

## 第九章 合成應力

### 第一節 直應力の合成 (Composition of Normal Stress)

#### 〔1〕概 説

一つの弾性體に互に平衡状態にある外力が作用する時、弾性體は弾性變形を生じ、その内部に呼び起される内力が外力と平衡を保つに至るものであるが、此の際その變形は小であつて外力の働點の位置及びその方向に何等の影響を及ぼさないものと假定する、即ち總べての力の平衡状態を考へる時に力は恰も非弾性體に作用するが如く假定する。今 Fig. 152 に示す直錐に互に平衡である多數の外力  $P$  が作用するものとし、錐を錐軸  $AB$  に直角なる断面  $F$  によつて二つの部分に分ち其の一例へば左の部分に働く力  $P_1, P_2, P_3, \dots$  を合成して合力  $R$  を得たとする。更にこの  $R$  を断面に直角な力  $N$  と平行な力  $Q$  とに分つ時、 $N$  を断面  $F$  への直力 (Normal or longitudinal force) と稱し、左の部分  $AF$  を固定と考へられた右の部分  $BF$  からひき離さうとする場合に正號を附す。又  $Q$  を断面  $F$  に働く剪力 (Shearing force) と稱し、その符號に就いては後に桁に關する問題を解く時正負を附する事があるが、正負を何れにとるも應力の性質に差がないのであるから茲には暫く符號をつけない

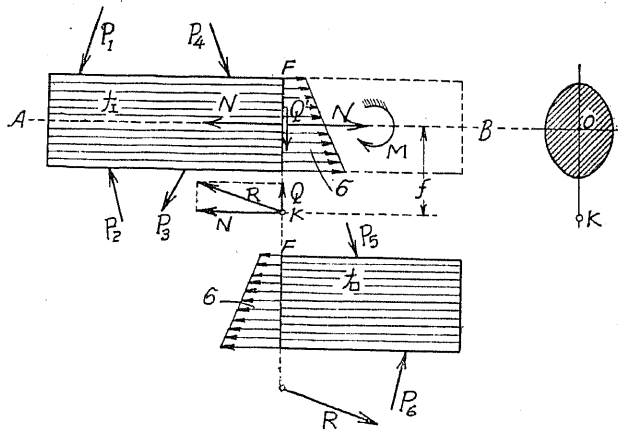


Fig. 152

い事にする。而して錐の断面  $F$  には分布された内力が呼び起されるわけであつて、上に求めた左側の錐部分に働く外力  $R$  は断面  $F$  の左側に於ける内力と平衡を保つべきものである。この断面  $F$  の微分面  $dF$  に働く内力を断面に直角に働く  $\sigma dF$  とその面上に働く  $\tau dF$  に分つ時、 $\sigma$  は直應力であり  $\tau$  は剪應力である事はこれまで屢々説明した通りであつて、 $\sigma$  に對しては普通張應力を正號とし壓應力を負號とする。尚断面  $F$  の右側に就いても同様の關係が成立することは勿論であるが、要するに断面  $F$  の一方の側に於いて内力と外力が平衡を保つと云ふ事より次の關係が成立する。

(1) 直力  $N$  に等しく且つ方向反對の二つの力  $N$  を錐軸に作用せしめて考へる事により、始めの直力  $N$  は錐軸に作用する一つの力  $N$  と彎曲力率  $N \cdot f = M$  とによつて置きかへる事が出来る。従つて直應力  $\sigma dF$  の全断面に對する和、即ち  $\int \sigma dF$  は  $K$  點に働く力  $N$ 、即ちこの軸力  $N$  と彎曲力率  $M$  との合力と平衡をたもつ。

(2)  $\tau dF$  の全断面に對する和、即ち  $Q' = \int \tau dF$  は  $Q$  と大き等しく反對の方向に向ふ。

#### 〔2〕直應力 $\sigma$ の一般的計算法

Fig. 153 に於いて直力  $N$  が錐軸に直角なる面上任意の點  $K$  に働くものとし  $K$  點の任意の角を含む座標軸  $\xi, \eta$  に關する座標を  $(\xi_k, \eta_k)$  とする。然らば第一項に於いて述べた平衡條件から次の關係式を得る。

$$\begin{aligned} (1) \quad N &= \int \sigma dF \\ (2) \quad N\xi_k &= \int \xi \sigma dF \\ (3) \quad N\eta_k &= \int \eta \sigma dF \end{aligned}$$

所が断面は變形後も平面を保つものとするれば、 $\sigma$  を座標  $\xi$  及び  $\eta$  の一次函數と置く事を得るが故に

$$(4) \quad \sigma = a + b\xi + c\eta$$

とする事を得る。茲に  $a, b, c$  は考へてゐる断面に就いては常數を表す。

今断面上總べての點  $(\xi, \eta)$  に生ずる直應力  $\sigma$  を断面に直角である縦距として置けばその端點は一平面をなし、彈性體断面と所謂零線 (Zero line)  $nm$  に於いて交る事になる。この零線に平行である線に沿ふ微分に起る直應力は相等しく、又断面中最遠距離にある纖維に生ずる應力はその断面中最大のものとなる事は容易にわかるわけである。

以上の如く材料強弱學上から、應力と變形が比例する間、即ち Hooke の法則が成立する場合に就いては、始め平面と考へられた断面  $F$  は桁の彎曲後も亦平面を保つと假定し、又彎曲の際横變形を無視すると云ふ事が出来るのであつて、この假定から導いた公式が今日鋼構造物の設計に一般に用ひられてゐるのである。尙木材、石、混凝土等に對しても簡單の爲この假定がそのまま應用せられてゐる。

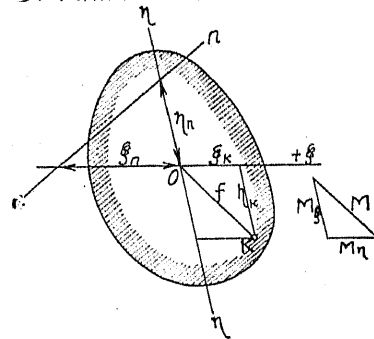


Fig. 153

さて、三つの平衡方程式 (1), (2), (3) に (4) の關係を代入すれば

$$N = \int (a + b\xi + c\eta) dF$$

$$N\xi_k = \int (a + b\xi + c\eta) \xi dF$$

$$N\eta_k = \int (a + b\xi + c\eta) \eta dF$$

となるが、定數  $a, b, c$  を簡單に表す爲座標軸を断面の重心を通る共扼軸に選ぶならば、 $\int \xi dF = 0, \int \eta dF = 0, \int \xi \eta dF = 0$  となるを以つて上の三式は次の如くなる。

$$N = a \int dF = aF$$

$$N\xi_k = b \int \xi^2 dF = bI_\eta$$

$$N\eta_k = c \int \eta^2 dF = cI_\xi$$

これから求め得た  $a, b, c$  の値を公式 (4) に挿入すれば  $\sigma$  に対する公式と

して次の式を得。

$$(5) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\xi_k \xi}{I_\eta} + \frac{N\eta_k \eta}{I_\xi}$$

零線  $nm$  の方程式は (5) に於いて  $\sigma = 0$  として

$$(6) \quad \frac{1}{F} + \frac{\xi_k \xi}{I_\eta} + \frac{\eta_k \eta}{I_\xi} = 0$$

となる。この零線  $nm$  が座標軸を切る點  $\xi_n, \eta_n$  は (6) より

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_n = -\frac{I_\eta}{F\xi_k} = -\frac{i_\eta^2}{\xi_k} \\ \eta_n = -\frac{I_\xi}{F\eta_k} = -\frac{i_\xi^2}{\eta_k} \end{cases}$$

となり、 $N$  の大きさに無關係である。

力の働點  $K$  と断面の重心  $O$  とを結ぶ線を力線 (Force line) と云ふ。この力線の傾斜は  $\eta_k : \xi_k$  なる比を以つて與へる事を得べく、又零線の傾斜は  $\eta_n : \xi_n$  なる比で表す事が出来る。而して公式 (7) からこの兩者の間に次の關係が成立する。

$$(8) \quad \frac{\eta_n}{\xi_n} \cdot \frac{\eta_k}{\xi_k} = \frac{I_\xi}{I_\eta} = \frac{i_\xi^2}{i_\eta^2}$$

尚ほ上の公式 (7) 及び (8) から一つの働點  $K(\xi_k, \eta_k)$  に對し夫々一つの零線が對應し又一つの力線  $OK$  に對して一つの零線の方が對應する事を知るのであつて、特に働點  $K$  が重心と一致すれば零線は無限大の距離に、又  $K$  が重心から無限大の距離にあれば零線は重心にある事になる。更に公式 (5), (6) に於いて座標が常に積  $\xi_k \xi$  及び  $\eta_k \eta$  の形にて表れてくるが故にその因子  $\xi_k, \eta_k$  は夫々  $\xi, \eta$  と交換しても公式には變りはない事を知る。従つて公式 (6) に於いて  $\xi_k$  及び  $\eta_k$  を一つの方程式 (6) により與へられる直線  $n'n'$  上に動く働點  $K$  の座標とすれば、 $\xi$  及び  $\eta$  は總べての  $K$  點に相當する零線  $nm$  が通過する定點  $K'$  の座標である。この事から次の法則を得る。

(a) 零線  $nm$  が交點  $K'$  を過ぎる線集であれば、働點  $K$  は點  $K'$  に相當する零線上に働く。

(b) 働點  $K$  が直線  $n'n'$  上に動けば、それに相當する零線  $nm$  は零線  $n'n'$  に

相當する働點  $K'$  を通過する線集である。

尚ほ公式 (5) から次の法則を得る。

點  $(\xi_k, \eta_k)$  に働く直力  $N$  が點  $(\xi, \eta)$  に生ぜしめる直應力  $\sigma$  は點  $(\xi, \eta)$  に働く直力  $N$  が點  $(\xi_k, \eta_k)$  に生ぜしめる直應力に相等しい。

この法則は通例次の如き簡單なる記號を用ひて表される。

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

茲に  $\sigma$  の第二添字は直力の働く點を、又第一添字は  $\sigma$  の生ずる點を示す。

### 〔3〕彎曲力率 $M$ のみにより生ずる直應力

Fig. 153 に於いて直力  $N$  とその働點  $K'$  の断面重心よりの距離  $f$  との積をその断面に生ずる彎曲力率 (或は單に力率)  $M$  と云ふ。即ち

$$(9) \quad M = N \cdot f$$

而して  $N \cdot \eta_k = M_\xi$  及び  $N \cdot \xi_k = M_\eta$  を夫々力率  $M$  の軸  $\xi$  及び  $\eta$  に關する分力率と云ふ。然らば公式 (5) は次の如くかく事を得る。

$$(10) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_\eta}{I_\eta} \xi + \frac{M_\xi}{I_\xi} \eta$$

公式 (10) に於いて、 $N = 0$  即ち總べての外力が銀軸に直角に作用すれば断面には單に力率  $M$  のみが作用する事になり、次の式を得る。

$$(11) \quad \sigma = \frac{M_\eta}{I_\eta} \xi + \frac{M_\xi}{I_\xi} \eta$$

此の前に説明した如く無限大の距離に無限小の力、即ち力率  $M$  が作用した場合に當るのであつて、零線  $nm$  は断面の重心を通り、次の關係を滿す様な座標  $\eta_n$  及び  $\xi_n$  を夫々軸上に切る直線に平行である。

$$(12) \quad \frac{\eta_n}{\xi_n} = \frac{i_\xi^2}{i_\eta^2} \cdot \frac{M_\eta}{M_\xi}$$

何故ならば公式 (11) から點  $\xi = 0$ ,  $\eta_n$  に對し、

$$\sigma = + \frac{M_\xi}{I_\xi} \eta_n = + \frac{M_\xi}{F i_\xi^2} \eta_n$$

となり、又點  $\xi_n$ ,  $\eta = 0$  に對し、 $\sigma = + \frac{M_\eta}{I_\eta} \xi_n = + \frac{M_\eta}{F i_\eta^2} \xi_n$

となるを以つて同一量の  $\sigma$  に對し、次の關係を得る。

$$\eta_n = + \frac{F i_\xi^2}{M_\xi} \sigma$$

$$\xi_n = + \frac{F i_\eta^2}{M_\eta} \sigma$$

$$\therefore \frac{\eta_n}{\xi_n} = \frac{i_\xi^2}{i_\eta^2} \cdot \frac{M_\eta}{M_\xi}$$

從つて (12) の關係を滿す  $\eta_n$ ,  $\xi_n$  を夫々軸上に切りとる直線は應力の同一なる點の直線であるが故にたしかに零線も又この直線に平行であらねばならない。尚ほ (12) 式を滿す  $\eta_n$ ,  $\xi_n$  の内一つは任意に選らび得る事は勿論である。

### 〔4〕直角座標軸を用ひた場合の直應力 $\sigma$ の計算法

〔2〕及び〔3〕に於ける諸公式は重心を通る任意の共軛座標軸に關するものであつたから、重心を通る唯一の共軛直角座標軸である所の主軸に關してもその儘あてはまるものである。若し断面が對稱軸を有すればその對稱軸は主軸の一つである事はすでに述べた通りである。從つて任意の點に於ける直應力  $\sigma$  を見出すには各種断面の主軸の位置及び主慣性能率をポケットブック其の他から見出し直ちに公式 (10) に適用すればよい事になる。

次に他の直角座標軸を用ひた場合を説明しよう。Fig. 154 に於いて力線  $OK$  を  $\eta$  軸に選ひ之れと共軛關係にある軸の方向を  $\xi$  とすれば、軸  $\xi, \eta$  は一つの共軛重心軸であるから、公式 (10) に於いて  $\xi_k = 0$ ,  $M_\eta = 0$ ,  $M_\xi = M$  として

$$(13) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \eta_k \eta}{I_\xi} = \frac{N}{F} + \frac{M_\xi \eta}{I_\xi}$$

となり、又公式 (7) から

$$(14) \quad \begin{cases} \eta_n = - \frac{I_\xi}{F \eta_k} = - \frac{i_\xi^2}{\eta_k} \\ \xi_n = 0 \end{cases}$$

を得る。從つて零線  $nm$  は  $\xi$  軸に平行であつて  $\eta$  軸と重心より  $\eta_n$  の距離で交る事を知る。即ち零線  $nm$  は力線  $OK$  と共軛關係にある軸  $\xi$  に平行である事を知る。今この力線  $OK$  と共軛關係にある  $\xi$  軸を  $u$  軸とし、これに直角な軸を  $U$  軸とし、且つ  $\xi, \eta$  軸の間の角を  $\alpha$  とすれば、二組の座標軸の間に次

の關係が成立する。

$$\eta = \frac{v}{\sin \alpha}, \quad \eta_k = \frac{v_k}{\sin \alpha}$$

$$\therefore I_{\xi} = \int \eta^2 dF = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \int v^2 dF = \frac{I_u}{\sin^2 \alpha}$$

$$\therefore \frac{\eta \eta_k}{I_{\xi}} = \frac{v v_k}{\sin^2 \alpha} \div \frac{I_u}{\sin^2 \alpha} = \frac{v v_k}{I_u}$$

従つて直應力  $\sigma$  を直角座標軸  $u, v$  に関する  $I_u, M_u$  を以つて表せば公式 (13) の代りに次式を得る。

$$(15) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N v_k v}{I_u} = \frac{N}{F} + \frac{M_u v}{I_u}$$

茲に  $M_u = M \sin \alpha$  にして  $M = Nj$  の  $u$  軸に関する分力率である。尚ほ零線の位置を求める爲に公式 (15) に於いて  $\sigma = 0$  とすれば

$$(16) \quad v_n = -\frac{I_u}{F v_k} = -\frac{i_n^2}{v_k}$$

要するに直角座標軸  $u, v$  (但し  $u$  軸は力線  $OK$  と共軌關係にあるものとす) に関して應用し得べき公式 (15), (16) は共軌座標軸  $\eta, \xi$  に関して見出した公式 (13) 及び (14) と同じ形をとる事を知る。

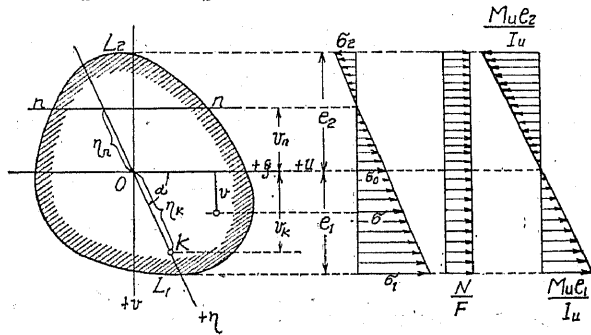


Fig. 154.

