

第十一章 静定平面結構

第一節 平面結構の理論

〔1〕 平面結構に関する假定

直線からなる形體に於いて線の端が摩擦なき鉸にて互に結合せられ且つその中軸線が總べて一平面内にある時之れを稱して平面結構と云ふ。而して斯くの如き平面結構に働く總べての外力が其の格點即ち鉸がある點のみに作用してゐるものと假定すれば此の場合に其の線部材に呼び起される應力は總べて其の軸の方向に沿ふ應力即ち直應力であつて張應力であるか壓應力であるかの二つを出づる事はないのである。何故ならば直應力以外の應力が生ずるとすれば部材はその端にある鉸の周りに廻轉する事になり結構の構造上許されないからである。普通張應力を正號とし壓應力を負號としてとり扱ふ事はすでに屢々説明した通りである。

平面結構がその平面内にある外力を上述の如く格點のみに受けた場合の解法に於いては次の如き假定をして理論を進めてゆくものである。(1) 結構部材及び結構を支へる物體の受ける弾性變形は極めて小であつて之れを無視しても差支へないものとする、即ち結構が荷重を受けた後も其の部材の軸及び接合點はその位置を變じないものとする。(2) 外力がそれ自身相互に平衡にあり、同時に又外力と内應力とで平衡を保つものとする。たとへば Fig. 236 (a) に示す如く結構に働く荷重及びそれによつて生ずる支反力即ちすべての外力はお互に平衡状態にあり、又同圖に示す如くこの結構を一つの断面 $t \sim t$ にて二分し、この断面の左側の結構部分を考へるに、その部分に働く外力(その合力を R とする)と切斷された三部材應力、即ち Fig. 236 (b) に示す R, O, D, U の四力は互に平衡を保つものとする。

一般に構造物は之れを静力學的に考へ單に平衡條件から總べての應力及び支反力を求め得るか否かにより静定 (Statically determinate) と不静定 (Statically

indeterminate) に區別し得るが、之れは其の構造物支持の方法により、又其の構造物を作るに用ひられた部材の配置によつて區別を生ずるのであつて、單に平衡條件から總べての支反力を求め得ざる時之れを特に外的不静定と稱し、總べての應力を求め得ざる時之れを特に内的不静定と稱するも、勿論構造物によつては外的にも内的にも同時に不静定となり得るのである。尚ほ外力のみが平衡に無い時又は外力と内力との間にも平衡の成立

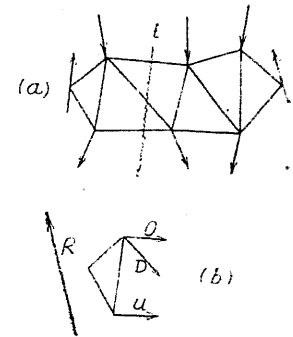


Fig. 236

しない時ありとすればこの場合此の構造物は不安静定 (Statically unstable) と云ふのであるが、この場合を除き格點が移動しない剛性構面之最も簡單なる例は Fig. 236 に示す如き三角形網であつて、其の一點に結合される一對即ち二部材宛を順次除去してゆけば最後に一個の三角形が残る事になる。この如き三角形網は内的静定であるが故に外的に静定なる場合その部材應力を求める事は比較的簡單であつて一般に三角形を以つて静定結構に對する要素 (Primary element) と見得るのである。

次に Fig. 236 に於いて垂直面内にある三角形網の上及び下を界する線を夫々上弦材及び下弦材 (Upper and lower chord) と稱し、その部材應力を各々 O 及び U を以つて表す。又兩弦を連結する線を腹材 (Web member or brace) と稱し、その内傾斜し居るものを斜材 (Diagonal) 垂直なるものを垂直材 (Vertical) と云ひ、各々部材應力を D 及び V を以つて表す。時としては O, U, D, V の區別なく順次 S_1, S_2, S_3, \dots を以つて部材應力を表す事がある。

〔2〕 部材力を求める Culmann 解法

Fig. 237 に示す如き三角形網からなる結構に於いて断面 $t \sim t$ をとり一點に交らない三部材を切るものとする時、この部材應力 O, D, U を求める方法を説明しよう。今 $t \sim t$ 断面の左側にある外力の合力を R とすれば R は前項に述べた所により O, D, U と平衡を保つべきを以つて結局この問題は第二章第一節〔10〕に

説明した如く力 R と平衡を保つべき位置の與へられた三力 O, D, U を求める問題に歸するわけである。荷重 P が Fig. 237 に示す如く總べて垂直荷重のみである如き單結構 (Simple truss) の場合には先づ荷重を垂直線 EF 上に並べ任意

の極點 O を以つて索多角形を畫き結合線 s を引

く。次

に極點 O を通じて s に平行線を引けば $EF = \sum P$ を支反力 A 及び B に分つ事を得べく、従つて $t-t$ 断面の左側にある外力の合力 $R = A - P_1 - P_2$ は Fig. 237 (b) の如くして求める事が出来る。而してこの R は $A > P_1 + P_2$

なるを以つて索多角形邊 s 及び III の交點を通じて垂直上方に向ふ事になる。斯くして R が定まつたならば R, O, D, U の内何れか二つ、例へば D と O 及び R と U の交點を直線 L を以つて結合し、先づ R を L と U の方向に分ち、更に L を D と O の方向に分つ時、茲に所要の三部材應力の大き O, D, U を知る事になるが、この場合 R, O, D, U の四力は互に平衡状態にあるべきを以つてそれらによつて形作られる力の多角形

は一定方向の矢を持つを要するのであつて之れを圖示すれば Fig. 237 (b) に示す様である。而してこの矢の方向を $t-t$ 断面にて切られた部材に移して考へるに、矢の方向が格點から遠ざかる時にはその部材に張應力を、又近づく時はその部材に壓應力を生ずるのであつて、只今の場合 U は張應力にして O 及び D は壓應力となる。

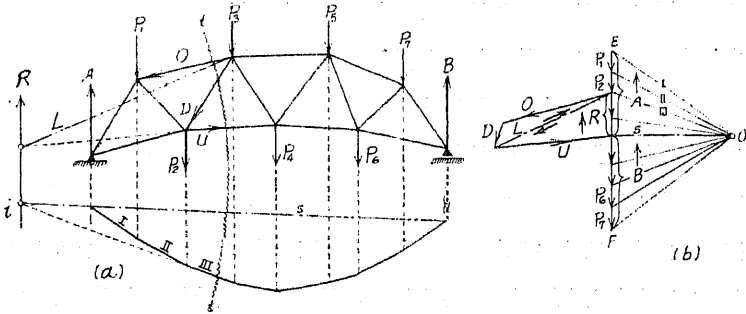


Fig. 237

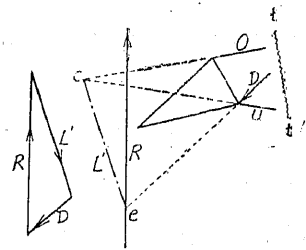


Fig. 283

尚ほ三部材應力の内唯一つ、例へば D のみを求める場合には Fig. 238 に示す様に先づ D の方向と R との交點 e を求め、 e と他の二部材の交點 e' とを直線 L' にて結ぶ。次に R を L' と D の方向に分解し、力の三角形 $R'L'D$ に於いて一定方向の矢を有する様にすれば D の大き及び方向を知ることを得る。併し乍ら以上の作圖により直接 D を求める方法は e が遠方にある時は不便であり、特に R と D が平行となれば全然不可能である。

