第八章　彈性變形に因る働作

第一節　長さの變形による働作 (Work Done by Longitudinal Deformation)

長さ l、斷面積 F なる壔體が一端にて固定され、他端に零から漸次增加する張力 P が加へられたものとなる。然らば玆に壔體は軸の方向に伸脹を受けるものであるが、その伸脹を次の三つに性質上區別する事が出來る。

（1）　總伸脹　　λ

（2）　永久伸脹　λ'

（3）　彈性伸脹　λ''

これ等の各種の伸脹は何れも力 P の函數であつて又逆に P は $\lambda,\ \lambda',\ \lambda''$ の函數と考へる事を得る。從つて、

$$\begin{cases} \lambda = f_1(P) \\ \lambda' = f_2(P) \\ \lambda'' = f_3(P) \end{cases} \quad \text{或は} \quad \begin{cases} P = F_1(\lambda) \\ P = F_2(\lambda') \\ P = F_3(\lambda'') \end{cases}$$

變形が荷重と共に增加する有樣を說明する爲に、$P = F_1(\lambda)$ の關係を三つの場合に就いて圖示すれば Fig. 151 の樣である。(a) 線は鋼の如く比例限度までは伸脹と荷重が比例する場合を示し、(b) 線は鑄鐵、混凝土の樣に荷重より變形が速かに增加するものを示し、更に (c) 線は革帶の如く伸脹が荷重より緩かに增加するものを示してゐる。今 (c) 線を例にとつて考へるに荷重が次第に增し $\overline{OQ_1} = P$ に達する迄の機械的全働作は圖の影線を施せる部分の面積に當るわけであるから

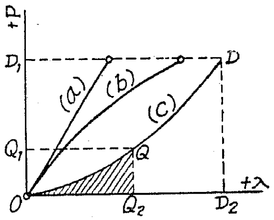


Fig. 151

（1）　$A_1 = \int_0^{\lambda} P\,d\lambda = \int_0^{\lambda} F_1(\lambda)\,d\lambda$

となる。而して全伸脹 λ は永久伸脹 λ'、彈性伸脹 λ'' の二つからなるものであるから A_1 は次の如く $\lambda',\ \lambda''$ に依る二つの働作 $A_2,\ A_3$ に分けて考へる事が出來る。

（2）　$A_2 = \int_0^{\lambda'} P\,d\lambda' = \int_0^{\lambda'} F_2(\lambda')\,d\lambda'$

（3）　$A_3 = A_1 - A_2 = \int_0^{\lambda''} P\,d\lambda'' = \int_0^{\lambda''} F_3(\lambda'')\,d\lambda''$

一般に彈性學に於いては彈性變形のみを論ずるが故に上の（3）に依つて與へられる A_3 を稱して單に**變形働作**と云ひ、且つ通例變形と應力が比例するものと假定する。從つてこの意味に於ける長さの變化 λ に對する變形働作 A は次の如くなる。

$$A = \frac{1}{2}P\lambda = \frac{1}{2}F\sigma\lambda$$

尙ほ力が桿軸の方向にのみ作用する時は $\lambda = \alpha\sigma l$ なるを以つて

（4）　$A = \frac{1}{2}\alpha\sigma^2 Fl = \frac{1}{2}\alpha\sigma^2 V$

斯くの如く長さの變化による働作は桿の容積 $V = Fl$ 及び應力の二乘に比例するものである。（4）に於いて σ を單位變形 ε を以つて表せば $\varepsilon = \alpha\sigma$ なるを以つて

（5）　$A = \frac{1}{2\alpha}\varepsilon^2 Fl = \frac{1}{2\alpha}\varepsilon^2 V$

となる。Fig. 89 に示した樣に斷面が變化する場合には、下端から x の距離にある微分體 $F\,dx$ に對する働作は長さ dx の伸脹が εdx となるを以つて

$$dA = \frac{1}{2}F\sigma\cdot\varepsilon dx = \frac{1}{2\alpha}F\varepsilon^2 dx = \frac{\alpha}{2}F\sigma^2 dx$$