次に距離  $v$  に相當する點の直應力  $\sigma$  をその點の縦距として立てると Fig. 154 の如き應力分布圖を得るのであつて、この分布圖は二つの部分  $\frac{N}{F}$  及び  $\frac{M_u v}{I_u}$  からなりたつてゐる事も容易に知り得べく、又任意の二點に於ける應力、たとへば最遠纖維  $L_1$  及び  $L_2$  に於ける應力  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  を見出せば直ちに描く事が出来る、而して  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  は公式 (15) に於いて夫々  $v = +e_1, -e_2$  として

$$(17) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{N v_k e_1}{I_u} = \frac{N}{F} + \frac{M_u e_1}{I_u} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{N v_k e_2}{I_u} = \frac{N}{F} - \frac{M_u e_2}{I_u} \end{cases}$$

となり、 $v = 0$  に於ける應力  $\sigma_0$  は

$$(18) \quad \sigma_0 = \frac{N}{F}$$

となる。

更に斷面力率を計算する便宜上、重心を通る力線  $OK$  と共軌ならざる直角座標軸  $x, y$  を選んだ場合を説明しよう。Fig. 155 に於いて力線  $OK$  が  $x$  軸となす角を  $\alpha_k$  とし、力線  $OK$  と共軌關係にあり且つ零線  $m$  と平行である所の  $u$  軸が  $x$  軸となす角を  $\alpha_n$  とすれば第二章第六節 [4] により  $\alpha_n$  と  $\alpha_k$  との間には次の關係が成立する。

$$(19) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_n &= \frac{I_x - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{I_{xy} - I_y \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{I_x \cot \alpha_k - I_{xy}}{I_{xy} \cot \alpha_k - I_y} \\ \therefore \cot \alpha_k &= \frac{\cos \alpha_k}{\sin \alpha_k} = \frac{I_{xy} \cos \alpha_n - I_y \sin \alpha_n}{I_x \cos \alpha_n - I_{xy} \sin \alpha_n} \end{aligned}$$

従つて  $I_u$  として次の式を得る。

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha_n + I_y \sin^2 \alpha_n - 2I_{xy} \sin \alpha_n \cos \alpha_n \\ &= \cos \alpha_n (I_x \cos \alpha_n - I_{xy} \sin \alpha_n) - \sin \alpha_n (I_{xy} \cos \alpha_n - I_y \sin \alpha_n) \\ &= (I_x \cos \alpha_n - I_{xy} \sin \alpha_n) \frac{\cos \alpha_n \sin \alpha_k - \sin \alpha_n \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k} \\ &= (I_x \cos \alpha_n - I_{xy} \sin \alpha_n) \frac{\sin(\alpha_k - \alpha_n)}{\sin \alpha_k} \end{aligned}$$

この値を公式 (15) に挿入すれば直應力  $\sigma$  を得るわけであつて

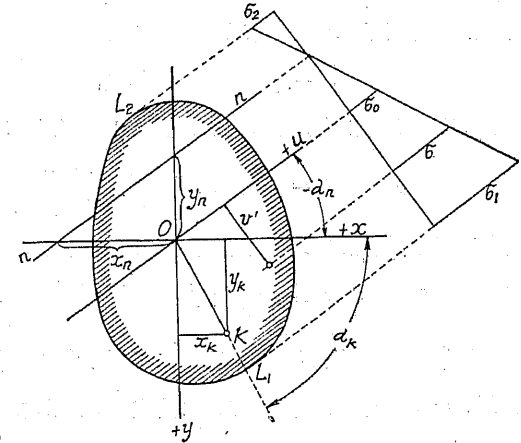


Fig. 155

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_u v}{I_u} = \frac{N}{F} + \frac{M \sin(\alpha_k - \alpha_n) v}{I_u}$$

となる。更に  $M_x$  を以つて  $x$  軸に関する分力率とすれば

$$(20) \quad M_x = M \sin \alpha_k$$

$$\therefore (21) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x v}{I_x \cos \alpha_n - I_{xy} \sin \alpha_n}$$

尚ほ  $v$  を座標  $(x, y)$  を以つて示せば

$$v = y \cos \alpha_n - x \sin \alpha_n$$

なるを以つて、點  $(x, y)$  に於ける應力  $\sigma$  として

$$(22) \quad \sigma = \frac{N}{F} + M_x \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{I_x - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}$$

を得る。全く同様にして次式を得る事が出来る。

$$(23) \quad \sigma = \frac{N}{F} + M_y \frac{x - y \operatorname{cot} \alpha_n}{I_y - I_{xy} \operatorname{cot} \alpha_n}$$

この公式 (22) 及び (23) は共に必要である。何故ならば若し  $\alpha_n = 0$  にして  $M_x = 0$  ならば零線の方向は公式 (19) から

$$(24) \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{I_x}{I_{xy}}$$

となり、この値を公式 (22) に代入すれば第二項は  $\frac{0}{0}$  となり、不定となるを以つて公式 (23) を用ひることが必要となる。之れに反し  $M_y = 0$  の場合は、又  $\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{I_{xy}}{I_y}$  となり、公式 (23) を用ひる事が出来ないからである。

公式 (22) に於いて  $\sigma = 0$ ,  $M_x = Ny_k$  とおけば零線  $mn$  を表す方程式として次式を得る。即ち

$$(25) \quad 0 = \frac{1}{F} + y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{I_x - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}$$

又公式 (23) を用ひると同一零線  $mn$  に對し

$$(26) \quad 0 = \frac{1}{F} + x_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{I_y - I_{xy} \operatorname{cot} \alpha_n}$$

を得る。而してこの零線が  $x$  及び  $y$  軸上に切りとる長さ  $x_n, y_n$  は夫々

$$(27) \quad x_n = -\frac{I_y - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{F x_k}$$

$$(28) \quad y_n = -\frac{I_x - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{F y_k}$$

となり、その内一つを知れば他は次の関係から求める事が出来る。

$$\frac{y_n}{x_n} = -\operatorname{tg} \alpha_n$$

〔5〕 圖式解法

Eig. 156 に於いて断面力率  $I_x, I_y, I_{xy}$  を見出すに便利なる様に座標軸  $x, y$  をとつたものとする。この場合合力線  $OK$  に屬する零線の方向を第二章第六節〔3〕に示す Mohr 解法によつて定める方法を説明しよう。

直角座標軸  $x, y$  に関して、 $2r = I_p = I_x + I_y$  とし、軸上に  $\overline{OC} = 2r$ ,  $\overline{OE} = I_x$ ,  $\overline{EC} = I_y$  なる如く  $E, C$  點を定め、且つ點  $E$  から  $y$  軸に直角に  $\overline{ET} = I_{xy}$  なる如く點  $T$  を定めたものとする。此の際  $I_{xy}$  が負號なれば  $x$  軸の負號の方向に  $ET$  をと

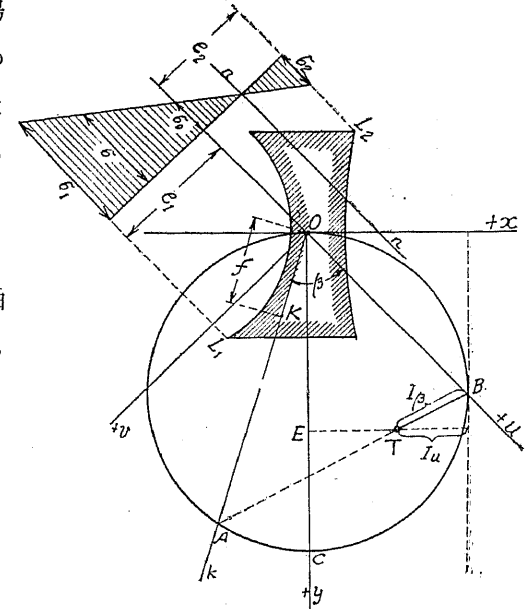


Fig. 156

る事が必要である。今力線  $OKk$  が  $OC$  を直径とする圓と  $A$  點に於いて交るものとするれば Mohr 解法に於いて説明した様に  $OKk$  と共軛關係にある  $u$ -軸は弦  $ATB$  に依つて定める事が出来、而も點  $B$  に於ける圓への切線から點  $T$  までの距離は  $I_u$  を表すものである。従つて

$$\overline{TB} = \frac{I_u}{\sin \beta} = I_\beta$$

となる。尚ほ  $M_u = M \sin \beta$ ,  $M = Nf$  であるから公式 (15) に従つて次式を得る。

$$(29) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \sin \beta v}{I_u} = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{I_\beta}$$

又最遠繊維に於ける應力は

$$(30) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Mc_1}{I_\beta} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Mc_2}{I_\beta} \end{cases}$$

となり、 $u$  軸上に於いては

$$\sigma_0 = \frac{N}{F}$$

となる。而して應力圖は前述の如く任意の二つの應力  $\sigma$  の値、たとへば  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  を知れば描き得るのであつて丁度 Fig. 156 に示す様である。

尚ほ最遠繊維  $L_1$  及び  $L_2$  に於ける應力は次の形にて表す事も出来る。

$$(31) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_1} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_2} \end{cases}$$

茲に  $W_1$  及び  $W_2$  は力率  $M$  に無関係にして力線  $OK$  の方向によつて定まる値であつて、この  $W_1$  及び  $W_2$  を稱して力線に屬する断面率 (Section modulus) と云ふ。應力の計算に公式 (17) を用ひると

$$W_1 = \frac{I_u}{e_1 \sin \beta}, \quad W_2 = \frac{I_u}{e_2 \sin \beta}$$

とし、又 Fig. 156 に示す圖式解法を用ひると

$$W_1 = \frac{I_\beta}{e_1}, \quad W_2 = \frac{I_\beta}{e_2}$$

としなければならない。尚ほこの場合力線  $OK$  が Fig. 157

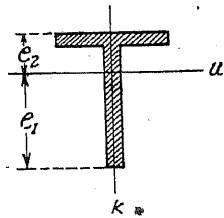


Fig. 157

に示す様に主軸と一致すれば  $W_1$  及び  $W_2$  は各々次の如くなる。

$$(32) \quad W_1 = \frac{I_u}{e_1}, \quad W_2 = \frac{I_u}{e_2}$$

[4] 例題

(1). Fig. 158(a) に示す山形鋼に於いてその長足に平行な重心軸に單に力率  $M = 10,000$  kg. cm のみが作用する時隅角點  $A, B$  に於ける應力を求む。

第二章第五節 [8] に於ける例題に於いて求めた様にこの断面は

$$I_x = 151.25 \delta^4, \quad I_y = 41.25 \delta^4, \quad I_{xy} = 45 \delta^4$$

を有し、且つ力線  $OK$  は  $y$  軸と一致するから  $\alpha_k = 90^\circ$

であるが故に、公式 (19) から

$$tg \alpha_n = \frac{I_{xy}}{I_x} = \frac{45}{41.25}$$

$= 1.09$  を得べく、又最遠點  $A, B$  の座標は夫々

$$(y_A = +3.5\delta, \quad x_A = -1.5\delta);$$

$$(y_B = -6.5\delta, \quad x_B = -0.5\delta)$$

である。

公式 (22) に従つて

$$\sigma = M_x \frac{y - x tg \alpha_n}{I_x - I_{xy} tg \alpha_n}$$

に於いて  $M_x = M = 10,000$  kg. cm とすれば  $\delta = 1$  cm の時

$$\sigma_A = \frac{M}{\delta^3} \frac{3.5 + 1.5 \cdot 1.09}{151.25 - 45 \cdot 1.09} = + \frac{M}{19.96\delta^3} = +503 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{M}{\delta^3} \frac{-6.5 + 0.5 \cdot 1.09}{151.25 - 45 \cdot 1.09} = - \frac{M}{17.26\delta^3} = -582 \text{ kg/cm}^2$$

となる。

(2). Fig. 158 (b) に示す様に力率  $M = 100,000$  kg. cm が働く力線  $OK$  が  $x$  軸と  $30^\circ$  の角をなす場合の應力分布圖を求む。

$\alpha_k = 30^\circ$ ,  $tg \alpha_k = 0.577$  なるを以つて

$$tg \alpha_n = \frac{I_x - I_{xy} tg \alpha_k}{I_{xy} - I_y tg \alpha_k} = \frac{125.285}{21.2} = 5.91$$

零線  $mn$  から最遠距離にある二點  $A, C$  の座標は夫々 ( $y_A = +3.5\delta, \quad x_A = -1.5\delta$ ); ( $y_C = +2.5\delta, \quad x_C = 4.5\delta$ ) であり、又  $M_x = M \sin \alpha_k = 0.5M$  であるから (1) の場合と同様にして  $\delta = 1$  cm の時

$$\sigma_A = 0.5 \frac{M}{\delta^3} \frac{3.5 + 1.5 \cdot 5.91}{151.25 - 45 \cdot 5.91} = - \frac{M}{18.6\delta^3} = -538 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C = 0.5 \frac{M}{\delta^3} \frac{2.5 - 4.5 \cdot 5.91}{151.25 - 45 \cdot 5.91} = + \frac{M}{9.5\delta^3} = +1,053 \text{ kg/cm}^2$$

となる。従つて應力分布圖は Fig. 158 (b) の様である。

(3). Fig. 159 に示す如き柱断面が點  $K$  の位置に直應力  $M = 60,000$  kg を受けた場合零線  $mn$  の位置及び最大應力を求む。

先づ断面を二邊と一致する軸  $x', y'$  に関して表し、且つ三つの矩形部分を分けて考ふ、然

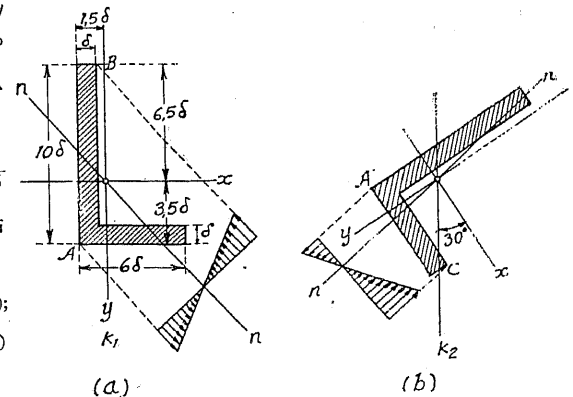


Fig. 158

らば各矩形部分の大きさ  $b \times h$  及び重心の  $y'$  軸からの距離  $e$  は夫々次の如くなる。

- $b_1 = 0.30 \text{ m}$ ,
- $b_2 = 0.60 \text{ m}$ ,
- $b_3 = 0.30 \text{ m}$ ;
- $h_1 = 1.00 \text{ m}$ ,
- $h_2 = 0.60 \text{ m}$ ,
- $h_3 = 0.30 \text{ m}$ ;
- $e_1 = 0.15 \text{ m}$ ,
- $e_2 = 0.60 \text{ m}$ ,
- $e_3 = 1.05 \text{ m}$ ;

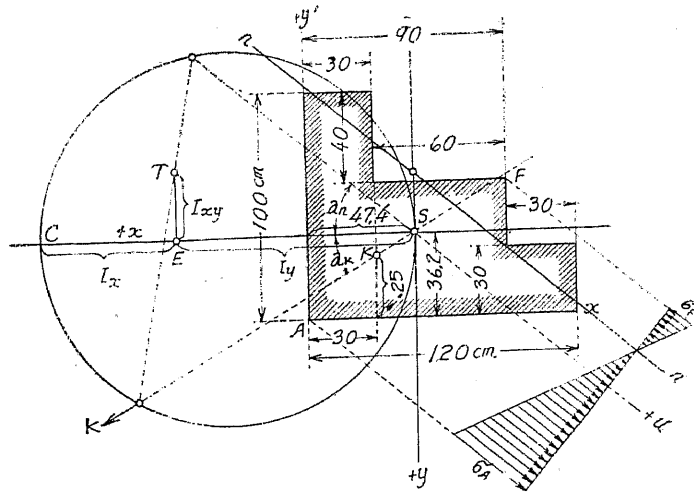


Fig. 159

従つて

$$F = \Sigma bh = 0.7500 \text{ m}^2$$

$$S'_x = \frac{1}{2} \Sigma bh^2 = 0.2715 \text{ m}^3$$

$$I_{x'} = \frac{1}{3} \Sigma bh^3 = 0.1459 \text{ m}^4$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2} \Sigma b h^2 e = 0.101475 \text{ m}^4$$