〔3〕 部材力を求める Ritter 解法

断面 $t-t$ で切られた部材の應力 O, D, U を求めるに際し、平衡状態にある諸力のある一點に關する靜力率の和が零であると云ふ關係を利用するのであるが、この場合部材力の内何れか二つの交點を極點として断面 $t-t$ の片側にある諸力の靜力率を求めるならば極點を過ぎる部材力の力率は零なるを以つて單一つの未知部材力を含む方程式を得る事になり極めて容易に部材力を計算する事が出来る。尚ほこの解法に於いては始めに總べての部材力を張力と假定し、計算の結果部材力として負數が出れば力の方向を逆にして壓力とする事が必要である。

この解法を説明する爲に Fig. 239 の如く前項 Culmann 解法にて説明したと同一結構をとりて考へるに、先づ U を求めるには極點として O

と D との交點 a を選び a に關する U の挺率を r_a とする。然らば $t-t$ 断面の左側を考へ、その外力の力率を M_a とすれば、

$$M_a - U \cdot r_a = 0$$

$$\therefore U = + \frac{M_a}{r_a}$$

となる。此の場合一般に断面の左側を考へる時には時計針方向の力率を正號とす

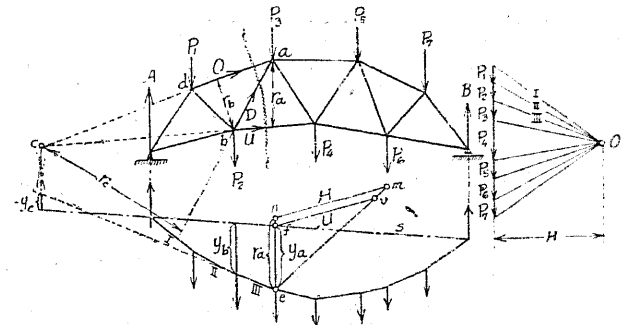


Fig. 239

る。而して Fig. 239 の如く外力に對する索多角形を畫けば明らかに $M_a = H \cdot y_a$ なるを以つて、結局 $U = +H \frac{y_a}{r_a}$ となる。茲に y_a は格點 a に相當する索多角形の縦距であつて、 U を圖式的に求めるには圖の如く $om = r_a$ とし任意の方向に $\overline{nm} = H$ を置き $fv \parallel nm$ とすれば $fv = U$ となる。

同様にして O を見出すため D と U の交點 b を極點に選び力率方程式を作れば、 $M_b + O \cdot r_b = 0 \quad \therefore O = -\frac{M_b}{r_b} = -H \frac{y_b}{r_b}$ となる。次に O

と U との交點 c を極點とすれば、 $M_c - D \cdot r_c = 0 \quad \therefore D = +\frac{M_c}{r_c}$ となる。今點 c を通じて力 R の方向を有する直線が力 A, P, P_2 に對する索多角形端邊 III 及び s の間に挟みとられる長さを y_c (符號を考へず) とすれば $M_c = -H \cdot y_c$ なるを以つて結局 $D = -H \frac{y_c}{r_c}$ となる。従つて O 及び D も U と同様に圖式的に求める事も出来る。

一般に單結構に下向きの垂直荷重が作用する時には M_a, M_b は共に正號なるを以つて上弦材は常に壓力を、下弦材は常に張力を受ける事になり、而もそれ等應力の最大値は全荷重が働く場合に生ずべき事を知る。之れに反し腹部材はその方向によつて張力又は壓力を受け得るのであつて、たとへば Fig. 240 の如く斷面 $t-t$ が切る上、下弦部材の交點 c が徑間内にあ

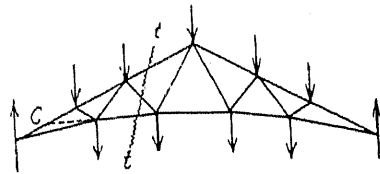


Fig. 240

れば M_c は下向き垂直荷重の場合には常に正號となるを以つて腹部材はその方向により張力となるも又壓力となるも常に同一符號をとりその最大値は弦部材の如く全荷重が働く場合に起るのである。尙ほ Fig. 238 に於いて合力 R が O と U との交點 c を通ずれば I は R と一致するを以つて斜材應力 D は零となる。

〔4〕 Cremona 應力圖 (Cremona's stress diagram)

本節〔1〕に述べた所により剛性結構の一格點 (Joint) に働く外力とその格點に集る部材の内力とは必ず平衡を保つべきものであるから圖式的には一つの閉合多角形力示圖を作り而も同一方向の矢を有せねばならない。故に茲に作用する内

力、外力の數が幾つあらうとも未知應力が二つ以下であれば圖式的に容易にこれを決定し得るものである。

例へば Fig. 241 に示す格點に於いて S_1, S_2 は既知應力であり P はこの接合點に働く外力の合成力とすれば、この既知三力 S_1, S_2, P を一つ

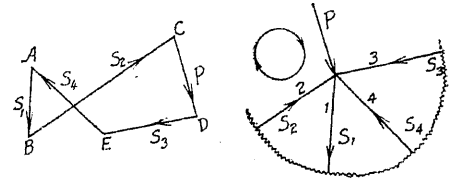


Fig. 241

の順序たとへば右廻りによつて其の方向及び量を正しく圖示して力示圖 $ABCDEA$ を得、更にその力示圖の始點 A 及び終點 D を通じて夫々部材 4 及び 3 に平行線 AE 及び DE をひく事によつて一つの閉合多角形力示圖 $ABCDEA$ を得べく、此の多角形に沿うて同じ方向の矢を付ける事によつて各應力の正負を知る。この場合 $S_3 = \overline{DE}$, $S_4 = \overline{EA}$ は共に壓力である。

以上は一つの格點に就いての説明であるが、今若し三角形網より成る一つの結構を考へれば、先づその結構に於いて二部材のみの集合せる格點から始めて上述の解法を順次進めて行けば總べての部材の應力を連続的に知り得るのであつて、此の場合力示圖を畫くに際し總べての力が夫々唯一回宛あらはれる様に順序だてる事によつて得た力示圖を稱して Cremona の應力圖と云ふ。

Fig. 242 に就いて上記 Cremona 應力圖作圖の例を示さう。圖に示す如く三角形網の格點 $1', 2', 3', \dots$ に互に平衡状態にある外力 P_1, P_2, P_3, \dots が働くものとすれば、 P_1, P_2, P_3, \dots の順序に外力を並べる時 Fig. 242 (b) に示す如き一つの閉合多角形を得べく、その隅角點を $(8'1'), (1'2'), (2'3') \dots$ と名付ける事にする。應力圖を畫くには先づ二部材の集る所の格點 $1'$ から始め、圖の如く格點 $1'$ の周圍に斷面 $t-t$ をとつて考へ應力圖 $(8'1') (1'2') a$ によつて部材力 1, 8 を定める。この場合力の方向は三角形の内側に記入する矢の通りであつて、之れを Fig. 242 (a) に移して考へれば應力 1 及び 8 は共に壓力である事を知る。次に格點 $8'$ に移るに、この點に働く外力 P_3 及び部材力 8 は既知で部材力 9, 7 が未知である。従つて壓力である部材力 8 を格點 $8'$ に向ふ方向にとつて右廻りの順序に $P_3, 8$ を並べ、點 $(7'8')$ 及び a を通じて夫々 7 及び 9 に平行線を

