの様な穏な流れである。

式 (46) と式 (47) から

$$\text{式 (48) は} \quad H_c = 1.5 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 \cdot g}} = 1.5 t g \quad (50)$$

即ちこの式は矩形断面に於て與へられた H_c に對し、最大流量を流す條件であつて、この式を式 (43) に入れると

$$\frac{V^2}{2g} = 0.5 t g \quad \text{又は} \quad t g = \frac{V^2}{g} \quad (51)$$

若し梯形断面の場合には、式 (50) の代りに

$$t g = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{(b + t g \cot \varphi)^2 \cdot g}} \quad (52)$$

b = 底幅

φ = 側法の水平となす角

一般的に云ふと

1. 與へられた流量 Q に於て、其の水深が $t g$ のときが、 H_c が最小である。
2. 與へられた H_c に於ては、其の水深が $t g$ のときが Q が最大である。
3. 各断面に於て與へられた Q に對して H_c の最小値が 1 つある。若し最小値が無きときはこの断面は與へられた Q を流し得ない。

前述の様に正流と射流との區別は

正 流	射 流
$t > tg$	$t < tg$
$v < \sqrt{g.t}$	$v > \sqrt{g.t}$
$\frac{e^2 I}{g} < 1$	$\frac{e^2 I}{g} > 1$
$\frac{V^2}{2g} < \frac{A}{2b}$	$\frac{V^2}{2g} > \frac{A}{2b}$

の條件に依るものである。又兩者の境界に於ける限界流速 V_g は

$$V_g = \sqrt{t \cdot g} \quad (53)$$

でこれは水深 t の場合の波の進行速度に等しい。

圖(10)に於て與へられた He に對し最大流量を與へる限界水深は

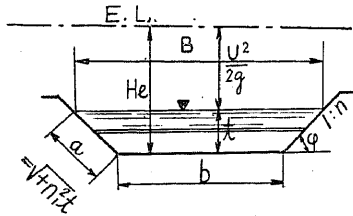


圖 10.

$$Q = V \cdot A = (b.t + \cot\phi \cdot t^2) \sqrt{2g \cdot \frac{V^2}{2l}} = (b.t + \cot\phi \cdot t^2) \sqrt{2g(He-t)} \quad (54)$$

から $\frac{dQ}{dt} = 0$ として求められるもので

矩形断面にては $\phi = 90^\circ \quad tg = \frac{2}{3} He \quad (55)$

三角形断面にては $b = 0 \quad tg = \frac{4}{5} He \quad (56)$

拋物線形断面に於ては $tg = \frac{3}{4} He \quad (57)$

又 $V_g = \sqrt{g \cdot tg} \quad (58)$

であるから矩形断面に對しては

$$V_g = \sqrt{\frac{2}{3} g \cdot He}$$

$$Q_{max} = b \sqrt{\frac{8}{27} g \cdot He^3} \quad (59)$$

$$tg = \frac{3}{\sqrt{\frac{Q_{max}^2}{b^2 g}}} \quad (60)$$

$$\Delta h = \frac{(V_g)^2}{2g} = He - tg = \frac{tg}{2} \quad (61)$$

若し $V = C\sqrt{R \cdot I}$; 且つ $t \div R$ なるときは (V参照)

$$V_g = \sqrt{g \cdot t_g} = c \sqrt{R_g \cdot I_g}$$

$$I_g = \frac{1}{c^2} g \quad (62)$$

I_g は V_g に相應する水面勾配即ち限界勾配を示す。

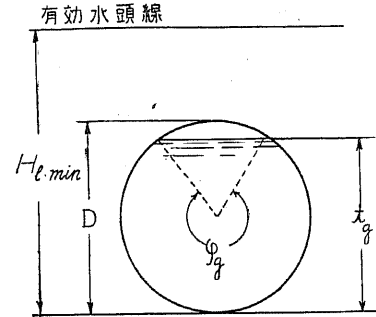


圖 11.

例題 1. 圓形管に於ける限界角度 (ϕg) を求む。圖(11)

$$He = t + \frac{V^2}{2g} = t + \frac{Q^2}{2A^2 g} = r \left(1 - \cos \frac{\phi}{2}\right) + \frac{2Q^2}{g r^4 (\phi - s n \phi)^2}$$

$\frac{dHe}{d\phi} = 0$ であるから

$$\frac{(\phi g - \sin \phi g)_3}{\sin^2 \frac{\phi g}{2}} = \frac{512 Q^2}{g D^5}$$

故に

$$He_{min} = \frac{D}{2} \left(1 - \cos \frac{\phi g}{2}\right) + \frac{32 Q^2}{g D^4 (\phi g - \sin \phi g)^2}$$

例題 2. 圖(12)の様な深い堀の上に於ける水深を求む。

缺口が矩形断面の堀であれば $tg = \frac{2}{3} He$ となる。

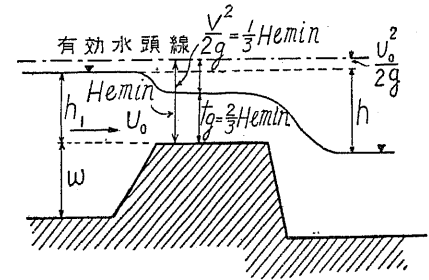


圖 12.