全く同様にして、断面を他の方向の矩形に分ちて次の値を求める事を得。

$$S'_y = 0.3555 \text{ m}^3$$

$$I_{y'} = 0.2493 \text{ m}^4$$

従つて全断面の重心  $S$  の座標は

$$y'_s = \frac{S'_x}{F} = \frac{0.2715}{0.75} = 0.362 \text{ m}$$

$$x'_s = \frac{S'_y}{F} = \frac{0.3555}{0.75} = 0.474 \text{ m}$$

となり、又重心軸に関する断面力率は次の如くなる。

$$I_x = I_{x'} - F y_s'^2 = I_{x'} - S'_x y_s' = 0.1459 - 0.2715 \cdot 0.362 = 0.047617 \text{ m}^4$$

$$I_y = I_{y'} - F x_s'^2 = I_{y'} - S'_y x_s' = 0.2493 - 0.3555 \cdot 0.474 = 0.080793 \text{ m}^4$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} - F y_s' x_s' = 0.101475 - 0.75 \cdot 0.362 \cdot 0.474 = -0.027216 \text{ m}^4$$

尚ほ軸点  $K$  の位置は  $y'_k = 0.25 \text{ m}$  及び  $x'_k = 0.30 \text{ m}$  なるを以つて重心軸に関しては

$$\begin{cases} y_k = 0.362 - 0.250 = 0.112 \text{ m} \\ x_k = 0.474 - 0.300 = 0.174 \text{ m} \end{cases}$$

となる。

$$\therefore \text{tg } \alpha_k = \frac{y_k}{x_k} = \frac{0.112}{0.174} = 0.644$$

$$\therefore \text{tg } \alpha_n = \frac{I_x - I_{xy} \text{tg } \alpha_k}{I_{xy} - I_y \text{tg } \alpha_k} = \frac{0.047617 + 0.027216 \cdot 0.644}{-0.027216 - 0.080793 \cdot 0.644} = \frac{0.065144}{-0.079247} = -0.822$$

従つて零線  $mn$  が軸  $x, y$  上に切りとる長さを求めると

$$y_n = -\frac{I_x - I_{xy} \text{tg } \alpha_n}{F y_k} = -\frac{0.047617 - 0.027216 \cdot 0.822}{0.75 \cdot 0.112} = -\frac{0.0252454}{0.0840} = -0.301 \text{ m}$$

$$x_n = -\frac{y_n}{\text{tg } \alpha_n} = -\frac{0.301}{0.822} = -0.366 \text{ m}$$

尚ほ零線  $mn$  の方向は Fig. 156 に於いて示した如き圖式法によつても求め得るのであつて、一般に計算によつて求めた結果を圖式法にて檢する事が望ましい (Fig. 159 参照)。

この場合  $A$  點に最大壓應力を、又  $F$  點に最大張應力を生ずるのであつて、其の値は公式 (22) により夫々次の如くなる。

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N}{F} + N y_k \frac{y - x \text{tg } \alpha_n}{I_x - I_{xy} \text{tg } \alpha_n} = \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{y - x \text{tg } \alpha_n}{y_n} \right) \\ &= \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{0.362 + 0.474 \cdot 0.822}{0.301} \right) = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{0.752}{0.301} \right) = 3.498 \frac{N}{F} \\ &= \frac{-3.498 \cdot 60,000}{7,500} = -27.98 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_F &= \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{0.238 + 0.426 \cdot 0.822}{0.301} \right) = \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{0.588}{0.301} \right) = -0.953 \frac{N}{F} \\ &= \frac{0.953 \cdot 60,000}{7,500} = 7.62 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

かくしてこの柱には張應力を生ずる事を知つたが普通混凝土に對しても  $8 \text{ kg/cm}^2$  以下の張應力なれば許容されるのである。

(4). Fig. 160 に示す如き梯形橋脚断面が其の隅角點  $A$  に壓力  $1t$  を受ける場合、断面に於ける應力分布圖を求む。

今断面の寸法として、兩平行邊の長さを夫々  $a_1 = 3.0 \text{ m}$ ,  $a_2 = 2.0 \text{ m}$  とし、中線の長さ  $l = 5.0 \text{ m}$ , 高さ  $h = 4.0 \text{ m}$  とすれば、斜重心軸  $\xi, \eta$  に関して次の値を得る (第二章第五節〔9〕〔6〕参照)。

$$F = \frac{h(a_1 + a_2)}{2} = \frac{5(3+2)}{2} = 12.5 \text{ m}^2$$

$$I_\xi = \frac{ht^2}{36} \left( a_1 + a_2 + \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right) = \frac{4 \cdot 5^2}{36} \left( 3 + 2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{3+2} \right) = 20.556 \text{ m}^4$$

$$I_\eta = \frac{F(a_1^2 + a_2^2)}{24} = \frac{12.5(3^2 + 2^2)}{24} = 6.771 \text{ m}^4, \quad I_{\xi\eta} = 0$$

荷重力の働点 A の座標は

$$\xi_k = \frac{1}{2}a_1 = 1.5 \text{ m}$$

$$\eta_k = l \frac{a_1 + 2a_2}{3(a_1 + a_2)} = 5 \frac{3 + 2 \cdot 2}{3(3 + 2)} = 2.33 \text{ m}$$

なるを以つて零線  $nm$  が軸上に切りとる長さは公式 (7) に依り夫々次の如くなる。

$$\xi_n = -\frac{I_\eta}{F\xi_k} = -\frac{6.771}{12.5 \cdot 1.5} = -0.361 \text{ m}$$

$$\eta_n = -\frac{I_\xi}{F\eta_k} = -\frac{20.556}{12.5 \cdot 2.33} = -0.706 \text{ m}$$

又任意の点  $(\xi, \eta)$  に於ける應力は公式 (5), 即ち

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{F} + \frac{N\xi_k\xi}{I_\eta} + \frac{N\eta_k\eta}{I_\xi} \\ &= \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{\xi}{\xi_n} - \frac{\eta}{\eta_n} \right) \end{aligned}$$

に依つて求め得るを以つて、例へば  $\eta = 0, \xi = -10\xi_n = 3.61 \text{ m}$  なる點に於ける應力は

$$\sigma = \frac{11N}{F} = -\frac{11 \cdot 1}{12.5} = -0.088 \text{ kg/cm}^2$$

となる。荷重本節〔2〕に説明した公式  $\sigma_{B,A} = \sigma_{A,B}$  に依つて橋脚断面上任意の點 B に働く荷重による隅角點 A の應力を計算する事が出来る。今圖に於いて  $\sigma'$  を一點 B に相當する應力圖  $gg'$  の縦距とすれば點 A に働く壓力  $N=1$  は點 B に應力  $\sigma'$  を生ぜしめるわけであるが、逆に點 B に作用する壓力  $N=1$  は點 A に應力  $\sigma'$  を生ぜしめる事を知るのであつて、例へば橋脚断面上に働く壓力  $N_1, N_2, N_3, \dots$

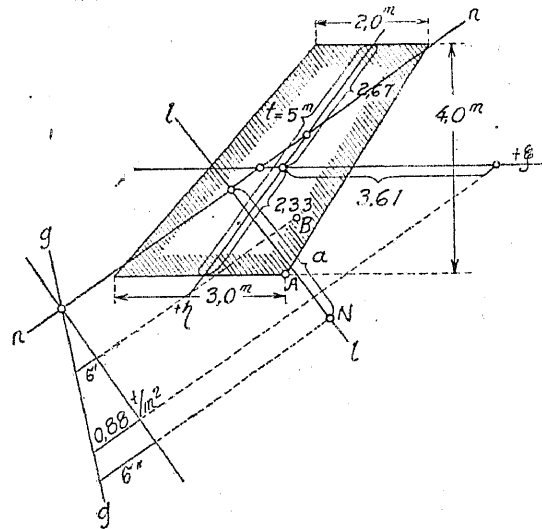


Fig. 160

……による A 點の應力は  $\sigma = \sum N\sigma'$  に依つて與へられる。従つて線  $gg'$  を點 A に生ず

る應力  $\sigma$  の影響線 (Influence line) と云ふ。尚断面に直角に直線  $ll'$  にて切る平面上にある力率  $M$  の影響を求めるには  $M$  を任意の挺率  $a$  を有する偶力  $N \cdot a$  を以つて置き換へ、断面に直角で反對に向ふ二つの  $N$  の内一つが直線  $ll'$  と  $nm$  との交點にあるものとすれば  $\sigma_A$  として次式を得る。

$$\sigma_A = N \cdot \sigma'' = \frac{M\sigma''}{a} \quad (\text{Fig. 160 参照}).$$

## 第二節 断面の核心 (Central Kern of the Cross Section)

### 〔1〕概 説

一般に零線  $nm$  が断面中に落ちる時は  $nm$  によつて分たれた二つの断面部分に於ける應力は反對の符號をとる事になるのであつて、特に働点を含む側にては直力  $N$  が正或は負なるかに従つて夫々張應力或は壓應力を受ける事になる。而して働点  $K$  が断面の重心  $S$  に近ければそれだけ零線は  $S$  から遠ざかるのであつて特に断面の邊周に零線が切つる場合には、断面上總べての點の應力  $\sigma$  は直力  $N$  と同一符號をとるのである。Fig. 161 に示すやうに断面に切する總ての直線  $nm$  を零線と考へる時、それに相當する働点  $K$  は相集つて断面上に一定區劃を作る事になり、この區劃内におちる直力はその断面上總べての點に於いて  $N$  と同一符號を有する應力を生ぜしめる事になる。断面の此の部分に稱して**核心 (Central kern)** と云ひ、断面の切線にて包まれる曲線を断面の**包圍曲線**と云ふ。而してこの核心は石、混凝土の如く單に壓應力のみ能耐得る如き材料を以つて造られた構造物の設計に際し、極めて重

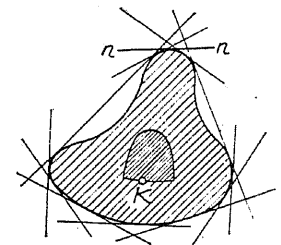


Fig. 161

要なる意義を有するものであつて、かゝる壓應力のみ耐え得ない構造物に對しては直力  $N$  の働点がこの核心内にある事を要するのである。一例として Fig. 162 に示す如き多邊形断面の核心を求めるには包圍曲線  $ABCDE$  の邊  $AB, BC, CD, DE,$  及び  $EA$  を零線と看做し、夫々それに相應する働点  $(ab), (bc),$



(cd), (de), 及び (ea) を求め是等の點を結ぶならば、線 a, b, c, d, e は所要の核心を圍む事になる。何故ならば断面の一つの隅角點 B に於いて零線が位置 AB から位置 BC に變化する時、働點 K は點 (ab) 及び (bc) を結ぶ線 b 上を動く可く、又他の點に就いても同様の事が云ひ得るからである。尚ほ前に説明した様に一定點を過ぎ廻轉する零線の夫々に相應する働點はその定點を働點とする零線上に移動するもので

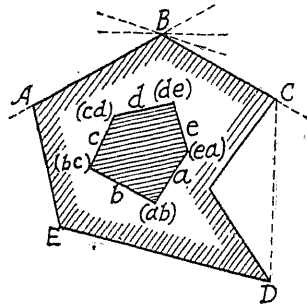


Fig. 162

あるから、核心は隅角點 A, B, C, D, 及び E に相當する零線 a, b, c, d, e を定める事に依つて見出し得ると云ふ事も出来る。以上の事は曲線を以つて圍まれた断面に對しても、曲線を微分長の直線と看做す事によつてそのまゝ應用出来るのであつて、一般に核心を次の二様に定義する事が出来る。

- (a) 零線が断面の包圍曲線の上に變位すればその働點は核心の周邊を描く。
- (b) 働點が断面の包圍曲線上に移動すればその零線は核心の周邊を變位する。

従つて断面の核心を決定する問題は前節に述べた様に與へられた働點 K に相當する零線を求めるか、或は逆に零線と與へてそれに相當する働點 K を求める事になる。例へば Fig. 163 に於いて断面を重心主軸 (1) 及び (2) に關して表し、 $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$ ,  $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{F}}$  を主環動半徑とし、且つ働點 K の座標を  $(v_1, u_1)$  とするならば、零線 nm が主軸上に切りとる長さ  $v_n, u_n$  は夫々次の式を満足する。

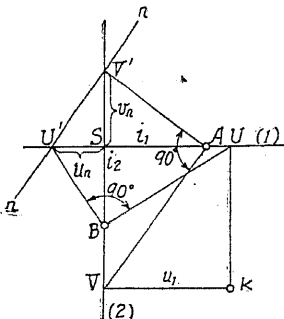


Fig. 163

従つて  $i_1$  は  $v_1$  及び  $v_n$  の比例平均値であり、又  $i_2$  は  $u_1$  及び  $u_n$  の比例平均値である。故に零線 nm の作圖法として次の如く云ふ事が出来る。即ち主軸 (1) 及び (2) の上に夫々  $\overline{SA} = i_1$ ,  $\overline{SB} = i_2$  と置き、働點 K に相應する

座標軸上の點 V 及び U を夫々 A 及び B と結ぶ。次に A 及び B に於いて直線 VA 及び UB に垂直線を立て、夫々座標軸との交りを V', U' とすれば V'U' は所要の零線となる。何故ならば  $i_1 = \overline{SA}$  は  $\overline{SV}$  と  $\overline{SV'}$  の比例平均値となり又  $i_2 = \overline{SB}$  は  $\overline{SU}$  と  $\overline{SU'}$  の比例平均値となるが故である。

尚ほ働點 K が重心 S から遠く離れてゐる時には上の方法は不便であるから力線 SK 上に S に近い一點 K' をとり、K' に對し零線 n'n' を定めるとよい。然らば所要の K に相當する零線 nm は n'n' に平行であつて且つ  $\overline{SL} : \overline{SL'} = \overline{SK} : \overline{SK'}$  なる關係の位置にある事になる (Fig. 164)。

茲に L 及び L' は力線 SK が nm 及び n'n' を切る點を表す。

次に K が無限大の距離にあれば nm は重心 S を通し、n'n' に平行になるわけであるが、これは  $N = 0$  にして彎曲力率 M が SK の面に起る場合を意味するのである。

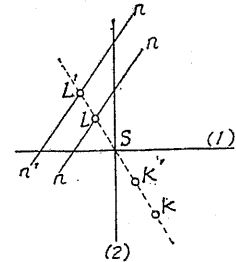


Fig. 164

尚ほ之れと反對の問題即ち零線 nm と與へて之れに相應する働點を求める方法をのべる必要があるが、之れは全く上の各方法の逆を行へばよいのであつて再び茲に説明する事を略しておく。

(2) 核心を求める計算法

Fig. 155 に示す如く断面を重心直角座標軸 x, y に就いて表し、働點の座標を  $(x_k, y_k)$  とすれば前節公式 (25), (26) によつて零線の方程式は次の如くなる。

$$0 = \frac{1}{F} + y_k \frac{y-x \operatorname{tg} \alpha_n}{I_x - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n} \quad \text{或は} \quad 0 = \frac{1}{F} + x_k \frac{x-y \cot \alpha_n}{I_x - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}$$

又 Fig. 155 及び前節公式 (19) から

$$(1) \quad \frac{y_k}{x_k} = \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{I_x - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{I_{xy} - I_y \operatorname{tg} \alpha_n} = \frac{I_x \cot \alpha_n - I_{xy}}{I_{xy} \cot \alpha_n - I_y}$$

となるを以つて、與へられた零線 nm に對し働點の座標として次の値を得る。

$$(2) \quad \begin{cases} y_k = -\frac{1}{F} \frac{I_x - I_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{y-x \operatorname{tg} \alpha_n} \\ x_k = -\frac{1}{F} \frac{I_{xy} - I_y \operatorname{tg} \alpha_n}{y-x \operatorname{tg} \alpha_n} \end{cases}$$

或は

$$(3) \quad \begin{cases} y_k = -\frac{1}{F} \frac{I_{xy} - I_x \cot \alpha_n}{x - y \cot \alpha_n} \\ x_k = -\frac{1}{F} \frac{I_y - I_{xy} \cot \alpha_n}{x - y \cot \alpha_n} \end{cases}$$

上式中  $x, y$  としては零線上任意の一点の座標を挿入すべく、又公式(2), (3)は同一の結果を與へる。しかし乍ら  $\alpha_n$  が  $90^\circ$  か或はそれに近き時には公式(3)を、又  $\alpha_n$  が  $0^\circ$  か或はそれに近き時には公式(2)を用ふべきである。