ひき多角形 (7'8') (8'1') ab を作る。かくして定められた部材力 7, 9 は圖に示す矢の方向より考へて矢張り共に壓力である。更に格點 2' に進むに力 9, 1, P_2 は與へられ 2, 10 は未知であるから多角形 ba (1'2') (2'3') e を作つて部材力 2 (壓力), 10 (壓力) を定める。順次斯くの如くして他の格點 7', 3', 6', 4' に対す

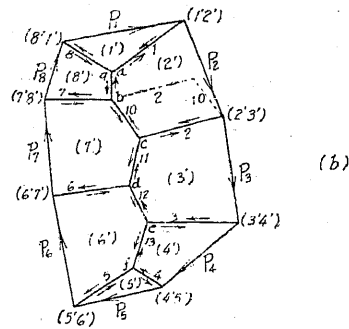
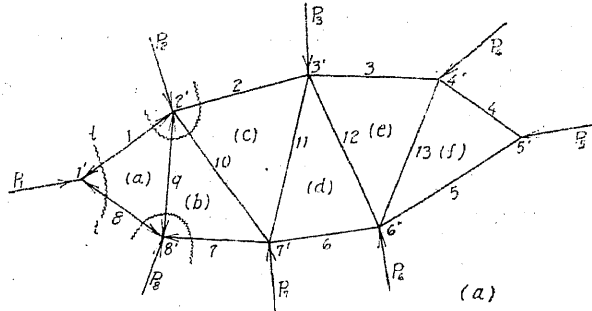


Fig. 242

る力の多角形を畫き各部材力を決定し、最後の格點 5' に進む時 5' に対する多角形は既に格點 4' 及び 6' に対するものにより自然決定される事になる。尚ほ一格點に対する力の多角形を畫くに際し、次の格點に対するものを如何に畫くべきかは注意すべき事であつて、例へば格點 2' に対する多角形は圖に於いて點線に示す様に點 b , (2'3') を通じて夫々 2, 10 に平行線をひくならば、格點 7' に対する多角形を畫くに際し力 7 に力 10 をつき以つて P_7 , 7, 10 の順序に並ぶべきであり、又格點 3' に対する多角形を作るに力 2 に P_3 をつき以つて力 11, 2, P_3 の順序に並べるを要する様な不便に出會ふ事になる。然し乍らこの不便は外力は總べて結構周囲の外側にあるものとし力の多角形を右廻りの順序にとれば避け得るのであつて自然に應力圖を正しく畫く事が出来る。

尚ほ Fig. 242 (a), (b) の間に次の關係がある。即ち Fig. 242 (a) に於い

て部材 1, 9, 8 は三角形 (a) を作るに對し Fig. 242 (b) に於いては力 1, 9, 8 は一點 a に交るべく、又一方にて部材 9, 7, 10 は三角形 (b) を作るに對し他方にては力 9, 7, 10 は一點 b に交るべく、以下同様の關係が成立する。更に Fig. 242 (a) に於いて部材 9 は點 8' と 2' を結ぶに對し Fig. 242 (b) に於いては力の多角形 (8'), (2') は邊 9 を共有すべく、又一方にて部材 10 は點 2' と 7' を結ぶに對し他方にては力の多角形 (2'), (7') は邊 10 を共有すべく、以下同様な關係が成立する。従つて Fig. 242 (b) に於ける點 a, b, c, \dots を稱して Fig. 242 (a) に於ける三角形 (a), (b), (c), \dots の極點と云ふ。斯くすれば結局 Fig. 242 (a) に於いて部材 9 が三角形 (a) 及び (b) の間にあるに對し、Fig. 242 (b) に於いては應力 9 は極點 a, b を結ぶべく、又一方にて部材 10 は三角形 (b) 及び (c) の間にあり、他方にては應力 10 は極點 b, c を結ぶべく、以下同様な關係が成立する事を知る。尚ほこの場合全腹部材の應力が零であれば極點 a, b, c, \dots は一點に合し、弦部材力は集つて力 P_1, P_2, P_3, \dots の平衡索多角形を作る事になる。

[5] Cremona 應力圖による解法の應用例

(1) 水平上弦を有する構桁

Fig. 243 に示す上路橋結構は 8 格間を有し橋の中心に對し對稱であるが、今上弦のみに等布荷重 g が働くものとすれば中間各格點に $g \cdot l = 2P$ が、又支點 A, B と一致する格點に $8P - P = 7P$ が上向きに働く事になり、而も結構及び荷重が中心に對し全然對稱となるから Cremona 應力圖は半分だけを畫けば充分となる。Fig. 243 (b) に於ける $ib'b''b''' \dots$ は外力の力示圖であつて、先づ格點

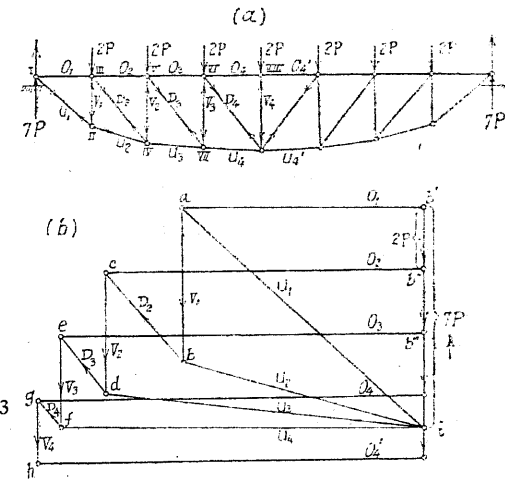


Fig. 243

I から始めて力 $ib' = 7P$ を

O_1 と U_1 に分解する為 $b'a \parallel O_1, ia \parallel U_1$ として部材力 O_1, U_1 を定めるならばその交点 a は Fig. 243 (a) に於ける三角形 I II III の極点に當る事になる。次に格点 II, III, ……に就いて閉合多角形を順次作るわけであるが結局は点 b', b'', \dots を通じて O_2, O_3, \dots に平行線をひき、又下弦格点には荷重がないから一点 i を通じて U_2, U_3, \dots に平行線をひき、更に極点 a から始めて腹部材 $V_1, D_2, V_2, D_3, V_3, D_4, V_4$ に平行な線連集 $abcde fgh$ を引く事になり、以つて圖の如く各部材力を知るわけであるが、この場合格点 VIII に於いては V_4 は $O_4, O_4', 2P$ と平衡状態にあり一つの閉合多角形を作るべきであるから最後の邊 gh は O_4 と O_4' の間にくる事は丁度圖に示す様である。尚ほ各部材力の正負は Fig. 243 (b) に於ける個々の平衡多角形に於ける矢の方向から知るわけであつて、此の場合總べての上弦部材は壓力を、下弦部材は張力を受けるべく、又部材力 V 及び D に関しては線連集 $abcd, \dots$ に於いて相連続する方面即 $\vec{ab}, \vec{bc}, \vec{cd}, \dots$ を Fig. 243 (a) に移し、下弦格点の周りの断面を考へて應力の符號を決すればよいのであつて此の場合垂直材は壓力を、斜材は張力を受ける事になる。

