

## II.

## 靜 水 學.

7. 平衡の條件. 水が平衡を保つ場合には速度が無いから従つて、分速度  $u, v, w$  は凡て 0 であり §. 3. 式 (3) は満足される。又 Euler. の運動の公式 §. 4. 式 (6) から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho Z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

の三式が出来る、之れが平衡の條件を定むる式である。

此の式は又書換へて

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2)$$

この場合水は不圧性で且つ密度は一定なるものとの假定であるから  $(Xdx + Ydy + Zdz)$  が完全微分でなければならぬ。

換言すれば是等の力は保存力でなければならぬ故に  $X, Y, Z$  はポテンシャル  $\Omega$  より誘導せられる。

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (3)$$

$$\text{従つて} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (4)$$

であるから  $Xdx + Ydy + Zdz$  が完全微分たるべき條件は満足せられる。

$$\text{式 (2) は} \quad Xdx + Ydy + Zdz = -d\Omega \quad (5)$$

$$\text{或は} \quad dp = -\rho d\Omega \quad (6)$$

一般に力が保存力なる時には密度  $\rho$  はポテンシャル  $\Omega$  の函数であつて

$dp = -\rho d\Omega$  なる爲には  $dp$  が完全微分であるから  $\rho$  は  $\Omega$  の函数でなければならぬ。故に  $\Omega$  勿論  $\rho$  は  $p$  の函数であつて等壓面は等ポテンシャル面であり同時に等密度の面である。

式(2)を積分して

$$p = \phi(x, y, z) \tag{7}$$

とする、若し壓力強度が一定なるものとせば  $p = c$  で上式は

$$\phi(x, y, z) = c \quad \text{或は} \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0 \tag{8}$$

即ち面の方程式となる、其の面上にある凡ての點の壓力強度は凡て等しく、これを等壓面と謂ふ。若し  $c$  に色々な値を入れると等壓面の系統を得る事が出来る而して液體の表面に壓力が無い場合には此面を直の自由面と稱す、現實には何れの液體に於ても常に若干の壓力を其の表面に有するから普通は液體の容器の蓋と液體の表面とが接觸して居らざる場合の表面を自由面と云ひ、静止せる水の場合を特に静水面と云ふ。

若し、外部の壓力を 0 とすると眞の自由面は

$$\phi(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

でこの値は等壓面の點  $(x, y, z)$  に於ける垂線の方角餘弦に比例し且つ、

$$\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial z}$$

に等しい従つて  $X, Y, Z$  に比例する。

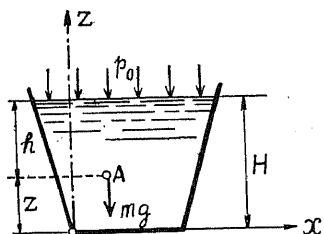


圖. 1.

故に任意の點  $(x, y, z)$  に於ける外力の合力は其の點を通る等壓面に於ける垂線方向に在る、換言すれば等壓面は外力と直角に交る表面である。

重力の作用のみを受けて静止して居る水に於ては其の静水面並に等壓面は重力に直

角に交はる水平面であるべき事は之れに依つても明である。

8. 静水壓 (A). 圖(1)の如き静止せる水には應剪力が作用しないから完全流體の場合と等しく、A 點に作用する力は水壓並に重力のみである §. 1. 式(2)に於て

$$X = Y = 0; \quad Z = -g \quad \text{なる故}$$

$$dp = -\rho g dz = -r dz$$

或は

$$p = -rz + c$$

静水面の高を  $H$ 、大氣壓を  $p_0$  とすれば  $p_0 = -rH + c$

故に

$$p = p_0 + r(H - Z) \tag{9}$$

或は

$$p = p_0 + rh \tag{10}$$

此の  $p$  を A 點に於ける静水壓強度と稱し其の大きさは水深に比例して増加する

(B) 比重の異なる二つ以上の液體が混和しないで静止して居る際には圖(2)の如く各液體に於て其の静水壓強度の増加率が違ふ、但し  $r_1 < r_2$

即ち

$$p_1 = p_0 + r_1 h_1$$

$$p_2 = p_1 + r_2 h_2 = p_0 + r_1 h_1 + r_2 h_2 \tag{11}$$

(C) 兩端が開いた U 字管に液體を容れ兩端より異つた壓力を作用し、其の液體が静止して居る場合圖(3)。

場合圖(3)。

$a-a$  面は水平なるを以て等壓面であり、従つて此の面上の水壓強度は到る處同じであるから

$$p_a = p_1 + r h_1$$

又

$$p_a = p_2 + r h_2$$

で次の様な關係式が得られる

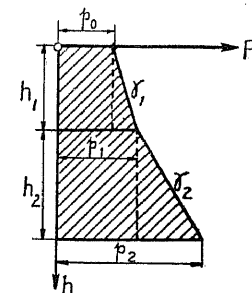


圖. 2.

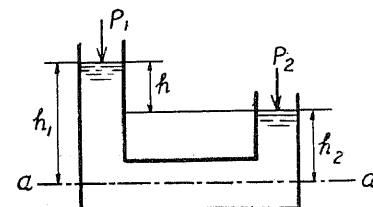


圖. 3.

$$p_2 - p_1 = \gamma(h_1 - h_2) = \gamma h \quad (12)$$

故に兩側の水位差を測れば、壓力強度の差を知る事が出来る。この原理を利用して各種の壓力計が工夫されてゐる。

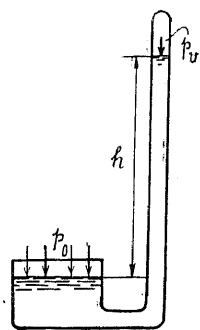


圖. 4.

(a) 水銀氣壓計. 大氣壓を測定する器具で圖(4)の如く一端を密閉した管内に水銀を充滿し倒に水銀中に樹てた Torricelli に依つて初めて考案されたもの。後に Pascal によつて水銀柱の高さと氣壓の大さとは比例する事並に高度の高き地に於ては水銀

柱の高が減する事が明かにされた水理學上の紀念物である。

水銀の單位容積の重量  $\gamma_0 = 13600 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$  とすれば 1 氣壓の所では

$$h_0 = \frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{10333}{13600} = 0.76[m]$$

となる、水銀の代りに水を用ゐると  $\gamma = 1000 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$  であるから

$$h_0 = \frac{p_0}{\gamma} = 10.333 [m]$$

理論的には此の場合、管の上端の空間は絶対真空で液體の表面には壓力がない筈であるが實際には液體の表面から蒸氣が蒸發して此の空間は水蒸氣で飽和されてゐるから其の爲に所謂水蒸氣壓が生ずる。今此の水蒸氣壓を  $p_v$  とすると式(12)により、水銀柱の高さは

$$h = \frac{p_0 - p_v}{\gamma} \quad (13)$$

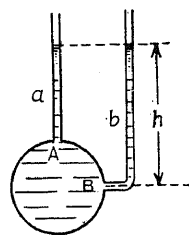


圖. 5.

となり眞實の大氣壓を示さない。

然し水銀は最も比重の多い液體で且普通の溫度では極めて低い水蒸氣壓を有するから氣壓計に多く利用せられるのである。

(b) 壓力水頭計. 普通管路等の水

壓を測る器具で圖(5)は管 a の水柱の高により管路 A に於ける壓力強度を測定する。

此の場合 B 點の壓力強度は  $p_b = \gamma h + p_0$

であるが、普通はこの水柱の高さより直ちに

$p_b = \gamma h$  として B 點の壓力強度を示す、

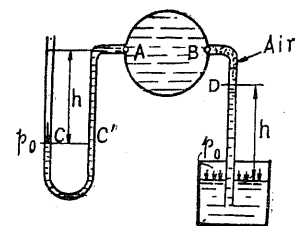


圖. 6.

此の様に大氣壓を基準として測定した壓力強度を相對壓力或は實用壓力と稱し、壓力計に於ては多く之れを用ゐ、之れに對して壓力零即ち絶対真空を基準とした壓力強度を絶対壓力と謂ふ。

壓力水頭計の使用に際し、水流の方向と絶対に直角にせぬ場合には、管内の水柱高は流速に影響せられピトー管と同一現象を呈す、又毛細管現象による影響を避くる爲管徑は 15 [mm] 以上のものにする必要がある。

若し大氣壓より低い壓力を測るには圖(6)の如き方法を用ふ、此の場合  $p = -\gamma h$  でこれは大氣壓より低き程度を示し之れを A

點に於ける真空度と稱する事がある、又此の圖の右方にあるものは逆水頭計で管の下端を下にある水を充した容器中に挿入したもので、此の水面に作用する大氣壓は管内の水を h の高さ押し上げる。  $\gamma h = -p_D$  にして B に於ける真空度を示し、若し管内の空氣の重量を無視するときは  $p_D = p_D = p_0 - \gamma h$  となり絶対壓力を表はす。

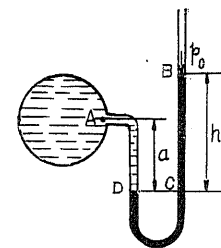


圖. 7.