となる。從つて桿全體に對しては

（6）　$A = \frac{1}{2\alpha}\int_0^l \varepsilon^2 F\,dx = \frac{\alpha}{2}\int_0^l \sigma^2 F\,dx$

となり特に F を一定とすれば $A = \frac{\alpha}{2}\sigma^2 Fl$ となつて（4）と一致する。

以上の說明に於いては荷重 P は零より漸次增加し、各瞬間に於いて外力とそれによつて生ずる應力の間に常に平衡が保たれてゐるものと假定した。所が今全力 P を突然衝擊を生ぜざる樣にして働かした場合を考へるに、その材料はその

瞬間に零から長さ λ だけ伸び、從つて伸張による應力の働作は $\frac{1}{2}\lambda F\sigma$ であるが外力のなす働作は $P\lambda$ となる。よつて次の關係式を得る。

$$P\lambda = \frac{1}{2}\lambda F\sigma \qquad \therefore \ \sigma = 2\frac{P}{F}$$

要するに衝撃を生ぜずして急に力が作用した場合には、徐々に增加する場合に比して二倍の應力を生ぜしめる事になる。

第二節 彎曲による働作(Work Done by Bending)

彈性體が單に彎曲を受ける樣に支へられ且つ荷重された場合、彎曲と共に生ずる剪力及び外力作用點に生ずる部分的壓力を別とすれば、彎曲によつて生ずる働作は次の樣にして求める事が出來る。Fig. 100 (a),(b) に示した樣に桁軸に沿うて長さ dx の部分を考へ、軸に直角なる斷面に於いて中軸 OO から η の距離にある微分線條 dF に生ずる應力を σ とすれば、その微分長 dx の部分に對する働作は前節に說明した樣に

$$dA = \frac{\sigma dF}{2}\varepsilon dx = \frac{\alpha}{2}\sigma^2 dF\cdot dx$$

となる。今彎曲力率 M_b を生ぜしめる力は斷面主軸の一つを含む面にあるものとし、他の主軸に關する慣性能率を I とすれば

$$\sigma = \frac{M_b}{\mathrm{I}}\eta$$

$$\therefore \ dA = \frac{\alpha}{2}\frac{M_b^2}{\mathrm{I}^2}\eta^2 dF\cdot dx$$

從つて全體の桁に對する機械的働作は

$$(1) \qquad A = \frac{\alpha}{2}\int\frac{M_b^2}{\mathrm{I}^2}dx\int\eta^2 dF = \frac{\alpha}{2}\int\frac{M_b^2}{\mathrm{I}}dx$$

となる。玆に積分は全體の桁長に及ぶべきものであつて、今例として Fig. 98に示す肱木桁をとり $\xi = l-x$ とすれば $M = -P\xi,\ d\xi = -dx$ となる。
從つて

$$A = \frac{\alpha}{2}\int_0^l\frac{M_b^2}{\mathrm{I}}dx = -\frac{\alpha}{2}\int_l^0\frac{P^2\xi^2}{\mathrm{I}}d\xi = \frac{\alpha}{6}\frac{P^2}{\mathrm{I}}l^3$$

となる。この公式は又撓度を求める際に應用出來るのであつて、今力 P は零か

ら徐々に增加して P となるものとし、B 端の撓度も亦 P と平衡を保ちつゝ漸次零から增加して y_B に達するものとすれば、外力に依る働作は $\frac{1}{2}Py_B$ なるべきを以つて應力による働作と等しいと置いて次式を得る。

$$\frac{1}{2}Py_B = \frac{\alpha}{6}\frac{P^2}{\mathrm{I}}l^3$$

$$\therefore \ y_B = \frac{\alpha}{3}\frac{Pl^3}{\mathrm{I}}$$

この結果は第五章第二節公式(4)に於いて等布荷重のない場合、即ち $Q=0$ とした場合と一致する。尙この場合固定端の彎曲力率 M_A は $-P.l$ であつてその斷面に於ける正の方向の最遠纖維までの距離を $+e_1$ とすれば