(2) 水平下弦を有する構桁

Fig. 244 に示す構桁の下弦のみに荷重が働くものとし前問題と同様に格点荷重 $2P$, 支反力 $7P$ とする。然らば先づ $\vec{vi} = 7P$ とし $ia \parallel O_1, b'a \parallel U_1$ として第一極点 a を定める。次に下弦第一格点に對し $2P = \vec{b'v'}$, $U_1 = \vec{b'a}$, $V = \vec{ab}$, $U_2 = \vec{bb'}$ として一つの閉合多角形を畫き、以下同様にして順次各格点に就いて閉合多角形を作るわけであるが、結局は ib' 線上に $2P$ の間隔をおいて下弦に平行線をひき、又点 i から上弦 O_2, O_3, O_4, O_4' に平行線をひき、更に腹部材に對しては $V_1, D_2, V_2, D_3, V_3, D_4, V_4$ に平行に線連集 $abcdefgh$ を引く事になる。

斯くすれば丁度圖に示す如く各部材力を得るわけであつて、腹部材に對する應力の符號は a より始めて圖の如く順次矢を附し下弦格点の周りの断面を考へて決定すればよいのであつて、結局上弦及び D_3 は壓力にして、下弦及び $V_1, D_2, V_2, V_3, D_4, V_4$ は張力となる。

(3) 小屋組 (Roof truss)

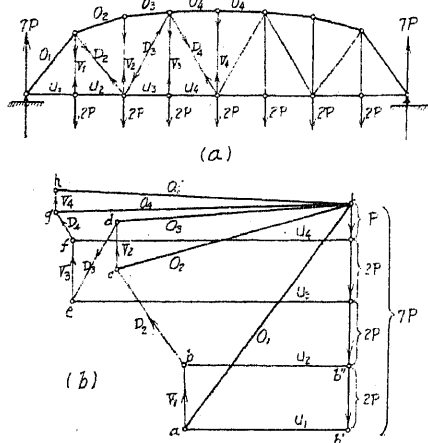


Fig. 244

Fig. 245 (a) に示す小屋組は b にて固定鉸、 a にて部材 aD により支へられてゐるのであるが、圖の如く D に鉸を有する場合には支反力 A は部材 aD の方向をとるを以つて右支点 B に於ける反力は荷重の合力 $12P$ と部材 aD の交点 e を通らねばならない。従つて支反力 A, B の方向を知るを以つて Fig. 245

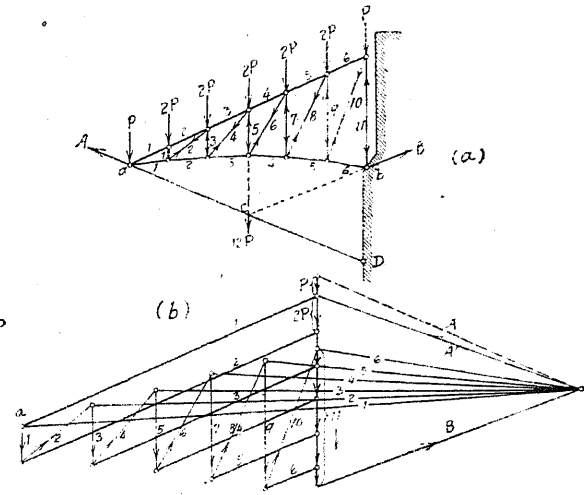


Fig. 245

(b) に示す如くして支反力 A 及び B を定めたる後、 A を格点 a に働く荷重 P と組合せて合力 A' を定め、之を上弦材 1 と下弦材 1 の方向に分解しその部材力を求める。以下順次各格点について閉合多角形を求めるわけであるが、結局は荷重の働かない下弦部材力は一から出で、又荷重を有する上弦部材に對するものは荷重力示圖を $2P$ の間隔にて切り、更に垂直材及び斜材に對するものは極点 a から出發した一つの線連集を作る事になる。圖に示す矢の方向を下弦格点に移して考へると腹部材力の方向を與へるのであつて、結局上弦材及び垂直材は壓力を、下弦材及び斜材は張力を受ける事になる。

(4) ベルジウム小屋組

(Belgium roof truss)

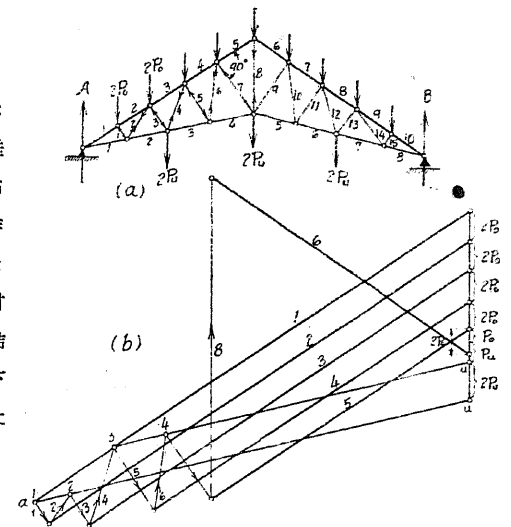


Fig. 246

Fig. 246 (a) に示す小屋組に於いて上弦の各格点に夫々荷重 $2P$, 下弦の三格点に夫々

荷重 $2P_n$ の働いた場合を考へ、Cremona の應力圖を畫けば可度 Fig. 246 (b) の如くなる。勿論左右對稱であるから左半分に對するものを畫けば充分であつて、右半分の部材力は夫々對應する左半分の部材力に相等しい。此の場合圖より明らかなる如く上弦部材及び腹部材中 1, 3, 5, 7 は壓力を受け他は全部張力を受けてゐる。

次に屋根に強き風壓の作用する場合を考へ、Fig. 247 (a) に示す如く風の方向は水平に對し角 β を爲し、又上弦が垂直線となす角を α とすれば風の方向が屋根面への垂直線と爲す角は $\alpha - \beta$ となる。従つて V を以つて風速を表す時は屋根面に直角なる風速は $V \cos(\alpha - \beta)$ にて表されるが故に屋根面に直角に働く風壓は全體として $\Sigma W = 0.122 V^2 \cos^2(\alpha - \beta) F$ となる (Hütte des Ingenieurs Taschenbuch I 参照)。今 $V = 40 \text{ m/sec}$ $\beta = 10^\circ$ とし、且つ屋根面積 F を m^2 にて表せば $\Sigma W = 195.2 F \cos^2(\alpha - 10^\circ)$ となる。従つて Fig. 247 (a) に於ける格點荷重は $2W = \frac{1}{5} \Sigma W$ にて與へられる。今

