

第六章 長柱の彎折荷重

第一節 長柱の彎折荷重

(1) 概 説

Fig. 107 に於いて AB を小断面を有する長き角錐形の錐とし、その軸に荷重 P が働くものとする。今錐の断面は一定であつて、その重心を通る軸は眞直とし、又横側より何等の力が作用せざるものとする。然らば前章に於いて壓力に就いて説明した様に、かゝる錐は軸の方向に壓縮し、それと直角の方向に断面の擴大をなすべきであつて、上の自由端が横に移動するが如き誘因は何等存在しないわけである。しかし乍ら上に述べた如き假定を實際に於いて満す事は困難であつて、殊に柱が細長くなれば力は軸の方向と一致し難く、又重心軸は眞直であり難くなる。實驗の結果に依れば柱の自由端が動き柱が彎曲するに至るのである。この事實を示す簡單なる物理實驗を示せば次の様である。



Fig. 107

(a) Fig. 108 に示す様に直徑 3.5 mm 、長さ $l = 850\text{ mm}$ の鋼棒を眞直に立てその上端に軸の方向に $P = P_1 = 0.4\text{ kg}$ の錘を以つて荷重したるに、その自由端は $y' = 25\text{ mm}$ だけ移動して靜止したのである。棒の自重を無視すれば此の位置に於ける彎曲力率は Py' であつて棒の内部に生ずる内力と平衡を保つわけである。これを元の眞直の位置に持ち來り靜かに放せば再び $y' = 25\text{ mm}$ の位置まで撓み、又手を以つてこれ以上に多く撓めて手を放すも矢張り $y' = 25\text{ mm}$ の位置に戻るのである。次に荷重 $P_1 = 0.4\text{ kg}$ を取り去り $P = P_2 = 1.1\text{ kg}$ を以つて置き代へたるに自由端は移動し始め Fig. 109 に示す如く彎折し、彎折度は固定端に近いほど著しくなるのである。尙この場合にも荷重を取り去れば殆んど原形に復するに至る。



Fig. 108

(b) 一端固定せられた $l = 850 \text{ mm}$ の木柱 (正方形断面にしてその邊長は 7.5 mm) が自由端に $P = P_1 = 1.1 \text{ kg}$ の荷重を受けたるに、自由端は $y' = 150 \text{ mm}$ だけ移動して静止したる



Fig. 109

も 1.1 kg の代りに $P_2 = 1.3 \text{ kg}$ の荷重をかければ $y' = 550 \text{ mm}$ となり、柱は破壊するに至つたのである。

要するに P_2 なる荷重により (a), (b) と同彎折と云ふ現象を生じたわけであつて、 P_1 と P_2 との間に柱の弾性内力と平衡を保つ様なある限界荷重のある事を知る。之れを稱して彎折荷重 (Buckling load) と云ふ。

(2) Euler 公式

Fig. 110 に於いて

$P =$ 始め直線である錐軸の方向に働く力

$P_c =$ 彎折荷重、即ち彎折が生ずる限界に於ける P の値

$I =$ 二つの主軸に關する断面の慣性能率の内、小なるもの

$l =$ 錐の長さ

$\alpha =$ 變形率 (一定とする)

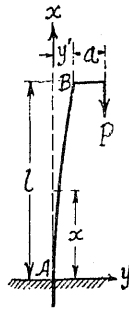


Fig. 110

とし、断面に於ける錐の弾性線の横距を y とする。然らばその断面に於ける彎曲力率は $M_b = P(a+y'-y)$ である。従つて第五章第一節公式 (15) に依り弾性線の微分方程式として次式を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha P}{I}(a+y'-y)$$

今 $\frac{\alpha P}{I} = n^2$, $a+y'-y = -z$ とすれば

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} = -n^2z$$

α 及び I を一定とすればこの積分は

$$z = C_1 \sin(nx) + C_2 \cos(nx)$$

又は $y - a - y' = C_1 \sin(nx) + C_2 \cos(nx)$

點 A に於いては $y = 0$, $x = 0$, 及び $\frac{dy}{dx} = 0$ となるを以つて積分常数

は次の如くなる。 $C_2 = -a - y'$, $C_1 = 0$

故に弾性線の方程式として

$$(1) \quad y = (a+y')(1 - \cos(nx))$$

尙 $x = l$ に對して $y = y'$ なるを以つて

$$y' = (a+y')(1 - \cos(nl))$$

$$\therefore (2) \quad y' = a \frac{1 - \cos(nl)}{\cos(nl)} = a \left[\frac{1}{\cos(nl)} - 1 \right] = a \left[\frac{1}{\cos\left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}}\right)} - 1 \right]$$