(c) 水銀壓力計. 壓力水頭計に依り測定し難き壓力の大なるものを測定するに用ゐる水銀を充した U 字管である。圖(7)及圖(8)。

C 點に於ける壓力強度は

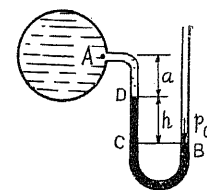


圖. 8.

$$p_c = p_0 + \gamma' h \quad \gamma' = \text{水銀の單位重量}$$

D 點に於ける壓力強度は

$$p_d = p_a + \gamma \cdot a$$

兩者は等しき故 A に於ける絶對壓力は

$$p_a = p_0 + \gamma' h - \gamma \cdot a \quad (14)$$

(d) 示差壓力計. U 字管に測定すべき液體と比重の異つた液體を満し其の水位差を以て壓力の差を測定する器具で、壓力の大なるときは水銀、小なるときは輕油を用ふ。

圖(9)は水銀示差壓力計で、管 M 及管 N が同一水平面にあつた際には

$$p_M - p_N = \gamma' h - \gamma h \quad (15)$$

又高さが異つてをるときは

$$p_c = p_B = p_A = p_M - \gamma \cdot a$$

又

$$p_D = p_C - \gamma' h = p_E$$

$$p_N = p_E + \gamma(h+b)$$

故に

$$p_M - p_N = \gamma' h - \gamma h - \gamma(b-a) \quad (16)$$

但し

$\gamma'$  = 水銀(輕油)の單位容積の重量

$\gamma$  = 管路内の液體の "

圖(10)は輕油示差壓力計にして

$$p_M - p_N = \gamma' h - \gamma h - \gamma(b-a) \quad (17)$$

にして

$$p_M - p_N = \gamma' h - \gamma h - \gamma(b-a) \quad (17)$$

9. 平面に及ぼす静水壓.

圖(10)に示す様な容器の

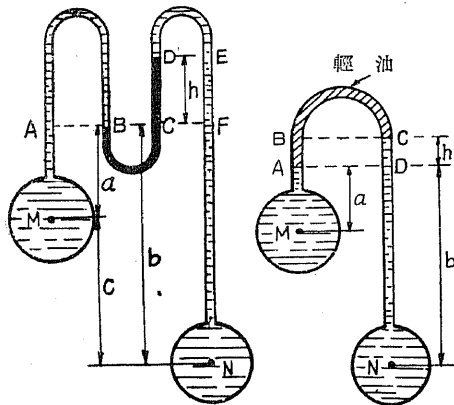


圖. 9.

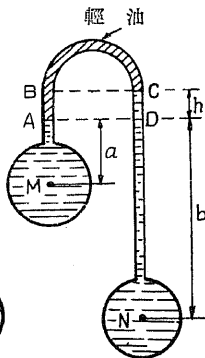


圖. 10.

底面の一部を取り其の面積を A とし鉛直となす角を  $\alpha$  とする、A に作用する水壓は微小面積 dA に作用する水壓の總和であつて、今水深 z なる部分に於ける微小面積をとればその水壓は

$$p dA = (p_0 + \gamma z) dA \quad (18)$$

然るに圖示の如く此の壁面は外面から大氣壓  $p_0 dA$  を受けてをる故此の微小面積に働く壓力は結局  $dP = \gamma z dA$  である、故に全平面 A に作用する總代壓力 P は

$$P = \gamma \int z dA \quad (19)$$

であり、其の方向は平面に垂直である  $z_0$  を平面の重心 G の水深とせば

$$\int z dA = z_0 A$$

従つて

$$P = \gamma z_0 A \quad (20)$$

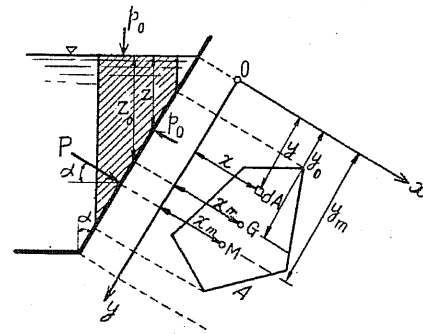


圖. 11.

故に壁面に及ぼす水壓は其の面の重心に於ける水壓強度と壁面の面積との相乗積に等しい。

次に總代壓力 P の作用する點は一般に水壓の中心 (M) と稱へるが之れは壁面の重心と一致しない、此の水壓の中心の位置を求むるには圖(11)の様に壁面に沿ふ

て直角座標軸を設け水面に x 軸を置く、水壓の中心を M とし、其の座標を  $x_m, y_m$  とし、x 軸 y 軸に付て、力率を求むれば

$$P \cdot x_m = \int dP \cdot x; \quad P y_m = \int dP \cdot y,$$

$$\text{然るに} \quad P = \gamma z_0 A = \gamma A y_0 \cos \alpha; \quad dP = \gamma z dA = \gamma dA \cdot y \cdot \cos \alpha$$

故に之れを力率の式に代入すると

$$A \cdot y_0 \cdot x_m = \int x \cdot y \cdot dA; \quad A \cdot y_0 \cdot y_m = \int y^2 \cdot dA$$

又

$$\int x \cdot y \cdot dA = J_{x \cdot y}; \quad \int y^2 \cdot dA = I_x,$$

$$x_m = \frac{J_{x \cdot y}}{A \cdot y_0}; \quad y_m = \frac{I_x}{A \cdot y_0}, \quad (21)$$

で此の式は壁面の傾斜角  $\alpha$  に無関係である。又  $I_0$  を重心を通る平行座標軸の二次率とすると

$$I_x = I_0 + A \cdot y_0^2$$

なる関係があるから

$$y_m = \frac{I_0 + A \cdot y_0^2}{A \cdot y_0} = \frac{I_0}{A \cdot y_0} + y_0 \quad (22)$$

又は

$$e = y_m - y_0 = \frac{I_0}{A \cdot y_0} \quad (23)$$

$e$  は  $y$  軸の方向に於ける  $G$  点と  $M$  点との距離で  $I_0$  の値は常に正であるから  $e$  の値も恒に正である。即ち  $M$  点は恒に  $G$  点よりも深い所に存在する。

若し平面が  $y$  軸に対して対称形である場合には  $J_{x \cdot y} = 0$ ; 従つて  $x_m = 0$  である、故に  $M$  点は重心  $G$  と共に対称軸の上にあつて  $G$  点より  $e$  丈下方に存在し、前記式 (23) は  $M$  点の位置を求むる式とする事が出来る。

10. 底面に及ぼす壓力・ 容器の底面に及ぼす水壓を 底面壓 と稱し、底面から水面迄の高を  $h$  とすれば底面の微小面積  $dA_0$  に及ぼす水壓  $dP$  は

$$dP = p dA (p_0 + \gamma h) dA$$

従つて總代水壓  $P$  は

$$P = p_0 A + \gamma \cdot h \cdot A$$

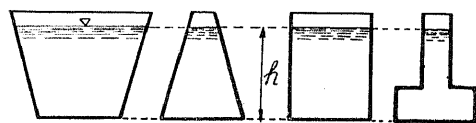


圖. 12.

底面は水平である故に其の壓力強度  $p$  は等布壓力であり従つて壓力の中心と面積の重心は一致する、底面壓力の大きさは單

に  $h$  にもみ關係し、底面上の容器の形狀には關係が無い、假令へば圖 (12) の如き各種の容器があつても其の底面積が等しければ、底面壓力は皆等しい。これを 靜水學の奇説 と稱へてをる。

11. 壓力の中心の圖式解法.

(A) 一般解法

§. 9. 式 (23) より

$$y_m = y_0 + \frac{r^2}{y_0}$$

但し

$$r^2 = \frac{I_0}{A}$$

即ち

$$r^2 = y_0(y_m - y_0) = y_0 \cdot e \quad (24)$$

となる、故に先づ主軸に對する環動半徑  $r$  を求め、重心を過ぎりて平面に垂直に  $r$  に等しく  $\overline{GR}$  を取り  $O$  と  $R$  を結び  $OR$  に直角に  $RM$  を引き  $O$  平面との交點を  $M$  とすれば  $M$  は壓力の中心である。

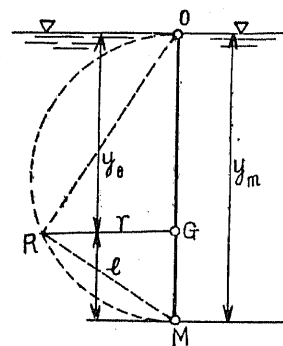


圖. 13.