可動支點は Fig. 247 に示す如く左側にあるものとし、まづ左側から風が吹くものとすれば、右側にある腹部材は應力を生じない事になる。何故ならば Fig. 248 に示す様に結構の右側半分にある一格間を通して断面 $t-t$ を引き右支點に關する力率方程式を作れば、断面の右側にある結構部分に働く外力は支反力 B のみであるから、 $D \cdot r = 0 \therefore D = 0$ となるを以つてである。茲に r は D の B 點に關する矩率を表してゐる。この意味からして Fig. 247 (a) に於いては應力が零なる部材を圖に示すことを省略する事にした

のである。尚ほ支反力 A は垂直であつて ΣW と點 c に於いて交るべく、支反力 B はこの c 點を通る事は圖に示す通りである。かくして支反力の方向が定まつたから Fig. 247 (b) の如くして支反力 A, B の大きさを決定し、更に第一格點に於ける外力 A 及び W を合成して A' とし、以下順次各格點に就いて平衡多

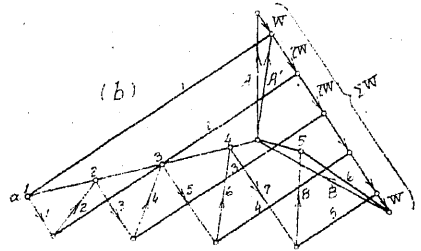
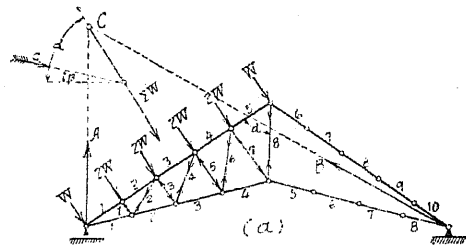


Fig. 247

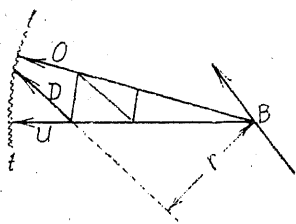


Fig. 248

角形を作れば最後に圖の如く Cremona の應力圖を完成し得て、各部材力を定める事が出来る。此の場合上弦及び下弦右半分は壓力を受け、下弦左半分は張力を受ける事になる。尚ほ腹部材 1, 3, 5, 7 は壓力を、他の 2, 4, 6, 8 は張力を受ける事を知る。

風が右側から吹く場合は Fig. 249 に示す如くであつて、支反力 B は ΣW と A との交點 c を通り、左側半分にある腹部材力は零となる。而して上弦は壓力を、下弦は張力を受け、又腹部材中 9, 11, 13, 15 は壓力を、他は張力を受ける。

實際設計に際しては Fig. 247 (b) と Fig. 249 (b) に於ける部材力を比較して Fig. 246 (b) に示す垂直荷重による應力を増加せしめる値をとりて之れを加へ合し、以つて各部材の寸法を定めるわけであるが、普通の大きさである小屋組結構に對しては垂直荷重に風壓の垂直分力を加算したものを外力と考へ、部材力を求めておけば充分である。

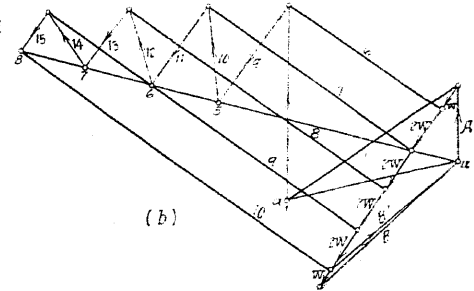
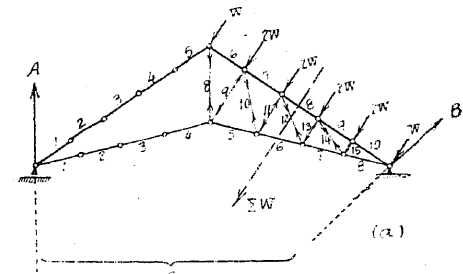


Fig. 249

第二節 格點外に働く荷重の影響

(1) 概 説

Fig. 250 (a) に示す結構の一部材 ab に任意の外力が働き、その合力を R とする時、 R が格點 a

及び b に及ぼす分力 R_1 及び R_2 は R 上の任意の一點 c を取り三角形 abc を平衡多角形と

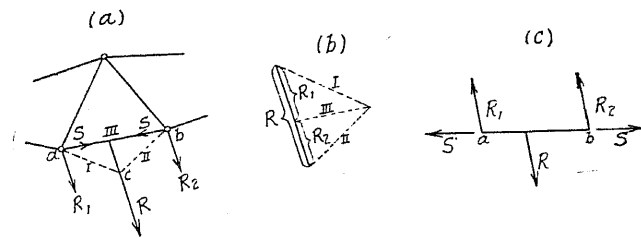


Fig. 250

考へこれに相應して Fig. 250 (b) に示す如き力示圖を畫けば容易に見出す事が出来る。同様にして他の格點に傳へられる分力 R_1, R_2 を求めてゆけば、結局外力が格點のみに働く結構として各部材に働く軸應力 S を前節に述べた方法によりたやすく見出す事が出来る。斯くして部材力 S を見出せば Fig. 250 (c) に示す如く一部材に働く總べての力を知る事が出来るを以つて、是等から部材上任意の一断面に作用する彎曲力率 M , 軸力 N , 剪力 Q を求め得べく、従つて又應力を定める事も出来る。

今一例として Fig. 251 に示す場合を説明しよう。一部材 ab 上に平行に荷重 P_1, P_2, P_3, \dots が ab と α の傾斜をなして働くものとし、又部材力 S を壓力と假定しよう。然らば部材上一断面 c に於ける彎曲力率は荷重 P に直角であつて且つその支點が a 及び b に對應する單桁 $\alpha'b'$ に於いて c 點に對應する c' 點に於ける彎曲力率に等しいのであつて、例へば c 點が P_2 と P_3 の間にあれば

$$M_c = \frac{\sum P b}{l} x - P_1 e_1 - P_2 e_2 = R_1 x - P_1 e_1 - P_2 e_2$$

となる。而して鐮軸に直角なる断面 c に働く軸力は

$$N_c = -S - (R_1 - P_1 - P_2) \cos \alpha$$

となる。従つて最遠纖維に於ける應力は

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M e_1}{I}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M e_2}{I}$$

として求める事が出来る。尚ほ結構各部材の自重の影響は以上の如き方法によつて求める事が出来るが、普通の設計に際しては部材自重は格點に集中せらるゝものとして部材力 S を計算するのみで充分である。

[2] 應用例

Fig. 250 (a) に於いて部材 ab が剛性である以上、 ab が直線であると又結構であることに係らず格點 a, b に傳へられる力 R_1, R_2, S は同一であるが故に、前項に述べた理論は其の儘 Fig. 252 (a) に示す如く個々の部材が結構面からなる結構に應用することが出来る。