となる。この (2) 式を用ひて (1) を書き換へると次の如くなる。

$$(3) \quad y = a \frac{1 - \cos(nx)}{\cos(nl)} = a \frac{1 - \cos\left(x \sqrt{\frac{\alpha P}{I}}\right)}{\cos\left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}}\right)}$$

今長さ 100 cm 、直徑 1 cm なる鍊鐵錐に公式 (2) を應用すれば

$$\alpha = \frac{1}{2,000,000}, \quad I = \frac{\pi}{64} d^4 \cong \frac{1}{20} d^4 = \frac{1}{20}, \quad l = 100$$

$$\therefore y' = a \left[\frac{1}{\cos 100 \cdot \sqrt{\frac{20P}{2,000,000}}} - 1 \right] = a \left[\frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{10}}} - 1 \right]$$

となる。挺長 α としては錐が始めに直線でない事、及び P が断面の重心に精密に作用しないことから生ずる様な小さい偏心距離をとる。

$$P = 5 \text{ kg} \text{ に對して} \quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 0.707} - 1 \right) = 0.32 a$$

$$P = 10 \text{ kg} \text{ に對して} \quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 1} - 1 \right) = 0.85 a$$

$$P = 15 \text{ kg} \text{ に對して} \quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 1.225} - 1 \right) = 1.95 a$$

$$P = 20 \text{ kg} \text{ に對して} \quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 1.4142} - 1 \right) = 5.54 a$$

$$P = 22.5 \text{ kg} \text{ に對して} \quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 1.5} - 1 \right) = 13.16 a$$

従つて y' は始めは P と共に徐々に増すが P が大きくなれば非常に速かに増加する。 $P = 24.674 \text{ kg}$ に對して

$$y' = a \left(\frac{1}{\cos 1.5708} - 1 \right) = a \left(\frac{1}{0} - 1 \right) = a \cdot \infty = \infty$$

α が如何に小であつても零でない限り $P = 24.674 kg$ に對して計算上 $y' = \infty$ となる。一定の長さを有する柱の自由端が無限大に移動すると云ふ事は事實上考へられないから、この際柱は破碎するものと考へねばならぬ。即ち荷重が鉋軸から少しでも偏倚し、鉋軸が完全に直線ではなく、材料がその等質性を欠き、或は又横から少しでも力を受ければ $P = 24.674 kg$ に達した時外力と内力との平衡が破れて柱は彎折するに至る。この値が所謂彎折荷重 P_k にして、一般には公式(2)からその値を定める事が出来る。即ち

$$y' = \alpha \cdot \infty \text{ に對して } P = P_k$$

$$\therefore \cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha P_k}{I}}\right) = 0, \quad l\sqrt{\frac{\alpha P_k}{I}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore (4) \quad P_k = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{I}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

次に Fig. 111 に示す様に柱の兩端 AB に鉋を附し、彎曲を許すも横への移動が出来ざる様に構造すれば、その柱の半分の長さが Fig. 110 の全長に相當する事になるを以つて公式(4)に於いて l の代りに $0.5l$ と置けば Fig. 111 に對する彎折荷重を得る事になる。

$$(5) \quad P_k = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{I}{(0.5l)^2} = \frac{\pi^2 I}{\alpha l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

即ち自由端を有する柱に比して 4 倍の荷重に耐え得る事になる。公式(5)をその創作者の名に依つて Euler 公式と名付ける。

次に Fig. 112 の様に兩端に於いて緊固せられた柱 AB が彎折荷重を受ける場合、點 A, B に於ける切線の方向が變化しないものとすれば、區間 AD 及び BD の中點 C 及び E は反向點であり、又區間 AC 及び BE は Fig. 110 に相當し、中央區間 CDE は Fig. 111 に相當する事になる。従つて全長の四分の一、即ち $\frac{1}{4}l$ に對して公式(4)が成立する事になる。

$$\therefore (6) \quad P_k = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{I}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{4\pi^2 I}{\alpha l^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