(B) 平面、矩形なる場合

幅  $B$  にして高  $H$  なる矩形の壁に及ぼす水壓を見るに水深  $z$  に於ける壓力強度  $p_z$  は

$$p_z = p_0 + \gamma \cdot z$$

或は實用壓力にして

$$p_z = \gamma \cdot z \quad (25)$$

即ち壓力強度  $p_z$  は深  $z$  のみの函數であるから、若し壓力強度の大きさを適當な長の單位で表せば  $p_z$  と  $z$  の關係を直線で示すことが出来る。圖 (14)、扉の單位長に於ける壓力  $dP$  の變化も直線で表はされる。

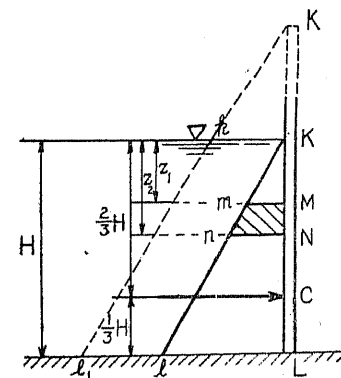


圖. 14.

全壓力  $P$  は

$$dP_z = p_z \times B \times 1 = \gamma \cdot z \cdot B$$

$$P = \int dP_z = \gamma \frac{H^2}{2} \cdot B$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma \cdot H \cdot B) \times H \quad (26)$$

而して  $(\gamma \cdot H \cdot B)$  は底部  $L$  に於ける壓力であるから  $\overline{LL} = \gamma \cdot H \cdot B$  になる様  
 に取れば、三角形  $KLL$  の面積は全壓力  $P$  を示す、若し絶対壓力の場合には之  
 れに  $Kk = l'l' = p_0 B$  として、點線にて示した梯形の面積が  $P$  になる、 $P$  は  
 各其の平行なる壓力の合成なる故、その作用點はこの三角形の重心を通り且つ重  
 心の位置は水面より  $2/3 H$  の處にある事は明である。

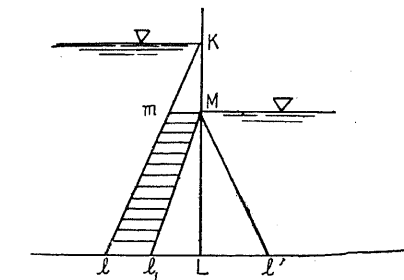
又、任意の長  $MN$  に及ぼす壓力は

$$P_{MN} = \int_{z_1}^{z_2} dP_z = \gamma \frac{z_2^2 B}{2} - \gamma \frac{z_1^2 B}{2} \quad (27)$$

右邊の第一項は三角形  $KNn$  第二項  
 は三角形  $KMm$  であるから、 $P_{MN}$  の大  
 さは梯形  $MNnm$  に等しくその方向は梯  
 形の重心を通る。

此の方法は鉛直なる壁の場合に限ら  
 ず凡ての場合に應用し得るのである。

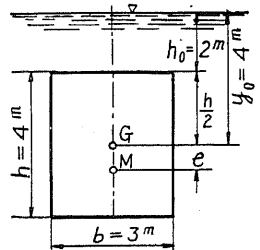
次に壁の前後に水があり且つ其の水  
 位の變つてをる場合には、今の様に壓力



圖・15.

の三角形を作れば、左側からは三角形  $KLL$  に等しき水壓、右側からは三角形  
 $MLL'$  に等しき水壓を受ける、今  $Ll_1 = Ll'_1$  に  $l_1$  をとれば三角形  $MLl_1$  = 三角  
 形  $MLl'_1$  となり、兩者は大き相等しく方向相反する力を示し、その合力は零とな  
 る故に残りの  $KMLl_1$  の面積に等しき壓力が壁面に作用する。若し  $ML$  の所に扉

があるとせば扉には平行四邊形  $Ml_1l_1m$  の面積に等しい水壓が作用しその壓力の  
 中心はこの四邊形の重心と一致し、若し  $ML$  が扉とすれば扉の高さの半分の高  
 さにある。



圖・16.(a)

例題・1. 圖(16)の如き矩形の扉が鉛直にある場  
 合の總代壓力及び水壓の中心を求む。

これは §. 9. に於て  $\alpha = 90^\circ$  の場合にして §. 9  
 式(20)により

$$P = \gamma \cdot b \cdot h \left( \frac{h}{2} + y_0 \right)$$

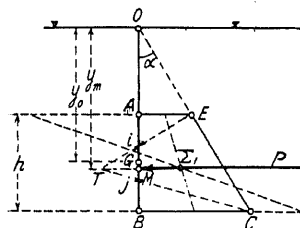
$$= 1000 \times 4 \times 3 \times 4 = 48000 \text{ [kg]}$$

水壓の中心  $M$  は §. 9. 式(23)により重心  $G$  より

$$e = \frac{I_0}{A \cdot y_0} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh \left( h_0 + \frac{h}{2} \right)} = \frac{h^2}{12 y_0} = \frac{4^2}{12 \times 4} = \frac{1}{3} \text{ [m]}$$

下にある。

此の圖式解法を求むるには圖(16)(b)の様に  $CB$  の長を  $p' = \gamma z = 1000 \times$



圖・16.(b)

$= 6000 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$  に相當する縮尺にとり、 $O$  と結べば  
 梯形  $ABCE$  の面積  $\times B\gamma = P \text{ [kg]}$  となる其の水壓  
 の中心を求むるには普通の梯形の重心を求むる方法に依  
 るも宜敷いけれども、又  $AB$  を  $i$  及  $j$  に於て三等分し  
 之れを  $E$  及  $C$  と結んで其交點  $T$  を求め  $BC$  に平行  
 線を引けばこれが水壓の力線となり  $AB$  との交點  $M$   
 が水壓の中心を示す。

若し扉の上端が水面に位するときは  $h_0 = 0$ ;

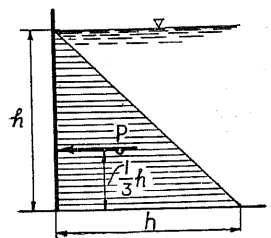
$$P = \gamma b \frac{h^2}{2} = 1000 \times 3 \times \frac{16}{2} = 24000 \text{ [kg]}$$

$$e = \frac{h}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ [m]}$$

此の場合單位幅  $b = 1 \text{ [m]}$  に來る水壓は

$$\gamma = 1 \left[ \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \right] \text{ であるから}$$

$$P = \frac{h^2}{2} \text{ [t]} \quad (28)$$



圖・17.

となり、其の水壓は簡単に圖(17)の様な二等邊直角三角

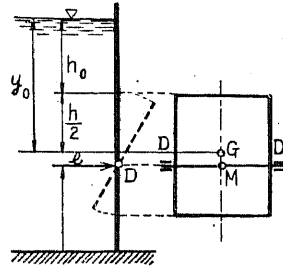


圖. 18.

形の面積を以て示し、此の三角形の重心を通ずる直線を以て水壓の方向を示し得る。

例題. 2. 扉を圖 (18) の様に D に於ける水平軸の周りを廻轉し得る様にしておくと時は

§. 9. 式 (23) に依つて  $e = \frac{J_0}{A \cdot \gamma_0}$  であるから、水位が上昇し  $\gamma_0$  が大きくなれば  $e$  は小さく成つて M は G に接近し M の位置が D の廻轉軸よりも上方に位する様になれば扉は自動的に開いて水を流出する、反對に水位が下降し  $\gamma_0$  が小になり、従つて  $e$  が大きくなつて M の位置が G より遠く離れ軸よりも下方に位するに至れば扉は自から閉づる

例題. 3. 圓板が鉛直に置かれた場合の總代水壓及水壓の中心を求めよ

§. 9. 式 (20) により  $P = \gamma_0 \pi R^2 = 1000 \times 4 \times \pi \times 2^2 = 62800 [kg]$

§. 9. 式 (23) により  $e = \frac{\pi R^4}{4 \pi \gamma_0} = \frac{R^2}{4 \gamma_0} = \frac{1}{4} [m]$

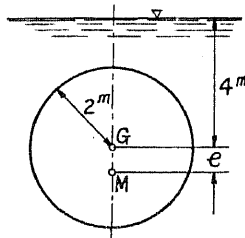


圖. 19.