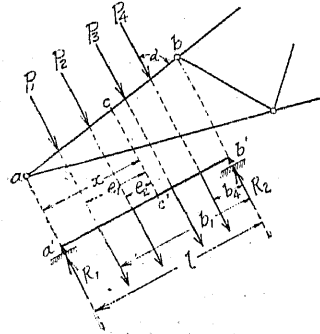


Fig. 251

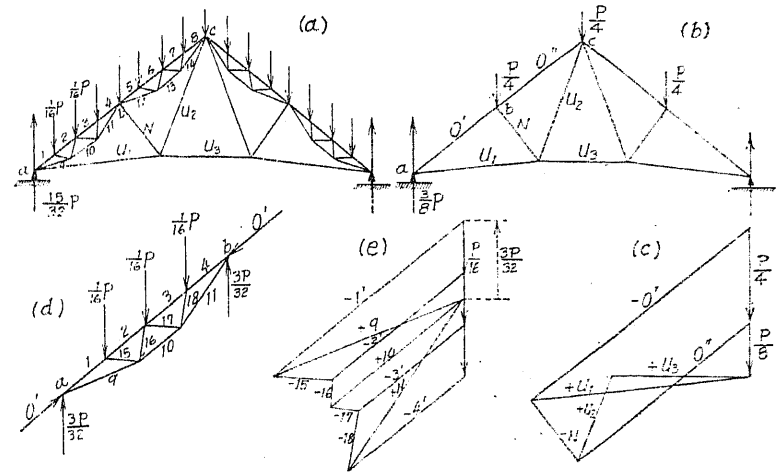


Fig. 252

る。圖に示す結構は 4 結構面と 7 部材からなり、同圖 (b) は其の主部材のみを示したものである。今上弦に働く全荷重を P とすれば上弦各格點に働く荷重は $\frac{1}{16} P$ であり、又 Fig. 252 (b) に示す主構の格點荷重は $\frac{1}{4} P$ となる。此の主構に對する Cremona の力示圖を示せば Fig. 252 (c) の様である。

副構面 ab のみを取り出して考へるとそれに働く力は Fig. 252 (d) の如く上弦格點荷重 $\frac{1}{16} P$ 及び a, b 支點に働く反力 $\frac{3}{32} P$ 及び主結構部材としての壓力 O' であつて、之れに對する Cremona 力示圖を示せば Fig. 252 (e) の様である。唯この圖には O' の影響が附加してないから上弦部材力 $1', 2', 3', 4'$ には O' を加ふべく、その他の副部材力はその儘でよい。尚ほ副構 bc にも同様であつて唯上弦部材力に對し Fig. 252 (e) で求めた應力に O'' を加へよければよい。

此の場合主構及び副構の應力圖を同時に描く事も出来るのであつて Fig. 253 に就いてその實例を示せば次の如し。今一方の屋根面に直角に働く風壓を W とすれば格點荷重は $\frac{1}{8} W$ 或は $\frac{1}{16} W$ であつて支反力 A 及び B は直に圖の如くして求める事が出来る。茲に左支點 a は水平に滑動するものとし従つて支反力 A は垂直と考へてある。先づ構面 ab を直線と考へ格點 b に $4 \cdot \frac{1}{8} W$, 格點 a 及び c に $2 \cdot \frac{1}{8} W$ が働くものとすれば、 $mf = 2 \cdot \frac{1}{8} W$ とし $fg \parallel ab$ とする事により格點 a に對する平衡多角形 $dmfgd$ を得るを以つて $gd = U_1$ となる。次に構面 bc を直線と考へ、 $\bar{f}i = 4 \cdot \frac{1}{8} W$, $gt \parallel bm$, $it \parallel bc$ として

格点 b に対する平衡多角形 $gfug$ より直線 bm に生ずる應力 $N = \overline{lg}$ を定める。斯くして後は順次未知の二部材以上を含まない格点に就いて平衡多角形を作つてゆけばよい。Fig. 253 に於いて點線に示す部材の應力は零であり、又反力 B を U_5 と弦材 nc の方向に分てば弦材應力を容易に求める事が出来る。

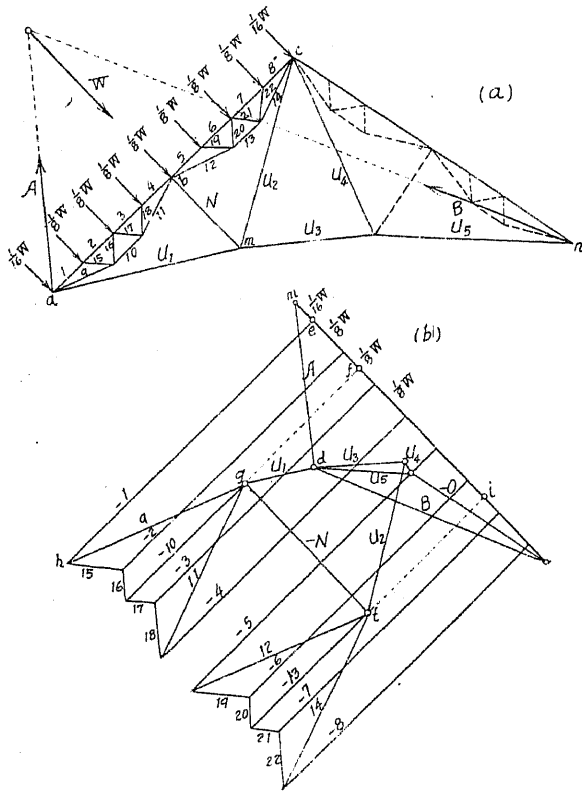


Fig. 253

第三節

Polonceau 結構

[1] Polonceau 結構

Polonceau 結構とは Fig. 254 に示す様に二つの構面 I 及び II からなり、之れを一つの鉸 G

及び両端が鉸にて連結された一部材 ab を以つて結ばれたものである。而して構面 I には圖の場合 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 の他に部材 ab の部材力 S 及び鉸 G に於ける力 D が働き、構面 II には P_6, P_7

の他に部材力 S 及び鉸 G に於ける力 D が働く。今構面 I に働く荷重 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 の合力を R とすれば構面 I が平衡状態にある爲には力 D

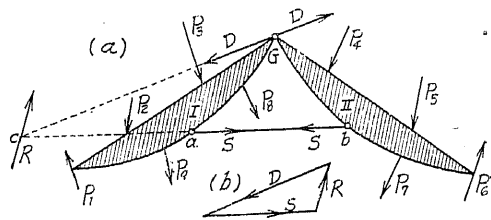


Fig. 254

は R と S の交点 e を通るべきを以つて直に D の方向を知る事が出来る。而して R 及び S の大きさは Fig. 254 (b) に示す様に力の三角形を畫けば直に知り得るを以つて、結局かくして構面 I に働く總べての外力を知る事が出来る。構面 II に対しても同様であつて、若し構面が單に三角形網からなる時には容易に各部材力を見出し得る事になる。即ち兩構面に對し Cremona の應力圖を畫けばよいのであるが、構面 I に対しては外力として $P_1, P_2, P_3, D, P_4, S, P_5$ の順序に、又構面 II に対しては D, P_6, P_7, S の順序に並べる事が必要である。次に例題を以つてこの解法を説明しよう。

例題 [1] (Fig. 255)