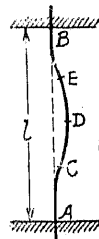
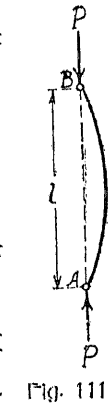


Fig. 112

要するに Fig. 110, 111, 112 に示す柱の彎折荷重は上に示す様に

1:4:16 の比を保つのであつて、今公式(4),(5),(6)を一つに纏めると次の如くなる。

$$(7) \quad P_k = r \frac{1}{\alpha} \frac{I}{l^2} = r \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{茲に (8) } \begin{cases} \text{Fig. 110 に對し} & r = \frac{\pi^2}{4} \\ \text{Fig. 111 に對し} & r = \pi^2 \\ \text{Fig. 112 に對し} & r = 4\pi^2 \end{cases}$$

(3) Euler 公式應用の範圍

Euler 公式は變形率 α が一定である材料からなる細長い鉋に對して導かれたものであるが、多少假定から異つた構造部分に對しても應用し得るのである。即ち α が變化し又は長さに比し斷面の比較的大なる鉋、形鐵からなる合成柱、鐵筋混凝土柱などに對しても應用し得るのである。

鑄鐵、銅、アルミニウム合金、混凝土、及び石などは應力と共に α の値が變化するものであるから、Euler 公式に於いて應力に相當する變形率を挿入した場合に始めて實驗の結果と一致する。壓力試験に於いて應力變形曲線が水平なれば $\alpha = \frac{d\epsilon}{d\sigma} = \infty$ となるを以つて公式(4)に於いて $P = 0$ となる。尚彎折の場合には柱の内部に生ずる應力は外部に生ずるものに比し著しく大であるが、 α としてはその平均値を取れば計算と實驗とは凡そ一致するものである。

次に合成斷面の柱に於いては普通の方法で計算せる慣性能率 I の全體が彎折荷重を受ける際に有効に働く事は少いのであるから、 P_k の計算にはその有効に作用すべき慣性能率を用ひる必要がある。

公式(4)~(7)に於ける柱長 l を定めるには柱端の構造及びその他部材との接合状態、即ち如何に力が傳へらるべきかと云ふ事に就いて考へねばならない。接合せられた他部材から柱に對し、横力、形及び角の變化を生ぜしめる様な場合には柱の抵抗力に可成りの影響を及ぼすものであるから、公式(8)に於いて適當なる l 及び r を選ぶ必要がある。

第二節 許容彎折荷重

長柱の許容壓力 P は前節に述べた所の彎折荷重 P_k を彎折安全率 ν で割つたものである。

$$P = \frac{P_k}{\nu}$$

従つて (1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Fig. 110 に對して} \\ \text{Fig. 111 に對して} \\ \text{Fig. 112 に對して} \end{array} \right. \begin{array}{l} P = \frac{\pi^2 I}{4\nu a l^2} \\ P = \frac{\pi^2 I}{\nu a l^2} \\ P = \frac{4\pi^2 I}{\nu a l^2} \end{array}$

となり、一般に次の如くかく事を得る。

$$(2) \quad P = \frac{rI}{\nu a l^2}$$

茲に r の値は前節公式 (8) に依つて與へられる。

次に彎折安全率 ν の値に就いて述べよう。Fig. 110 の如く兩端に於いて完全に緊固せられた場合には $r = 4\pi^2$ であるが、この如き理想的な場合の起るのは實際上極めて稀である。尚力が靜的に働くか又衝撃を以つて働くか、或は温度變化の影響を受けるか否かも考慮しなければならない。又 Euler 公式を誘導するに際し、Fig. 110 に示す a の値として零でない極めて小なる値を假定したのであるが、實際上は多少とも有限の値を有するものであるから、彎折は Euler 公式に示すよりも小なる荷重で起るのであつて、この點を特に力説したのは Müller Breslau 氏である。(H. Müller Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre (1924) S. 360 以下参照。)