$$-Pl = \sigma_1\frac{\mathrm{I}}{e_1}$$

$$\therefore \ A = \frac{\alpha}{6}\sigma_1^2\frac{\mathrm{I}}{e_1}l$$

となる。今 $\mathrm{I} = \varkappa Fe_1^2$ とすれば

$$(2) \qquad A = \frac{\alpha}{6}\varkappa\sigma_1^2 Fl = \frac{\alpha}{6}\varkappa\sigma_1^2 V$$

となる。玆に $\varkappa$ は係數であつて、例へば矩形斷面に對して

$$\mathrm{I} = \frac{1}{12}bh^3 = \varkappa.bh.\left(\frac{h}{2}\right)^2, \qquad \therefore \ \varkappa = \frac{1}{3}$$

となり、又圓形斷面に對しては

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{64}d^4 = \varkappa.\frac{\pi}{4}d^2.\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \therefore \ \varkappa = \frac{1}{4}$$

となる。

要するに彎曲による働作は桁の容積及び最遠纖維に於ける應力 σ_1 の自乘に比例する。

尙ほ第五章第三節に述べた等强桁に對しては各斷面に於いて σ を一定とせるを以つて公式(1)に於いて $\frac{M_b}{\mathrm{I}}e_1 = \sigma_1 = \sigma$ とすれば

$$A = \frac{\alpha}{2}\int\frac{M_b^2}{\mathrm{I}}dx = \frac{\alpha}{2}\int\left(\frac{\mathrm{I}\sigma}{e_1}\right)^2\frac{dx}{\mathrm{I}} = \frac{\alpha}{2}\sigma^2\int\frac{\mathrm{I}}{e_1^2}dx$$

となり、更に $\mathrm{I} = \varkappa Fe_1^2$ とすれば次の(3)式を得る。

$$(3)\qquad A = \frac{\alpha}{2}\varkappa\sigma^2\int_0^l F dx = \frac{\alpha}{2}\varkappa\sigma^2 V$$

かくの如く等强桁の働作は容積の等しい一樣な斷面の墻形桁に比し、三倍大となるのであつて Fig. 104 に示す矩形斷面の等强桁に對しては

$$\varkappa = \frac{1}{3} \qquad \therefore\ A = \frac{\alpha}{6}\sigma^2 V$$

となる。

第三節 撚扭による働作 (Work Done by Torsion)

前章第二節に述べた樣に墻體が單に扭力を受ける時のみを考へ、外力が働く錘の表面の部分的變形及び變形斷面に生ずる曲面の影響を無視し、且つ剪斷係數 β を一定と假定する。Fig. 132 (a), Fig. 135, Fig. 139 に於いて斷面上任意の一點 P に於ける微分面を $dF = dy\cdot dz$ とし、錘の全長を l とする。然らば單位滑動 γ と扭應力 τ の間には $\tau = \frac{\gamma}{\beta}$ なる關係が成立するを以つて微分體 dFl の働作は

$$dA = \frac{\tau dF}{2}\gamma l = \frac{\beta}{2} l\tau^2 dF$$

となり、錘全體に就いては次の如くになる。

$$(1)\qquad A = \frac{\beta}{2} l\int\tau^2 dF$$

更に色々の斷面に就いて計算を行うて見よう。

(a). Fig. 132 (a) に示した圓形斷面に於いて中心から距離 ρ にある點の扭應力 τ と最大扭應力 τ_1 の間には次の關係が成立する。

$$\tau = \tau_1\frac{\rho}{r}$$

$$\therefore\ A = \frac{\beta}{2} l\frac{\tau_1^2}{r^2}\int\rho^2 dF = \frac{\beta}{2} l\frac{\tau_1^2}{r^2}\cdot\frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\beta}{4}\tau_1^2\pi r^2 l$$

