

# 第七章 扭力及び剪力

## 第一節 總 說

第四章以下第六章迄に論じた變形は凡べて長さの變化に關するものであつたがこの章に於いては是等とは全く別な變形に就いて論じよう。今 Fig. 121 に示す微小四面體  $OABC$  を考へるに、これは邊  $OA, OB, OC$  に於いて互に直角に交る三面  $AOB, BOC, COA$  及び他の面  $ABC$  に界せられたものであつて隅邊  $OA, OB, OC$  を與へれば形は確定する。この四面體に互に平衡状態にある外力が作用するものとすれば各面に變形を生じ、邊長  $OA, OB, OC$

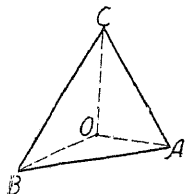


Fig. 121

及び  $\angle BOC, \angle COA, \angle AOB$  が變化する。この際各邊は微分小であるから曲面になる事はなく常に平面を保つものと假定する。即ち四面の變化は邊長及び角度の變化に依つて起るのであつて、前述の長さの變化の他に角度の變化と云ふ現象が生ずるに至る。これ等の變化の事實を説明する爲に下面  $O_1ADB$  が固定せられた極微直立方體  $O_1ADBCGFE$  (Fig. 122) を考へ、その上面  $CGFE$  の上に

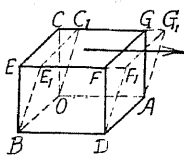


Fig. 122

$OA$  の方向に向ひ等布せられた力を作用させて見る。然らば上面  $CGFE$  は滑動し  $C_1G_1F_1E_1$  となり、始め直角であつた  $\angle EBD$  及び  $\angle COA$  は鋭角  $\angle E_1BD$  及び  $\angle C_1OA$  となる。即ち  $\angle EBE_1 = \angle COC_1 = r$  だけ變化するに至る。而してこの角度化  $r$  の値は

$$\text{tg } r = \frac{EE_1}{BE} = \frac{CC_1}{OC}$$

に依つて與へられる。尚ほ  $r$  の値は極めて小であるから次の如く置きかへる事が出来る。

$$r \approx \text{tg } r = \frac{EE_1}{BE} = \frac{CC_1}{OC} = \frac{EF_1}{DF} = \frac{GG_1}{AG}$$

従つてこの  $r$  の値は稜  $BO$  から  $OC$  の方向に單位距離だけ離れた平面の  $OA$

の方向に於ける變位と考へる事を得るのであつて、之れを稱して滑動 (Sliding) と云ふ。この  $r$  の意義を更に詳しく説明する爲に次の如く考へて見る。即ち Fig. 123 に於いて始め直角に交つた面  $OX$  及び  $OZ$  が變形の後  $OA_1$  及び  $OC_1$  の位置を採るものとする。然らば  $\angle XOZ = \angle R$  は  $\angle XO_1A_1$  及び  $\angle ZOC_1$  だけ變化する事になり、その正切 (Tangent) は  $\overline{AA_1}$  及び  $\overline{CC_1}$  を夫々  $OX$  及び  $OZ$  に垂直なるものとすれば  $\frac{\overline{AA_1}}{OA}$  及び  $\frac{\overline{CC_1}}{OC}$  に依つて與へられる。而して弾性變形は極めて小であるから全體の變形は次の式にて與へる事が出来る。

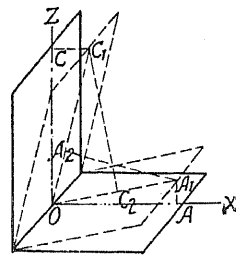


Fig. 123

$$r = \angle XO_1A_1 + \angle ZOC_1 = \frac{\overline{AA_1}}{OA} + \frac{\overline{CC_1}}{OC}$$

尚ほ Fig. 123 に於いて  $\overline{A_1A_2} \perp \overline{OC_1}$ ,  $\overline{C_1C_2} \perp \overline{OA_1}$  とすれば

$$r = \frac{\overline{AA_1}}{OA} + \frac{\overline{CC_1}}{OC} = \frac{\overline{OA_2}}{A_1A_2} = \frac{\overline{OC_2}}{C_1C_2}$$

となる。従つて、 $r$  は始め直角なる角の角變化であつてその値は上の式に依つて與へられると云ふ事が出来る。

再び元に戻つて Fig. 122 に示す極微直立方體を一つの弾性體の内部にあるものと考へ、外力の作用により  $O_1ADBC_1G_1F_1E_1$  なる形に變化したものとす。然らば面  $CGFE$  は滑動して  $C_1G_1F_1E_1$  となつたのであつてこの面  $CGFE$  上に働く内力を稱して剪應力と云ふ。前に説明した張應力及び壓應力はその作用する面に直角の方向をとつたのであるが、この剪應力はその作用面上に平行に起るのである。

而して滑動  $r$  を生ぜしめる剪應力を  $\tau$  とする時次式に依つて與へられる  $\beta$  を剪斷係數 (Shearing modulus) と云ふ。

$$(1) \quad \beta = \frac{\tau}{r}$$

即ち  $\beta$  は初め直角に交つた二面が  $1 \text{ kg/cm}^2$  なる剪應力の爲に生じた角變化をラジアン (Radian) にて表したものである。更に (1) 式より

$$(2) \quad \tau = \beta \cdot \tau$$

$$(3) \quad \tau = \frac{\tau}{\beta}$$

となるを以つて滑動  $\tau$  は剪應力と剪断係数との積であり、又剪應力  $\tau$  は滑動を剪断係数で割つたものであると云ふことが出来る。 $\beta$  の逆数を剪断弾性係数と云ふ。要するに滑動、剪應力、及び剪断係数の関係は丁度前に述べた變形、直應力及び變形率の如き關係であつて、直應力に於ける  $\alpha$  と同様に  $\beta$  は剪應力の一定限度内にては一定である。

更に直角に交る二面に於ける剪應力の關係を知る爲に Fig. 124 に示す如き極微直六面體を考へ、その邊長  $OA, OB$ 、及び  $OC$  を夫々  $a, b$ 、及び  $c$  とする。而して應力としては剪應力のみが働くものとする。即ち

(1): 面  $OADB$  上に剪應力  $\tau_1$ 、從つて全體として  $\tau_1 \cdot ab$

(2): (1) と平行な面  $CGFE$  上に剪應力  $\tau_1'$ 、從つて全體として  $\tau_1' \cdot ab$

(3): 面  $OBEC$  上に剪應力  $\tau_2$ 、從つて全體として  $\tau_2 \cdot bc$

(4): (3) と平行な面  $ADFG$  上に剪應力  $\tau_2'$ 、從つて全體として  $\tau_2' \cdot bc$

が働くものとする。所が面  $CGFE$  は極めて面  $OADB$  に近いから  $\tau_1'$  は  $\tau_1$  に比し、微分小だけ異なるものと考へられる。從つて  $\tau_1' = \tau_1 + \Delta_1$  と置く事を得べく、同様にして  $\tau_2' = \tau_2 + \Delta_2$  と置く事を得る。然るにこれ等の力は互に平衡を保つを要するから、直六面體の重心を通り稜  $OB$  に平行な軸  $YY$  に關する力率の和は零でなければならぬ。故に Fig. 125 に依つて

$$\tau_1 \cdot ab \frac{c}{2} - \tau_2 \cdot bc \frac{a}{2} + \tau_1' \cdot ab \frac{c}{2} - \tau_2' \cdot bc \frac{a}{2} = 0$$

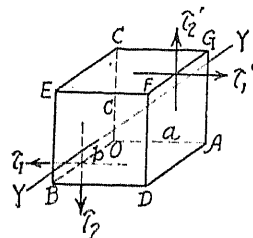


Fig. 124

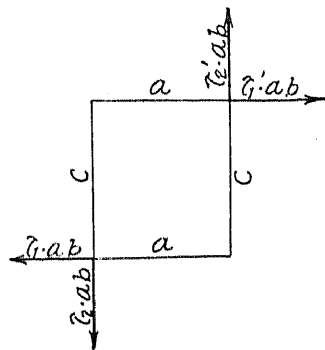


Fig. 125

$$\therefore \tau_1 \cdot abc + \frac{1}{2} \Delta_1 \cdot abc - \tau_2 \cdot abc - \frac{1}{2} \Delta_2 \cdot abc = 0$$

今  $\tau_1, \tau_2$  に比し微分小である  $\Delta_1, \Delta_2$  を含む項を無視すれば

$$\tau_1 - \tau_2 = 0$$

$$\therefore (4) \quad \tau_1 = \tau_2$$

となる。故に稜  $OB$  に直角である剪應力は互に相等しいと云ふ事が出来る。しかし乍らこの結果は前述の如く直六面體の四つの面  $OADB, CGFE, OBEC$ 、及び  $ADFG$  に單にその稜に直角に剪應力のみが働く場合であつて、一般にはその六つの面に各々直應力と剪應力が作用し、又極微直六面體の重力が作用する事を考へねばならない。(拙著、橋梁工學特論 I, P. 233 参照)。所が四つの面  $OADB, CGFE, OBEC, ADFG$  に働く直應力の軸  $YY$  に關する力率は零であり、又他の面  $OAGC, BDFE$  に働く直應力は軸の方向と一致して力率に關係はない。又この直六面體に働く重力も軸を通して働くから力率を生ぜざるべく、面  $OAGC, BDFE$  上に働く剪應力も同様に力率を生じない。尙面  $OADB, CGFE, OBEC, ADFG$  上に於いて  $YY$  の方向に平行に働く剪應力は  $YY$  軸に平行なるを以つて  $YY$  軸に關する力率には何等の影響を及ぼさない。したがつて極微直六面體に働き得るすべての應力及び外力を考へても (4) の式が成立するを以つて次の法則を得る。

直角に交る二面に於いてその交線に直角に働く剪應力の分力は互に相等しい。

## 第二節 滑動と伸縮變形との關係

Fig. 126 に於いて  $ABCD$  を直六面體の断面とし、變形後は四邊形  $A'EFD$  となりたるものとする。然らば面  $BC$  の受けた移動は  $\overline{BE} = \overline{CF}$  なるを以つて、

$$\tau = \frac{CF}{CD}$$

となる。同時に對角線  $AC$  は伸張して  $A'F$  となる。今  $A'F$  を半徑として圓を描き  $AC$  の延長との交點を  $G$  とす