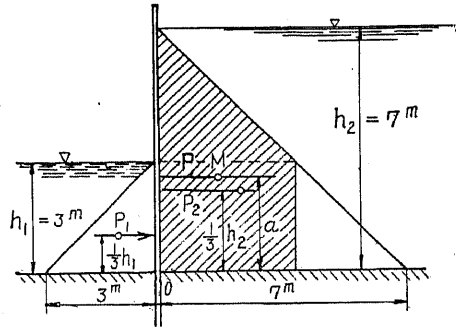


圖. 20.

例題. 4. 圖 (20) に示す様に隔壁の兩側が水位が變つてをる場合の總代水壓及水壓の中心の位置

單位幅 1 [m] に及ぶ水壓は左側では式 (28) により  $P_1 = \frac{3^2}{2} [t]$  で水壓の中心は底から 1 [m] 上にあり、右側では  $P_2 = \frac{7^2}{2} [t]$  で  $\frac{7}{13} [m]$  底面から上にある、故に總代水壓 P は

$$P = P_2 - P_1 = \frac{1}{2} [7^2 - 3^2] = 20 [t]$$

で圖の斜線の部分面積に相等しい其の水壓の中心は O に付て力率を求めよ

$$P \cdot a = P_2 \cdot \frac{h_2}{3} - P_1 \cdot \frac{h_1}{3}$$

$$a = \frac{P_2 h_2 - P_1 h_1}{3P} = \frac{1}{3} \frac{h_2^3 - h_1^3}{h_2^2 - h_1^2}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{7^3 - 3^3}{7^2 - 3^2} = 2.64 [m]$$

12. 曲面に作用する静水壓. 圖 (21)

に於て A を曲面とし、其の座標は XY 面を水面に Z 軸を鉛直に取つてある、任意の深 z にある微小面積 dA に來る水壓は

$$dP = p dA = \gamma \cdot z \cdot dA$$

でその方向は dA に垂直である、今此の垂直線と座標軸との成す角を  $\lambda, \mu, \nu$  とすれば、此の水壓の方向分力は

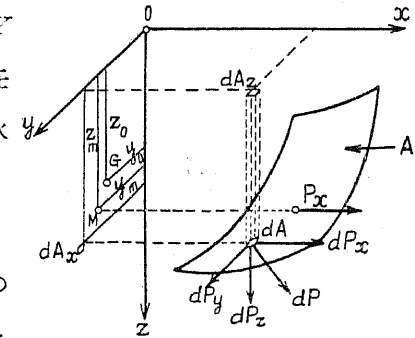


圖. 21.

$$dP_x = \gamma \cdot z \cdot dA \cos \lambda;$$

$$dP_y = \gamma \cdot z \cdot dA \cos \mu;$$

$$dP_z = \gamma \cdot z \cdot dA \cos \nu$$

(29)

にして、又この微小面積 dA の各座標面への投影は

$$dA \cos \lambda = dA_x;$$

$$dA \cos \mu = dA_y;$$

$$dA \cos \nu = dA_z$$

従つて式 (29) は

$$dP_x = \gamma \cdot z \cdot dA_x;$$

$$dP_y = \gamma \cdot z \cdot dA_y;$$

$$dP_z = \gamma \cdot z \cdot dA_z$$

(30)

となる、此の三式を F 面全體に積分すれば座標軸の方向に於ける總代水壓が得

られる

$$\begin{aligned} P_x &= \gamma \int z dA_x; \\ P_y &= \gamma \int z dA_y; \\ P_z &= \gamma \int z dA_z \end{aligned} \quad (31)$$

今  $A_x$  を  $A$  の  $yz$  座標面への投影  $z_0$  を水面から  $A_x$  の重心迄の深とすれば

$$\int z dA_x = z_0 A_x$$

従つて

$$P_x = \gamma z_0 A_x \quad (32)$$

又  $P_x$  の力線が  $YZ$  面を過ぎる点を  $M$ , 其の  $Y$  及  $Z$  軸よりの座標を  $z_m, y_m$  で表はすときは

$$\begin{aligned} P_x \cdot z_m &= \int dP_x \cdot z; \\ P_x \cdot y_m &= \int dP_x \cdot y; \end{aligned}$$

式 (30) 及式 (32) によつて

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{\int z^2 dA_x}{z_0 A_x} = \frac{I_y}{z_0 A_x}; \\ y_m &= \frac{\int xy dA_x}{z_0 A_x} = \frac{J_{xy}}{z_0 A_x} \end{aligned} \quad (33)$$

となる、式 (32) 及び式 (33) を §. 9. 式 (20) 並に式 (21) と対照すれば  $P_x$  は

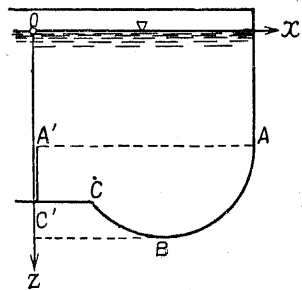


圖. 22.

$YZ$  面に平行な平面  $A_x$  に作用する、總代水壓を求むる場合と全く同様である。

同様にして、 $P_y$  も  $A$  の  $XZ$  面になせる投影  $A_y$  に作用する水壓の總代壓力として求めらる、而して水平座標軸は其の方向を任意に擇んだものであるから、次の様に言ふ事が出来る。

静水中の曲面に作用する任意の方向に於

ける總代水壓は其の方向に對し垂直なる平面に曲面を投影した投影面に付ての總代水壓と等しい。

又曲面の形によつては二箇所の投影面が重り合ふ様な場合があるが、然し此の部分の總代壓力は互に大き相等しく且つ其の方向が相反してをる爲、互に消し合つてしまふ。故に圖 (22) の  $ABC$  曲面の水平壓力  $P_x$  を求める際に投影面  $A_x$  としては  $YZ$  面の  $A'C'$  面のみを考へれば宜敷い。

次に微小面積  $dA$  に作用する壓力  $dP$  の鉛直分力は式 (30) により

$$dP_z = \gamma \cdot z \cdot dA_z$$

然るに  $z dA_z$  は  $dA_z$  上の水柱の容積に等しく式 (30) の  $P_z$  を求むる積分  $\int z dA_z$  は全曲面  $A$  の上にある液體の體積  $V$  を表はすことになる、故に曲面  $A$  に作用する鉛直總代水壓は曲面の上方に存在する

液體の重量と同じ

即ち

$$P_z = \gamma V \quad (34)$$

其の力線は體積  $V$  の重心を過ぎる。

圖 (23) の様な容器の  $AB$  面にくる鉛直

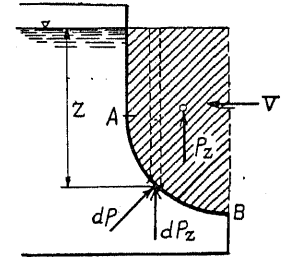


圖. 23.

水壓は、上向であつて其の大きさは式(34)によつ

て  $AB$  面上に假想した斜線部分の容積の水の重量と相等しい。一般に曲面  $A$  に於ては其の三分力  $P_x, P_y, P_z$  は共通なる一點を過ぎる事なく、又一つの壓力にも合成する事が出来ない、而して是等は剛體の力の合成に於けるが如く、一つの力と一つの偶力とに合成される。

唯特定の場合には一つの力に合成し得るもので假定曲面が、圓の一部である時には凡ての微小面積に来る壓力は圓の中心を通る。

例題. 圖 (24) は扇形扉で此の水壓を求む。

水平 壓力は §. 9. 式 (20) により

$$P_h = \gamma \left( z + \frac{h}{2} \right) \cdot b = 1.0 \times \left( 24.24 + \frac{2.76}{2} \right) \times 2.40 = 170 [t]$$



水壓の中心は §. 9. 式 (22) から河床上

$$\frac{h}{2} - e = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12(z + \frac{h}{2})} = \frac{2.76}{2} - \frac{2.76^2}{12(24.24 + \frac{2.76}{2})}$$

$$= 1.38 - 0.02 = 1.36 \text{ [m]}$$

鉛直水壓は §. 12.