又 $\pi r^2 l = V$ なるを以つて

$$(2)\qquad A = \frac{\beta}{4}\tau_1^2 V$$

となる。尙ほ τ_1 は第七章第二節公式 (3) から次の關係式によつて與へられる。

$$\tau_1 = \frac{16}{\pi}\frac{M_t}{d^3}$$

同樣にして Fig. 148 に示す中空圓墻に對して

$$(3)\qquad A = \frac{\beta}{4}\tau_1^2\frac{d^2+d_0^2}{d^2}V$$

玆に $V = \frac{\pi}{4}(d^2-d_0^2)l,\quad \tau_1 = \frac{16}{\pi}M_t\frac{d}{d^4-d_0^4}$

今同一材料からなる圓墻體が張力、彎曲力率、扭力を受けた時の機械的働作を比較すれば各々許容應力に對し

第一節公式 (4) から $\sigma = \sigma_a$ として $A = \frac{1}{2}\alpha\sigma_a^2 V$

第二節公式 (2) から $\sigma_1 = \sigma_{b\cdot a};\ \varkappa = \frac{1}{4}$ として $A_b = \frac{1}{24}\alpha\sigma_{b\cdot a}^2 V$

第三節公式 (2) から $\tau_1 = \tau_{t\cdot a}$ として $A_t = \frac{1}{4}\beta\tau_{t\cdot a}^2 V$

となる。第七章第一節公式 (9)～(11) に從へば

$$\beta = 2\frac{m+1}{m}\alpha,\qquad \tau_a = \frac{m}{m+1}\sigma_a$$

なるを以つて $m = \frac{10}{3},\ \tau_a = \tau_{t\cdot a},\ \sigma = \sigma_{b\cdot a} = \sigma_a$ とすれば

$$\beta = 2.6\alpha,\qquad \tau_t = \frac{10}{13}\sigma_a = \frac{10}{13}\sigma_{b\cdot a}$$

$$\therefore\ A : A_b : A_t = \frac{1}{2}\alpha\sigma_a^2 : \frac{1}{24}\alpha\sigma_a^2 : \frac{1}{4}\cdot 2.6\alpha\left(\frac{10}{13}\sigma_a\right)^2$$

$$= 1 : \frac{1}{12} : \frac{10}{13} = 1 : 0.083 : 0.769$$

故に一定容積の錘に許容應力を生ぜしめる時に於ける働作は彎曲の場合が最も小である。

(b). Fig. 135 に示す楕圓體に對して前章第二節公式 (10) から

$$\tau = \frac{2}{\pi}\frac{M_t}{a^3b^3}\sqrt{a^4y^2+b^4z^2}$$

從つて本節公式 (1) に從つて

$$A = 2\frac{\beta}{\pi^2}\frac{M_t^2}{a^6b^6}l\int(a^4y^2+b^4z^2)dF$$

となる。而して $\int y^2 dF = \frac{\pi}{4}ab^3,\quad \int z^2 dF = \frac{\pi}{4}a^3b$ なるを以つて次の式を

得る。

$$(4)\qquad A = \frac{\beta}{2\pi}\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}M_t^2 l$$

更に前章第二節公式 (13) を用ひると

$$(5)\qquad A = \frac{\beta}{2}\frac{\pi}{4}\tau_{t.a}^2\frac{b}{a}(a^2+b^2)l = \frac{\beta}{8}\frac{a^2+b^2}{a^2}\tau_{t.a}^2 V$$

茲に $\qquad V = \pi abl$

尚ほ公式（4）を用ひると長さ l の楕圓壔の兩端面にある主軸がなす扭角 ϑ_l を計算する事が出來る。今扭力率 M_t が零から漸次增加するものとして一つの端面が他の端面に對して ϑ_l だけ廻轉するものとすれば、その機械的働作は $\frac{1}{2}\vartheta_l M_t$ であるから之れを彈性體內の扭應力によつて爲される働作に等しいと置いて次式を得る。

$$\frac{1}{2}M_t\vartheta_l = \frac{\beta}{2\pi}\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}M_t^2 l$$

$$\therefore\ (6)\quad \left\{\begin{aligned} \vartheta_l &= \frac{1}{\pi}\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}M_t\beta l \\ \text{或は}\quad \vartheta &= \frac{1}{\pi}\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}M_t\beta \end{aligned}\right.$$