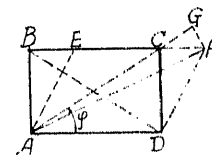


Fig. 216

れば、極微小である  $FG$  を  $AG$  に直角であると看做す事が出来る。然らば  $\overline{CG}$  は対角線  $\overline{AC}$  の伸張であるから、その単位変形  $\varepsilon$  は次式にて與へられる。

$$\varepsilon = \frac{CF}{AC} = \frac{CF \cos \varphi}{CD \operatorname{cosec} \varphi} = \frac{CF}{CD} \frac{1}{2} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} r \sin 2\varphi$$

上式を見れば明らかなる如く、 $\varphi = \pi/4$  即ち  $ABCD$  が正方形なる時  $\varepsilon$  は最大となり、その値は

$$(5) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2} r$$

となる。同時に他の対角線  $DB$  は  $\varepsilon_2$  の変形(収縮)を受けその値は次式にて與へられる。

$$(6) \quad -\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} r$$

従つて滑動  $r$  の許容値  $r_1$  は許容変形  $\varepsilon_1$  の二倍或はそれ以下である事を要す。即ち

$$r_1 \leq 2\varepsilon_1$$

所が許容張應力は  $\sigma_a = \frac{\varepsilon_1}{\alpha}$  にて與へられ、又許容剪應力は  $\tau_a = \frac{r_1}{\beta}$  にて與へらるべきを以つて次の關係が成立する。

$$(7) \quad \tau_a \leq 2 \frac{\alpha}{\beta} \sigma_a$$

但し茲に材料は總べての點に於いてすべての方向に等質であり、又  $\alpha$  及び  $\beta$  は一定であると看做してゐる。

次に變形率  $\alpha$  と剪断係數  $\beta$  との關係を求めよう。Fig. 127 に示す如く始め邊長 1 を有する立方體  $ABCD$  がその端面  $BC$  及び  $AB$  に張應力  $\sigma$  を受け  $A_1B_1C_1D_1$  となりたるものとする。然らば邊長  $\overline{AB}$  及び  $\overline{DC}$  は長さ  $\varepsilon$  だけ伸張し  $\overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1} = 1 + \varepsilon$  となり、それに直角なる邊長  $\overline{AD}$  及び  $\overline{BC}$  は  $\frac{\varepsilon}{m}$  だけ収縮し  $\overline{A_1D_1} = \overline{B_1C_1} = 1 - \frac{\varepsilon}{m}$  となつたものと考へられる。又始め直角に交つた對角線  $\overline{AC}$  及び  $\overline{BD}$  は直應力  $\sigma$  の爲に角  $\gamma$  だけ方向を變化し  $\overline{A_1C_1}$  及び  $\overline{B_1D_1}$  となつたものと考へる事が出来る。今  $C_1C'$  上  $D_1B_1$  とすると、

$$\angle BMB_1 + \angle CMC_1 = \angle MC_1C'$$

であるから 
$$r = \operatorname{tg} \gamma = \frac{MC'}{C_1C'}$$

となる。又半直角の變化は  $\frac{r}{2}$  であるから次の關係式を得る。

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{\varepsilon}{m})}{\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)}$$

$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{2}$  であるが故に

$$\frac{1 - \frac{r}{2}}{1 + \frac{r}{2}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon}$$

となる。又  $r$  及び  $\varepsilon$  は 1 に比し非常に小であるから上式より次の關係式を得る。

$$1 - r = 1 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)\varepsilon$$

$$(8) \quad \therefore r = \frac{m+1}{m}\varepsilon$$

次に Fig. 128 の如く立方體を對角線  $AC$  にて切斷して考へて見るに、 $\sigma$  と平衡を保つ爲に  $AC$  の面に直應力  $\sigma_1$  と剪應力  $\tau$  とが生じなければならぬ。而して平衡の條件としてこの三角塊體に働く力の  $\sigma$  及びそれと直角な方向の合力が各々零である事を要するが故に

$$\sigma_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} + \tau \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} - \sigma \cdot 1 = 0$$

$$\sigma_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} - \tau \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = 0$$

が成立する。この二式より

$$\sigma_1 + \tau = \sigma$$

$$\sigma_1 = \tau$$

となる。  $\therefore \tau = \frac{\sigma}{2}$

先に求めた關係  $\tau = \frac{r}{\beta}$ ,  $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$  を上式に入ると

$$\frac{r}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

となり、更に (8) 式を代入して

$$\frac{1}{\beta} \frac{m+1}{m} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\therefore (9) \quad \beta = 2 \frac{m+1}{m} \alpha$$

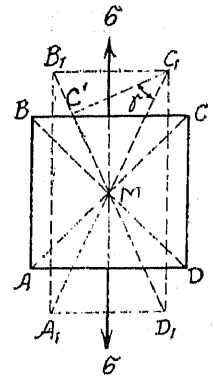


Fig. 127

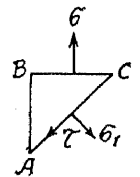


Fig. 128

即ち剪断係数  $\beta$  は変形率  $\alpha$  の  $2 \frac{m+1}{m}$  倍である事を知る。 $\alpha$  及び  $\beta$  を實驗的に定め得るならば、

$$m = \frac{2}{\frac{\beta}{\alpha} - 2}$$

なる関係より  $m$  を決定する事が出来る。然し普通は  $m$  は張力及び壓力試験に於いて圓錐の直徑の變化を直接測定する事から定める方が便利である。普通  $m$  の値は 3 と 4 との間の數値であるから  $\beta$  の値は (9) なる公式より次の如くなる。

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{5}{2} \alpha \sim \frac{8}{3} \alpha \\ \quad = 2.5\alpha \sim 2.67\alpha \\ \text{或は } \alpha = \frac{3}{8} \beta \sim \frac{2}{5} \beta \\ \quad = 0.375\beta \sim 0.4\beta \end{array} \right.$$

尙ほ公式 (9) より公式 (7) は次の如くなる。

$$(11) \quad \tau_u \leq \frac{m}{m+1} \sigma_u$$

$m = 3 \sim 4$  とすれば

$$(12) \quad \tau_u \leq \frac{3}{4} \sigma_u \sim \frac{4}{5} \sigma_u (= 0.75 \sigma_u \sim 0.8 \sigma_u)$$

となる。しかしこの式は應力が許容限度内に留まり、又  $m$  が一定の値を有する限度内である時に成立するのであつて、事實はこの假定を満足する事は困難であるから實驗の結果は多少これと相違する事は免れない。

### 第三節 扭力 (Torsion or Twisting)

Fig. 129 に示す様に圓錐體に外力が作用し、錐軸に直角なる断面に同一の偶力を生ぜしめる事がある。この場合の説明の爲に次の記號を用ひる。

$M_t$  = 扭力

$I_1$  及び  $I_2$  = 断面の主慣性能率

$I$  = 二つの主慣性能率の内小なるもの

$F$  = 断面積

$\tau$  = 断面上任意の一點に於ける剪應力

$\tau_{u,a}$  = 材料の許容剪應力

$\beta$  = 剪断係数 = 剪断彈性率の逆數

$\gamma$  =  $\beta\tau$  = 断面上任意の點の滑動

$\vartheta$  = 扭角、即ち一つの断面の兩主軸が單位長 1 だけ離れてゐる他の兩主軸に對し轉扭する角

$l$  = 錐の長さ

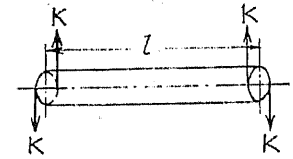
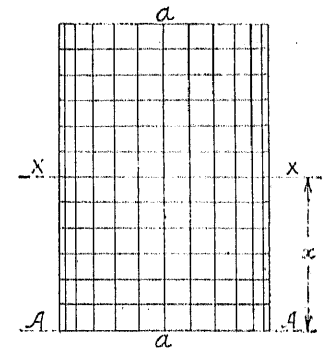


Fig. 129

#### (1) 圓錐體 (Circular cylinder)

Fig. 129 に示す様に圓錐體軸に直角な断面に二つの偶力  $KK$  (力率  $M_t$  を生ずる) が作用して平衡を保つ時圓錐個々の断面は互に撓扭するのであるが、その變形の状態を見る爲に Fig. 130 に示す様に圓錐體の表面に軸に平行に  $n$  個の直線  $aa$  を引く。然らばその幅は  $\pi d : n$  であつて、

例へば  $d = 40 \text{ mm}$ ,  $n = 25$  とすれば  $40\pi \div 25 = 5.0 \text{ mm}$  となる。又軸に直角の方向に  $\pi d \div n$  の間隔に平行圓を描く。かくすれば外力の作用前には圓錐の表面に正方形が描かれた事になるが、之れが扭力を受けた後の線條の様子は Fig. 131 の如くであつて、圖より次の事實を知る事が出来る。



(a) 扭力を受けない時に正方形であつたものが總べて同一の菱形となる。

(b) 平行圓の平面即ち圓錐の切断面は變形後も平面で且つ軸に直角である。

(c) 二つの相隣る断面は總べて等量に撓扭する。従つて平行圓  $XX$  上の一點 (Fig. 130) が断面  $A-A$  上に於ける同位置の點に對して移動する弧長は距離  $x$  に比例する。

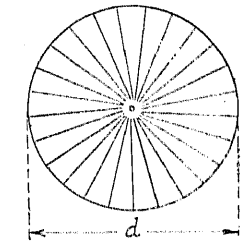


Fig. 130

今この圓錐に於いて單位距離 1 だけ隔て、二つの断面  $F_1, F_2$  をとり、 $P_1, P_2$  を夫々  $F_1, F_2$  の周上の相當する點とする。扭力の結果が  $P_2$  が  $P_1$  に對し相對的に  $r_1$  だけ撓扭するものとすればこの  $r_1$  は第一節に説明した點  $P_1$  に於ける滑動と見る事が出来る。而して Fig. 132 (a) に於ける如く半徑  $OP_1$  上の中心から距離  $\overline{OP} = \rho$  にある點の滑動  $r$  と  $P_1$  點の滑動  $r_1$  の間に次の關係が成立するものと假定する。

$$r:r_1 = \rho:r$$

$$\therefore (1) \quad r = r_1 \frac{\rho}{r}$$

然らば切線  $\overline{P_1P_1'} = r_1$  とし、又それに平行に  $\overline{PP'} = r = r_1 \frac{\rho}{r}$  とすれば  $OP_1$  上の各點の滑動は直線  $OP_1P_1'$  にて定める事が出来る。又それに相當する剪應力は第一節公式 (3) に依り

$$\text{點 } P_1 \text{ に於いて} \quad \tau_1 = \frac{r_1}{\beta}$$

$$\text{點 } P \text{ に於いて} \quad \tau = \frac{r}{\beta} = \frac{r_1}{\beta r} \rho$$