33. 流速測定 of 器具. 比較的簡單である爲に屢々用ひられる器具で、共に Bernoulli の定理を應用したものである。

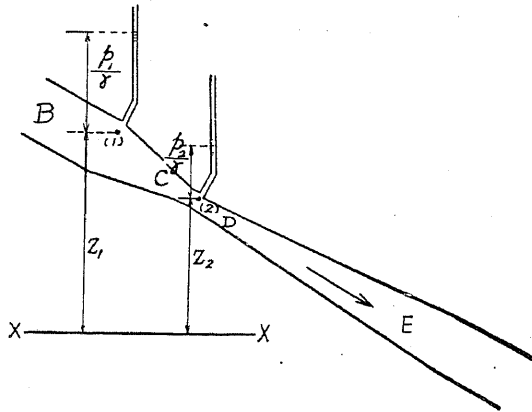


圖. 13.

(a) ベンチュリ・メーター. 管内に於ける流速測定に用ひる器具で、圖(13)は其の原理を示したものである。
 收斂管 BC と擴散する管 DE とを細き圓錐部分 CD (喉管) で連結する、而して B 及び E は管徑の等しき管路に連絡してをる。

點(1)及(2)に於ける流速、壓力、高度をそれぞれ v_1, p_1, z_1 並に v_2, p_2, z_2 とする。摩擦を無視すると Bernoulli の定理により

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{r} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{r} + z_2 \quad (63)$$

壓力水頭計を(1)及(2)の位置に樹てて壓力を計ると v_1 及 v_2 の關係が求められる。

$$Q = a_1 v_1 = a_2 v_2$$

であるから式(63)に代入すると未知數は v_1 のみになる、從つて直ちに Q は求められる。

式(64)を書きかへると

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{p_1}{r} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{r} + z_2\right) \quad (64)$$

即「運動エネルギー」の増加は「ポテンシャル・エネルギーの減少に等しい」と云ふことが分る。而してこの器具を殆ど水平に近く置いた場合は $z_1 - z_2$ は殆ど

他のものに比して無視し得る様になるから

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{r} - \frac{p_2}{r} = h \quad (65)$$

として圖(14)の様な壓力計によつて直ちに流速及び流量を求める事が出来る。即

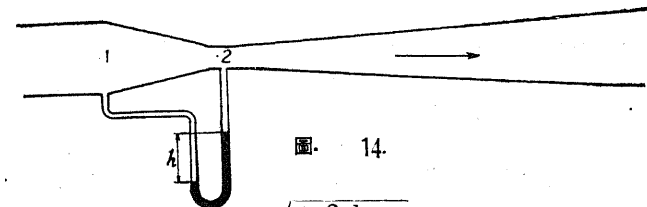


圖. 14.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 1}} \quad (66)$$

$$Q = a_1 v_1$$

或は係數を導入して

$$Q = K a_1 \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 1}} \quad (67)$$

而して普通 $K = 0.97 \sim 0.99$ である。

(b) ビト管. 開水路に於ける流速を測定する器具で、圖(15)に示す様なものである。管の口(A)は水流の方向に向つてをる、水流は矢の如くにAを中心に向つて四方に分れ、管ABCの中には流れは起らない。

今 A~B 線に於て Bernoulli の公式をかくと一般に

$$\frac{p_1}{r} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p}{r} + \frac{v^2}{2g}$$

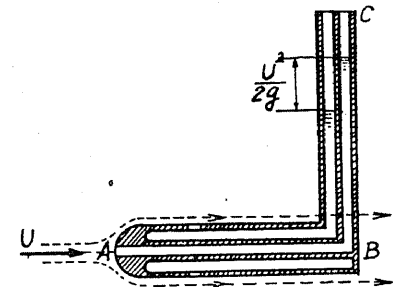


圖. 15

今 p_1, v_1 を堰水點 A の所に於けるもの。 p, v をその上流部に於けるもの
とすれば、 $v_1 = 0$ であるから

$$p_1 = \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{2} + p$$

BC の内に昇つた水の高さは、 (p_a に大氣壓とすれば)

$$h_1 = \frac{p_1 - p_a}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p - p_a}{\gamma}$$

今ピトー管を壓力水頭計と並用すると、壓力水頭計の内には

$$h' = \frac{p - p_a}{\gamma}$$

水が昇る。故に兩者の水柱の高さの差は

$$h_1 - h' = \frac{v^2}{2g} \quad (68)$$

であつて、これから直ちに流速を求める事が出来る。