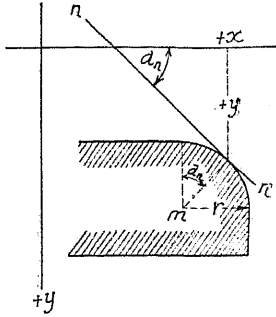


Fig. 165

特に  $\alpha_n = 0$  に對して

$$(4) \quad y_k = -\frac{I_x}{Fy}, \quad x_k = -\frac{I_{xy}}{Fy}$$

又  $\alpha_n = 90^\circ$  に對して

$$(5) \quad y_k = -\frac{I_{xy}}{Fx}, \quad x_k = -\frac{I_y}{Fx}$$

となる。

一例として Fig. 165 に示す如く零線  $nn$  が一つの半径  $r$  なる圆弧に添うて變位し、且その中心の座標を  $(x_m, y_m)$  とすれば

$$y = y_m - r \cos \alpha_n, \quad x = x_m + r \sin \alpha_n$$

となるを以つて、公式(2)より次の式を得る。

$$(6) \quad \begin{cases} -Fy_k = \frac{I_x \cos \alpha_n - I_{xy} \sin \alpha_n}{y_m \cos \alpha_n - x_m \sin \alpha_n - r} \\ -Fx_k = \frac{I_{xy} \cos \alpha_n - I_y \sin \alpha_n}{y_m \cos \alpha_n - x_m \sin \alpha_n - r} \end{cases}$$

この式を應用して圆弧形の隅角を有する型钢の核心を計算する事が出来る。

〔3〕應力  $\sigma$  を求める核心公式

Fig. 166 に於いて  $K$  を直力  $N$  が働く働點とし、 $SK$  と重心  $S$  を通り零線  $nn$  に平行なる  $U'$  軸を座標軸とする。然らば  $U'$  軸から最も遠き點  $L_1$  及び  $L_2$  に生ずる應力  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  は前節公式(13)に依つて

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nfe'}{I_u} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nfe''}{I_u} \end{cases}$$

となる。而して力線上にある核心點  $K_1$  及び  $K_2$  は夫々點  $L_2$  及び  $L_1$  を通じて軸  $u'$  に平行である零線に對する働點に相當するが故に前節公式(7)からこの零線に関する核心半径は次式に依つて與へられる。

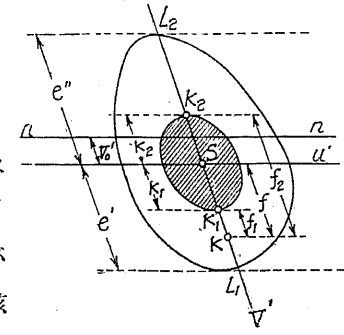


Fig. 166

$$(8) \quad k_2 = \frac{I_{u'}}{Fe'}, \quad k_1 = \frac{I_{u'}}{Fe''}$$

$$\therefore \frac{I_{u'}}{e'} = Fk_2, \quad \frac{I_{u'}}{e''} = Fk_1$$

この關係を公式(7)に挿入して

$$(9) \quad \sigma_1 = \frac{N}{F} \frac{f+k_2}{k_2}, \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} \frac{f-k_1}{k_1};$$

$$\text{或は (10) } \sigma_1 = \frac{N}{F} \frac{f_2}{k_2}, \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} \frac{f_1}{k_1};$$

茲に  $f_1$  及び  $f_2$  は力線上にある核心點  $K_1$  及び  $K_2$  の働點  $K$  からの距離である。斯くの如く断面の核心が與へられてゐる時は零線の方及び断面の最遠點  $L_1$  及び  $L_2$  ( $e_1$  及び  $e_2$ ) を求める事なくして公式(10)に依つて應力  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  を簡単に求める事が出来る。

次に重心  $S$  に生ずる應力  $\sigma_0 = \frac{N}{F}$  を計算から求めた後  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  を圖式的に定める方法を説明しよう。それには Fig. 167 に

示す様に重心  $S$  を通つてひかれた直線上に  $\overline{SR} = \sigma_0$  と取り、働點  $K$  を通じ  $\overline{SR}$  に平行にひかれた直線と  $RK_1$  及び  $K_2R$  の延長線との交點を各々  $T_1$  及び  $T_2$  とすればよいのであつて、明らかに  $\sigma_1 = \overline{KT_2}$ ,  $\sigma_2 = \overline{KT_1}$  として與へられる。

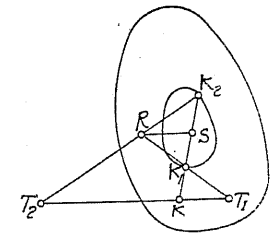


Fig. 167

時として  $N, f_1, f_2$  を別々に與へずして、核心點  $K_1$  及び  $K_2$  に関する力率

$M_1 = Nf_1$  及び  $M_2 = Nf_2$  が與へられる事がある。この時には公式 (10) より

$$(11) \quad \sigma_1 = \frac{M_2}{Fk_2}, \quad \sigma_2 = -\frac{M_1}{Fk_1}$$

となる。

以上述べた如く核心を利用して  $\sigma$  を求める方法は核心が容易に求められる場合、又は直力  $N$  は一定にして働點の種々の位置に對して最大及び最小應力即ち  $\sigma_1$  及び  $\sigma_2$  を比較するが如き場合に便利に利用せられるのである。この場合  $Fk_2$  及び  $Fk_1$  は前節〔5〕に説明した所に従つてその力線に相當する抵抗力率  $W_1$  及び  $W_2$  に等しい。何故ならば Fig. 166 に於いて

$$W_1 = \frac{I_u}{e' \sin \beta} = \frac{I_{u'}}{e'} = Fk_2$$

$$W_2 = \frac{I_v}{e' \sin \beta} = \frac{I_{v'}}{e'} = Fk_1$$

となるが故である。従つて公式 (11) は又次の如くなる。

$$(12) \quad \sigma_1 = \frac{M_2}{W_1}, \quad \sigma_2 = -\frac{M_1}{W_2}$$

之れ拱橋理論に於いて屢々應用せられる公式であつて、普通は上、下核心點に於ける應力  $M_2, M_1$  を夫々  $M_0, M_u$  とし、抵抗力率  $W_2, W_1$  を夫々  $W_0, W_u$  として示し、(12) を次の如く表してゐる。

$$(13) \quad \sigma_u = \frac{M_0}{W_u}, \quad \sigma_0 = -\frac{M_u}{W_0}$$

茲に  $\sigma_0 = \sigma_2, \sigma_u = \sigma_1$  であつて、夫々上下最遠纖維に於ける應力を表してゐる。この公式 (13) を稱して特に**核心公式**と云ふ。

尚ほ前節 (4), (5) に説明した方法に従つて多くの力線に對して抵抗力率  $W_1, W_2$  を計算し、 $W_1 = Fk_2, W_2 = Fk_1$  なる關係から夫々核心半径  $k_2, k_1$  を求める事が出来る。従つて核心半径  $k_2, k_1$  の代りに夫々  $W_1 = Fk_2, W_2 = Fk_1$  をとつて、核心面の代りに  $W$  一面を圖上に示す事がある。此の場合直線にて界せられた断面に對してはその周邊の隅角點を通る力線について抵抗力率を求めると充分である。

〔4〕各種断面の核心面

(1) 三角形 (Fig. 168)

先づ核心を求める三角形の一辺 (例へば  $b$ ) を零線と考へて、それに対応する働點  $B$  を定めよう。Fig. 168 に於いて邊  $b$  の中點  $T$  を通る中線  $RT = a$  と三角形の重心  $S$  を通る軸  $ss$  とは互に共軌であつて、その兩軸力率は零である。従つて前節公式 (7) から

$$\overline{SB} = \frac{i'^2}{\frac{1}{3}a} = \frac{3I'}{Ri}$$

茲に  $i'$  及び  $I'$  は夫々斜座標に就いての軸  $ss$  に関する慣動半径及び二次断面率を表す。所が直角座標に就いての軸  $ss$  に関する二次断面率は (Fig. 33 参照)

$$I = \frac{bh^3}{36} = \frac{ba^3 \sin^3 \beta}{36}$$

なるを以つて

$$I' = I \cos^2 \beta = \frac{ba^3 \sin^2 \beta}{36}$$

となり、且つ  $R = \frac{ba \sin \beta}{2}$  となるが故に  $\overline{SB}$  は次の如くなる。

$$\overline{SB} = \frac{a}{6}$$

同様にして他の邊を零線とした時の働點を定めると、結局核心面は三角形にしてその邊は三角形断面の邊に平行となり、且つ重心は兩者共に一致する事になる。

(2) 平行四邊形 (Fig. 169 (a))

夫々邊  $b$  及び  $a$  に平行な二つの重心軸は互に共軌であつてその兩軸力率は零である。今邊  $b$  を零線とせば之れに對する働點  $B$  の位置は中線  $RT$  上にあつて、且つ

$$\overline{SB} = \frac{i'^2}{\frac{1}{2}a} = \frac{2I'}{Ri}$$

となる。然るに直角座標に就いての軸  $ss$  に関する二次断面率は (Fig. 32 参照)

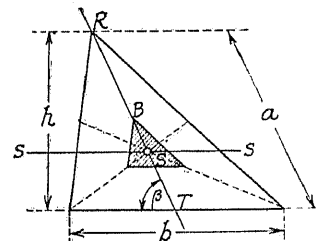


Fig. 168

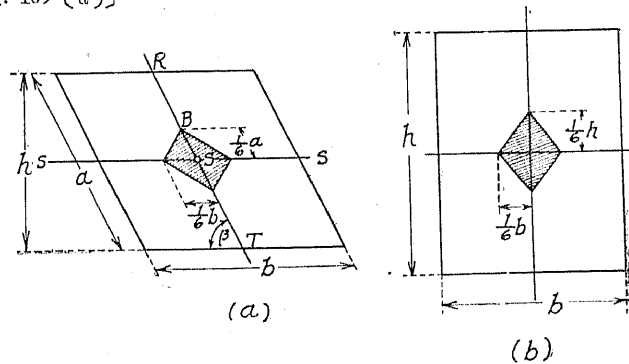


Fig. 169

$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{ba^3 \sin^3 \beta}{12}$  なるを以つて  $I' = I \cos^2 \beta = \frac{ba^2 \sin \beta}{12}$  となり、且つ  $F = bh = ba \sin \beta$  であるから、結局

$$\overline{SB} = \frac{a}{6}$$

となる。他の邊に對しても同様にしに核心點は中線上に重心から  $\frac{1}{6}b$  の距離にある事を知る。従つて核心面も一つの平行四邊形にして、その隅角點は共に中線上にあり重心より夫々  $\frac{1}{6}a, \frac{1}{6}b$  の距離にある事になる。

Fig. 169 (b) の如き矩形に對しても同様にして、たゞ  $\beta = 90^\circ$  とすればよい。

(3) I-形 (Fig. 170)

Fig. 170 に示す如き I-形断面に就いては軸  $XY$  は主軸にして

$$I_x = \frac{1}{12}(bh^3 - b_1h_1^3), \quad I_y = \frac{1}{12}(2bb^3 + h_1^3)$$

$$F = bh - b_1h_1$$

である。従つてこの核心面は主軸上に頂點を有する平行四邊形となり、核心半徑は夫々次式によつて與へられる。

$$k_x = \frac{2I_x}{Fh}, \quad k_y = \frac{2I_y}{Fb}$$

(4) 圓形 (Fig. 171)

圓形断面にては凡べての直角座標軸が主軸であつて、且つ  $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ ,  $F = \pi r^2$  である。従つて核心面は

$k = \frac{I_x}{F^2} = \frac{r}{4}$  なる半徑を有する圓となる。

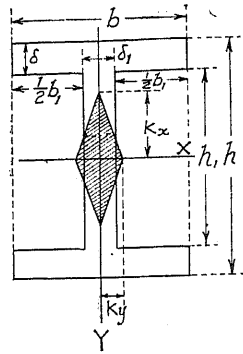


Fig. 170

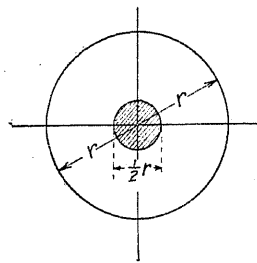


Fig. 171

### 第三節 抗張強度を無視した場合、核心外に働く壓力による應力分布

(1) 零線  $nm$  の位置及び壓應力

第一節にて零線  $nm$  が断面を切つた場合に直力  $N$  が断面に生ずる壓應力並に張應力と平衡を保つものと假定して應力  $\sigma$  を算出したのであるが、混凝土、煉瓦等にて作られた柱、壁、煙突等の構造物にては全く張應力に耐え得ない事があ

り、又設計上安全の爲張應力を無視する事がある。例へば橋脚の設計に際し核心外に直壓力  $N$  が働く場合には、零線に對し  $N$  と反對の側にある断面部分に生ずる張應力を計算外に置き、單に壓應力のみで全壓力  $N$  に耐えるものと假定して計算を進めるのであつて、この場合壓應力の値は實際に生ずるものより大となるが安全側の誤差であるが故に、張應力を無視する事は却つて安全となり設計上何等差支へない事になるのである。

今 Fig. 172 に於いて零線  $nm$  に平行にして重心  $O$  を通る軸は力線  $OK$  と共軌であると假定し、零線  $nm$  から働點  $K$  までの距離を  $f$  とし、又  $nm$  に平行で微分小の幅を有する線條断面  $dF$  の零線よりの距離を  $x$  とする。

然らば抗張強度を無視した場合次の平衡條件が成立しなければならない。

$$(1) \quad N = \int \sigma dF,$$

$$(2) \quad Nf = \int x \sigma dF,$$

茲に  $\sigma$  は  $nm$  より  $x$  の距離にある線條に生ずる應力とし、且つこの場合壓力のみをとり扱ふが故に壓應力に對し正號を採る。

上の (1) 及び (2) の積分は  $nm$  に對し働點  $K$  の側にある断面部分に就いて行ふべきであつて、今應力  $\sigma$  が直線的に變化するものとし  $\sigma = cx$  とすれば

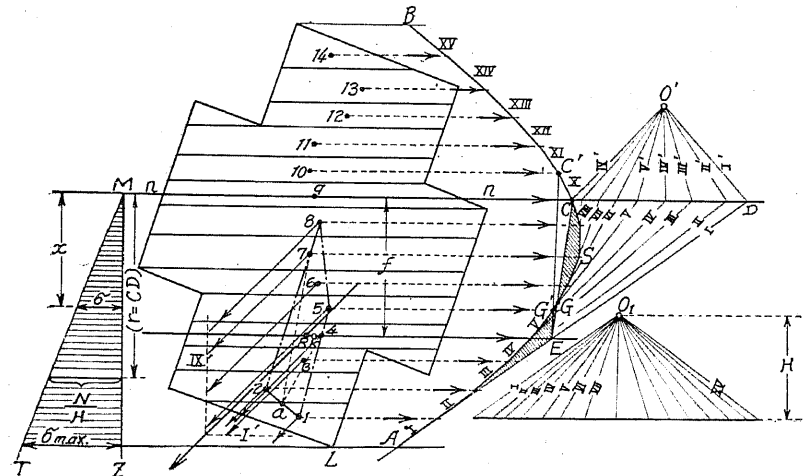


Fig. 172

(但し  $c$  は常數)、(1) より  $N = c \int x dF$  なるを以つて

$$(1) \quad c = \frac{N}{\int x dF} \quad \text{或は} \quad \sigma = \frac{Nx}{\int x dF}$$

となり、又 (2) より

$$(4) \quad f = \frac{1}{N} \int x cx dF = \frac{c}{N} \int x^2 dF = \frac{\int x^2 dF}{\int x dF}$$

となる。この式中分子及び分母は夫々断面中壓力を受ける部分の軸  $nm$  に関する慣性能率及び静力率を示すが故に  $f$  の値は索多角形を描く事に依つて定める事が出来る。即ち全體の断面を  $nm$  に平行な細き線條に分ち、各々の面積を  $m$  の方向に働く力と考へて任意の極距  $H$  を以つて索多角形  $AGCB$  を描き、この索線と第一邊とが  $nm$  上に切りとる長さ  $\overline{CD} = r$  を定める。然らば求める静力率は  $\int x dF = Hr$  となり、慣性能率は  $\int x^2 dF = 2Hr \cdot \delta$  となる。茲に  $\delta$  は索線及び直線  $CD, DA$  の間に包まれた面  $AGCDA$  の面積を表す。従つて公式 (4) より

$$f = \frac{2\delta}{r} \quad \text{或は} \quad \delta = \frac{1}{2} fr$$

となる。故に働點  $K$  を過ぎ  $nm$  に平行な直線が索多角形の第一邊と交る點を  $E$  とすれば次の關係を得る。

$$(5) \quad \triangle ECD = \delta$$

この公式 (5) より Fig. 172 に於いて影線を以つて示す二つの面  $AEG$  と  $GSC$  とはお互にその面積の等しい事を知る。この事實を應用すれば一つの働點に對する零線  $nm$  は、その方向が豫め與へられてゐる時は容易に定める事が出来るのである。即ち先づ索多角形を描き點  $E$  を定めた後直線  $EC$  を二つの面が等しくなる様に引き索多角形との交點を  $C$  とすれば  $C$  を通り與へられた方向に平行な直線が零線  $nm$  となる。