式 (34) により

$$P_z = \gamma \cdot V$$

$$= 1.0 \times 70.3 = 70.3 \text{ [t]}$$

但し  $V$  は扉上に假想した水柱の體積斜線の部分で  $P_z$  は其の重心  $G$  を通じて上方に向ふ、 $P_h$  及  $P_z$  の交點  $E$  を通じて總代水壓  $P$  は曲面に垂直の方向即ち曲面の中心  $C$  に向つて作用する。

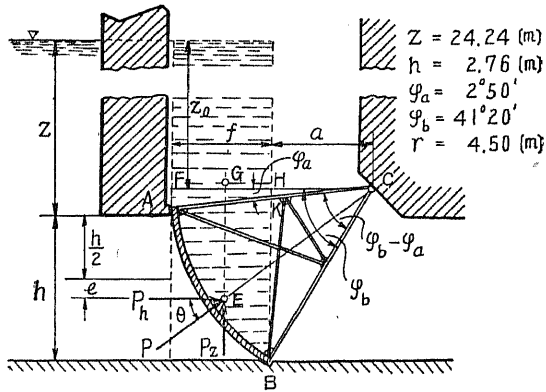


圖. 24.

$$P = \sqrt{P_h^2 + P_z^2} = \sqrt{170^2 + 70.3^2} = 184 \text{ [t]}$$

又其の方面と水平とのなす角  $\theta$  は

$$\tan \theta = \frac{P_z}{P_h} = \frac{70.3}{170} = 0.414$$

なる關係があるから  $V$  の重心  $G$  は求めずとも  $P$  の方向は求むる事が出来る

$$\theta = 22^\circ.28'$$

$V$  は圖 (24) に於て

$$FA = z - z_0 = \gamma \sin \varphi_a = 4.50 \sin 25^\circ 50' = 0.22 \text{ [m]}$$

故に

$$z_0 = 24.24 - 0.22 = 24.02 \text{ [m]}$$

$$FC = f + a = \gamma \cos \varphi_a = 4.50 \cos 25^\circ 50' = 4.49 \text{ [m]}$$

$$HB = \gamma \sin \varphi_b = 4.50 \sin 41^\circ 20' = 2.98 \text{ [m]}$$

$$HC = a = \sqrt{\gamma^2 - HB^2} = \sqrt{4.50^2 - 2.98^2} = 3.37 \text{ [m]}$$

梯形の面積は

$$A_1 = \left( z_0 + \frac{FA + HK}{2} \right) \cdot f$$

$$= \left( 24.02 + \frac{0.22 + 0.17}{2} \right) \times 1.12$$

$$= 27.2 \text{ [m}^2\text{]}$$

弧形部分

$$A_2 = \text{扇形 } ABC - \triangle KBC$$

$$= \frac{r^2 \pi (\varphi_a - \varphi_b)}{360^\circ} - \frac{1}{2} a (HB - FH)$$

$$= \frac{4.50^2 \times 3.14 \times 38^\circ 30'}{360^\circ} - \frac{3.37}{2} (2.98 - 0.17)$$

$$= 2.07 \text{ [m}^2\text{]}$$

故に體積は

$$V = (A_1 + A_2) b$$

$$= (27.2 + 2.07) \times 2.40 = 70.3 \text{ [m}^3\text{]}$$

### 13. 壓力の傳達. (重量を無視した場合の壓縮した液體の壓力、)

液體を充滿し周囲を密閉した任意の容器の  $B'$

に口があつてピストンに依り、液體に已知の壓力強度  $p'$  を作用する事が出来る、§. 2. 式 (12)

に依り水中の任意の點  $B$  に於ける壓力強度  $p$  は

$$p = p' + \gamma(z' - z)$$

實際に起る場合は  $p'$  が極めて大きく従つて重量の影響即ち右邊の第二項は  $p'$  に比して極めて小さい様な場合であるから第二項は省略する事が出来る。此の場合壓力  $p$  は  $p = p'$  になる。

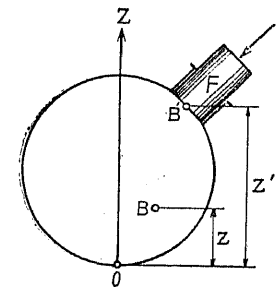


圖. 25.

此の値は液體中の任意の點に適合するから次の様な重要な定理を得る任意の平衡状態にある密閉され、且つ重量の影響のない液體では各點に於て各方向に等値の壓力が作用する (Pascal の原理)

液體はピストンの表面の微小部分  $dA$  に對し  $p'dA$  の壓力を及ぼす而してピストンの形狀は全く任意であつて、今  $dA$  の垂直線がピストンの軸となす角を  $\theta$  とすれば、軸の方向に於ける全水壓は

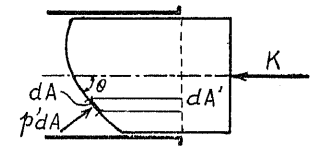


圖. 26.

$$P_a = \int p' dA \cos \theta$$

然るに  $dA \cos \theta = dA'$  でこれはピストンの軸の直角な面への  $dA$  の投影であるから、

$$P_a = p' \int dA' = p'A \quad (35)$$

但し  $A$  はピストンの断面積である、此のピストン軸の方向に於ける全水圧はピストンの表面の形状に無関係であつて只ピストン断面積にのみ関係する、摩擦

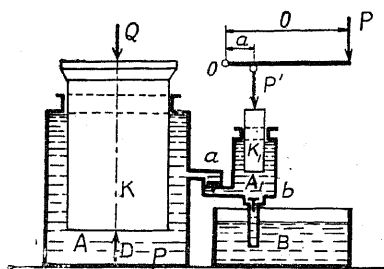


圖. 27.

がないと假定しピストンを押込んで  $p'$  の壓力を生ずる爲にはピストンに  $K = p'A$  なる力を作用せしめなければならぬ。

上述の原理を利用したのが所謂水壓機で圖(27)の様な構造をしてをる。

断面積  $A_1$  の小さいピストン  $K_1$  を支

點  $O$  なる横桿で上方に動かすと瓣  $a$  は閉ぢて反對に吸入瓣  $b$  は開きタンク  $B$  から水が小さい圓筒の中に流れ込む、次にピストンを押すと  $b$  は閉まり  $a$  が開く、かくして水は大きな圓筒中に流れ込み断面積  $A$  なるピストン  $K$  を押し上げる、此の場合に壓力が大きいから、水の重量は何等關係する所なく壓力は一定と見て差支ない、横桿を  $P$  なる力で押すとピストン  $K_1$  には  $P' = \frac{Pl}{a}$  なる力が作用し、水中の壓力強度は

$$p = \frac{P'}{A_1} = \frac{Pl}{aA_1} \quad (36)$$

大なるピストンには下から

$$D = Ap = P \frac{l}{a} \frac{A}{A_1} \quad (37)$$

が作用する、荷重  $Q$  を押し上げる爲には  $D = Q$  でなければならぬ即ち

$$Q = P \frac{l}{a} \frac{A}{A_1} \quad \text{又は} \quad P = Q \frac{a}{l} \frac{A_1}{A} \quad (38)$$

ピストン  $K_1$  を  $h_1$  支押し下げると、液體は  $A_1 h_1$  だけ大きな圓筒の方に流し込みピストン  $K$  を  $h$  支押し上げる

$$Ah = A_1 h_1, \quad h = \frac{A_1 h_1}{A}$$

此の場合の仕事は

$$Dh = P \frac{l}{a} \frac{A}{A_1} \frac{A_1}{A} h_1 = P \frac{l}{a} h_1 \quad (39)$$

$$P' h_1 = P \frac{l}{a} h_1 \quad (40)$$

故に兩者の仕事は全く同じである譯だが實際はピストンには摩擦があるから實際の仕事  $A_1$  は働いた仕事  $A_c$  よりも小さい即ち  $\eta = \frac{A_1}{A_c}$  で所謂水壓機の能率として示されるものである。

14. 浮力. 圖(28)に於て  $M$  を水中に浮べる物體とすれば之れに及ぼす壓力は曲面に作用する水壓の場合と同様にして計算する事を得る。座標面  $XZ$  及び  $YZ$  に對する投影  $M_x$  及  $M_y$  は 0 となるから、水壓の水平分力  $P_x, P_y$  も亦 0 である。

鉛直分力  $P_z$  を求むる爲に微小なる塊體  $abc$  (斜線の部分) を取り  $a, b, c$  に於ける面積をそれぞれ  $da, dF, dc$  とすれば

$$dF_z = da \cos \alpha = dc \cos \beta$$

而して此の塊體に作用する鉛直方向の力は  $a$  及び  $c$  に於ける水壓の鉛直分力  $P_a$  並に  $P_c$  と塊體の重量  $dW$  のみである塊體は平衡状態にあるのだから

$$dP_a + dW - dP_c = 0 \quad (41)$$

尙  $dP_a = (p_0 + rz')$

$$\cos \alpha \cdot da = (p_0 + rz') dF_z$$

$$dP_c = (p_0 + rz'')$$

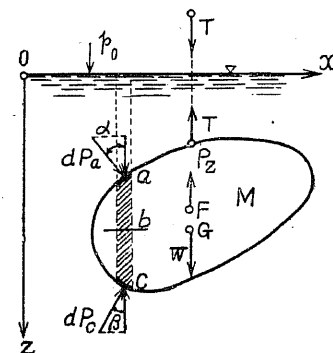


圖. 28.