Fig. 111 に示す如く兩端 A, B に鉋を有する場合にてもその點に摩擦抵抗の爲に多少の彎曲力率を生じ、又抗壓材が垂直の位置にない様な場合にはその爲に彎曲力率を受ける様になる。以上の各種の事情を考慮して ν の値を選ぶべきであつて、一定のものとする事は出来ない。特に柱の兩端の緊固の状態に關係する事は大であつて、例へば根元及び頭に強大な鉋を有する柱は小なる鉋を有する柱に比し、より多く緊固せられて多くの荷重に耐え得る。しかし他方端鉋が大なればなるほど荷重は大なる挺長を以つて作用する事になる。鉛鉋を兩端に挟んだ場合

にはセメントを以つて兩端が固められた場合よりも易く彎曲する。従つて第一節 (2) に於いて述べた様に嚴密に云へば兩端緊固の状態に應じ、一々係數 r を定める必要がある。然し乍ら一般には P は r/ν に比例するから、柱端が横に移動しない柱に對しては (其の實例最も多し) 一樣に $r = \pi^2$ とし、且つ全體の柱の長さを l として安全率 ν の値を兩端及びその他の状態に應じ、適當に加減する様にしてゐる。

同一材料で出來た同一斷面の供試片を用ひその長さを種々に變へて、耐負荷重を求めた實驗の結果を圖示すれば Fig. 113 の様である。茲に横距は長さ l を示し、縦距は彎折強度 $\sigma_k = \frac{P_k}{F}$ を示してゐる。この Fig. 113 の如き關係は鐵材のみならず、混凝土及び鐵筋混凝土に對しても成立するのであつて、區間 AB

は極めて短い柱に對する抗壓強度に相當する。次の區間 BC では曲線は水平に對して少しく傾き彎折不い長さのあまり大ならざる柱に相當する而して DE の部分は長

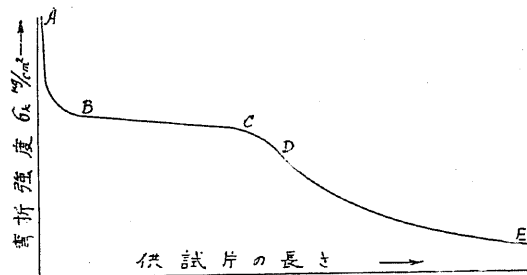


Fig. 113

柱にして彎折を受けるものに相當し、區間 CD は彎折すると否との境界を表すものである。

一般に抗壓材の細長の程度を示すに Fig. 111 の如き場合に對して、 $\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{F}}}$ なる細長率 (Slenderness ratio) を用ひる。Fig. 114 は短形斷面を有する構築鋼の彎折試験の結果にして、横距

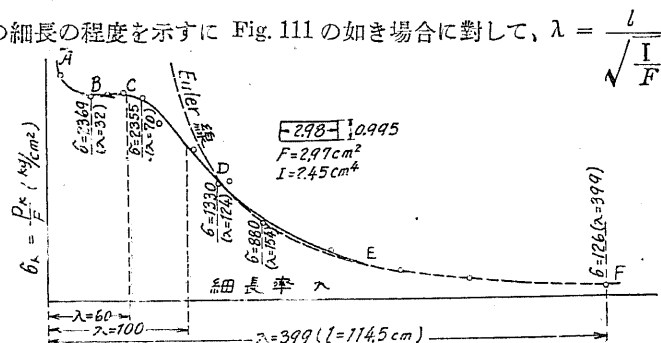


Fig. 114

として λ をとつてゐる。圖上に示す小圓點は實驗より得られた値にして、これらの諸點を曲線で結んだものが圖に示す實線である。又點線は前節公式(5)即ち Euler 公式を用ひて計算せる結果である。實驗に用ひた柱の長さは初め $l = 114.5 \text{ cm}$ であつて以下順次之を短くして實驗を繰り返したものである。圖に示す様に $\lambda = 60$ までは短柱に屬し、 $\lambda = 100$ 以上は Euler 公式に殆んど一致する。而してその中間部分 CD は直線に近い形をなしてゐる。

Fig. 115 は I 字形構架鋼に對する實驗の結果であつて、Euler 曲線は實驗曲線の下位にある。これは實驗の場合に其の端が球面にて支へられてあつても摩擦の爲多少の彎曲力率を生ずるが爲である、