となる。茲に  $\tau_1$  は勿論圓周に切線方向即ち半徑  $OP_1$  に直角に起る。今  $OP$  に直角なる  $\overline{PP''}$  を以つて剪應力  $\tau$  を表し、且つ剪斷係數  $\beta$  が一定であるとすれば直線  $OP''P_1'$  は  $OP_1$  上の各點の剪應力を與へる事になる。(Fig. 132, (a)),

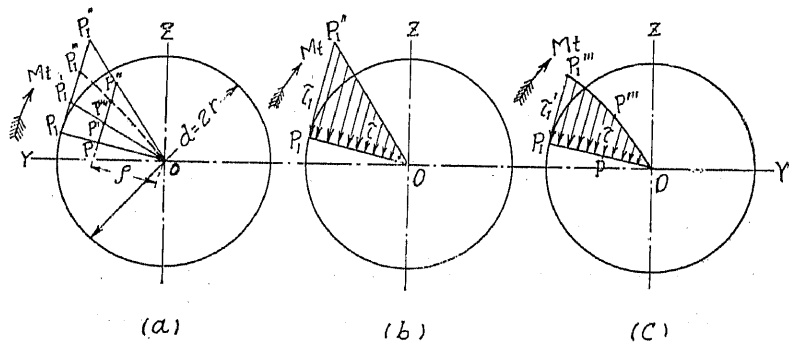


Fig. 132

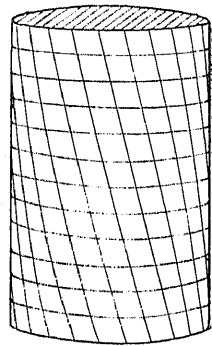


Fig. 131

(b))。この法則は鍊鐵及び構築用鋼に對し、その剪應力が比例限度以内である時に略成立するのである。併し乍ら剪斷係數  $\beta$  が變化するもの、例へば鑄鐵の場合に於ける様に  $\beta$  が滑動  $r$  或は剪應力  $\tau$  と共に増加するものに對しては、 $\tau_1 = \overline{P_1P_1''}$ ,  $\tau = \overline{PP''}$  として定められる點  $P_1'', P''$  は  $O$  と共に一直線上に來る事はなく曲線  $OP''P_1''$  となる (Fig. 132, (a), (c))。そして剪應力は  $\beta$  の一定せる場合に比し徐々増加する事を知る。

斯くの如き應力分布状態の如何に關せず、断面に生ずる應剪力に因つて生ずる抵抗力率が常に外力による扭力率  $M_t$  に等しくなければならぬ。従つて今點  $P$  に於ける微分面積を  $dF$  とすれば

$$\int \tau_1 dF \cdot \rho = M_t$$

となる。茲に  $\tau = \frac{r_1}{\beta r} \rho$  なる關係を挿入すれば

$$M_t = \frac{r_1}{r} \int \frac{1}{\beta} \rho^2 dF$$

$\beta$  が定數であると考へると

$$M_t = \frac{r_1}{\beta r} \int \rho^2 dF$$

となる。今點  $P$  の主軸に關する直角座標を  $(y, z)$  とすれば

$$\rho^2 = y^2 + z^2, \quad \int y^2 \cdot dF = I_1, \quad \int z^2 \cdot dF = I_2$$

なる關係が成立するを以つて

$$M_t = \frac{r_1}{\beta r} (I_1 + I_2) = \tau_1 \frac{I_1 + I_2}{r} = \tau_1 \frac{I'}{r}$$

となる。圓断面に對しては二つの主慣性能率  $I_1$  及び  $I_2$  は相等しく、而も

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{4} r^4$$

なるが故に

$$(2) \quad M_t = \tau_1 \frac{\pi}{16} d^3 = \tau_1 \frac{\pi}{2} r^3$$

となる。従つてこの圓錐が  $M_t$  なる扭力率に安全に耐える爲には次の式を満足する事が必要である。

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_t \leq \frac{\pi}{16} d^3 \tau_{t.a} \\ \text{或は } \tau_{t.a} \leq \frac{16 M_t}{\pi d^3} \end{array} \right.$$

次に外径  $d$ , 内径  $d_0$  なる圓環 (中空圓環) 断面に對しては

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi}{16} (d^4 - d_0^4)$$

$$M_t = \tau_{t.a} \frac{\pi}{16} \frac{d^4 - d_0^4}{d}$$

$$\therefore (4) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_t \leq \frac{\pi}{16} \tau_{t.a} \frac{d^4 - d_0^4}{d} \\ \text{或は } \tau_{t.a} \leq \frac{16 M_t}{\pi} \frac{d}{d^4 - d_0^4} \end{array} \right.$$

この公式の應用に際して注意すべき事は前節公式 (5) 及び (6) に於いて説明した様に、圓環の表面に描かれた正方形の二つの對角線の方に長さの最大變形を生じ、その内一方は伸張にして他は收縮であると云ふ事である。一般に扭力を受けた圓環體は第一の伸張變形から破裂を生ずるものであるが、時として薄い壁を有する環の如きものに於いては後者の收縮變形に依り壓力試験の場合に於ける如く表面が波状をなして彎折する事がある。

次に**扭角** (Angle of torsion)  $\vartheta$  を計算しよう。前述の如く  $r_1$  を以つて距離  $l$  だけ隔つた圓環の平行断面の圓周上の對應點の相對的滑動とすれば明らかに、

$$(5) \quad \vartheta = \frac{r_1}{r} = \frac{\beta M_t}{I_1 + I_2} = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_t}{d^4}$$

となり、中空圓環に對しては

$$(6) \quad \vartheta = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_t}{d^4 - d_0^4}$$

となる。従つて圓環に於いて距離  $l$  だけ隔てた二断面に於ける軸心から  $1$  の距離にある對應點の相對的滑動は

$$\vartheta_l = \vartheta \cdot l = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_t}{d_0^4} l$$

にて與へられ、又中空圓環に對しては

$$\vartheta_l = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_t}{d^4 - d_0^4} l$$

となる。

以上の説明に於いては横断面上の點  $P$  には  $OP_1$  に直角な方向に、而もその横断面上に剪應力  $\tau$  のみが働くと考えたのであるが、實際には本章第一節に述べた様に剪應力は必ず一對として起るものであつて、紙面と直角に上述の  $\tau$  と等しき剪應力が起つてゐる事に注意せねばならない。従つて Fig. 133 に示す様に表面に描いた一正方形に相應した小體  $ACDBEF$  を圓環體內から切りとつて考へるならば、その面上には丁度圖に示す如き剪應力が生じてゐる。壓延せられた鍊鐵或は鍊鐵から作られた針金は纖維の方向に於ける抗扭力は小であるから、これ等のものが扭力を受けた場合には軸の方向の剪應力の爲に軸の方向に裂けて壊れるに至るのである。木材の抗扭強度は小であつて丁度之れと同様な現象を呈する。等質であるか、又は脆弱な材料にては公式 (4) の所で述べた様に長さの最大變形の爲に剪力と  $45^\circ$  を

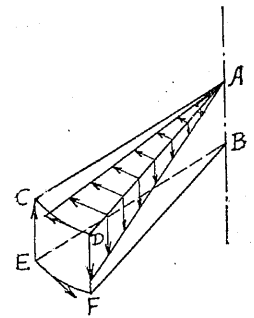


Fig. 133

爲す方向にて裂目が入るが (例へば、鑄鐵、コンクリート) 之れに反し強靱な材料にては剪應力の爲に扭力の働く面に平行に又は之れと直角に破壊が起るのである。強靱度のあまり大でない鑄鋼にては兩方の現象が共に現れる事がある。

(2) 椭圆環體 (Elliptic cylinder)

前項圓環の場合と同様に椭圆環 (例へば大徑  $2a = 50 \text{ mm}$ , 小徑  $2b = 25 \text{ mm}$ ) の表面に正方形を描き、之れが扭力の結果如何に變形するかを示したものが Fig. 134 である。今椭圆大徑の端にある縦線を  $aa$  とし、小徑の端にある縦線を  $bb$  と記入する時、實驗の結果次の現象を認めたのである。

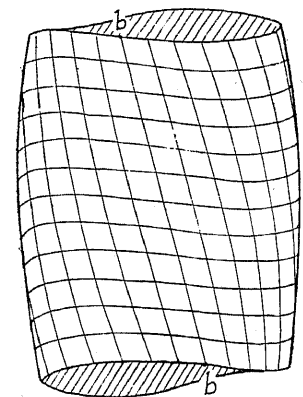


Fig. 134

(a) 表面に描かれた正方形は菱形となる。

(b) 彎曲した  $bb$  上に一邊を有する菱形の角

が原形の直角から最も多く變形し、之れに反し  $aa$  上に一辺を有する菱形の角の變形がもつとも少い。

(c) 最初平面であつた横断面は變形後は曲面となる。

(d) 併し乍ら、横断面の主軸は依然として元の平面内にあつて而も直角を保つ。

(e) 二つの相隣れる横断面の主軸は互に等量に撓曲する。

今茲に Fig. 135 に於いて楕圓形横断面を採り、その周邊上の一 $\cdot$ 點  $P'$  を考へる。此の點  $P'$  の剪應力  $\tau'$  は此の點に外力が働かないが故に断面の周邊に切線方向に向はねばならない。今  $\tau'$  を  $Y$  軸に直角なる  $\tau'_y$  及び  $z$  軸に直角なる  $\tau'_z$  に分解し、 $\psi$  を以つて  $P'$  點に於ける切線が  $Y$  軸と成す角とし、同點の座標を  $(y', z')$  とする。然らば

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\tau'_y}{\tau'_z}$$

となる。且つ楕圓の方程式

$$\frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{a^2} = 1$$

を微分して

$$\frac{y'}{b^2} dy' + \frac{z'}{a^2} dz' = 0 \quad \therefore \frac{dz'}{dy'} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{z'}$$

尙ほ Fig. 135 から直接に  $\operatorname{tg} \psi = -\frac{dz'}{dy'}$  なるが故に上に求めた値を入れると次の關係を得る。

$$(7) \quad \frac{\tau'_y}{\tau'_z} = \frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{z'}$$