$$\cdot \cos \beta \cdot da = (p_0 + \gamma z'') dF_z$$

であるから

$$dP_z = (dP_c - dP_a) = \gamma(z'' - z') dF_z \quad (42)$$

全體  $M$  に付て積分すると

$$P_z = \gamma \int (z'' - z') dF_z \quad (43)$$

右邊  $\int (z'' - z') dF_z$  は物體の水中に没する部分換言すれば物體によつて排除せられた水の容積で、之れを排水量と云ひ  $V$  を以て表はせば

$$P_z = \gamma V = W \quad (44)$$

即ち物體が水中に靜止して浮べる時は物體の重量  $W$  は其の重心  $G$  を通し鉛直下向に作用するに對して水は排水量の重量  $\gamma V$  に等しき反力即ち水壓 ( $P_z$ ) を以て抵抗し其の力線方向は排水容積の重心  $F$  を通して鉛直上方に向ふ。而して此の場合  $G$  と  $F$  は同一鉛直線上に位する。此の  $P_z$  を浮力、 $F$  を浮心。物體が自然力により靜止せる場合の其の重心と浮心とを結ぶ鉛直線を浮軸と稱す。

此の原理は圖 (29) の如く水面に浮べる物體に付ても、適用出来るもので

$$dP_z = dP_c - p_0 dF_z = (p_0 + \gamma z) dF_z - p_0 dF_z = \gamma z dF_z$$

即ち 
$$P_z = \gamma V$$

にして  $V$  は排水量で浮力  $P_z$  は此の排除容積の重心即ち浮心  $F$  を過ぎる。

而して水中にある物體は  $W > P_z$  の時は沈み  $W < P_z$  の時には浮び揚り

$W = P_z$  の時に靜止する。

尙ほ物體が水面に浮び靜止してをる場合、水面によつて切らるゝ物體の假想斷面  $C-D$  を浮揚面、物體の最深部迄の水深  $d$  を吃水と謂ふ。

又、圖 (28) の如く全部水中に沈んでをる物體を上部より糸にて引張つて、釣合を保たし

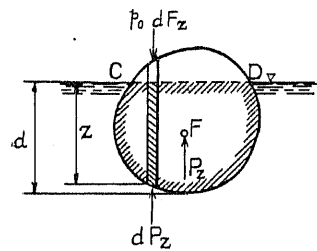


圖. 29.

てをるものと假定する、然らば此の張力  $T$  は、物體の重量  $W$  及浮力  $P_z$  と同一鉛直線上にあつて且つ

$$W - P_z - T = 0$$

或は

$$T = W - P_z = W - \gamma V \quad (45)$$

即ち物體は重量と浮力との差に等しき力を加ふときは釣合ふもので、換言すれば水中に在る物體の重量は其の排除した容積の水の重量丈見掛の重量が減ずる。之れを Archimedes の原理と謂ふ。

此の原理を利用して、重量  $W$  を有する物體の單位重量  $\omega$  を測定することが出来る。其の物體の容積を  $V$  としこれを單位重量  $\gamma$  の液體中に没し、其の時の見掛けの重量を  $W'$  とすると

$$W' = W - \gamma V = W - \gamma \frac{W}{\omega}$$

故に

$$\omega = \gamma \frac{W}{W - W'} \quad (46)$$

15. 浮べる物體の安定. 水中に浮ぶ物體が平衡状態を保つには、物體の重量と浮力とが等しき事と、物體の重心と浮心とが同一鉛直線上に位すべき事とが、必要なる條件であるが、尙ほ物體の安定の程度を考へる際には、次の様な條件が必要となる。

圖 (30) (a) は靜止の状態で浮んでゐる船の横斷面で、浮揚面と浮軸との交點を  $O$ 、 $V$  を排除せられた水の體積とする、今風又は波等の原因の爲に、圖 (30) (b) の様に微小なる角  $\theta$  だけ傾いたと假定すると新しい位置に於ける船の重量は、重心  $G$  を通して作用するが、浮力  $\gamma V'$  は  $F'$  なる新しき浮心を通して作用する、而もこの場合の浮力  $\gamma V'$  の大きさは靜止位置の浮力  $\gamma V$  と等しい、何となれば  $O$  から  $x$  なる距離に於ける浮揚面の平面積を  $dF$  とすると少し傾いた爲に排除する水の體積の變化は

$$\Delta V = \int x \theta dF = \theta \int x dF \quad (47)$$

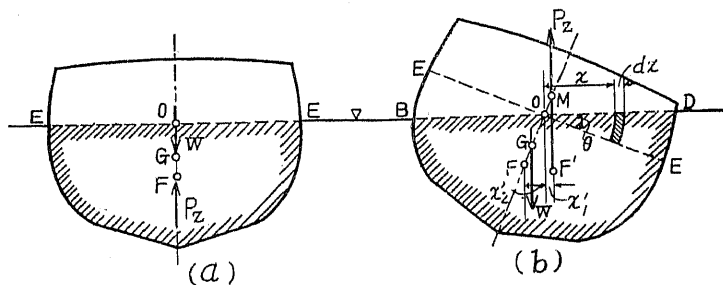


圖. 30.

にして  $\int x dF = 0$  であるから  $\Delta V = 0$  である即ちその體積には變化なく浮力の大きさも變りない。

故に新位置に於ては  $W$  と  $rV'$  とは一つの偶力となつて船を廻轉せしめ様とする、此の場合圖の様な偶力であれば船を静止の位置に戻さうとする傾向を生じこの反對の方向の偶力であれば、船を静止の位置から、益々遠げ様とする力となる、前者の如き状態を**安定の坐り**と云ひ、後者の如き場合は船は**不安全の坐り**にあると云ふ。

圖で、浮力の力線が浮軸と交る點  $M$  を**メタセンター**或は傾心と名付け、 $GM$  即ち船の重心から傾心迄の長を**メタセンターの高**或は傾心高と云ひ、これで船の安定度を測定する事が出来る。

船の傾く角度が  $10^\circ \sim 15^\circ$  位では、 $M$  の位置は殆ど一致してをり、従つて**メタセンターの高**も一定とすることが出来るが、大きな傾斜角を有した場合には**メタセンターの高**は角度と共に變化する。

16. **メタセンターの高.** 圖(30)(b)に於て面積  $OED =$  面積  $OBE$  にして、静止位置にあるときは  $OEB$  の部分に浮力作用するも、傾いた時はこの浮力は消え其の代り  $ODE$  の部分に浮力を生ずる。それで  $O$  に於て浮力の廻轉能率を取れば

$$-P_z x'_1 = P_z x'_2 - r \int_{(OEB)} (x\theta dF)x - r \int_{(ODE)} (x\theta dF)x$$

然るに  $P_z = rV$ ;  $x'_1 + x'_2 = x' \int dF = \int_{(OEB)} dF + \int_{(ODE)} dF$

故に  $x' = \theta \int \frac{x^2 dF}{V} = \frac{\theta I_0}{V}$  (48)

尚ほ  $\theta$  が小さい場合には  $x' \doteq \overline{MF} \cdot \theta$  で

$$\overline{MG} = h_m; \quad \overline{GF} = e$$

とすると  $x' = (h_m - e)\theta$

従つて  $h_m = \frac{I_0}{V} - e$  (49)

而して  $h_m > 0$  のとき即ち  $M$  が重心の上部にあるときは原位置に復歸する様な偶力が作用するから、安定の坐りであり、反對に  $h_m < 0$  なるとき即ち  $M$  が重心の下にあるときは不安定の坐りとなる、又  $h_m = 0$  即重心とメタセンターが一致するときは**中立の坐り**となる。

尚ほ物體が水中に浮游する場合は  $W = rV$  で、且つ浮揚面に付ては何等考へられない、この場合の安定の坐りは重心が浮心の下にある場合のみに限られる。

メタセンターの高を實際に測定するには、船の上(甲板)に荷重を乗せ少し傾けた儘の平衡状態にある様にし、その荷重の位置と傾斜角とを測定すると次の式から  $h_m$  を計算することが出来る。

$$\begin{aligned} Gh_m \theta &= Q \cdot S \\ h_m &= \frac{Q \cdot S}{G\theta} \end{aligned} \quad (50)$$

但し  $Q$  は荷重の重量、 $S$  は荷重の船の浮軸からの距離、 $\theta$  は傾斜角、尚ほ船のメタセンターの高はその船の種類に従つて異なり、軍艦では  $0.8 \sim 1.2 m$ 、帆船では  $1.0 \sim 1.4 m$  汽船は  $0.3 \sim 0.7 m$  位が普通である。

前述の様に船が動揺すれば、其の度毎に新なる浮心を生じ、その軌跡は一つの面となる、之れを**浮心曲面**と云ひ、主要断面と浮心面との交りによる曲線を浮

心曲線と名付ける、又浮揚面に依つて包まれた面を浮揚曲面と謂ひ之れの主要斷

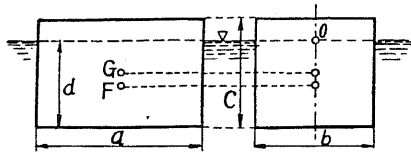


圖 31.