此の場合  $EC$  は試作的にひくか或は始めに目算にて直線  $EC'$  をひき、次に  $\triangle ECC' = \text{面 } C'SG' - \text{面 } G'EA$  なる様に點  $C$  を定めてもよい。何故ならば上式を移項して、 $\text{面 } G'EA = \text{面 } C'SG' - \triangle ECC'$  とし兩邊に面  $G'GE$  を加へると

面  $G'EA = \text{面 } GSC$  となり  $EC$  は所要の條件を満足するからである。

かくの如くして零線  $nm$  の位置が定められたならば、線條  $dF$  の重心に働く力  $\sigma dF$  の合力  $\int \sigma dF$  の働點が果して  $KE$  上にありて  $K$  と一致し以つて  $\int \sigma dF$  と  $N$  とが平衡を實際に保つか否かを檢さなければならぬ。この爲には断面上にて任意の方向に取られた應力  $\sigma dF$  の合力が線  $KE$  と  $K$  點に於いて交るか否かを見ればよいのであつて、若し然らざれば零線として他の方向を選び合力と働點  $K$  とが一致する迄繰返さねばならぬ。

尚ほこの場合壓力  $\sigma dF = cx dF$  の合力の働點を求めるには第二章第四節(1)に於いて説明した様に、索多角形  $AGSC$  の各邊が直線  $nm$  上に切る長さは夫々  $\frac{x dF}{H}$  なる事を應用して  $\sigma dF$  の代りに  $\frac{x dF}{H}$  の合力を求める様にすれば非常に便利である。即ち Fig. 172 に示す様に極點  $O'$  を選んで極線  $I, II, III, \dots$  をひき、力示圖  $CD$  を極點  $O'$  と共に  $CD$  が壓力  $\sigma dF$  と平行になる迄廻轉せしめ、索多角形  $I'II'III' \dots$  をひく。そしてその端邊 ( $I'$  及び  $III'$ ) の交點を求めればこの點を合力が過ぎる事になる。Fig. 172 に於いては  $\sigma dF$  が  $CD$  に對し丁度  $45^\circ$  傾斜してゐる様に考へて作圖したのであつて、索多角形の邊は圖に示す極線に對し夫々  $45^\circ$  の傾斜をなしてゐる。圖の場合合力と  $KE$  との交點  $R$  は  $K$  線に極めて接近してゐるが故に直線  $nm$  を以つて働點  $K$  に對する零線と看做す事が出来る。

尚ほ初めに  $nm$  の方向を豫定するには試作的の方法に依らねばならないが、この場合假定された方向に於いて果して  $R$  と  $K$  とが一致するか否かを速かに判定する事が肝要である。これが爲には壓力を受ける各線條の重心を一點も内に凹入する角のない多角形で結んで見る。例へば Fig. 172 に於いては 1 2 7 8 5 4 1 なる多角形を得、他の重心は總べてその内に横つてゐる。斯くすれば  $\sigma dF$  の合力作用點はこの多角形の内にある事は明らかなるが故に、 $K$  が  $R$  と一致する爲には  $K$  も又この多角形の内にある事を要する。この事實により大體  $nm$  の方向の適否を判定し得るのであつて Fig. 172 に於いて選ばれた零線の方法はこの條件を満してゐる。この場合例へば Fig. 172 に於いて線條 1, 2 に作用する  $\sigma dF$

を一つの合力と爲す事に依つて  $K$  の存在すべき區劃を縮小する事が出来る。即ち二つの力を  $P_1, P_2$  とし、その合力は重心 1, 2 を結ぶ線上の點  $a$  に働くとする。然らば結合線 41, 12, 27 の代りに  $4a, a7$  を用ひる事が出来、點  $R$  と一致すべき點  $K$  が存在すべき範圍は著しく狭められる事をする。この際  $a$  點の位置は  $1a:2a = P_2:P_1$  の關係にあり、且つ  $P_1 = ex_1dF, P_2 = ex_2dF$  なるを以つて  $P_1$  及び  $P_2$  は軸  $nm$  に関する線條の靜力率に比例する。今線條 1, 2 を共有底長  $c$  を有する矩形に變形し、その高さを各々  $z_1, z_2$  とすれば  $P_2:P_1 = \frac{x_2z_2}{c} : \frac{x_1z_1}{c}$  となるが故に計算的に又は圖式的に  $a$  の位置を決定する事が出来る。

以上述べた所の諸事項を考慮し注意して零線  $nm$  の方向を定めるに拘らず  $K$  と  $R$  とが一致しないことがあるが、この様な場合には  $K$  と  $R$  が一致するに至る迄  $nm$  なる零線を其の上のある一點の廻りに廻轉せしめることが必要であつて、其の廻轉後の位置を  $n'n'$  とし之れを求める方法を説明しよう。

今零線が  $nm$  から  $n'n'$  に廻轉した爲に生ずる應壓面積の變化は極めて僅かであるから之れを無視し、同時に  $nm$  線と  $n'n'$  線の間に挟まれた面積 (圖上影線を施した面積) は張應力にも抵抗し得るものと

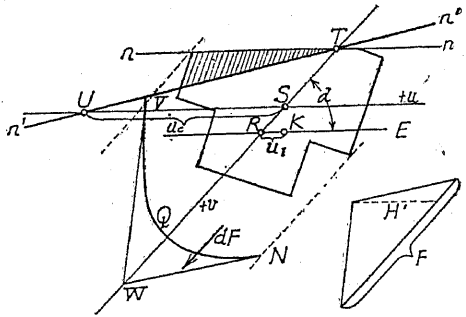


Fig. 173

と假定する。即ち  $nm$  線に界せられた面積  $F$  が Fig. 153 に示した断面と同じく張應力並びに壓應力を發揮し得て、これだけの面積  $F$  で以つて  $K$  點に働く外力に抵抗するものと假定する。斯くすれば Fig. 153 に説明した理論は其儘此の面積に對して適用され得る理であるが故に、先づこの面積に就いて重心  $S$  を求め、先きに求めた壓應力中心  $R$  とこの重心  $S$  を結ぶ時はこの直線  $RS$  は  $nm$  を零線とする應壓面積の重心軸であり、且つ  $nm$  軸に平行な零線に對する働點は必ずこの線上にくる事を知る。次にこの求めた重心軸  $RS$  を  $v$  軸とし、 $nm$  線に平行に重心  $S$  を通る他の軸  $u$  を作つてこの新しい  $u, v$  軸に關して断面  $F$  を

表せば  $\int uv dF = 0$  となる (Fig. 154 参照)。従つて本章第一節〔2〕に述べた所により、働點  $R$  が正しい位置  $K$  迄  $RE$  線上を  $RK = u_c$  だけ移動すれば、それに應じて零線は  $RE$  を零線とする場合の働點  $T$  の周りに廻轉し  $SU = u_c = \frac{i_v^2}{u_1}$  を  $u$  軸上に切りとるに至る。かくして計算上正しき働點  $K$  に相應する零線のとほるべき位置  $U$  を定める事が出来る。この場合  $v$  軸に關する慣性率  $I_v = F i_v^2$  は Mohr 解法 (第二章第四節〔2〕) により定める事が出来るのであつて、先づ面  $F$  を  $v$  軸に平行なる線條に分ちその面積を  $v$  軸に平行な力と考へて  $u$  軸の方向に極距  $H'$  (普通  $-\frac{1}{2}F'$  とするが便利である) を取つて索多角形  $NQV$  を描く。而してこの索多角形と  $NW$  及び  $VW$  とを以つて圍まれた面積を求め  $\delta'$  とすれば

$$I_v = \frac{2H'\delta'}{\sin \alpha} = \frac{\delta'\delta'}{\sin \alpha}$$

$$\therefore i_v^2 = \frac{\delta'}{\sin \alpha}$$

となる。茲に  $\alpha$  は軸  $u, v$  の間の角を表す。尙  $2\delta' = eu_1 \sin \alpha$  なる形にて表し  $\varepsilon$  を可變數とすれば  $SU = u_c = \frac{\varepsilon}{2}$  となる。

斯くして新零線  $n'n'$  が定められたならばこの零線に就いて再び最初から Fig. 172 の作圖を反復し、壓應力中心が働點  $K$  と一致するか否かを檢さねばならない。此の場合再び不一致を見る事あらば更に  $n'n'$  を廻轉し、幾回も繰返し最後に充分壓應力中心と働點  $K$  が精密に一致したならば、初めて茲に零線の位置が確定した事になるのである。尙ほある場合には零線の方が最初から精密に與へられてゐる時があるのであつて、例へば Fig. 174 (a) の如く断面の對稱軸  $ss$  の上に働點  $K$  があれば零線は  $ss$  に直角である。何故ならば  $nm$  に平行に分れた線條の重心は何れも直線  $ss$  の上にあり、従つてそれ等の壓應力の合力も又  $ss$  上に來り働點  $K$  と一致するに至るからである。又 Fig.

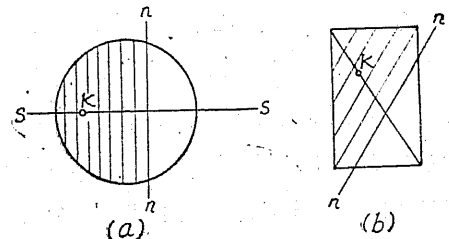


Fig. 174

174 (b) の如く矩形の對角線上に働點  $K$  があれば零線は Fig. 174 (a) の場合と同様にして他の對角線に平行である事を知る。

最後に零線の位置が確定したならばこれに従つて Fig. 172 の如く應力分布圖を求める事が出来るのである。即ち前述の如く  $CD = r$  とすれば  $\int x dF = Hr$  であるから公式 (3) によつて

$$(6) \quad \sigma = \frac{N}{H} \frac{x}{r}$$

となる。従つて Fig. 172 に示す如く零線に直角なる  $x$  軸に  $m$  より  $r$  の距離にて縦距として  $\frac{N}{H}$  の値を立てれば茲に應力分布圖  $MT'$  を得るわけであつて、又同時に最遠纖維に於ける應力  $\sigma_{max}$  を定める事が出来る。この場合極距  $H$  としては  $\frac{N}{H}$  を計算するに便利な様な値を採ればよい。

(2) 矩形断面の對稱軸に壓力  $N$  が作用する場合の應力分布

今 Fig. 175 に示す如く壓力  $N$  がその邊  $h$  に平行な中線上の一點  $K$  に働く場合を考へるに、前項に於いて述べた如く零線はたしかに邊  $b$  に平行であるが

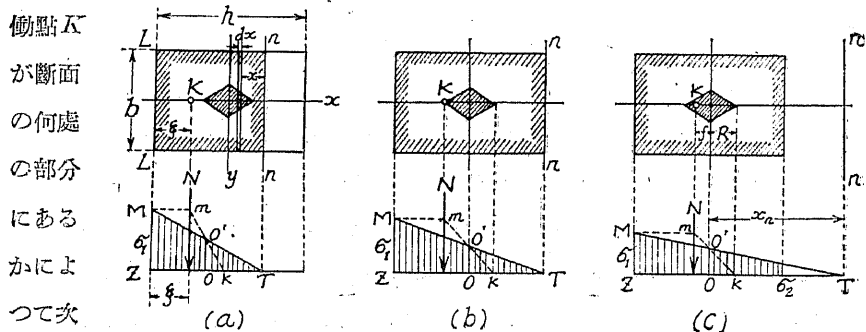


Fig. 175

働點  $K$  が断面の何處の部分にあるかによつて次の三つの場合に區別して考へる事が必要である。

(a). Fig. 175 (a) に示す如く働點  $K$  が核心外にある場合であつて邊  $LL$  から働點  $K$  迄の距離を  $\xi$  とすれば零線  $nm$  はこの邊から  $3\xi$  の距離にある。何故ならば  $nm$  に平行である線條 ( $bdx$ ) の幅は一定であるから  $K$  を通し  $nm$  に平行にひかれた線は外力と内力が平衡を保つ爲には應力三角形  $MTZ$  の重心を通する事が必要であるからである。而して

$$b \left( \frac{3\xi\sigma_1}{2} \right) = \int \sigma dF = N$$

$$(7) \quad \therefore \sigma_1 = \frac{2N}{3\xi b}$$

となる。この (7) 式は拱、橋脚、擁壁等の計算に極めて大切なるものである。尙ほ圖に示す様に有効長  $3\xi$  の中點に  $\frac{N}{F} = \frac{N}{3\xi b}$  を立てその頂點  $O'$  と中央  $\frac{1}{3}$  點  $K$  をむすび線  $N$  まで延ばし  $m$  點を求め、 $m$  から  $TZ$  に平行に  $mM$  をひくならば直線  $MO'$  は  $T$  點を過ぎる事も (7) 式より直ちに知り得る事實である。

(b). Fig. 175 (b) に示す如く働點  $K$  が核心面の頂點にくる時であつて  $nm$  は  $LL$  と反對側の邊と一致すべく、又  $\sigma_1$  は (7) に於いて  $\xi = \frac{1}{3}h$  として

$$(8) \quad \sigma_1 = \frac{2N}{hb}$$

となる。

(c). Fig. 175 (c) に示す如く働點  $K$  が核心内にある場合であつて断面全體に壓應力を生ずる。而して前節公式 (7) を用ふれば

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nf}{bh^2} = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{6f}{h} \right) \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nf}{bh^2} = \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{6f}{h} \right) \end{cases}$$

となる。之れを圖式的に決定するには前節公式 (9),  $\sigma_1 = \frac{N}{F} \frac{f+k_2}{k_2}$  に従つて Fig. 175 (c) に示す如くすればよい。即ち  $OO' = \frac{N}{F}$  とし、 $KO'$  と  $N$  との交點  $m$  より  $TZ$  に平行に  $mM$  をひく。然らば  $MZ = \sigma_1$  となり  $M, O'$  を結べば圖の如く應力圖を得る。尙ほ零線  $nm$  の位置は第一節公式 (7) より

$$x_n = -\frac{I_y}{Ff} = -\frac{bh^3}{12bhf} = -\frac{h^2}{12f}$$

となり、又  $\sigma_2$  は次式にて與へる事が出来る。

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} \frac{x_n - \frac{h}{2}}{x_n}$$

(3) 圓形斷面を有する煙突の計算

本節〔1〕に述べた許算法は煉瓦及び混凝土から造られた煙突に風壓が作用した場合の壓應力を求めるに用ひられる。今

$G$  = 考へてゐる断面以上にある壁の重量

$H$  = 水平に働くと考へられた風壓

$M$  =  $AB$  に關する  $H$  の力率

とすれば  $G$  及び  $H$  の合力  $D$  は断面  $AB$  を重心から

$$(10) \quad e = \frac{M}{G}$$

の距離にて切る。而して合力  $D$  の働點  $K$  が核心の内側にあれば全断面に壓應力を生じ其の最大壓應力は

$$(11) \quad \sigma = \frac{G}{F} + \frac{M}{W} = \frac{G}{F} \left(1 + \frac{e}{k}\right)$$

となる。茲に  $k$  は核心半径即ち  $\frac{W}{F}$  を表す。

次に働點  $K$  が核心の外側にあれば風上側に張應力を生ずるが混凝土及び煉瓦工に對しては安全の爲本節〔1〕に説明した様に抗張強度を無視して次の如く計算を進める。今 Fig. 176 に於いて