従つて  $\tau'_y$  は  $y'$  に又  $\tau'_z$  は  $z'$  に比例する。次に断面の内部にある點  $P$  を考へその座標を  $(y, z)$  とし、外周と相似な楕圓を描く。然らばこの  $P$  に於ける應剪力  $\tau$  も亦其の楕圓に切線方向をとらなければならぬから、これを前の如く二分力  $\tau_y, \tau_z$  に分てば次の關係を得る。

$$(8) \quad \tau_y = Ay, \quad \tau_z = Bz$$

茲に  $A, B$  は定數である。

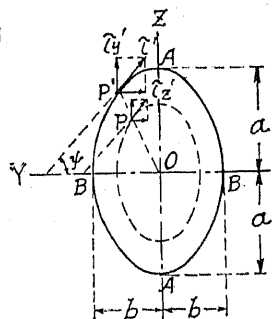


Fig. 135

断面に呼び起こされる剪應力は扭力  $M_t$  と平衡を保たねばならぬから、 $P$  に於いて微分面積をとつて此の條件を表せば次の如くなる。

$$\int (\tau_y \cdot dF \cdot y + \tau_z \cdot dF \cdot z) = M_t$$

尙ほ公式(8)及び楕圓の慣性能率  $\int y^2 dF = \frac{\pi}{4} ab^3, \int z^2 dF = \frac{\pi}{4} a^3 b$  を用ひて

$$M_t = A \frac{\pi}{4} ab^3 + B \frac{\pi}{4} a^3 b$$

となる。又公式(7)及び(8)より

$$\frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{z'} = \frac{Ay'}{Bz'} \quad \therefore \frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{或は} \quad A = B \frac{a^2}{b^2}$$

を得るを以つて、之れを  $M_t$  の式に入れると

$$M_t = B \frac{a^2}{b^2} \frac{\pi}{4} ab^3 + B \frac{\pi}{4} a^3 b = \frac{\pi}{2} a^3 b B$$

$$\therefore B = \frac{2 M_t}{\pi a^3 b} \quad \therefore A = B \frac{a^2}{b^2} = \frac{2 M_t}{\pi a b^3}$$

となる。これを公式(8)に挿入し断面上の任意の點  $P$  に於ける剪應力を計算すれば次の如し。

$$(9) \quad \begin{cases} \tau_y = Ay = \frac{2 M_t}{\pi a b^3} y \\ \tau_z = Az = \frac{2 M_t}{\pi a^3 b} z \end{cases}$$

$$(10) \quad \tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \frac{2 M_t}{\pi a^3 b^3} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2}$$

この式より  $\tau$  の値は  $y$  及び  $z$  と共に増加し、従つて周邊上に於いて最大となる事を知る。その何れの點に於いて最大となるかを知る爲にまづ  $x = x', y = y'$  を挿入して周邊應力  $\tau'$  を求めて見る。今  $a \geq b$  なる場合を考へるに周邊應力は

$$(11) \quad \tau' = \frac{2 M_t}{\pi a^3 b^3} \sqrt{a^4 y'^2 + b^4 z'^2} = \frac{2 M_t}{\pi a b^3} \sqrt{\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{z'}{a}\right)^2}$$

となるが、 $\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 = 1$  なるが故に

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{z'}{a}\right)^2 \leq 1$$

である。然るに此の値は  $y' = \pm b, z' = 0$  なる時最大値 1 となるが故に最

大剪應力は楕圓小徑の兩端  $BB$  即ち錐軸に最も近い點に起り、その値は次の式にて與へられる。

$$(12) \quad \tau'_{max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2}$$

従つて安全なる爲には次の關係が成立するを要する。

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{i,a} \cong \frac{2M_t}{\pi ab^2} \\ \text{或は } M_t \cong \frac{\pi}{2} \tau_{i,a} ab^2 \end{array} \right.$$

尚ほ楕圓大徑の端  $BB$  に於ける剪應力は公式 (11) に於いて  $y' = 0, z' = a$  と挿入して

$$(14) \quad \tau' = \frac{2M_t}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a} \tau'_{max}$$

となる。即ち點  $BB$  に於けるものゝ  $\frac{b}{a}$  倍である。この事は應力が軸からの距離に比例して大となると云ふ普通の豫想に反するものであるが、實驗の結果楕圓表面の  $bb$  線に沿ふ菱形の受ける變形がもつとも大であると云ふ事實に一致するのであつて上述の理論が正しいものである事を證明してゐる。

尚ほ角變化即ち滑動  $\gamma$  と剪應力  $\tau$  の間には  $\tau = \frac{T}{\beta}$  なる關係が成立するを以つて  $\gamma$  も亦楕圓の小徑兩端に於いて最大であつて、大徑兩端に於いて最小である。

Fig. 136 は横斷面上の剪應力の變化の様子を示したものであつて、例へば直線  $OP'$  に沿ふ各點に於ける剪應力はすべて平行にして、その

大きさは錐軸よりの距離  $y, z$  の函數として與へられた直線的に變化しないのである。之れに反し最大、最小應力を與へる主軸上には直線的に變化するのである。

Fig. 132 に示す極微體に就いて錐軸  $AB$  の方向に於ける平衡を考へれば、面  $ADFB$  上の剪應力の和は面  $ACEB$  上の剪應力の和に等しい。今  $AB = 1$  として互に直角なる二面  $ADFB$  及び  $ACD$  を考へるに、本章第一節公式 (4) に依り面  $ADFB$  上の剪應力の和は面  $ACD$  上に於いて  $AD$  に沿ふ單位幅の面積に於ける剪應力の和に等しきを要す。同様にして面  $ACEB$

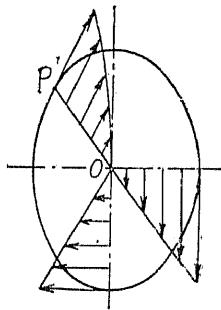


Fig. 136

上の剪應力の和は面  $ACD$  上に於いて  $AC$  に沿う單位幅に於ける剪應力の和に等しい。従つて面  $ACD$  上に於いて  $AC$  及び  $AD$  に沿ふ單位幅の面積に於ける剪應力の和は互に相等しい事になる。而もこの事は楕圓斷面に於ける如く  $AC$  及び  $AD$  の長さの異なる時にも成立するのであつて Fig. 136 に於いて  $OP'$  に沿ふ各點の剪應力圖の面積は、主軸に沿ふ各點の剪應力圖の面積に等しいのである。

次に Fig. 137 に示す如く、中空楕圓環の内壁の周邊が外壁の周邊と相似なるものに對しては

$$a_0 : a = b_0 : b = m$$

$$\int y^2 \cdot dF = -\frac{\pi}{4}(ab^3 - a_0b_0^3), \quad \int z^2 dF = \frac{\pi}{4}(a^3b - a_0^3b_0)$$

$$M_t = A \frac{\pi}{4}(ab^3 - a_0b_0^3) + B \frac{\pi}{4}(a^3b - a_0^3b_0)$$

$$A = \frac{a^2}{b^2} B$$

なる關係が成立するを以つて

$$B = \frac{2M_t}{\pi(1-m^4)a^3b}, \quad A = \frac{2M_t}{\pi(1-m^4)ab^3}$$

となる。この値を用ひて結局次式を得る。

$$(15) \quad \tau = \frac{2M_t}{\pi(1-m^4)a^3b^3} \sqrt{a^4y^2 + b^4z^2}$$

又周邊の點  $B$  に對して  $\tau$  は最大となり、その値は

$$(16) \quad \tau'_{max} = \frac{2M_t}{\pi(1-m^4)ab^2} = \frac{2M_t}{\pi(ab^3 - a_0b_0^3)}$$

となる。従つて扭力  $M_t$  に對して安全なる爲には次式が成立せねばならない。

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{i,a} \cong \frac{2M_t}{\pi(ab^3 - a_0b_0^3)} \\ \text{或は } M_t \cong \frac{\pi}{2} \tau_{i,a} \frac{ab^3 - a_0b_0^3}{b} \end{array} \right.$$

公式 (13) 及び (17) より扭力に對する楕圓環の抵抗力は二つの主慣性能率の内小なるものに關する事を知る。

更に公式 (17) に於いて  $a = b = \frac{d}{2}, a_0 = b_0 = \frac{d_0}{2}$  とすれば中空

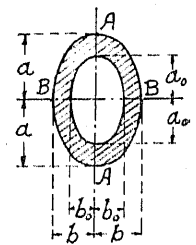


Fig. 137



圓端に対する公式を得る。即ち

$$M_t \leq \frac{\pi}{16} \tau_{L,a} \frac{d^4 - d_0^4}{d} \quad \text{〔公式(4) 参照〕}$$

又上式に於いて  $d_0 = 0$  とすれば圓端に対する公式を得る。

$$M_t \leq \frac{\pi}{16} \tau_{L,a} d^3 \quad \text{〔公式(3) 参照〕}$$

〔3〕角端體 (Rectangular rod)

前項と同様に角端 (例へばその断面  $60\text{ mm} \times 20\text{ mm}$  とする) の四面上に一辺  $5\text{ mm}$  の正方形を畫き、之が扭力の作用の下に如何に變形するかを示せば Fig. 138 の様である。その結果次の現象を認める事を得るのである。

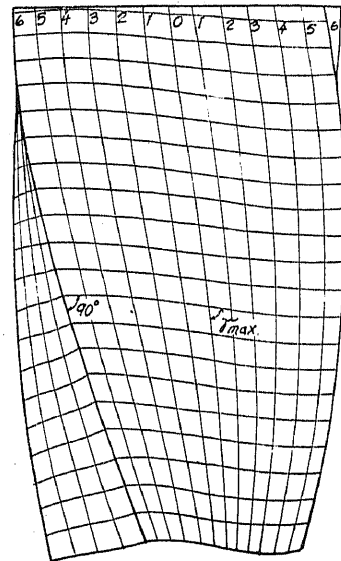


Fig. 138

(a) 表面に描ける正方形は變形して菱形となるが、その位置に依り變形の度を異にする。即ち變形後横線は四隅の縦線と直角に交り縦線が面の中央に近づくにつれて、横線との角度が多く變化する。斯くの如く角の變化即ち滑動は角端の隅角に於いては零であるが面の幅が廣ければその中央に向つて著しく増加するものであつて、而も最大なる滑動は楕圓端の場合に於ける如く軸に最も近い周邊上に於いて起る。

(b) 始め平面であつた断面は變形後曲面となる。

(c) 併し乍ら横断面の主軸は依然として元の平面内にあつて而も直角を保つ。

(d) 二つの相隣れる横断面の主軸は互に等量に撓扭する。

既に説明した様に周邊にある微分面に生ずる剪應力は角端の表面に他の外力が作用してゐない場合には周邊の切線方向に起るものであるから、Fig. 139 の如き矩形断面に對しては邊  $AC$  に於ける剪應力は邊  $AC$  の方向に一致し又邊  $BC$