結構の上弦格点の總べてに荷重 P が働くものとし、先づ部材 11 の應力 S_{11} を求めよう。Ritter の解法を用ひ點 d を通して一つの断面 $1-1$ を引き點 d に關する力率方程式を作れば、

$$A \cdot 4\lambda - P(3\lambda + 2\lambda + \lambda) - S_{11} \cdot dr = 0, \quad \text{茲に} \quad A = \frac{7P}{2}$$

$$\therefore S_{11} \cdot dr = 2P \cdot 4\lambda$$

となる。今 Fig. 255 (a) に於いて左支點を通る垂直線上に $R = 2P$ とおけば點 d に關する R の力率は $2P \cdot 4\lambda$ となる。従つて鉸軸 11 と R とを點 g にて交らしめ直線 dg を引き、Fig. 255 (b) に於いて $R = 2P = \overline{GE}$ を夫々 gd, rg に平行な二分力に分ち $\overline{GD}, \overline{DE}$ とすれば $\overline{DE} = S_{11}$ となる。而して S_{11} の符號は平衡多角形 $EGDE$ の矢が R の方向と一致する様にすれば決るのであつてこの場合は張力となつてゐる。かくして構面 I に働く外力を S_{11}, A, P, P, \dots の順序に並べて力示圖 $DEHKED$ を作つてからは各格点に於いて順次 Cremona の應力圖を容易に畫く事が出来る。Fig. 255 に於いては結構、荷重共に中心線に關して對稱であるから桁の左半分に對するもののみを示したのであつて、(a) 圖にある正負の符號は部材力の性質を表してゐる。

尚ほ Fig. 255 (b) に於いて點 D を定めるには他に更に二方法がある。今 Cremona の應力圖を畫くに際し、先づ格点 f から始めて部材力 1, 2 を定め、次に 3, 4 及び 5, 6 の順序に定めてゆき、更に次の格点に進まんとすれば a, b 何れの格点にも三つの未知部材が在り困つてしまふ。それで兎に角格点 b に進み三つの未知部材の内何れが一つ例へば 7 を先づ任意の長さ $\overline{A_1S}$ と假定し、格点 b に對する平衡多角形 $A_1SLL_1B_1A_1$ を畫く。次に夫々格点 c 及び e に對する平衡多角形 $B_1KCB_1B_1$ 及び $A_1B_1C_1D_1A_1$ を畫く。更に第二の假定として部材力 $7 = \overline{A_2S}$ として以上の作圖を繰返し格点 e に對する平衡多角形

$A_2B_2C_2D_2A_2$ を畫く。而して格點 e に対する實際の平衡多角形上の一線 D は點 B を通り部材 11 に平行にひかれた線上に横たはるべきを以つて、この平行線と D_1, D_2 を結ぶ直線との交點は實際の D を與へる事になる。何故ならば平衡多角形 $ABCDA$ の角點 A, B, C は部材 7 の變化に應じて夫々直線 7, 9, 13 上を動くを以つて點 D も亦それに應じて一直線上を動くからであつて、この事實は次の幾何學的定理によつて明らかである。即ち n 角點を有する多角形の $(n-1)$ 個の角點が夫々直線上を移動し且つその各邊が常に一點を通

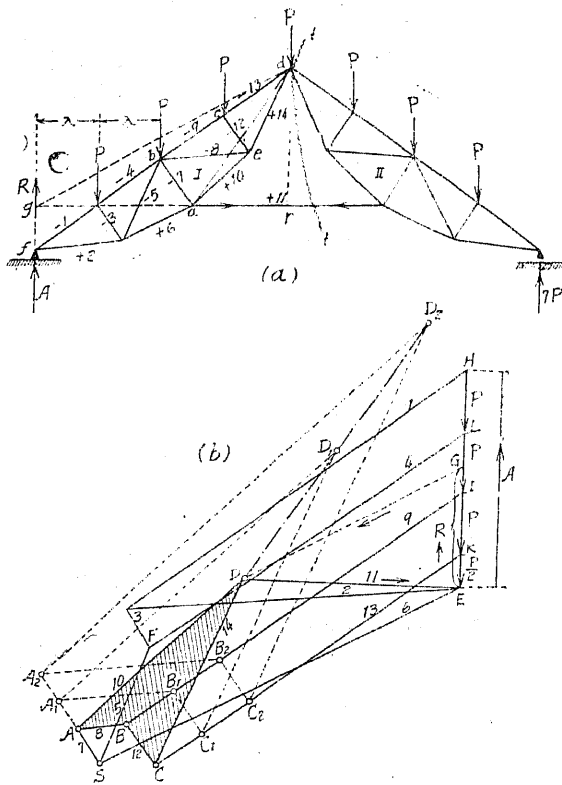


Fig. 255

ずる直線に夫々平行ならば第 n 番目の角點も亦一直線上を移動するものである。次に D を定める第三の方法は Fig. 255 (a) に於いて線連集 $abcd$ を力示圖とし點 e をその極點と考へる。然らば部材 10, 8, 12, 14 は極線となり、Fig. 255 (b) に於ける多角形 $A_1B_1C_1D_1A_1$ 及び $A_2B_2C_2D_2A_2$ は共にそれに屬する索多角形と看做す事が出来る。従つて直線 D_1D_2 は力 $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}$ の合力 \overline{ad} に平行である事を要する。従つて二つの索多角形の内何れか一つ例へば $A_1B_1C_1D_1A_1$ を畫きて D_1 を通して ad に平行線をひき直線 ED との交點 D を求めると所要の點となる。

例題〔2〕 (Fig 256)

Fig. 256 に示すものも亦 Polonceau 構桁であつて先づ桿 11 の應力を上述の方法で見出し、次に構面 agh に働く力を 11, P', A, P_1, P_2, \dots の順序に並べて力示圖を作り、この構面に対する Cremona の應力圖を畫き各部材の應力を決定する。

尙ほ次に述べる第二法は弦の形状及び荷重の方向の如何に關せず應用出来るのであつて、先づ Cremona の應力圖から部材力 1, 2, 3, 4, 5, 6 を決定してから格點 f に進む(この際格點 g に進むも同一の結果を得る)。然らばこの點にて三つの未知部材 7, 8, 9 に出會ふを以つて、その内の一つ例へば 7 に對し任意の二つの値 $\overline{6A'}, \overline{6A''}$ を假定する。そしてその各々に對し格點 e に就いては夫々平衡多角形 $D'A', B'C'D'$ 及び $D''A'', B''C''D''$ を、又格點 e に就いては夫々平衡多角形 $D'C'E'F', D'$ 及び $D''C''E''F''$ を畫く。而してこの際格點 e 及び e' に対する眞實の平衡多角形 $DABCDA$ 及び $DCEFEF$ は次の二つの性質を有するを以つて之れを利用して Fig. 256 (b) に於いて影線を施せる