$I_n$  = 壓力を受ける断面部分の零線  $nm$  に關する慣性能率

$S_n$  = 壓力を受ける断面部分の零線  $nm$  に關する靜力率

$f$  = 働點  $K$  から  $nm$  迄の距離

$z$  =  $nm$  から最大應力を生ずる點迄の距離

とすれば公式 (3) に従つて最大壓應力  $\sigma$  は

$$(12) \quad \sigma = \frac{Gz}{S_n}$$

となる。尚ほ公式 (4) に従つて距離  $f$  は次式にて與へられる。

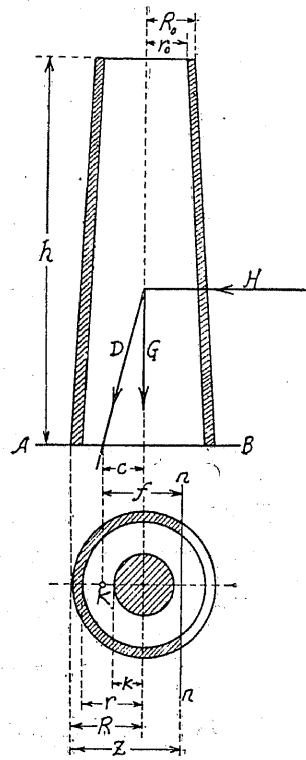


Fig. 176

$$(13) \quad f = \frac{I_n}{S_n}$$

特に  $H = 0$  ならば  $G$  は一様に分布され、その應力の値は

$$(14) \quad \sigma_0 = \frac{G}{F}$$

にて示される。

この場合  $I_n, S_n$  は前に説明した様に圖式的に求める方が便利である。近時煙突を純煉瓦、混凝土を以つて作る事は少く、多くは鐵筋混凝土を以つて作る様になつたのであるが、その所要鐵筋斷面積を計算するには先づ始めには鐵筋なきものとし、且つ混凝土も張力に耐えるものとして  $nm$  の位置及び應力を計算し然る後張應力に對し必要なる鐵筋を挿入する様にしてゐる。今その近似的計算法を説明しよう。Fig. 177 に於いて

$R, r$  = 外、内圓半径

$$R_m = \frac{R+r}{2} = \text{平均半径}$$

$t$  = 環厚

$$I = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$$

$$F = \pi(R^2 - r^2)$$

$$W = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4R_m}$$

とすれば核心半径は前節公式 (8) から

$$k = \frac{I}{FR} = \frac{R^2 + r^2}{4R}$$

となる。又零線の重心からの距離は第一節公式 (7) から

$$x_n = \frac{R^2 + r^2}{4c}$$

となる。而して張應力側の平均半径に於ける最大張應力は第一節公式 (31) より  $\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M}{W}$  にて與へられる。従つて例へば 20 cm 間隔に鐵筋を挿入する場合の所要鐵筋斷面積は  $f_m = \frac{\sigma \cdot 20 \cdot t}{\sigma_a}$  となる。茲に  $\sigma_a$  は鐵筋の許容張應力を示す。而して風は總べての方向から吹くものであるが故に圓周に沿う

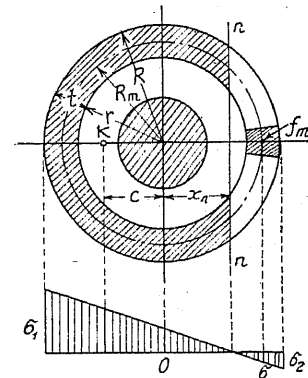


Fig. 177



て等量の鉄筋を用ひるのである。

以上は略算法であるから次項に於いて精密な圖式解法を示さう。

〔4〕鉄筋混凝土断面

鉄筋混凝土断面に彎曲と軸壓力が同時に作用した場合、或は Fig. 178 に示す如く對稱軸上に直壓力  $N$  が作用した場合、張應力側にある混凝土の抗張強度を無視して断面に生ずる應力を求めて見よう。矩形断面の如き簡単なものにあつては計算により求め得るのであるが、他の形狀を有する断面に對しては専ら圖式法によるが便利である。

Fig. 178 に於いて直力  $N$  は断面の對稱軸  $ax$  上に働くを以つて零線  $nm$  はその對稱軸に直角である。今圖の如く  $N$  は  $nm$  から  $f$  の距離にあるものとし、且つ混凝土の壓應力側の  $nm$  に平行な線條  $\Delta F$ 、及び彈性率比  $n$  倍せられた鉄筋断面  $n\Delta F$  の  $nm$  からの距離を  $x$  とする。然らば〔1〕に述べた様に次の二つの條件式を得る。

$$(a) \quad N = \int \sigma dF = c \int x dF = cS_n$$

$$(b) \quad Nf = \int x \sigma dF = c \int x^2 dF = cI_n$$

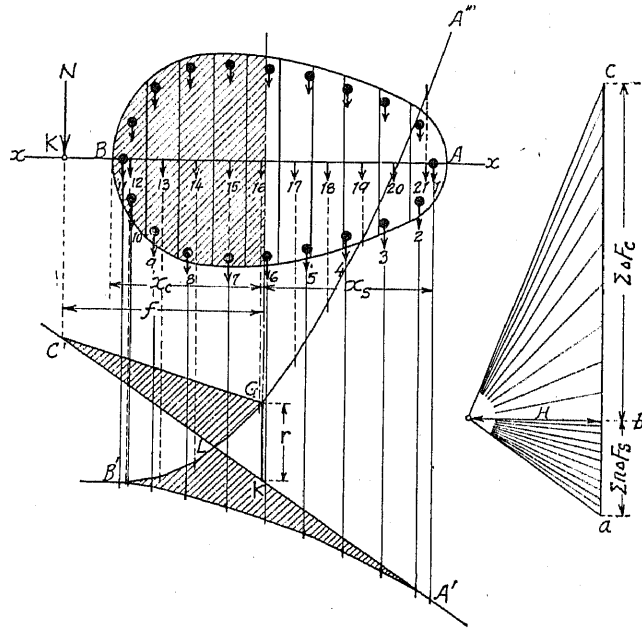


Fig. 178

上式中  $\sigma = cx$  と假定し、又積分は壓應力側及び鉄筋断面即ち有効全断面に及ぶべきものである。(a) 式を (b) 式に挿入して

$$f \cdot c \int x dF = c \int x^2 dF$$

$$\therefore f = \frac{I_n}{S_n}$$

茲に  $I_n$  及び  $S_n$  は求めんとする零線  $nm$  に関する有効断面の慣性能率及び靜力率を表すものであつて、 $f$  の値即ち正しき零線の位置を決定する爲に次の如き作圖法を行ふ。即ち Fig. 178 に於いて力示圖  $abc$  は鉄筋の断面  $n\Delta F$  から始めて混凝土線條  $\Delta F$  の順序に置き極距  $H$  を以つて索多角形  $A'B'A''$  を描く。而して圖より明らかなる如く  $A'B'A''$  の内  $A'B'$  は  $n$  倍鉄筋断面  $nF_s$  に、又  $B'A''$  は混凝土断面  $F_c$  に對應するものである。今零線  $nm$  が正しき位置にあるものとし、有効断面（鉄筋及び  $nm$  の壓應力側にある混凝土線條）に對する索多角形の第一邊  $A'C'$  と最後の邊が  $nm$  上に切りとる長さを  $\overline{GK} = r$  とすれば、有効断面の  $nm$  に関する靜力率は  $S_n = H \cdot r$  となり又その慣性能率は  $I_n = 2H \cdot \text{面 } A'B'GK = 2H \cdot \delta$  となる。従つて次の關係式を得る。

$$f = \frac{I_n}{S_n} = \frac{2\delta}{r} \quad \text{或は} \quad \frac{f \cdot r}{2} = \delta$$

然るに  $\frac{f \cdot r}{2}$  は三角形  $C'GK$  の面積に等しきが故に

$$\triangle C'GK = \text{面 } A'B'GK$$

となる。この關係は圖に於いて影線を施せる部分の面積が相等しき時成立するを以つて、結局正しき零線の位置  $G$  を定める爲には索多角形の第一邊と  $N$  線との交點  $C'$  から、面  $C'LG = \text{面 } A'B'LG$  なる様に  $C'G$  をひき  $G$  點を決定すればよい。この場合面  $A'B'LG$  の面積は最初から與へられてゐるから點  $G$  を移動して遂に所要の條件を満足する様にすれば  $G$  點の正確な位置を決定する事が出来る。

斯くして零線を求めた後混凝土の壓應力を計算するには次の式による。即ち式 (a) から  $c = \frac{N}{S_n}$ 、 $\sigma = c \cdot x = \frac{Nx}{S_n}$  となる。最遠纖維に對しては  $x = x_0$  として

$$(15) \quad \sigma_c = \frac{Nx_c}{S_n} = \frac{Nx_c}{Hr}$$

又鐵筋の張應力として

$$(16) \quad \sigma_s = -n \frac{Nx_s}{Hr}$$

を得る。

尙ほ  $N$  の偏倚が著しく大となれば面  $C'GL$  は細長くなり  $r$  は小となる。従

つて公式 (15), (16)

に依る  $\sigma$  の値は不

精確となる。従つて

この場合には  $\sigma$  を

式 (b) から計算し

次の式を用ふ。

$$(17) \quad \sigma = \frac{Nfx}{I_n}$$

上式は  $I_n = 2H\bar{x}$

なるを以つて  $r$  を含

まないのである。

以上の方法を鐵筋

混凝土壓突の断面に

應用すれば Fig. 179

の様であつて、その

解法は Fig. 178 に

於いて述べたと同様であるから茲にその説明を略して置く。

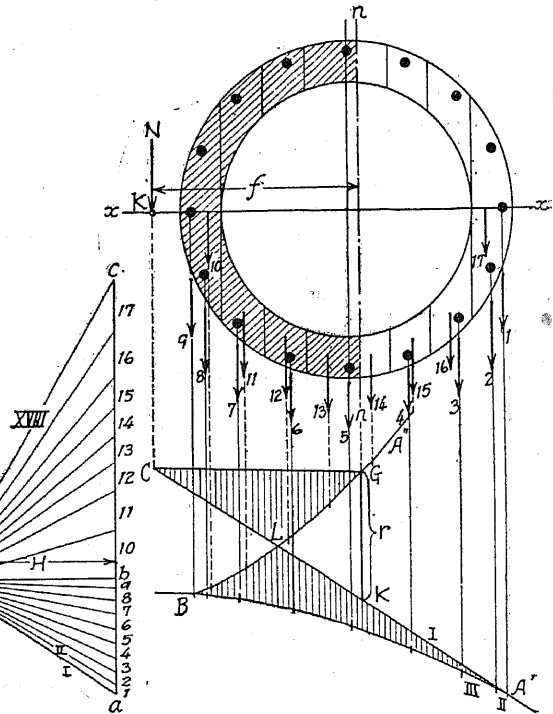


Fig. 179

### 第四節 直應力と剪應力との關係 (Relation between Normal and Shearing Stresses)

#### (1) 極微平行六面體に於ける力の平衡狀態

一つの彈性體の内から極微斜角平行六面體を取り出し、その邊長を  $a, b,$  及び

$l$  とする (但し  $l$  は紙面に直角の方向とする)。而して側面  $al$  及び  $bl$  に一對の力  $A$  及び  $B$  が作用するものとし、紙面に一致する面  $ab$  には應力は存在しないものとする (Fig. 180)。かゝる場合  $A$  が邊  $b$  に平行なれば  $B$  は邊  $a$  に平行でなければならない。何故ならば  $B$  が邊  $a$  に平行でなく圖に示す様に  $B'$  の方向を取れば偶力が成立し、極微體を廻轉せしめるに至り平衡状態にあり得ない事になるからである。かゝる方向  $a$  及び  $b$  を稱して共軛方向と云ふ。今 Fig. 180

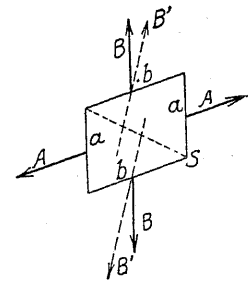


Fig. 180

に示す極微體を對角線面にて切り、Fig. 181 (a) の如く、邊長  $a, b, c$  にして奥行  $l = 1$  なる三角塊體を考へる時、面  $a, b, c$  に働く力  $A, B, C$  は互に平衡を保つべきを以つて Fig. 181

(b) に示す如く一つの閉じた三角形を作る様になる。

邊  $a$  をそのままとし邊長  $b$  を次第に大としてゆけば

(a)

$B$  は邊長  $b$  に比例するが

故に  $c$  邊に働く力  $C$  は平

衡状態を満す爲に次第に大となり圖の如き

線束を得るに至る。逆に力  $C$  からなる線束を面の方向と考へれば  $c$  からなる線束は力の方向となる。かくの如く夫々  $C$  と  $c$  とが互に共軛方向であると云ふ事はその極限の場合に各々  $A$  と  $a$  の方向に一致すると云ふ事から知り得るのであつて (b) 圖の線束  $C$  を (a) 圖の點  $S$  に結合すれば茲に共軛方向の對合線束を得る。今 Fig. 182

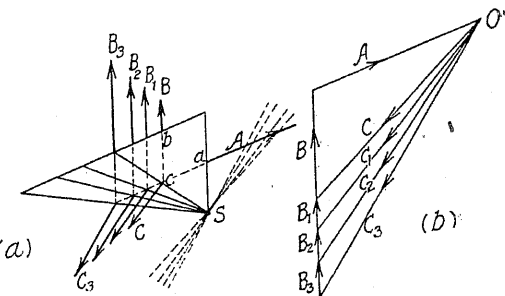


Fig. 181

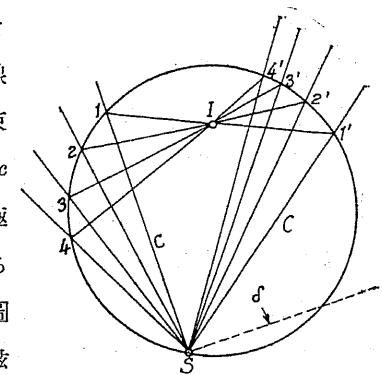


Fig. 182

に示す如く點  $S$  を通ずる任意の圓を考へ面の方向  $e$  と夫々點  $1, 2, 3, \dots$  にて交るとし又これらに對應する力の方向  $C$  と夫々點  $1', 2', 3', \dots$  にて交るものとする。然らば弦  $1'1, 2'2, 3'3, \dots$  は共に對合中心  $I$  にて交る事になる (證明は略す)。従つて唯二組の共軌方向のみが與へられれば總べての面に對して力  $C$  の方向を知る事が出来る。今  $\delta$  を以つて力  $C$  が面  $e$  への垂直線となす角を表せば  $\delta_{max}$  は弦  $1'1, 2'2, 3'3, \dots$  の内最小の長さを有する弦に對應する事になるのであつて、Fig. 183 に於いて點  $M$  を圓の中心とすれば

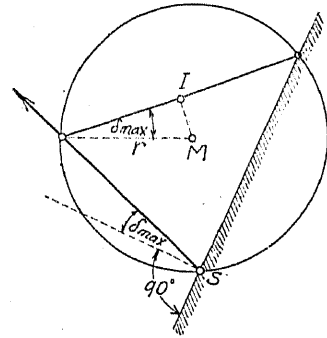


Fig. 183

$$MI : r = \sin \delta_{max} : 1$$

なる關係が成立する。

[2] Rankine 及び Culmann の應力圓

今直角座標軸に關して極微平行六面體をとりその邊長を  $dx, dy, 1$  とする (Fig. 184)。而して面  $dy \times 1$  に於ける應力を直應力  $\sigma_x$  及び剪應力  $\tau$  に分ち、又面  $dx \times 1$  に於ける應力を直應力  $\sigma_y$  及び剪應力  $\tau_1$  に分つ時極微體の中心軸 (紙面に直角) に關する力率の和を零と置いて、次の關係を得る。

$$\tau dy \cdot dx = \tau_1 dx \cdot dy \quad \therefore (1) \quad \tau = \tau_1$$

次に面  $dx \times dy$  に直應力  $\sigma_x$  と剪應力が働き、且つ面  $dx \times 1$  及び  $dy \times 1$  に紙面に直角の方向に剪應力が働く場合にも同様の關係が成立する。かくの如く一般に極微體の同一稜に直角に働く剪應力は互に相等しいと云ふ事は、すでに第七章第一節に詳述した通りである。尙 Fig. 184 及び公式 (1) を導く時極微體の相對する面に生ずる應力はその距離が微小であるから事實上異なるものとし、力率の方程式にはその差を無視したのである。

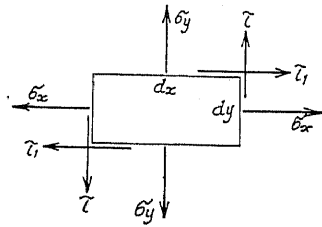


Fig. 184

次に極微體の邊  $dx$  と  $\varphi$  なる角をなす面を考へ Fig. 185 の如き極微三角錐體を考へる。そして断面  $ds$  に生ずる應力を  $\rho$  としその面に直角及び平行な方向の