に於ける剪應力は邊  $BC$  の方向に一致せねばならない。従つて断面の隅角點  $C$  に於ては此の點が  $AC$  及び  $BC$  の兩邊に屬するから、互に直角である二方向に剪應力が起る筈である。従つてこの二剪應力から點  $C$  の應力として一つの合力を得るわけであるが、この合力が同時に  $AC$  及び  $BC$  の方向と一致せねばならない。この事は  $C$  點の應力が零である時始めて成立する條件であるが故に、結局剪應力は  $C$  點にては零にして  $A$  又は  $B$  に向ふにつれて漸次増加するものである事を知る。従つて  $AC$  邊に沿へる各點の剪應力の大きさは Fig. 139 に於ける  $CP''H$  の如き曲線にて示されるわけであつて、上述實驗の (a) の觀察の如く滑動が  $C$  點にて零で邊の中央  $A$  に向ふにつれて始めは速かに後は徐々に増加すると云ふ事實に一致するのである。

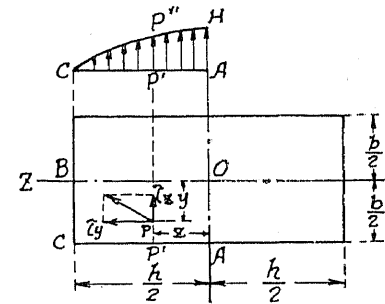


Fig. 139

今断面中任意の一點  $P$  に於ける剪應力  $\tau$  を前項〔2〕楕圓断面の場合の如く二つの分力  $\tau_y$  及び  $\tau_z$  に分ち

$$\tau_y = Ay, \quad \tau_z = Bz$$

と置く。茲に  $A, B$  は之れから定めようとする變數である。

Fig. 139 に於いて長邊の中點  $A$  に於ける剪應力を  $\tau'_a$ 、又  $AC$  線上にて  $A$  から  $z$  の距離にある點  $P'$  の剪應力を  $\tau'$  とする。即ち圖に於いて  $\overline{AP} = \tau'_a$ 、 $\overline{P'P} = \tau'$  とする。今實驗の (a) の觀察に基き曲線  $CP''H$  を  $H$  を頂點とする拋物線と看做すならば

$$(\tau'_a - \tau') : \tau'_a = z^2 : \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\therefore \tau' = \tau'_a \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]$$

然るに先に  $\tau_y = Ay$  と置いたから此の式に於いて  $y = \frac{b}{2}$  とすれば上の  $\tau'$  と一致せねばならない。即ち

$$\tau' = A \frac{b}{2} = \tau'_a \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

$$\therefore A = \frac{2\tau'_a}{b} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] = m \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

全く同様にして

$$B = \frac{2\tau'_b}{h} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] = n \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right]$$

茲に  $m = \frac{2\tau'_a}{b}$ ,  $n = \frac{2\tau'_b}{h}$  にして共に定数であつて、 $\tau'_a$  及び  $\tau'_b$  は各々  $A$  及び  $B$  点の剪應力を示してゐる。

上式に於いて  $z = 0$  に對しては  $A = m \therefore \tau_y = my, \tau_z = 0;$

$y = 0$  に對しては  $B = n \therefore \tau_z = nz, \tau_y = 0;$

となり、之れを圖示すれば Fig. 140 の如き主軸に沿ふ各點の剪應力圖を得る。

然るに、前項楕圓の場合に説明した様に

Fig. 140 の二つの應力圖の面積は相等し

かるべきが故に次の關係を得る。

$$\frac{1}{2} \tau'_b \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \tau'_a \frac{b}{2}$$

$$\therefore \tau'_b = \tau'_a \frac{b}{h}$$

次に  $\tau_y = Ay, \tau_z = Bz$  に  $A, B$  の

値を挿入して任意點の剪應力を求めると次の如し。

$$(18) \quad \begin{cases} \tau_y = m \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] y \\ \tau_z = n \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] z \end{cases}$$

前項と同様にして剪應力の合力が作用した扭力  $M_t$  と平衡を保つべき條件をかけば

$$M_t = \int (\tau_y dF \cdot y + \tau_z dF \cdot z)$$

$$= m \int \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] y^2 \cdot dF + n \int \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] z^2 \cdot dF$$

$$= -\frac{1}{12} m b^3 h + \frac{1}{12} n b h^3 - 4 \left( \frac{m}{h^2} + \frac{n}{b^2} \right) \int y^2 z^2 \cdot dF$$

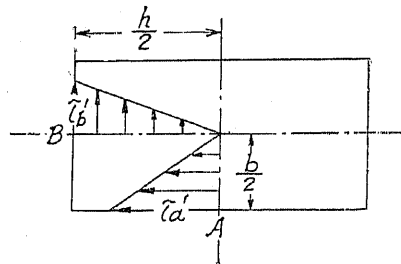


Fig. 140

然るに  $\int y^2 z^2 dF = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1}{144} b^3 h^3$

$$\therefore (19) \quad M_t = -\frac{1}{12} m b^3 h + \frac{1}{12} n b h^3 - \frac{1}{36} \left( \frac{m}{h^2} + \frac{n}{b^2} \right) b^3 h^3$$

又前述の如く  $m = \frac{2\tau'_a}{b}$ ,  $n = \frac{2\tau'_b}{h}$ , 且つ  $\tau'_b = \tau'_a \frac{b}{h}$  なるを以つて

$$\tau'_b = \frac{nh}{2} \quad \text{或は} \quad n = \frac{2\tau'_b}{h} = \frac{2b}{h^2} \tau'_a$$

となり、従つて (18), (19) は次の形となる。

$$(20) \quad \begin{cases} \tau_y = 2\tau'_a \frac{1}{b} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] y \\ \tau_z = 2\tau'_b \frac{1}{h} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] z = 2\tau'_a \frac{b}{h^2} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] z \end{cases}$$

$$(21) \quad M_t = -\frac{2}{9} \tau'_a b^2 h$$

故に扭力  $M_t$  に對してこの四角塊が安全なる爲には

$$(22) \quad \begin{cases} M_t \leq -\frac{2}{9} \tau_{\cdot a} b^2 h \\ \text{或は} \quad \tau_{\cdot a} \geq \frac{9}{2} \frac{M_t}{b^2 h} \end{cases}$$

以上述べた所により最大剪應力は軸に最も近い周

邊上にかかる事を知るべく、又矩形断面に於ける應力

の分布を圖示すれば Fig. 141 の如くなる。この内

特に對角線  $COC$  上に於いては  $\frac{y}{z} = \frac{b}{h}$

$\therefore \tau_z : \tau_y = b : h$  となり剪應力  $\tau$  は  $OC$  上の

各點に對しては平行となるべきことを知る。而してその値は

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = 2\tau'_a \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] \frac{y}{b} \sqrt{1 + \left( \frac{b}{h} \right)^2}$$

にて與へられるを以つて  $y = 0.577 \frac{b}{2}$  に於いて  $\tau$  は最大となる。特に  $b = h$

即ち断面が正方形なる場合にはこの  $\tau$  は對角線  $COC$  に直角の方向となる。尚

断面と直角の面に等量の應力が生ずる事は上述の様である。

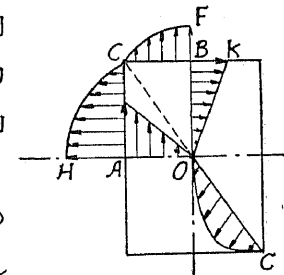


Fig. 141

以上述べた圓環、中空圓環、橢圓環、中空橢圓環及び角環の場合を纏めると次の一般公式を得る。

$$(23) \quad M_t \leq \varphi \tau_{\cdot a} \frac{I}{b}$$

茲に  $M_t$  = 扭力

$I$  = 兩主慣性能率の内小なるもの

$b$  = 圓の半徑、又は橢圓の小徑、又は矩形の小邊

$\tau_{\cdot a}$  = 許容扭應力

$$\varphi = \text{係數} \begin{cases} \text{圓環及び中空圓環に對し} & \varphi = 2 \\ \text{橢圓及び中空橢圓環に對し} & \varphi = 2 \\ \text{矩形に對し} & \varphi = \frac{8}{3} \end{cases}$$

〔4〕各種の断面を有する抗扭材

前項と同様にして種々の断面に就き抗扭力率及び扭角を求めると次表の如くなる。最後の欄の  $K_a$  は鑄鐵製の抗扭材に就いて實驗し公式 (23) などを用ひて計算した抗扭強度を意味し、 $K_t$  は同じ材料に就いて求めた抗張強度を意味する。尙表中矩形断面に對する抗扭力率の係數は Saint Venant に依つて與へられた嚴密なる解法による係數であつて、上記第三項の近似解法による係數  $\frac{9}{2}$  とは異つた値になつてゐる。

〔5〕軸に依る力の傳送 (Transmitting power by shaft)

水車の廻轉軸が直結された發電機を廻し又は他の機械を動かす時、或は原動機から力を調帶 (Belt) 齒車等を通じて又は直結によつて軸 (Shaft) へ傳達する時、其の軸は何れも扭力率を受ける事になる。今軸の直徑が扭力のみで定められる如き場合に就いて計算を行はう。



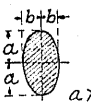
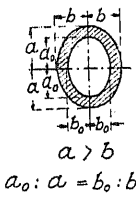



$P$  = 半徑  $R$  なる滑車 (Pully) の周圍に働く力 (ton)





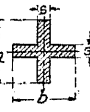


$n$  = 毎分時に對する廻轉數

$H$  = 傳送すべき馬力 ( $H = P$ )

$M_t$  = 平均扭力率 (ton-cm)

$l$  = 軸の長さ

	断面形	抗扭力率 ( $M_t$ )	扭角 ( $\vartheta$ )	$K_a : K_t$ (鑄鐵に對し)
1		$\frac{\pi}{16} \tau_{\cdot a} d^3$	$\frac{32}{\pi} \frac{M_t}{d^4} \beta$	1
2		$\frac{\pi}{16} \tau_{\cdot a} \frac{d^4 - d_0^4}{d}$	$\frac{32}{\pi} \frac{M_t}{d^4 - d_0^4} \beta$	0.8
3		$\frac{\pi}{2} \tau_{\cdot a} ab^2$	$\frac{1}{\pi} M_t \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \beta$	1~1.25
4		$\frac{\pi}{2} \tau_{\cdot a} \frac{ab^3 - a_0^3 b_0^3}{b}$ $a_0 : a = b_0 : b = m$	$\frac{1}{\pi} M_t \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3 (1 - m^4)} \beta$	0.8~1
5		$\frac{1}{1.09} \tau_{\cdot a} b^3$	$0.967 \frac{M_t}{b^4} \beta$	—
6		$\frac{1}{\psi} \tau_{\cdot a} b^2 h$ 茲に $\psi = 3 + \frac{2.6}{\frac{h}{b} + 0.45}$	$\psi_0 M_t \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$ 茲に $\psi_0 = 3.645 - 0.06 \frac{h}{b}$	1.4~1.6
7		$\frac{2}{9} \tau_{\cdot a} b^2 h$	—	1.5