之れ既に前章第二節の表に與へた値と一致するものである。

(c). Fig. 135 に示す角壔に扭力が作用した場合は斷面 $(b\times h)$ 上の任意の一點 P に於ける扭應力は前章第二節公式 (18) から

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2+\tau_z^2} = \sqrt{m^2\Big[1-\Big(\frac{2z}{h}\Big)^2\Big]^2y^2+n^2\Big[1-\Big(\frac{2y}{b}\Big)^2\Big]^2z^2}$$

$$\therefore\ \int\tau^2dF = m^2\int y^2dF+n^2\int z^2dF-8\Big(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{b^2}\Big)\int y^2z^2dF$$
$$+\frac{16m^2}{h^4}\int y^2z^4dF+\frac{16n^2}{b^4}\int y^4z^2dF$$

然るに $\int y^2z^4dF = \frac{1}{960}b^3h^5$, $\int y^4z^2dF = \frac{1}{960}b^5h^3$, $\int y^2z^2dF = \frac{1}{144}b^3h^3$,

$$\int y^2dF = \frac{1}{12}b^3h.\qquad \int z^2dF = \frac{1}{12}bh^3$$

なるを以つて

$$\int\tau^2dF = \frac{1}{10}m^2b^3h+\frac{1}{10}n^2bh^3-\frac{1}{18}\Big(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{b^2}\Big)b^3h^3$$

尚ほ前章第二節から $m = \frac{2}{b}\tau'_a$, $n = \frac{2b}{h^2}\tau'_a$ であつて、この A 點の扭應力 $\tau'_a = \tau_{t.a}$ となれば

$$\int\tau^2dF = \frac{8}{45}\tau_{t.a}^2 b\frac{b^2+h^2}{h}$$

從つて公式（1）から次の結果を得る

$$(7)\qquad A = \frac{4}{45}\beta\tau_{t.a}^2\frac{b}{h}(b^2+h^2)l = \frac{4}{45}\beta\frac{b^2+h^2}{h^2}\tau_{t.a}^2V$$

茲に $\qquad V = bhl,\qquad \tau_{t.a} = \frac{9}{2}\frac{M_t}{b^2h}$

從つて（7）は又次の如くかく事も出來る。

$$(8)\qquad A = \frac{9}{5}\beta\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}M_t^2l$$

前項楕圓壔の場合に述べたと同樣にこの公式から角壔に對する單位扭角 ϑ を求める事が出來る。l の間隔にある二斷面が撚扭する角は ϑ_l なるを以つて前と同樣に

$$\frac{1}{2}M_t\vartheta_l = \frac{9}{5}\beta\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}M_t^2l$$

$$\therefore\ (9)\qquad \vartheta_l = 3.6\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}M_t\beta l,\quad \text{或は}\quad \vartheta = 3.6\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}M_t\beta$$

この結果は前章第三節〔4〕の表と係數に於いて一致しないがそれは（9）の式が近似的解法により β を一定として導かれたが故である。

第四節 剪力による働作 (Work Done by Shear)

剪力は前にも述べた樣に單獨には起らず、多くは彎曲力率に伴はれるものであるが、茲には桿軸に直角に剪力 Q のみが作用する場合に就いて考へよう。前章第三節公式（7）及び Fig. 146 (a) に從つて線條 $P'P'$ 上にある點 P に於ける剪應力は次の式にて與へられる。

$$\tau = \frac{Q}{2y\cos\varphi}\frac{S}{I}$$

而して茲に剪斷係數 β を一定とし、Fig. 149 (a) に於いて垂直主軸から z

の距離にある點 P に於ける微分面 $dF = d\eta\, dz$ の滑動を γ とすれば、その點の剪應力は $\tau = \frac{\gamma}{\beta}$ なるを以つて、鋲軸の方向に長さ dx なる微分體の爲す働作は次の式で與へられる。

$$dA = \frac{\tau dF}{2}\gamma dx = \frac{\beta}{2}\tau^2 dF\, dx$$

從つて剪力による變形働作は

$$(1)\qquad A = \frac{\beta}{2}\int dx \int \tau^2 dF = \frac{\beta}{2}\int dx \iint \tau^2 d\eta\, dz$$