面との交線を浮揚曲線と稱す。

例題 1.

圖 (36) の如き函船の吃水及安定の條件を求め、 $w$  を函船の單位重量とすれば  $P_2 = \gamma V = W$  なる式より

$$\gamma \cdot a \cdot b \cdot d = w \cdot a \cdot b \cdot c$$

従つて 
$$d = \frac{w}{\gamma} c \quad \omega_1 < \gamma \quad (50a)$$

次に  $a > b$  なるときの最小のメタセンターの高さは、 $o$  を通する長軸の周りの廻轉に對するそれであつて式 (49) から

$$h_m = \frac{ab^3}{12abd} - \frac{c-d}{2} = \frac{b^2}{12d} - \frac{c-d}{2} \quad (51)$$

安定の爲には  $h_m > 0$  が必要で、即ち

$$\frac{b^2}{12d} > \frac{c-d}{2} \quad (52)$$

この式に  $d = \frac{w}{\gamma} c$  を入れると

$$\frac{b^2}{6 \frac{w}{\gamma} c} > c \left(1 - \frac{w}{\gamma}\right)$$

或は 
$$\frac{b}{c} > \sqrt{6 \frac{w}{\gamma} \left(1 - \frac{w}{\gamma}\right)} \quad (53)$$

今  $a = 10$  [m],  $b = 5$  [m],  $c = 4$  [m]  $w = 820 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$  なる函船を海水に浮したときの傾心高、吃水並に其の安定を求め。

海水にては  $\gamma = 1025 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$  なる故

$$\frac{w}{\gamma} = \frac{820}{1025} = 0.8$$

吃水  $d$  は式 (50a) より

$$d = \frac{w}{\gamma} c = 0.8 \times 4 = 3.2$$
 [m]

傾心高  $h_m$  は式 (51) より

$$h_m = \frac{b^2}{12d} - \frac{c-d}{2} = \frac{25}{12 \times 3.2} - \frac{0.8}{2} = 0.26$$
 [m]

安定如何は

式 (53) にて

$$\frac{5}{4} > \sqrt{6 \times 0.8 (1 - 0.8)}$$

例題 2. 船の上下振動

圖 (32) 一般に水線斷面  $B-E$  に於て静止してをものとす、この位置では  $W = P_2 = \gamma V$  で  $V$  は斜線の部分である、

今或る外力により、此の状態のまま、水中に押し入れられ  $E'-E'$  迄没したとすると此の場合の浮力は  $W$  よりも大きく且つ鉛直の方向に押し上げ様とするから若し外力を取り去れば初めの静止位置より上方迄押上げて仕舞ふ、すると  $W > P_2$  となつて船は再び下方に沈む、此の様にして船は平衡位置の上下に振動する、この振動を概算するに  $z_0$  を水線斷面から重心  $G$  迄又  $z$  を  $E'-E'$  から重心迄の長さとする運動の法則により

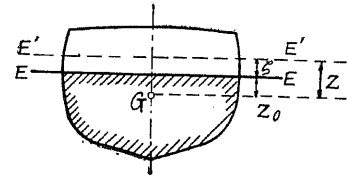


圖 32.

$$W - P_2 - P'_2 = \frac{W}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (54)$$

但し  $P_2$  は平衡状態時の浮力、 $P'_2$  は  $E'-E'$  の時の浮力、又  $W = P_2$  なる故

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{g}{W} P'_2 \quad (55)$$

振動が小さいから、船體の上下によつて水平斷面に於ける平面積  $F$  は變化せぬものとする

$$P'_2 = \gamma F (z - z_0)$$

式 (55) 
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \frac{\gamma F}{W} (z - z_0) \quad (56)$$

今 
$$g \frac{\gamma F}{W} = \alpha^2 \quad (57)$$

$$z - z_0 = \zeta \quad (58)$$

と置けば  $z_0$  は定數なる故  $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}$  となり、船の振動の微分方程式

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -\alpha^2 \zeta \quad (59)$$

を得る、此の解は

$$\zeta = A \sin(\alpha t) + B \cos(\alpha t) \quad (60)$$

始の條件は  $t = 0, z = z_0$  従つて  $\zeta = 0$  なる故  $B = 0$  となり

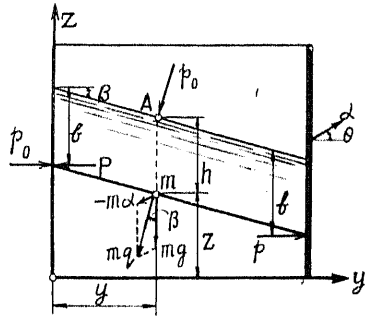
$$\zeta = A \sin(\alpha t) \quad (61)$$

故に振動は  $E-E$  の周りの單弦運動であつて、其の週期  $T$  は

$$T \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{g\gamma F}}; \quad (62)$$

である。

17. 運動する容器中の水、相對的静止. 今迄は静止せる水中の壓力に付



圖・33

ての法則であつたが此の事は等速運動をなす容器中の水は §. 7. 以下に示した、平衡條件が全く満足せられてゐるから直ちに適用出来る。

次に直線上を等加速運動をなす容器及其の中の水に付ては、此の考へに少しの變化を加へると應用する事が出来る、即ち **d'Alembert** の原理によつて水中の任意の質點  $m$  に、外力に相應する力此の場合  $-m\alpha$  を加へて釣合を保たしめる。質點はその重力  $mg$  と  $m\alpha$  とに依つて見懸は恰も  $mg$  なる重力を地球から受けてゐる様に假想せられる、容器に對して水が相對的靜止状態にある爲には、水中の各點に於ける所謂見懸の重力及垂直壓力とが平衡の條件を満足しなければならない。それには等壓面は平行で且つ  $q$  の方向に直角でなければならぬ、従つて水面も同様である。此の考へは  $\alpha$  或は  $g$  が時と共に變化しない場合にのみ本當で、加速度  $\alpha$  が變化すると水の平衡状態を維持する事は不可能となり、 $q$  の方向の一定の變化に伴ひ水面も動揺を始める。

$q$  の分力を  $q_x, q_y, q_z$  とすれば §. 7. 式 (2) から

$$p = \rho \int (q_x dx + q_y dy + q_z dz) + c \quad (63)$$

等加速度  $\alpha$  は  $y$  軸と  $\theta$ 、 $x$  軸と直角をなすものとすれば

$$q_x = 0 \quad q_y = -\alpha \cos \theta, \quad q_z = -\alpha \sin \theta - g$$

従つて

$$p = \rho \left\{ -\alpha \cos \theta \cdot y - (\alpha \sin \theta + g) z \right\} + c$$

水面に於ける壓力即ち大氣壓  $p_0$  は

$$p_0 = \rho \left\{ -\alpha \cos \theta \cdot y - (\alpha \sin \theta + g)(h+z) \right\} + c$$