	断面形	抗扭力率 ( $M_t$ )	扭角 ( $\vartheta$ )	$K_d : K_t$ (鑄鐵に對し)
8		$\frac{2}{9} \tau_{t.a} b^2 h$	—	1.5
9		$\frac{1}{20} \tau_{t.a} b^3$	$46.2 \frac{M_t \beta}{b^4}$	—
10	 $h > b$ $h_0 : h = b_0 : b$	$\frac{2}{9} \tau_{t.a} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b}$	—	1~1.25
11		$\frac{2}{9} \tau_{t.a} s^2 (h + 2h_0)$	—	1.4~1.6
12		$\frac{2}{9} \tau_{t.a} s^2 (h + b - s)$	—	1.4~1.6
13	 $s = b - b_0 = 0.5(h - h_0)$	$\frac{2}{9} \tau_{t.a} s^2 (h + 2h_0)$	—	1.4~1.6
14		$\frac{2}{9} \tau_{t.a} s^2 (h + b - s)$	—	1.4~1.6

とすれば  $M_t = P \cdot R$

$2\pi R \cdot P =$  一廻轉にて爲される仕事の量

$n \cdot 2\pi R \cdot P = 2\pi \cdot n \cdot M_t =$  一分時に爲される仕事の量 (ton-cm)

となる。所が  $1 H.P. = 75 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{sec} = 45,000 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{min}$  であるから

$\frac{45,000 \cdot 100 \cdot H}{1,000} =$  與へられたる馬力 (H.P.) にて一分時に爲される仕事 (ton-cm)

$$\therefore 2\pi n \cdot M_t = 450 H$$

$$\therefore M_t = \frac{450 \cdot H}{2\pi n}$$

今  $d =$  軸の直径 (cm) とすれば公式 (3) に依つて

$$M_t = \frac{\pi}{16} \tau_{t.a} d^3 = \frac{450 \cdot H}{2\pi n}$$

$$\therefore d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 450 \times H}{2\pi^2 n \tau_{t.a}}} = \sqrt[3]{\frac{365 H}{n \tau_{t.a}}} = 7.15 \sqrt[3]{\frac{H}{n \tau_{t.a}}}$$

式中  $\tau_{t.a} =$  許容應扭強度

以上は軸に生ずる扭應力が許容限度を超過せざる條件から求めた軸の直径であるが、更に實際の設計に當つては扭角に就いて吟味する必要がある。軸長 1 m に就き  $\frac{1^\circ}{4}$  を通例扭角の極限としてゐる。それには公式 (5) にしたがつて、 $\vartheta_t = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_t}{d^4} l$  なる関係を用ひ  $l = 100 \text{ cm}$  に對する  $\vartheta_t$  を檢算すればよい。

尚ほ上記  $M_t$  は平均値であるから實際の軸の設計には仕事及び機械の種類に依つて  $max M_t$  として  $M_t$  の 1.3~2.1 倍を探らねばならない。

#### 第四節 剪 力 (Shearing force)

鑄狀彈性體の一断面にそつて剪力が作用する時茲に滑動と云ふ現象が起る。今鐵材をはさみ切る場合を考へるに、兩方の刃が鐵材にふれる時は Fig. 142 (a) に示す様に双の面は一直線上にあるが、兩方の刃が鑄に押し込まれるに至れば、Fig. 142 (b) の如く双 A 及び B の壓力線は二つの面となる。そして上の力 Q

は次第に右方へ、又下の力  $Q$  は次第に左方へ動き、茲に剪力と共に一つの右廻りの偶力を生ずるに至る。実験上脆き材料が小なる抗剪強度を呈するは、この偶力による大なる彎曲応力を生ずるが爲である。

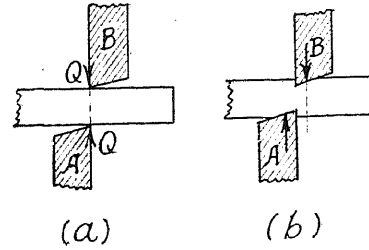


Fig. 142

一般に一つの断面に剪力  $Q$  が作用した場合に断面の各部分に生ずる剪應力は異なるものであるが、勿論その剪應力と微分面との積を断面全體に就つて加へ合せると剪力  $Q$  に等しくならなければならない。今かりに總べて微分面に生ずる剪應力が與へられた剪力  $Q$  と反對の方向を有し、且つ互に平行にして、全面に同一値であるものと假定すれば

$$(1) \quad Q = \tau F \quad \text{或は} \quad \tau = \frac{Q}{F}$$

となり、又平均許容剪應力を  $\tau_a$  とすれば材料の安全の爲には次の關係が満足されねばならない。

$$(2) \quad Q \leq \tau_a \cdot F \quad \text{或は} \quad \tau_a \geq \frac{Q}{F}$$

上の剪應力の方向及び大きさに關する假定に就いては次の事を注意する必要がある。即ち Fig. 143 (a) に示す如き圓壙體断面に軸と直角に下向に剪力が作用する時には、上の假定に依れば圓周上の一 $C$ に於ける剪應力は圖の如く上向きで垂直である。しかるに

実際には  $C$  點に於ける剪應力は圓切線方向をとらなければならない。又 Fig. 143 (b) に示す如き矩形断面に對しても上の假定に依れば、隅角點  $C$  及び  $D$  に於いて他の諸點と同様に等量な  $Q$  と反對方向の應剪力が生ずる事になるが、事實上は  $C$  及び  $D$  點の剪應力は零でなければならない。従つて公式 (1) 及び (2) は實用上簡單であるが、實際とは一致しない假定に立脚してゐる事を注意せねばならない。以下種々の断面に就いて實際に生ずる剪應力を研究して見よう。

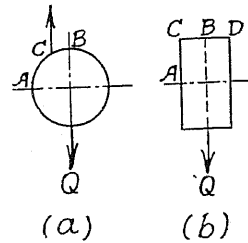


Fig. 143

〔1〕 矩形鐔断面に於ける剪應力の分布

普通剪力は彎曲力率に伴はれて起るものであつて、今一例として Fig. 144 (a), (b) に示す如き一端固定、他端自由な舷木桁の自由端に力  $P$  が作用する場合に就いて考へる。今  $YY$  を断面にて彎曲應力が零である線とし、この  $YY$  から  $\eta$  なる距離にある微分面の剪應力  $\tau$  を求めよう。

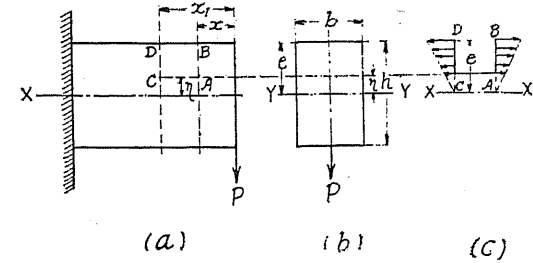


Fig. 144

Fig. 144 (a), (c) に示す如く桁から長さ  $(x_1 - x)$

幅  $b$ 、高さ  $e - \eta$  なる微分體をとり出せばその接する両面  $AB$  及び  $CD$  には第五章第一節に於いて Fig. 101 に就いて説明した様に距離  $\eta$  と共に變化する直應力  $\sigma$  が作用してゐる。断面  $AB$  に於ける彎曲力率  $M_b$  は  $P \cdot x$  であるから距離  $\eta$  に於ける直應力  $\sigma_\eta$  は次式にて與へられる。

$$\sigma_\eta = \frac{P \cdot x \cdot \eta}{I}$$

又桁の最遠纖維に於ける應力は  $\eta = e$  として

$$\sigma_e = \frac{P \cdot x \cdot e}{I}$$

となる。従つて面  $AB = b(e - \eta)$  上の總直應力  $N$  は次の如し。

$$N = \frac{\sigma_\eta + \sigma_e}{2} b(e - \eta) = \frac{P \cdot x}{I} \frac{e + \eta}{2} b(e - \eta) = \frac{Px}{I} \cdot \frac{e^2 - \eta^2}{2}$$

又断面  $CD$  に於いては  $M_b = P \cdot x_1$  であるから全く同様にして

$$N_1 = \frac{Px_1}{I} \cdot \frac{e^2 - \eta^2}{2} b$$

となる。 $x_1 > x$  なるを以つて  $N_1 > N$  にして

$$N_1 - N = \frac{P}{I} (x_1 - x) \frac{e^2 - \eta^2}{2} b$$

なる力は表面  $BD$  に外力が作用しない以上は面  $CA = (x_1 - x)b$  によつて傳導されねばならない。即ちこの面  $CA$  に於ける剪應力  $\tau$  の合計が上の  $N_1 - N$  に

等しくなければならない。この  $\tau$  の方向は  $CA$  の方向であり、幅  $b$  に等布せらるべきものであるから次の関係が成立する。

$$N_1 - N = \tau(x_1 - x)b = \frac{P}{I}(x_1 - x) \frac{e^2 - \eta^2}{2} b$$

$$\therefore (2) \quad \tau = \frac{P}{I} \frac{e^2 - \eta^2}{2} = 6 \frac{P}{bh^3} (e^2 - \eta^2) = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left\{ 1 - \left( \frac{\eta}{h} \right)^2 \right\}$$

但し、此の場合剪力  $Q$  は  $P$  に等しい。

従つて  $\tau$  の値は  $\eta = 0$  即ち中軸線にて最大値を採りその値は

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}, \text{ 茲に } F = bh$$

となり、中軸に於ける剪應力は断面に等布せられるものと假定した場合の  $\frac{3}{2}$  倍となる。 $\tau$  の値を断面の各點に就いて求め、それを横距として示したものが Fig. 145 であつて曲線  $EFE$  は拋物線である。前述の如く剪應力は互に直角に

一對として起るものであるから、軸に直角の方向、即ち断面に沿うても等量の剪應力を生ずるのであつてその分布状態は Fig. 145 に示すものと同形である。此の如き断面内の剪應力分布は Fig. 143 に就いて述べた事を完全に満足するのであつて、例へば邊周に切線方向を  $\tau$  がとるべき性質

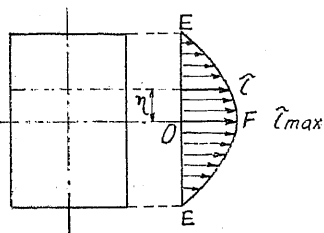


Fig. 145

は邊  $CD$  に於いて  $\tau$  が零であり、邊  $AC$  に沿うては  $\tau$  は  $AC$  の方向に向ふと云ふ事によつて満足されてゐる。