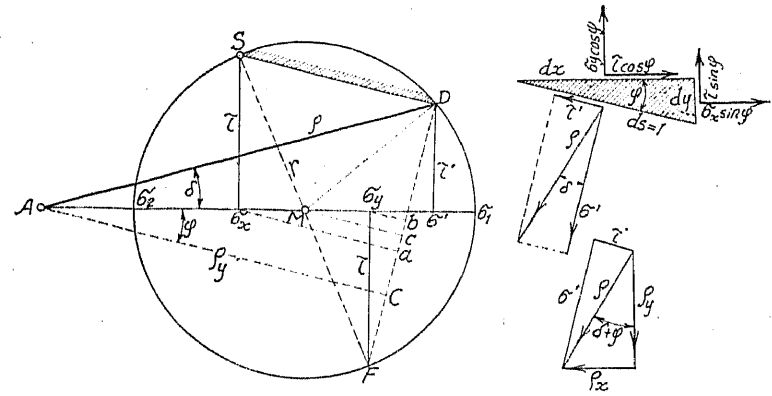


Fig. 185

$\rho$  の分力を  $\sigma', \tau'$  とする。今  $ds = 1$  とすれば面  $dy \times 1$  上には力  $\sigma_x \sin \varphi, \tau \sin \varphi$  が作用し、面  $dx \times 1$  上には  $\sigma_y \cos \varphi, \tau \cos \varphi$  が作用し、又面  $ds$  上には  $\rho$  が作用する事になる。従つて力  $\rho$  を  $dx$  及び  $dy$  の方向の分力  $\rho_x, \rho_y$  に分解すれば次の平衡方程式を得る。

$$(2) \quad \begin{cases} \rho_x = \sigma_x \sin \varphi + \tau \cos \varphi \\ \rho_y = \sigma_y \cos \varphi + \tau \sin \varphi \end{cases}$$

今 Fig. 185 に於ける如く  $x$  軸に平行な線上に  $A\bar{\sigma}_x = \sigma_x, A\bar{\sigma}_y = \sigma_y$  なる様に夫々  $\sigma_x, \sigma_y$  點をとり、次に  $\sigma_x, \sigma_y$  點に於ける  $x$  軸への垂線上に夫々  $\bar{\sigma}_x S = \tau, \bar{\sigma}_y F = \tau$  なる如く  $S, F$  點をとる。而して  $\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y$  の中點  $M$  を中心として  $S, F$  點を通る圓をかき點  $S$  を通じて  $ds$  面に平行に引いた線と圓との交點を  $D$  とする。然らば  $\bar{AD}$  は應力  $\rho$  に相當するのであつて、この事實を證明すれば次の如し。即ち  $D$  と  $F$  をむすび點  $A$  から  $DF$  に垂直線  $AC$  を立てれば

$$\bar{AC} = \bar{A}\bar{\sigma}_y \cos \varphi + \bar{\sigma}_y b = \sigma_y \cos \varphi + \tau \sin \varphi = \rho_y$$

$$\bar{CD} = \bar{C}\bar{a} + \bar{a}\bar{D} = \bar{C}\bar{a} + \bar{F}\bar{b} = \sigma_x \sin \varphi + \tau \cos \varphi = \rho_x$$

となるを以つてたしかに  $\bar{AD} = \bar{AC} + \bar{CD}$  は  $\rho$  を與へる事になる。

尙 Fig. 185 の右の力示圖に見る如く  $\rho_y$  と  $\rho$  との間の角を  $\delta + \varphi$  とすれば

直に  $\angle MAD = \delta$  なる事を知る事が出来る。従つて  $(\delta, \rho)$  は  $A$  を原点とした時の圓周上の點  $D$  の極座標であり、又應力  $(\sigma', \tau')$  は同點の直角座標であると云ふ事が出来る。以上の如き應力の表示法は Rankine が始めて考へたものであるが、 $\rho$  の端點  $D$  を通じて面  $ds$  に平行に引かれた直線  $DS$  が圓周上の一定點  $S$  を通ずると云ふ事は Culmann によつて始めて見出された結果である。

次に Fig. 186 に示す如く面が  $\overline{S\sigma_1}, \overline{S\sigma_2}$  の方向をとる時夫々  $\rho$  は最大、最小となり  $\overline{A\sigma_1}, \overline{A\sigma_2}$  は主應力を與へる事になる。而してこの主應力面  $\overline{S\sigma_1}, \overline{S\sigma_2}$  には  $\tau'$  は零であり従つて  $\delta = 0$  となり、直應力のみが生ずる事を知るを以つて互に直角をなす  $\overline{S\sigma_1}, \overline{S\sigma_2}$  は共軛方向である事を知る。従つて點  $S$  を力及び面の共軛方向の對合原

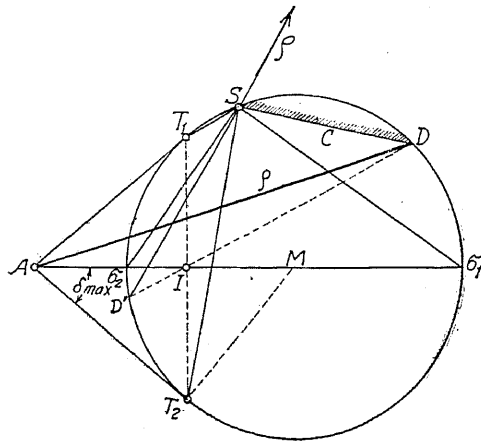


Fig. 186

點とすれば對合中心  $I$  は弦  $\sigma_1\sigma_2$  上にあり、又その圓心  $M$  よりの距離  $IM$  と圓半径  $r$  との比は  $\sin \delta_{max} : 1$  の比に等しい事は前項に説明した通りである。従つて  $I$  は點  $A$  から圓にひかれた切線  $T_1, T_2$  の切點を結ぶ線上にある事を知る。尚ほ  $T_1T_2$  は  $I$  を通ずる最小弦であるが故に共軛方向  $ST_1$  及び  $ST_2$  の間の角は  $90^\circ - \delta_{max}$  である。又弦  $DID'$  から  $D'$  を定めると  $D'S$  は面  $SD$  に對する應力の方向を與へてゐる。

(3) Weyrauch の應力圖

Fig. 187 に於いて  $x$  軸に平行な線上に  $\overline{AX} = \sigma_x, \overline{XY} = \sigma_y$  なる如く  $X, Y$  點をとり、點  $X$  に於いて立てた垂線上に  $\overline{XI} = \tau$  をとる。次に  $\overline{AY} = \sigma_x + \sigma_y$  を直径とする圓を描き、點  $A$  から任意の面方向  $ds$  に平行にひいた線との交點を  $D$  とすれば、長さ  $ID$  は面  $ds$  に生ずる應力  $\rho$  を與へるのであ

る。何故ならば  $I$  から  $AD$  に垂直線  $IL$  をたてると、

$$\overline{IL} = \sigma_x \sin \varphi + \tau \cos \varphi = \rho_x$$

$$\overline{LD} = \sigma_y \cos \varphi + \tau \sin \varphi = \rho_y$$

となりて公式 (2) の關係を満足するが故である。

次に直線  $DI$  を延長し圓との交りを  $E$  とすれば

$$\angle EAY = \angle EDY = \angle LID$$

となる。

今應力  $\rho$  の面  $ds$  に對する傾斜角を  $\beta$  とすれば力示圖よりわかる如く  $\rho$  と  $\rho_x$  の間の角は  $\beta - \varphi$  なるを以つ

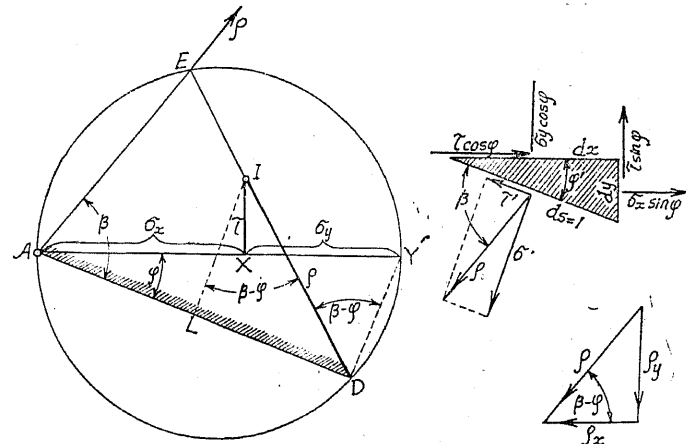


Fig. 187

て  $\angle LID = \beta - \varphi$  なる事を知る。従つて  $\angle EAD = \beta$  となり、直線  $AE$  は面  $AD$  に生ずる應力  $\rho$  の方向を與へる事になる。従つて與へられたる應力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$  によつて定め

られた點  $I$  は對合中心となるのであつて、 $ID, IE$  は夫々面  $AD, AE$  に生ずる應力である事を知る。Fig. 188 には途中の作圖線を除きそ

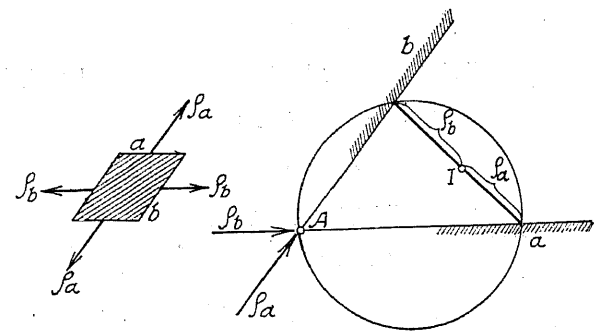


Fig. 188

の結果のみを示したものであつて  $a, b$ , を二つの共軛方向とすればそれに屬する

應力が、夫々  $\rho_a, \rho_b$  となる事は圖に示す通りである。

Fig. 189 は直角に交る二面  $AD'$  及び  $AD''$  に對する應力  $\rho'$  及び  $\rho''$ , 又その

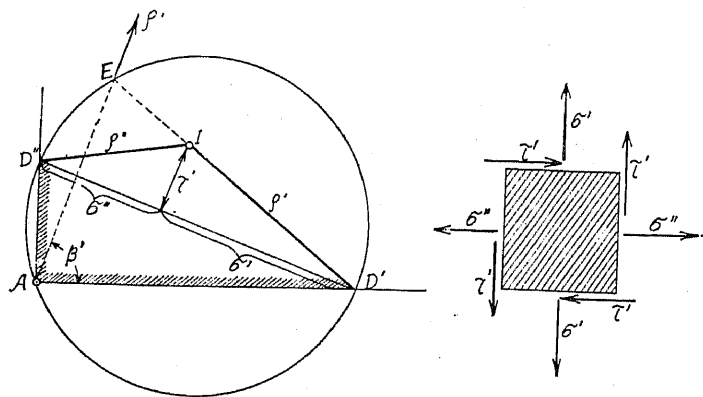


Fig. 189

分應力  $\sigma', \tau'$  及び  $\sigma'', \tau''$  を示したものであつて  $I$  から圓直径  $D'D''$  上への垂直線は直径を  $\sigma'$  及び  $\sigma''$  に分解し垂直線の長さは剪應力  $\tau'$  の大きさを示すのである。尚ほ圖より知る如く  $\beta'$  を應力  $\rho'$  と面  $AD'$  との間の角とすれば

$$\angle ED'D'' = \angle EAD' = 90^\circ - \beta' \text{ となる。}$$

Fig. 190 は主面の位置 (1), (2) 及び主應力  $\sigma_1, \sigma_2$  の値を定める方法を示したものである。

(4) 主應力 (Principal stresses)

Fig. 185 に於ける力示圖より應力  $\sigma'$  及び  $\tau'$  として次式を得る。

$$\begin{cases} \sigma' = \rho_x \sin \varphi + \rho_y \cos \varphi \\ \tau' = \rho_x \cos \varphi - \rho_y \sin \varphi \end{cases}$$

上式に公式 (2) の關係を挿入すれば

$$(3) \begin{cases} \sigma' = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi + \tau \sin 2\varphi \\ \tau' = -\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi \end{cases}$$

となる。この方程式の形は第二章第六節 [1] に於いて述べた平面断面に關する。

慣性能率、兩軸力率間にある關係 (1) と同形であるが故に、そこで説明した法則をそのまま應用する事が出来る。即ち主應力の生ずる面の方向は

$$(4) \quad \tan 2\varphi = \frac{-2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

にて與へられ、又主應力の値は次の式にて與へられる。

$$(5) \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

$$(6) \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

この主應力を圖式的に決定するには Fig. 186 に就いて述べた Rankine, Culmann 解法及び Fig. 187 以下に就いて述べた Weyrauch の方法 (Fig. 57 の方法に相當する) を用ふればよい。

(5) 主變形 (Principal strains)

主面によつて圍まれた極微平行六面體を考へ、奥行 1 にして底面の邊長を  $l_1, l_2$  とする。今  $l_1, l_2$  に平行な主應力を夫々  $\sigma_1, \sigma_2$  とすれば、 $l_1$  は  $\sigma_1$  の結果  $\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E} l_1$  だけ伸張し  $\sigma_2$  の結果  $\Delta l_1 = \frac{\sigma_2}{mE} l_1$  だけ縮小するを以つて結局  $l_1$  の總變化は  $\Delta l_1 = \frac{l_1}{E} (\sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2)$  となり、同様  $l_2$  の總變化は  $\Delta l_2 = \frac{l_2}{E} (\sigma_2 - \frac{1}{m} \sigma_1)$  となる。茲に  $E$  は弾性係數を示し  $m$  はポアソン比を示してゐる。

従つてこの變形  $\Delta l_1$  を生ずべき  $l_1$  の方向の應力は

$$(7) \quad k_1 = \frac{\Delta l_1 E}{l_1} = \sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 = \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

となり、同様にして變形  $\Delta l_2$  を生ずべき  $l_2$  の方向の應力は

$$(8) \quad k_2 = \frac{\Delta l_2 E}{l_2} = \sigma_2 - \frac{1}{m} \sigma_1 = \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

となる。之を眞主應力 (True principal stresses) と稱す。弾性體の強弱を判斷するには精密に云へば總べてこの主應力又は最も嚴密には眞主應力によらねばならないのである。然しながらこの場合許容應力としては單に張力或は壓力試験のみに依るにあらずして剪力の影響を加へたものを用ふべきは勿論である。尚ほ  $m$

の値は 3~4 にして金属に対しては一般に  $m = \frac{10}{3}$  としてゐる。Krüger の試験に依れば構築用鋼に對し  $m = 3.3 \sim 3.5$  を得てゐる。(V.D.I. 1909, S.1453 参照)。

〔6〕例題

(1) 圓断面

Fig. 191 に示す圓形断面に就いては第七章第四節〔2〕より、周縁上の應力として

$$S = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \psi, \quad I = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$y = r \sin \psi$$

$$\tau'_0 = \frac{4Q}{3\pi r^2} \sin \psi = \frac{4Q}{3I} \sin \psi,$$

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{I}$$

$$\therefore \tau'_0 = \tau_{max} \sin \psi$$

尙この他に彎曲力率から生ずる直應力  $\sigma'_0$  ありとすれば

$$\sigma'_0 = \sigma_{max} \frac{\eta}{r}$$

となる。然るに  $\sin \psi = \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{r^2}}$  なるを以つて公式(7)に従ひ、周縁上の最大直應力として、

$$k = \frac{m-1}{2m} \sigma_{max} \frac{\eta}{r} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{4\tau_{max}^2 - \lambda^2} \frac{\eta^2}{r^2}$$

茲に  $\lambda^2 = 4\tau_{max}^2 - \sigma_{max}^2$

従つて  $k$  の値は

$$\frac{\eta}{r} = \frac{2\tau_{max}}{\sqrt{\lambda^2 \left[ 1 + \left( \frac{m+1}{m-1} \right)^2 \frac{\lambda^2}{\sigma_{max}^2} \right]}}$$