故に

$$p - p_0 = \rho(\alpha h \sin \theta + gh)$$

の法則であつたが此の事は等速運動をなす容器中の水は §. 7. 以下に示した、平衡條件が全く満足せられてゐるから直ちに適用出来る。

次に直線上を等加速運動をなす容器及其の中の水に付ては、此の考へに少しの變化を加へると應用する事が出来る、即ち **d'Alembert** の原理によつて水中の任意の質點  $m$  に、外力

$$p = p_0 + \rho h \left( 1 + \frac{\alpha}{g} \sin \theta \right) \quad (64)$$

例題・1. 加速度の方向が  $\Gamma$  軸と平行の時は  $\theta = 0$

$$p = p_0 + \rho h$$

壓力の増加は單に水面よりの深さに比例し  $q$  と  $g$  となす。角即ち  $\beta$  は

$$\tan \beta = \frac{\alpha}{g} \quad (65)$$

其の水面の水平となす傾斜角も同様である。容器の外側は大氣を受けてゐるから容器に及ぼす水壓は

$$p - p_0 = \rho h$$

となりて、常用壓力の大きと同様になる

例題・2. 容器が鉛直に  $\alpha$  なる等加速度にて昇る場合  $\theta = \frac{\pi}{2}$

故に 
$$p = p_0 + \rho h \left( 1 + \frac{\alpha}{g} \right) \quad (66)$$

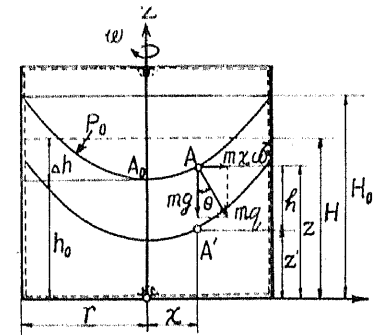
例題・3. 容器が鉛直に  $\alpha$  なる等加速度にて降る場合  $\theta = \frac{2}{3}\pi$

故に 
$$p = p_0 + \rho h \left( 1 - \frac{\alpha}{g} \right) \quad (67)$$

若し  $\alpha = g$  の時には  $p = p_0$  で、水中何れの點に於ける壓力も等しい。

18. 水が入つた儘で容器が其の中

心を軸として廻轉する場合. 圓筒に水を入れた儘一定の角速度で圓筒の軸のまはりを廻轉する場合水は圓筒と一體になつて同一角速度で廻轉するから、水はやはり容器に對して相對的靜止の狀態にある。



圖・34

容器が靜止してゐるときの水面の高を  $H$ 、廻轉してゐる場合の水面の高

さを軸の處で  $h_0$ 、壁面に於て  $H_0$  とする。又廻轉の角速度を  $\omega$  とし水面に在る任意の質點  $A$  に於ける平衡條件及び壓力強度を求む、相對的平衡状態にある爲には、**d'Alambert** の原理によつて、求心力と同量の力、所謂遠心力が作用

するものと假想すればよい。此の遠心力は  $\frac{mU^2}{x} = m\omega^2$  で水平方向を有す、然るときは重力  $mg$  と遠心力  $m\omega^2$  とに依つて見懸の重力は  $mq$  となり鉛直と  $\theta$  なる角をなす、次に  $A$  を通じ  $xz$  面上にある微小長は  $mq$  に垂直であるから水平に對して角  $\theta_0$  丈傾く。

軸から  $x$  なる距離にある水面の凡ての點に付ても同様であるから是等水面は廻轉する面でなければならぬ。而して  $xz$  面上にある點に就て存する關係は他の面にある凡ての點に對しても満足せらるべきであり。又遠心力は  $x$  と共に増加し同時に角  $\theta$  も増加するから水面線は中心から壁に行くに従つて傾斜が急になる。

水面は大氣壓  $p_0$  のみを受ける一つの等壓面であるからその面の微分方程式は

$$dp = 0 = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (68)$$

$A$  點に於ては  $X = x\omega^2; \quad Y = 0; \quad Z = -g$

従つて  $0 = x\omega^2 dx - g dz$

積分して  $0 = \frac{x^2\omega^2}{2} - gz + c; \quad (69)$

始めの條件は  $x = 0, \quad z = h_0$  であるから

$$0 = -gh_0 + c;$$

これを式 (69) に入れて

$$\frac{x^2\omega^2}{2} = g(z - h_0) \quad (70)$$

これは水面線を表す方程式で  $A_0$  を原點とする拋物線を示す、故に水面は廻轉拋物線體の表面となる。

水面より深  $h$  なる任意の點  $A'$  に於ける水壓強度は

$$dp = \rho(x\omega^2 dx - g dz);$$

$A'$  の座標を  $z'$  とする

$$p = \rho\left(\frac{x^2\omega^2}{2} - gz'\right) + c;$$

$A$  に於ては大氣壓  $p_0$  のみであるから

$$p_0 = \rho\left\{\frac{x^2\omega^2}{2} - g(h+z')\right\} + c$$

$$p - p_0 = \omega^2 h$$

或は

$$p = p_0 + \omega^2 h;$$

(71)

この式は水面から同じ深さにある點は凡て等しい壓力を有する事を示し従つて等壓面も水面と同じく軸の周りを廻轉する同形廻轉拋物線體の表面となる事を知る。

式 (71) に依つて容器の底面の壓力は中心が最小で  $p_m = p_0 + \gamma h_0$ ; 壁面が最大で  $p_{max} = p_0 + \omega H_0$ ; 又水平面に於ける壓力は拋物線的に中心から壁に向つて増大する事が分る。

水面が中心に於て下る深  $h_0$  を求むるには静止の場合の水の容積と廻轉中のそれとが同一であると云ふ幾何學的條件を用ひる。

静止中の水の高を  $H$ 、廻轉中の最高水位即壁の所の水位を  $H_0$  とすると

$$\pi r^2 H = \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 (H_0 - h_0)$$

式は

$$2H = H_0 + h_0$$

式 (70) に於て

$$x = r, \quad z = H_0 \quad \text{とすれば}$$

$$\frac{r^2\omega^2}{2g} = H_0 - h_0$$

従つて

$$h_0 = H - \frac{r^2\omega^2}{2g} \quad (72)$$

例題. 1. 式 (72) は急速に廻轉する圓筒の速度の測定に利用する事が出来る、其の軸と水の充滿してをる容器とを連結すると、軸の廻轉は容器に傳達して容器中の水面は角速度  $\omega$  に従つて低くなる  $H - h_0 = \Delta h$  とすると。

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\Delta h \cdot g} \quad (73)$$

故に澄明なガラス容器を使用し適當な測尺を以てその高を測れば直ちに  $\omega$  を知る事が出来る。

然し此の方法には次の缺點即  $\omega$  は  $\Delta h$  の平

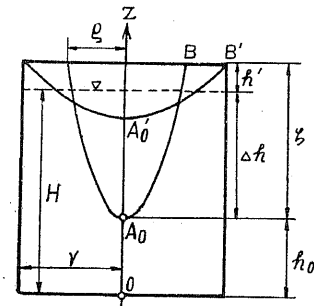


圖. 35.

方根に比例すと云ふ事及び  $\omega$  の値が大になると  $H_0$  が極めて高くなる事がある、此の障害を除くには Braum の方法に従ひ容器に蓋をして仕舞へばよい。僅少の高  $h'$  の空気を水面に残しておく、又、廻轉した後出来る廻轉拋物線體の表面の高を  $z$ 、並にその上部の半徑を  $\rho$  とすれば式 (70) から

$$\frac{\rho \cdot \omega^2}{\gamma} = g\zeta \quad (74)$$

尙幾何學的條件から

$$\pi \gamma^2 h' = \frac{1}{2} \pi \zeta^2$$

$\rho$  を省除すると

$$\gamma^2 h' = \frac{\zeta^2 g}{\omega^2} \quad \text{或は} \quad \omega = \frac{\zeta}{\gamma} \sqrt{\frac{g}{h'}} \quad (75)$$

即  $\omega$  は、測定値  $\zeta$  に正比例する、この場合の  $\omega$  の最小値は水面が丁度  $B'$  に達した時で此處では  $\zeta = 2h'$  となり

$$\omega = \frac{2}{\gamma} \sqrt{gh'} \quad (76)$$

但し低速度の中には前述の方法を用ひればよい。

例題・2. 河川屈曲部の水位の上昇を求む、

水面の式は式 (68) から

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{z} \quad (77)$$

$v$  を圖に垂直方向の流速とすれば、水面の任意の質點に於ては

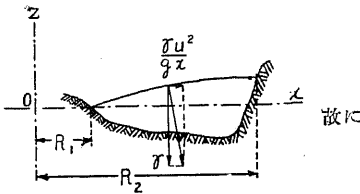


圖. 36.

$$\begin{aligned} X &= \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{x} \\ z &= -\gamma \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{x} \end{aligned}$$

$$g r z = v^2 \frac{dx}{x} \quad (78)$$

$$gz = v^2 \log e + c$$

$x = R_1$  に於て  $z = 0$  はなる故

$$c = -v^2 \log e R_1$$

従つて

$$z = \frac{v^2}{g} \log e \frac{x}{R_1} \quad (79)$$

最高水位の點を求むれば

$$h = 2.30 \frac{v^2}{g} (\log R_2 - \log R_1) \quad (80)$$