(2) 任意錘断面に於ける剪應力の分布

錘の断面は任意の形であるが力の作用する面に對して對稱であると假定する。

今 Fig. 146 (a) に於いて

$Q$  = 断面の主軸、即ち對稱軸に働く剪力

$I$  = 中立軸  $YY$  に關する断面の慣性能率

$F$  = 断面積

$2y$  = 中立軸より  $\eta$  なる距離に於ける断面の幅

$$S = \int_{\eta}^e 2y \cdot \eta d\eta = \text{距離 } \eta \text{ と } e \text{ の間にある断面即ち圖に影線を施せる部分の軸 } YY \text{ に関する静力率}$$

$\varphi'$  = 周邊上の點  $P'$  に於ける切線が對稱軸となす角

$\tau'$  = 距離  $\eta$  に於ける周邊上の點  $P'$  に生ずる剪應力

$\tau_a$  = 許容剪應力

$M$  = 考へてゐる断面に働く彎曲力率

とし、前項〔1〕

に於いてなした様に錘から Fig. 146 (b) に示す

様に微分體  $BA$   $CD$  を抜きとつて考へて見る。

然らば面  $AB$  上に於いて  $\eta$  なる距離にある微分面上の直應力

は  $\sigma_{\eta} = \frac{Px}{I} \eta$  なるを以つて断面  $AB$  上に於ける直應力の和は次の如し。

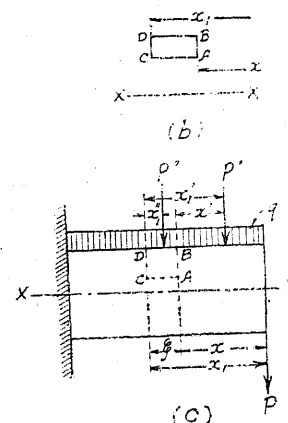
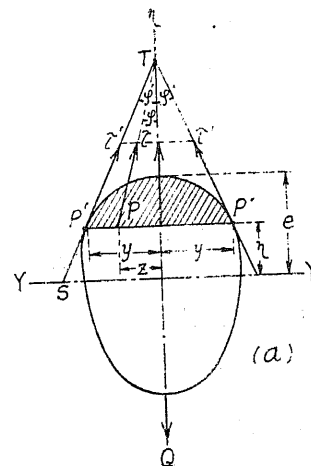


Fig. 146

同様にして面  $CD$  上に於ける直應力の和は

$$N = \int_{\eta}^e 2y \cdot \sigma_{\eta} \cdot d\eta = \frac{Px}{I} \int_{\eta}^e 2y \eta d\eta = \frac{Px}{I} S = \frac{MS}{I}$$

となる。従つて面  $CA = (x_1 - x)2y$  上に生ずる剪應力の總和  $N_1 - N$  は次の如くなる。

$$N_1 - N = Px_1 \frac{S}{I} = \frac{M_1 S}{I}$$

となる。従つて面  $CA = (x_1 - x)2y$  上に生ずる剪應力の總和  $N_1 - N$  は次の如くなる。

$$N_1 - N = \frac{(M_1 - M)S}{I}$$

所が面  $CA$  は微分小であるからその面上には錘軸に平行に等布剪應力  $\tau_y$  が

起るものと考へる事を得。従つて

$$N_1 - N = \tau_y \cdot 2(x_1 - x)y = \frac{P}{I}(x_1 - x)S = \frac{(M_1 - M)S}{I}$$

$$\therefore (5) \quad \tau_y = \frac{P}{2y} \cdot \frac{S}{I} = \frac{Q}{2y} \cdot \frac{S}{I}$$

上の公式(5)を誘導するに際しては單に Fig. 144 に示す如く桁の自由端に力  $P$  が働く場合を考へたのであるが一般の場合には Fig. 146 (b) の如く自由端に於ける  $P$  の他に等布荷重  $q$ 、集中荷重  $P'$ ,  $P''$  などが働くものと考へなければならぬ。この場合には面  $AB$  に對して

$$M = Px + P'x' + q \frac{x^2}{2}$$

$$\sigma_\eta = \frac{Px + P'x' + q \frac{x^2}{2}}{I} \eta$$

$$N = \int_\eta^e 2y \sigma_\eta d\eta = \frac{Px + P'x' + q \frac{x^2}{2}}{I} S$$

が成立し、又面  $CD$  に對しては次の如くなる。

$$M_1 = Px_1 + P'x'_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P''x''_1$$

$$\sigma_{\eta_1} = \frac{Px_1 + P'x'_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P''x''_1}{I} \eta_1$$

$$N_1 = \frac{Px_1 + P'x'_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P''x''_1}{I} S$$

$$\text{従つて} \quad N_1 - N = \frac{P(x_1 - x) + P'(x'_1 - x') + \frac{q}{2}(x_1^2 - x^2) + P''x''_1}{I} S$$

又  $\xi = x_1 - x = x'_1 - x'$  なるを以つて

$$\frac{x_1^2 - x^2}{2} = \frac{x_1 + x}{2} (x_1 - x) = \xi \frac{x_1 + x}{2}$$

$$\therefore N_1 - N = \frac{P\xi + P'\xi + q \frac{x_1 + x}{2} \xi + P''x''_1}{I} S$$

この  $N_1 - N$  なる力が面  $CA = 2y\xi$  に依つて傳へられ、而も  $\xi$  を微分小に採ればこの面にて剪應力  $\tau_y$  は等布されるものと考へ得るを以つて

$$N_1 - N = \tau_y \cdot 2y\xi$$

となる。従つて

(1) 自由端から  $x_1 = x + \xi$  の距離にある断面  $CD$  に對して

$$\tau_y = \frac{P + P' + q \frac{x_1 + x}{2} + P'' \frac{x''_1}{\xi}}{2yI} S$$

$\xi$  が微分小であれば  $\frac{x''_1}{\xi} = 1$  とするを得るを以つて

$$\tau_y = \frac{P + P' + qx_1 + P''}{2yI} S = \frac{Q}{2yI} \cdot S$$

(2) 自由端から  $x$  の距離にある断面  $AB$  に對して

$$\tau_y = \frac{P + P' + qx}{I} S = \frac{Q}{2yI} \cdot S$$

となる。従つて上述公式(5)を剪應力に對する一般公式と考へる事を得る。

この剪應力は桁が水平である限り、水平に起るものであるが それと同時に垂直の方向に等量の剪應力が生ずる。而して垂直断面にてはその邊周上の點  $P'$  に於ける剪應力  $\tau'$  は前述の如く邊周の切線  $SP'T$  の方向に向ふものと考へるべきであり、而もこの點に於いては  $Y$  軸に直角、即ち剪力の方向に公式(5)によつて與へられる  $\tau_y$  が存するべきであるから、結局次の關係を得る。

$$(6) \quad \tau' = \frac{\tau_y}{\cos\varphi'} = \frac{Q}{2y \cos\varphi'} \cdot \frac{S}{I}$$

尙周邊上の點  $P'P'$  の剪應力が  $T$  點に向ふとすれば  $\eta$  軸上の點の垂直剪應力が  $T$  點に向ふ事は勿論であるから  $P'P'$  線上のあらゆる點の剪應力が何れも  $T$  に向ふものと假定するのが隱當である。かくすれば  $P'P'$  線上の點  $P$  の剪應力  $\tau$  として次式を得る。

$$(7) \quad \tau = \frac{\tau_y}{\cos\varphi} = \frac{Q}{2y \cos\varphi} \cdot \frac{S}{I}$$

この剪力  $Q$  に對し材料が安全なる爲には、次の(8)式を満足する事が必要である。

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_a \geq \frac{Q}{2y \cos\varphi'} \cdot \frac{S}{I} \\ \text{又は} \quad Q \leq \tau_a \frac{I}{S} 2y \cos\varphi' \end{array} \right.$$

次に二三の断面に就いて剪應力分布の状態及び最大剪應力を説明しよう。

(a) 矩形断面 (Fig. 145)

$$2y = b, \quad \varphi' = 0, \quad S = b \left( \frac{h}{2} - \eta \right) \left( \frac{\frac{h^2}{4} + \eta^2}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \eta^2 \right)$$

$$\tau' = \frac{Q}{b} \frac{\frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \eta^2 \right)}{\frac{1}{12} bh^3} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[ 1 - \left( \frac{\eta}{h} \right)^2 \right]$$

$\eta = 0$  として  $\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$

これ本節公式 (2) と一致する。

(b) 圓形断面 (Fig. 147)

Fig. 147 に於いて、 $y = r \sin \psi$

$\psi = r \cos \psi', \quad I = \frac{\pi}{4} r^4, \quad F = \pi r^2;$

となる。今  $F_a$  を影線部の断面積とすればその Y 軸からの重心距離は  $\frac{(2y)^3}{12F_a}$  となるを以

つて  $S = \frac{(2y)^3}{12F_a} \cdot F_a = \frac{2y^3}{3}$

$= \frac{2r^3 \cos^3 \psi'}{3}$  となる。

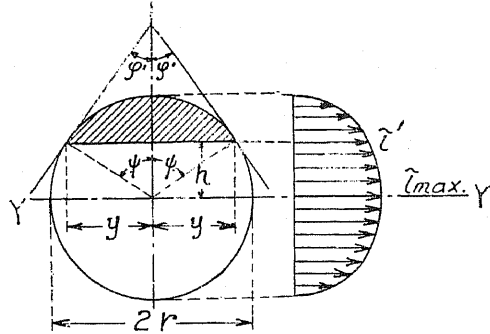


Fig. 147

$\therefore (11) \quad \tau' = \frac{Q}{2r \cos^2 \psi'} \cdot \frac{2r^3 \cos^3 \psi'}{3 \cdot \frac{\pi}{4} r^4} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \cos \psi' = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \cos \psi'$

尚  $\cos \psi' = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \left( \frac{\eta}{r} \right)^2}$  なるを以つて (11) は次の如くかく事を得。

(11)'  $\tau' = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \sqrt{1 - \left( \frac{\eta}{r} \right)^2}$

$\psi' = 0$ , 即ち軸 YY に對して  $\tau'$  は最大となるのであつて、その値は

(12)  $\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}$

即ち圓形断面に於ける最大剪應力の  $\frac{4}{3}$  倍となる。尚  $\tau'$  を縦距  $\eta$  に關して横距ととれば Fig. 147 の如き剪應力圖を得るが、その方程式は (11)' より次の如くなり橢圓を表す事を知る。

$\left( \frac{\tau'}{\frac{4Q}{3F}} \right)^2 + \left( \frac{\eta}{r} \right)^2 = 1$