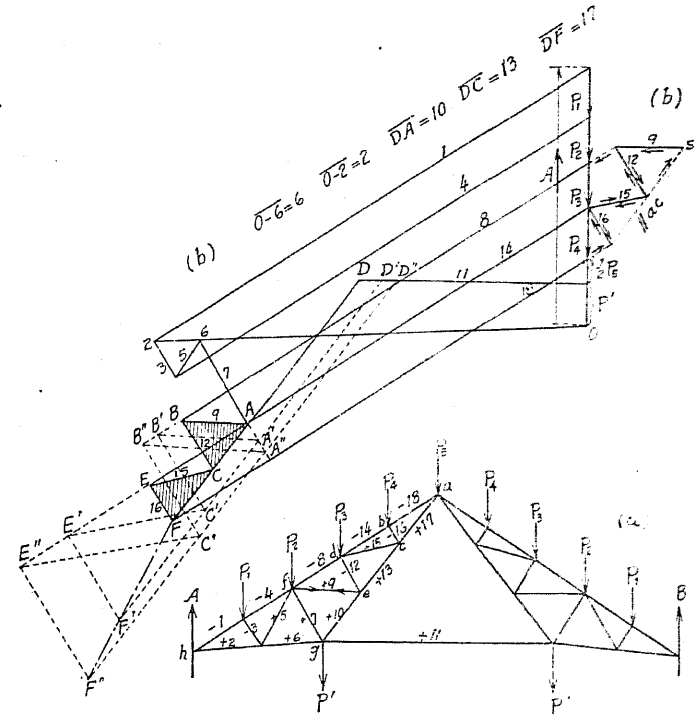


Fig. 256

如くこれ等の多角形を決定する事が出来る。即ち、
 (1) Fig. 256 (b) に於いて多角形 $DABCDA$ の角點 A, B, D は夫々直線 7, 8, 11 の上にあるべきを以つて C 點も亦一直線 $C'C''$ 上に存在する。
 (2) 多角形 $DCEFEF$ の角點 D, C, E は夫々既に與へられた直線 11, $C'C''$, 14 の上にあるべきを以つて F は直線 $F'F''$ の上に存在する。然るに又格點 b の周りの平衡を考へると F は直線 18 の上に存在すべきを以つて $F'F''$ と 18 との交點より F が決定し、従つて順次 D, C, A, B, E が決定し部材力 7, 8, 9, \dots , 18 を知る事が出来る。
 尙ほ Fig. 256 (a) に示す如く點 a, b, d, f 及び a, c, e, g が夫々一直線上にあれば例へ

は點 b に働く力 14 及び 18 は同一方向であるからその合力 (18-14) を以つて置きかへると部材力 16 を決定する事が出来る。Fig. 257 に於いては應力 14 及び 18 の符號は未知であるから先づ張力と假定して作圖を行つたのである。同様にして格點 c, d, e に就いて作圖すれば夫々部材力 15, 12, 9 を決定する事を得べく (Fig. 256 (a))。最後に格點 f に進めば二つの未知部材 7 及び 8 が存するのみであるからこれらの二部材力を求め得べく、以下順次各格點に就いて平衡多角形を畫けば總べての部材力を知る事が出来る。

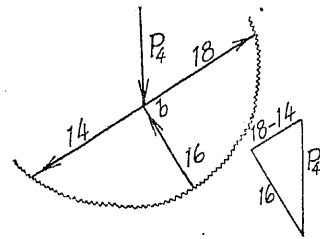


Fig. 257

〔2〕 Polonceau 結構の擴張

Fig. 254 に於いて鉸 G の代りに Fig. 258 (a) に示す様に二部材 ed 及び ef を用ひると構面 I にはその合力が R である所の外力の他に三つの部材力 S_1, S_2, S_3 とが働くわけであつて、三部材が一點に交らざる限りその値を Culmann 解法で求める事が出来る (Fig. 258 (b))。今 S_2 と S_3 との合力を D とすれば力 D は部材 ed 及び ef の交點 G' と R 及び部材 ab の交點 g を通るべく、Föppl 氏はこの G' を稱して想像鉸と名付けてゐる。而して 4 點 c, d, e, f が一點に集れば實際の鉸となるわけであつて、部材 ab, cd, ef 上に荷重が働く場合にはそれ等の分力は鉸點 a, b, c, d, e, f に傳へられる。

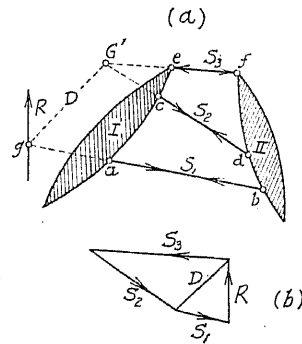


Fig. 258

尙ほ部材の代りに剛性構面を以つて二つの構面 I, II を結合する事も出来るのであつて、その一例を示せば Fig. 259 の様である。即ち構面 I 及び II を構面 III 及び鉸 G_2 を以つて連結し、全體として一つの剛性構を得たわけであつて構面 III に働く荷重は鉸 G_1 及び G_3 に傳へられる。

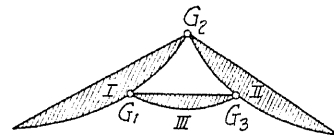


Fig. 259

Fig. 260 に示す構造は構面 V, VI を部材 5 及び鉸 G_1 を以つて、構面 III, VI を部材 4 及び鉸 G_2 を以つて結合し夫々剛性構とし、更に (V, VI, 5), (III, VI, 4) を三部材 1, 2, 3 を以つて連結し、その上に構面 I, II を乗せたものであつて、之れを Fig. 259 に比較すれば構面 III の代りに (V, VI, 5; III, VI, 4; 1, 2, 3) を用ひたに過ぎないから支反力が静力學的に求め得る時は Fig. 260 に示す如き構造に對しても Cremona の應力圖により各部材力を定める事が出来る。

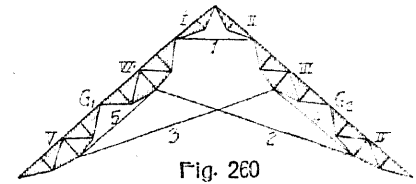


Fig. 260

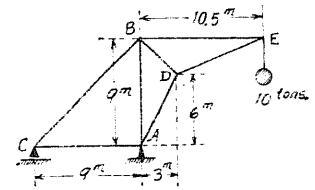
練習問題 12

(1) 圖に示す如き起重機の各部材力を Cremona 應力圖を畫いて求め、計算にて得た結果と比較せよ。又支點 C に働かすべき對重 (Balance Weight) は幾許となるか。

(答) $\overline{BE} = -25.0 t, \quad \overline{DE} = -26.9 t, \quad \overline{BD} = -21.08 t,$
 $\overline{DA} = 26.08 t, \quad \overline{BA} = -0.24 t, \quad \overline{BC} = -13.12 t.$

支點 c に於ける對重 = 15.14 t

(2) 圖の如き頂構 (Head truss) を有する Polonceau 構に對する Cremona 應力圖を畫け。



(3) 圖の如き結構に於ける部材力及び反力を求めよ。

(答) $\overline{12} = -1.0 t, \quad \overline{23} = 0, \quad \overline{14} = -2 t,$
 $\overline{24} = +0.7 t, \quad \overline{26} = 0.7 t, \quad \overline{36} = 0,$
 $\overline{43} = +0.5 t, \quad \overline{56} = +0.5 t, \quad \overline{47} = -1.5 t,$
 $\overline{57} = +0.7 t, \quad \overline{59} = -0.7 t, \quad \overline{69} = -0.5 t,$
 $\overline{78} = -0.5 t, \quad \overline{89} = +0.5 t, \quad \overline{710} = -1 t,$
 $\overline{810} = +0.7 t, \quad \overline{811} = -0.7 t, \quad \overline{911} = -1.0 t$
 $\overline{1011} = +0.5 t;$

水平反力 (11) = 0, (10) = 1.0 t
 垂直反力 (11) = 1.5 t, (10) = 0.5 t