となる。

(α). 幅 b_1 高 h なる矩形斷面を有する角壔に對しては前章第三節〔1〕に從つて $\varphi = \varphi' = 0,\quad \tau = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\left[1-\left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right],\quad dF = b\,d\eta$

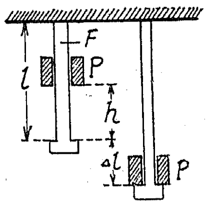
$$\therefore\ (2)\qquad A = \frac{\beta}{2}\int dx \frac{9}{4}\frac{Q}{bh^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left[1-\left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]d\eta. = \frac{3}{5}\beta\int\frac{Q^2}{bh}dx$$

となる。

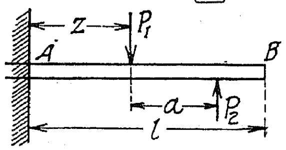
(b). Fig.145 に示す如き矩形斷面を有する桁が水平に二つの支點にて支へられ支間 l の中央に荷重 P を受けた時剪力により中央に生ずる撓度は剪應力による働作を外力による働作に等しいと置いて次の如くして求める事が出來る。

$$\frac{1}{2}P\delta = \frac{3}{5}\beta\int\frac{Q^2}{bh}dx = \frac{3}{20}\beta\frac{P^2 l}{bh}\qquad\therefore\ \delta = \frac{3}{10}\beta\frac{Pl}{bh}$$

練　習　問　題 9



(1) 圖の如く長さ $l = 100\,cm$ なる壔體が吊されてゐる時 $P = 1t$ なる荷重が $h = 50\,cm$ だけ落下して作用するものとする。この場合壔體に於ける張應力が壔體の彈性限度 $2.5\,t/cm^2$ を超過せざる爲には斷面積 F は何程とすべきか。但し彈性係數 $E = 2{,}000\,t/cm^2$ とせよ。　　(答) $F = 321\,cm^2$



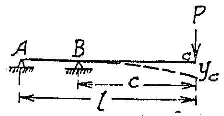
(2) 肱木桁 AB が圖の如く荷重 P_1, P_2 を a なる間隔を隔てゝ荷ふものとす。この場合 A より P_1 迄の距離 Z を如何にすれば彎曲による働作最大となるか。又その時の働作幾程となるか。但し $P_1 > P_2$ とする。

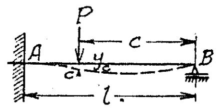
(答) $Z = a\frac{P}{P_1-P_2},\quad {}_{max}A = \frac{a^3}{6EI}\frac{P_1P_2^2}{P_1-P_2}$

(3) 圓形斷面（半徑 γ）の長さ l なる肱木桁が q なる等布荷重を荷ふ場合垂直剪力による働作は何程となるか。　　(答) $A = \frac{4}{81}\frac{q^2 l^3}{\pi\gamma^2}\beta$

(4) 兩端固定なる場合、一端固定他端單純支持なる場合、及び兩端單純支持なる場合の水平桁の爲さるゝ働作は之れに働く等分荷重力度が夫々 $2\sqrt{6} : 3 : 2$ の割合なる時相等しい事を證せよ。

(5) 圖示の場合に荷重點に生ずる撓度を求めよ。





(答) $\frac{1}{3}\frac{Pc^2(l+c)}{EI},\quad \frac{Pc^2(l-c)^3(3l+c)}{12\,EI\,l^3}$