(c) 中空圓形断面 (Fig. 148)

この例に於いては壁は比較的薄いが剪力によつて波狀變形を生ぜざる程度とし、單に中軸線に生ずる最大剪應力のみを求めよう。

$2y = d - d_0 = 2s, \quad \varphi' = 0, \quad d + d_0 = 2d_m$

$I = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_0^4) = \frac{\pi}{64} (d^2 + d_0^2)(d + d_0)(d - d_0) \cong \frac{\pi}{8} d_m^3 s$

$S = \frac{1}{2} \pi d_m s \cdot \frac{1}{\pi} d_m = \frac{1}{2} d_m^2 s$

$\therefore \tau_{max} = \frac{Q \cdot \frac{1}{2} d_m^2 s}{2s \cdot \frac{\pi}{8} d_m^3 s} = \frac{2 \frac{Q}{\pi d_m s}}{2 \frac{S}{F}} = 2 \frac{S}{F}$

茲に  $F$  は中空圓形の面積を示す。即ち

$F = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_0^2) = \pi d_m s$

かくの如く中軸線に於ける剪應力は平均剪應力の 2 倍である。

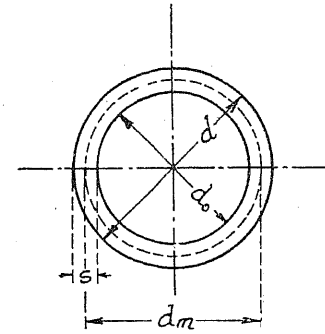


Fig. 143

(d) I 形断面 (Fig. 149)

今 Fig. 149 に示す如き直角隅角を有する I 形断面を考へるに幅  $2y$  及び角  $\psi'$  は腹部 (Web) から突縁部 (Flange) に移る點に於いて急に變化するが故に精密に云へば公式 (6)

は成立しない筈であつて、公式 (6) から算出した隅角點及びその附近に於ける剪應力は實際と異つて出てくるわけである。何故ならば断面の幅が急に變化する所では、上述の如く幅  $2y$  に一様に  $N_1 - N'$  が分布すると云ふ假定が成立しないからである。従つて今近似的に  $\varphi = 0$  として公式 (7) を用ひて剪應力を計算して見よう。即ち突縁部に對しては、 $\tau = \frac{Q}{2y} \cdot \frac{S}{I}$  に於いて  $2y = B$  として

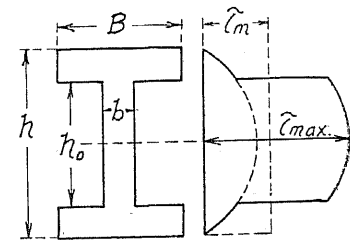


Fig. 143

$\tau = \frac{Q}{IB} \int_{\eta}^{\frac{h}{2}} \eta \cdot B \, d\eta = \frac{Q}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - \eta^2 \right)$

特に  $\eta = \frac{h_0}{2}$ , 即ち突縁の内側に於いては

$\tau = \frac{Q}{I} \frac{h^2 - h_0^2}{8}$

次に腹部に於いては積分を突縁部と腹部の二段に分ちて

$\tau = \frac{Q}{Ib} \int_{\eta}^{\frac{h}{2}} \eta \cdot z \cdot d\eta = \frac{Q}{Ib} \left( B \int_{h_0}^{\frac{h}{2}} \eta \, d\eta + b \int_{\eta}^{\frac{h_0}{2}} \eta \, d\eta \right)$



$$= \frac{Q}{I} \left( \frac{B}{b} \frac{h^2 - l_0^2}{8} + \frac{l_0^2}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right)$$

特に  $\eta = \frac{l_0}{2}$  即ち突線の内側に於いては

$$\tau = \frac{Q}{I} \frac{h^2 - l_0^2}{8} \frac{B}{b}$$

となり前に計算したる同點の剪應力に比し  $\frac{B}{b}$  倍となる。

$\eta = 0$  即ち中立軸に於ける最大剪應力は

$$\tau_{max} = \frac{Q}{I} \left\{ \left( \frac{B}{b} \frac{h^2 - l_0^2}{8} \right) + \frac{l_0^2}{8} \right\} = \frac{Q \cdot S_0}{I \cdot b}$$

となる。茲に  $S_0$  は中立軸に關する中立軸より上にある断面部分の静力率を示す。断面の各點に於ける剪應力を圖示すれば Fig. 149 の如くであつて、二つの曲線は共に拋物線である。

今一例として  $B = 12.0 \text{ cm}$ ,  $b = 1.0 \text{ cm}$ ,  $h = 24.0 \text{ cm}$ ,  $h_0 = 21.0 \text{ cm}$  とすれば

$$I = \frac{12 \times 24^3}{12} - \frac{11 \times 21^3}{12} = 5,335 \cdot \text{cm}^4$$

$$\frac{S_0}{b} = \frac{12}{1} \cdot \frac{24^2 - 21^2}{8} + \frac{21^2}{8} = 257.6 \text{ cm}^2$$

$$F = 12 \times 24 - 11 \times 21 = 57 \text{ cm}^2$$

$$\therefore \tau_{max} = \frac{Q}{5,335} \cdot 257.6 = 0.0483 Q = 2.75 \frac{Q}{F}$$

従つて平均應力の 2.75 倍となる。

Fig. 150 は實際に用ふる輻壓 I 字形断面に對する剪應力分布圖である。尙公式 (6) 及び (7) は剪斷係數  $\beta$  が一定であると假定して導いた式であつて、鑄鐵、混凝土の如く剪斷係數が變化するものに於いては公式はかなり實驗の結果と一致しないのである。

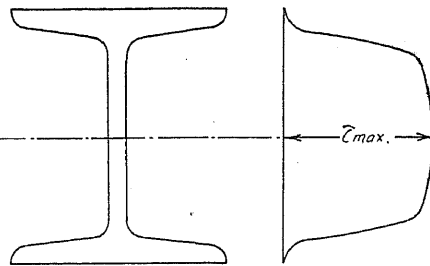


Fig. 150

練習問題 8

(1) 半径  $r$  なる圓筒が  $M_t$  なる扭力を受けてゐる時  $\frac{M_t}{n}$  だけの扭力を受けもつべき圓筒中央部の半径  $r$  を求めよ。

(答)  $r_1 = \frac{r}{\sqrt{n}}$

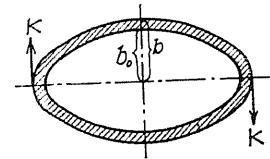
(2) 中空軸の強度は等重なる實軸に比し  $\frac{m\sqrt{m^2-1}}{m^2+1}$  倍なる事を證明せよ。但し  $m$  は中空軸内外徑の比とす。

(3) 圖の如く中空橢圓環が偶力  $K, K$  を受ける時、

$K = 1,800 \text{ kg}$  にして、許容扭應力  $\sigma_{t.a} = 500 \text{ kg/cm}^2$

ならば  $b$  を何程とすべきか。但し  $m = \frac{b_0}{b} = 0.8$  とせよ。

(答)  $b = 2.8 \text{ cm}$

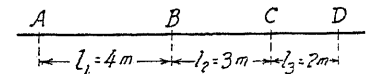


(4) 一邊  $a$  なる正方形断面の軸に圖の如く  $A$  及び

$C$  點に夫々 3 馬力、12 馬力の水車が連結され

$B$  及び  $D$  點には夫々 8 馬力、7 馬力の發電

機が連結されてゐるものとし、且つこの軸の毎



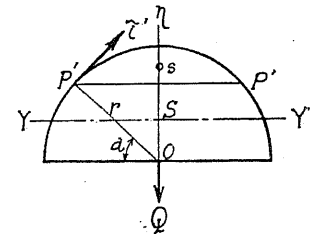
分時の廻轉數を  $n$  とする時この軸の全扭角は何程となるか。(答)  $\vartheta_t = \frac{564,865,000}{n^4} \beta$

(5) 直径  $d = 30 \text{ cm}$  の丸太材より矩形断面の抗扭材を切りとらんとす。如何にすればもつとも多くの扭力に耐えうるか。又毎分時の廻轉數  $n = 10$ 、許容扭應力  $\tau_{t.a} = 9 \text{ kg/cm}^2$  なる時この耐え得る扭力は何ととなるか。(答) 一邊  $21.2 \text{ cm}$  なる正方形、 $M_t = 2.67$  馬力

(6) Fig. 147 に於いて剪應力が最大剪應力の  $\frac{1}{n}$  なる點  $(\eta_1, \eta_1)$  の軌跡を求めよ。

(答)  $\eta_1^2(2\gamma - \eta_1^2 - \eta_1^2) = \gamma^4 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

(7) 半圓形断面が圖の如く剪力を受けた場合周邊上の剪應力を求めよ。又周邊上最大の剪應力の起る位置如何。



(答)  $\tau = \frac{Q \cdot r^2}{3I} \left( \cos \alpha + \frac{2}{\pi} \tan \alpha - \frac{\pi - 2\alpha}{\pi \cos^2 \alpha} \right)$

$\tau_{max}$  に對し  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \cot \alpha + \frac{\pi}{4} \cos^3 \alpha$

(8) 直径  $d = 50 \text{ cm}$  なるアンカーボルトが圖の

如き楔  $K$  によつて固定

され張力  $P$  に耐えるも

のとする。今許容張應力

$\sigma_u = 1,000 \text{ kg/cm}^2$  許容

剪應力  $\tau_u = 780 \text{ kg/cm}^2$

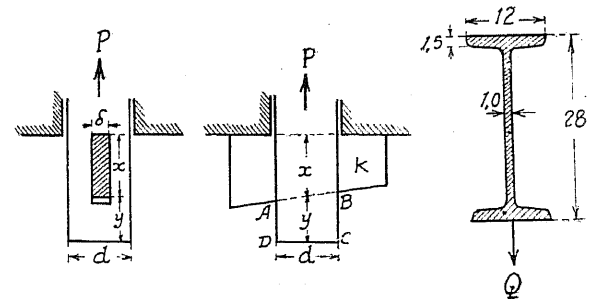
として許容張力  $P$  及び

$x, y$  の寸法を定めよ。但

し  $\delta = 1.2 \text{ cm}$  とする。

(答)  $F = 13,635 \text{ kg}$

$x = 11 \text{ cm}$ ,  $y = 2.6 \text{ cm}$



(9) 圖の如き高さ  $28 \text{ cm}$  の I 字形断面は何程の剪力を荷ひうるか。但しこの材料の許容張應力  $\sigma_a = 1,000 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比  $= \frac{1}{m} = \frac{3}{10}$  とする。(答)  $Q = 18,553 \text{ kg}$