の時最大となる。今 Fig. 192 に示す如き 鋼接合に於ける最大應力  $k_{max}$  を求めて見よ。

$$M = 59 \cdot 2.0$$

$$= 118 \text{ t-cm}$$

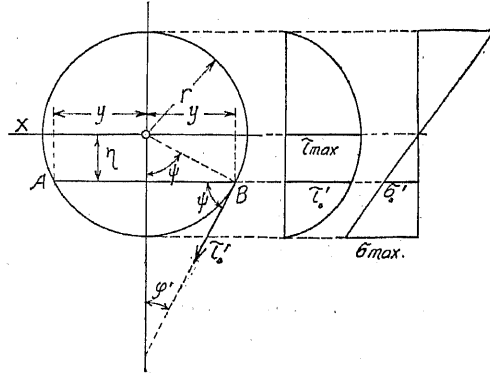


Fig. 191

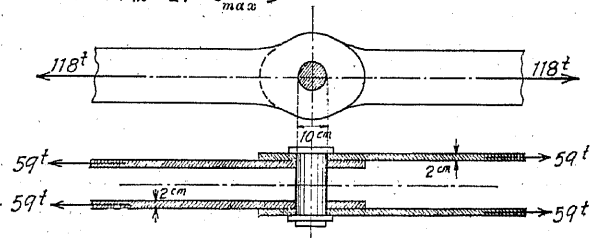


Fig. 192

$$W = \frac{\pi}{4} r^3 = \frac{\pi}{4} \cdot 5^3 = 98.175 \text{ cm}^3$$

$$\therefore \sigma_{max} = \frac{M}{W} = 1.20 \text{ t/cm}^2$$

$$Q = 59 \text{ t}, \quad F = 78.54 \text{ cm}^2$$

$$\therefore \tau_{max} = \frac{4Q}{3F} = 1.00 \text{ t/cm}^2$$

$$\lambda^2 = 4\tau_{max}^2 - \sigma_{max}^2 = 4 \cdot 1.00 - 1.20^2 = 2.56 \text{ t}^2/\text{cm}^4, \quad m = \frac{10}{3}$$

$$\left( \frac{m+1}{m-1} \right)^2 \frac{\lambda^2}{\sigma_{max}^2} = \frac{169}{49} \cdot \frac{2.56}{1.44} = 6.13$$

$$\therefore \frac{\eta}{r} = \frac{2 \cdot 1.00}{\sqrt{2.56(1+6.13)}} = 0.468$$

$$\therefore k_{max} = \frac{1}{20} \sigma_{max} \frac{\eta}{r} + \frac{13}{20} \sqrt{4\tau_{max}^2 - \lambda^2} \frac{\eta^2}{r^2} = 1.40 \text{ t/cm}^2$$

次にこの直應力を生ずべき點に於いて微分面  $ds$  に生ずる直應力  $\sigma'$  及び剪應力  $\tau'$  の分布圖を求めて見よう。

$$\sigma'_0 = \sigma_{max} \frac{\eta}{r} = 1.20 \cdot 0.468 = 0.56 \text{ t/cm}^2$$

$$\tau'_0 = \tau_{max} \sin \psi = 1 \cdot \sqrt{1-0.468^2} = 0.884 \text{ t/cm}^2$$

今  $k_{max}$  を生ずる周縁上の點に於ける切平面内に於いて  $x, y$  軸をとり  $\sigma'_0, \tau'_0$  をそれぞれ  $x, y$  軸の方向に一致せしむれば、主面が  $x$  軸となす角  $\varphi$  は次の式によつて與へられる。

$$\tan 2\varphi = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2\tau'_0}{\sigma'_0} = -\frac{2 \cdot 0.884}{0.56} = -3.157143$$

$$\therefore 2\varphi = \begin{cases} +107^\circ 34' \\ -72^\circ 26' \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} +53^\circ 47' \\ -36^\circ 13' \end{cases}$$

茲に應力は  $x, y$  軸に關して表したるを以つて

$$\sigma_x = \sigma'_0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = \tau'_0$$

と置いてゐる。

主應力を求めると

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma'_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma'^2_0 + 4\tau'^2_0}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.56 + \frac{1}{2} \sqrt{0.56^2 + 4 \cdot 0.884^2}$$

$$= 0.28 + 0.93 = 1.21 \text{ t/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 0.28 - 0.93 = -0.65 \text{ t/cm}^2$$

又  $\varphi = 0$  に対し  $\sigma' = \sigma_y = 0$  となる。

他の種々の  $\varphi$  に対し  $\sigma'$  及び  $\tau'$  を公式 (3) より求めると、夫々 Fig. 193 (a), (b) の如き  $\sigma'$ ,  $\tau'$  に対する分布圖を得る。

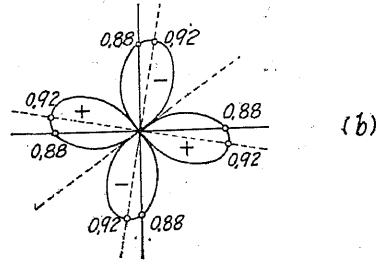
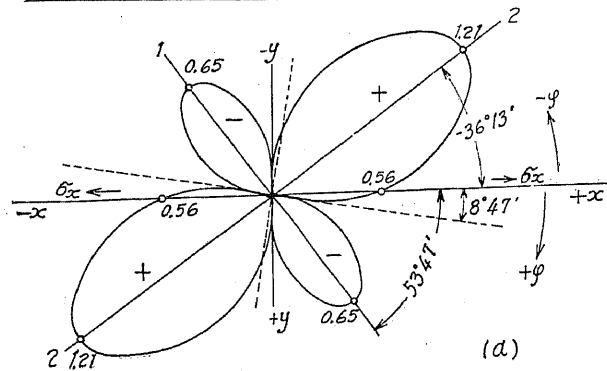


Fig. 193

(2). I 字形鋼桁

Fig. 194 に示す如き I 字形鋼が支間  $2^m$  にて支へられ桁中點にて  $P = 144$  の荷重を受けるものとする。この場合

突縁部と腹部との界に於ける眞主應力を求めて見よう。

桁断面はその中軸  $n$  に關し

$$S = 2,689 \text{ cm}^2, \quad I = 179,303 \text{ cm}^4,$$

$$W = 5,977 \text{ cm}^2$$

を有し、且つ桁中點に於いては

$$M = \frac{P \cdot l}{4} = 144 \cdot 50 = 7,200 \text{ t-cm}$$

なるを以つて

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} = 1.20 \text{ t/cm}^2, \quad \sigma = \sigma_{max} \frac{26.28}{30.00} = 1.05 \text{ t/cm}^2$$

となる。而して同點に對し剪應力を求めると

$$Q = \frac{1}{2} P = 72 \text{ t}, \quad \tau = \frac{Q \cdot S}{2y \cdot I} = \frac{72 \cdot 2,689}{2 \cdot 0.8 \cdot 179,303} = 0.25 \text{ t/cm}^2$$

$$\therefore k = \frac{7}{20} \cdot 1.05 + \frac{13}{20} \sqrt{1.05^2 + 4 \cdot 0.52^2} = 1.33 \text{ t/cm}^2$$

(7) 堰堤面に於ける主應力 (Principal stresses at face of the dam)

堰堤面に於ける極微直六面體に作用する直應力及び剪應力は接續部分が缺けて

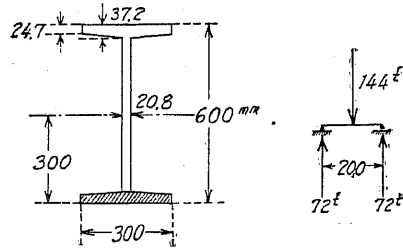


Fig. 194

ある爲堰堤内部に於けるものと異なるのであつて、今 Fig. 195 に於いて  $ABC$  を極微角錐とし、その奥行を 1 としそれに作用する應力其の他は圖に示す通りとする。然らば角錐の自重は他の諸量に比し高次の微量なるを以つて之れを無視し點  $E$  の周りの力率をとれば

$$\tau dx \cdot \frac{dh}{2} = \tau_1 dh \cdot \frac{dx}{2} \quad \therefore \tau = \tau_1$$

となる。今  $BC$  面と  $\varphi$  なる角をなす  $CG$  面を考へ、この面上に働く最大壓應

力及び剪應力を求めて見よう。面  $CG$  の面積を  $f$  とすれば次の如くなる。

$$f = \frac{dx}{\sin \varphi + \frac{dx}{dh} \cos \varphi} = \frac{dx}{\sin \varphi + \cot \theta \cos \varphi}$$

三角錐  $AGC$  の平衡の條件より

$$\sigma' \cdot f = \sigma_y dx \sin \varphi + \tau dx \cos \varphi$$

然るに一方三角錐  $ABC$  の平衡條件より

$$\sigma_y dx = \tau_1 dh = \tau dh$$

$$\therefore \tau = \sigma_y \frac{dx}{dh} = \sigma_y \cot \theta$$

$$\therefore \sigma' \cdot f = \sigma_y dx \sin \varphi + \sigma_y \cot \theta dx \cos \varphi$$

$$\therefore (9) \quad \sigma' = \sigma_y (\sin \varphi + \cot \theta \cos \varphi)^2$$

$\sigma'$  の最大最小を求める爲に  $\varphi$  に就いて微分して零と置けば

$$\frac{d\sigma'}{d\varphi} = 2\sigma_y (\sin \varphi + \cot \theta \cos \varphi) (\cos \varphi - \cot \theta \sin \varphi) = 0$$

然るに  $\varphi$  及び  $\theta$  が  $90^\circ$  以下の値なれば  $(\sin \varphi + \cot \theta \cos \varphi)$  は常に正號を探るを以つて  $\frac{d\sigma'}{d\varphi} = 0$  の解として

$$\cos \varphi - \cot \theta \sin \varphi = 0 \quad \text{或は} \quad \text{tg } \varphi = \text{tg } \theta$$

$$\therefore \varphi = \theta$$

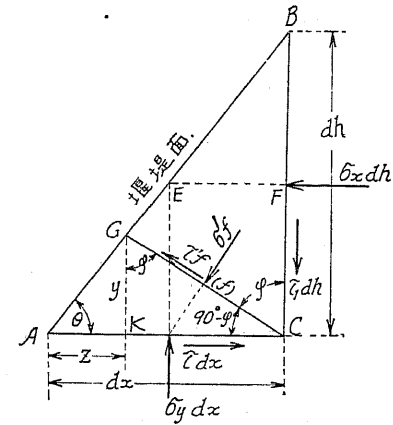


Fig. 195

を得る。而して

$$\frac{d^2\sigma'}{d\varphi^2} = 2\sigma_y \{ (\sin\varphi + \cot\theta \cos\varphi)(-\sin\varphi - \cot\theta \cos\varphi) + (\cos\varphi - \cot\theta \sin\varphi)^2 \}$$

に  $\varphi = \theta$  なる条件を入れると  $\frac{d^2\sigma'}{d\varphi^2} < 0$  となるを以つて条件  $\varphi = \theta$  は  $\sigma'$  を最大ならしめる条件である事を知る。故に公式(9)にこの条件を入れて

$$(10) \quad \sigma' = \sigma_y \operatorname{cosec}^2\theta = \sigma_y(1 + \cot^2\theta)$$

を得る。これ堰堤下流面に於ける最大壓應力を求める式である。

同様にして三角堰 ABC の他の平衡条件より

$$\tau' \cdot f = \sigma_y dx \cos\varphi + \tau dx \sin\varphi$$

$$(11) \quad \therefore \tau' = \sigma_y (\cos\varphi - \cot\theta \sin\varphi) (\sin\varphi + \cot\theta \cos\varphi)$$

$$\text{又} \quad \frac{d\tau'}{d\varphi} = \sigma_y [(1 - \cot^2\theta) \cos 2\varphi - 2\cot\theta \sin 2\varphi] = 0$$

$$\therefore \operatorname{tg} 2\varphi = -\cot 2\theta$$

今  $\frac{d^2\tau'}{d\varphi^2} = \sigma_y [2(\cot^2\theta - 1) \sin 2\varphi - 4\cot\theta \cos 2\varphi]$  に  $\operatorname{tg} 2\theta = -\cot 2\theta$  即ち  $\theta = 45^\circ + \theta$  を入れると  $\frac{d^2\tau'}{d\varphi^2} < 0$  となるを以つて条件  $\theta = 45^\circ + \theta$  は  $\tau'$  を最大ならしめる条件である事を知る。故に公式(11)にこの条件を入れて

$$(12) \quad \tau' = \frac{-\sigma_y \operatorname{cosec}^2\theta}{2} = -\frac{\sigma_y}{2}(1 + \cot^2\theta)$$

を得る。これ堰堤下流面に於ける最大剪應力を與へる式である。この公式(10)

(12) は重力堰堤の設計に際し、満水時の堤趾、又は空虚時の堤踵の應力計算に

用ひられる重なる公式である。

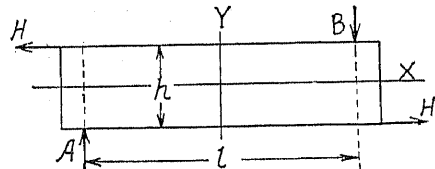
練習問題 10

(1) 圖の如き高さ  $h$  なる堰堤の満水時に於ける B 點の應力が許容抗張強度  $\sigma_a$  を超過せざる爲には幅  $x$  は如何程にすべきか。但し堰堤材料及び水の單位重量を夫々  $\gamma_1, \gamma$  とせよ。

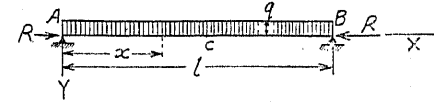
$$(答) \quad x = h \sqrt{\frac{\gamma h}{\sigma_a + \gamma_1 h}}$$

(2) 圖の如く幅  $b$ 、高さ  $h$  なる矩形断面の長さ  $l$  なる桁が偶力  $HL$  を受けたる場合垂直断面に於ける直應力が零なる點の軌跡を求む。

$$(答) \quad xy = \frac{1}{12}hl$$



(3) 圖の如く單桁 AB が等布荷重  $q$  及び軸力  $R$  を受けた場合の彈性線及び桁中央點の撓度を求む。



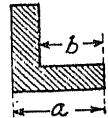
$$(答) \quad y = \frac{q}{R} \left\{ \frac{1}{w_2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{wl}{2} - wx\right)}{\cos\frac{wl}{2}} - 1 \right] - \frac{1}{2}x(l-x) \right\}$$

$$y_c = \frac{q}{R} \left\{ \frac{1}{w^2} \left[ \frac{1}{\cos\frac{wl}{2}} - 1 \right] - \frac{l^2}{8} \right\} \quad \text{但し } w = \sqrt{\frac{RE}{EI}}$$

(4) 圖の如き等脚山形断面の核心を求む。

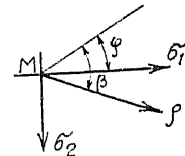
(5) 中空圓形断面の核心面が内徑圓と一致する場合の内外徑の比を求む。

$$(答) \quad 0.268$$



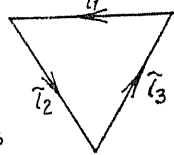
(6) 一點 M の主應力  $\sigma_1, \sigma_2$  を與へて應力  $\rho$  の傾斜角  $\beta$  が最小なる如き面の方向角  $\varphi$  を求む。又その場合の應力  $\rho$  及び傾斜角の値を計算せよ。

$$(答) \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}, \quad \rho = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2}$$



(7) 正三角形断面を有する極微三角堰體の三側面の剪應力を各々圖の如く  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  とする時これらに如何なる關係が成立すべきか。但し底面には應力なきものとする。

$$(答) \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$



(8) 圖の如く角堰體に  $P_1, P_2$  の二力が働く時断面 F に於ける剪應力の分布を一様なりとして主應力を計算せよ。

但し  $P_1 = P_2 = 100 \text{ kg}$ ,  $F = 1 \text{ cm}^2$  とする。

$$(答) \quad \sigma_1 = 61.8 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_2 = -161.8 \text{ kg/cm}^2$$

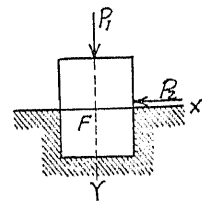
(9) 彈性體内に作用する主應力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  とそれに相當する主單位變形  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  の間には次の關係が成立する事を證明せよ。

$$\sigma_1 = \frac{m}{m+1} E \left( \epsilon_1 + \frac{c}{m-2} \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{m}{m+1} E \left( \epsilon_2 + \frac{c}{m-2} \right)$$

$$\sigma_3 = \frac{m}{m+1} E \left( \epsilon_3 + \frac{c}{m-2} \right)$$

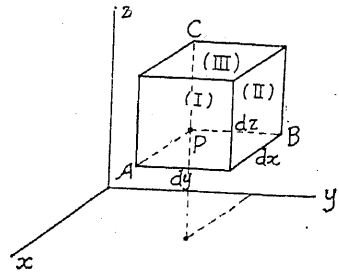
(10) 極微直六面體の一點に交る三稜の方向を夫々  $x, y, z$  とし各面に働く應力  $P_x, P_y, P_z$  を軸の方向に分解して





平行なる軸の方向	$x$ 軸	$y$ 軸	$z$ 軸
(I) 面に働く應力 $P_x$	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$
(II) 面に働く應力 $P_y$	$\tau_{yx}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$
(III) 面に働く應力 $P_z$	$\tau_{zx}$	$\tau_{zy}$	$\sigma_z$

とする時平衡條件式として次の諸式を得る事を證す。



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{array} \right.$$