次に獨逸國有鐵道 1,925 年 2 月制定の仕方書に於ける抗壓材の計算法を簡単に説明しよう。

自由彎折長として、弦部材及び梯形構桁の端斜部材に對しては網線の長さを探り、腹部材(垂部材、斜部材)の桁面に直角な方向に於ける彎折に對しては同様に網線長を、又桁面に於ける彎折に對しては柱の兩端に於ける接合銀の重心間の距離を探る。尚 Fig. 116 に示す様に柱がその兩端に於いて床桁及び横繫材と剛結され、ラーメンを形成する時は桁面に直角の方向の彎折に對しては不撓接合の中心距離を彎折長 S_k とする。弦部材及び腹部材が他の固定點から支柱によつて支へられてある場合には、それに相當して彎折長を短くする。交叉部材にして二本以上の銀にて連結せられ一方が壓力、他方が張力を受ける場合には桁面及びそれと直角の面に對して交叉點に於いて固定せられたるものと假

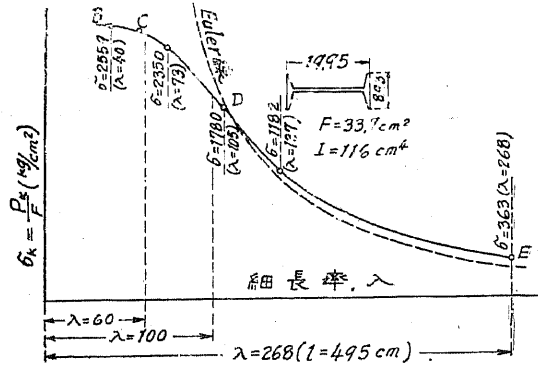


Fig. 115

自由彎折長として、弦部材及び梯形構桁の端斜部材に對しては網線の長さを探り、腹部材(垂部材、斜部材)の桁面に直角な方向に於ける彎折に對しては同様に網線長を、又桁面に於ける彎折に對しては柱の兩端に於ける接合銀の重心間の距離を探る。尚 Fig. 116 に示す様に柱がその兩端に於いて床桁及び横繫材と剛結され、ラーメンを形成する時は桁面に直角の方向の彎折に對しては不撓接合の中心距離を彎折長 S_k とする。弦部材及び腹部材が他の固定點から支柱によつて支へられてある場合には、それに相當して彎折長を短くする。交叉部材にして二本以上の銀にて連結せられ一方が壓力、他方が張力を受ける場合には桁面及びそれと直角の面に對して交叉點に於いて固定せられたるものと假

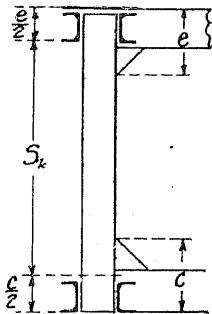


Fig. 116

定する。

(a) 軸應力

柱の重心軸に壓力が作用する時には計算された部材應力に細長率 $\lambda = \frac{S_k}{i}$ 及び材料の種類によつて變化する所の彎折係數 ω を乗じ、それ以後は全く抗張材と同様に取扱ふ。但し、この際紙孔を斷面積から引き去る必要のない事は勿論である。即ち

$$\frac{\omega S}{F} \leq \sigma_u$$

$$S = S_y + \varphi \cdot S_p + \dots$$

S_y = 靜荷重から生ずる部材力

S_p = 活荷重から生ずる部材力

φ = 衝擊係數

柱の斷面が變化する場合には λ は柱の中央に於ける斷面を以つて計算する。この方法の理由殊に ω の性質に就いて説明すれば次の如し。

彎折の瞬間に於ける柱斷面重心の應力 σ_k を圖示すれば彎折應力 σ_k 線を得るのであるが、この曲線として $\lambda = 0$ より $\lambda = 60$ 迄は平均壓搾應力 σ_s をとり従つて σ_k 線は水平とする、そして $\lambda \geq 100$ に對しては Euler 曲線 $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ をとり、 $\lambda = 60 \sim 100$ にては兩線の端を直線にてむすぶ事にする。例へば構架用鋼 St. 37 ($\sigma_s = 2,400 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2,100,000 \text{ kg/cm}^2$) に對しては Fig. 117 に於ける σ_k 線をとる。尚他の鋼材、St. 48 ($\sigma_s = 2,400 + 0.3 \times 2,400 = 3,120 \text{ kg/cm}^2$), St. 52 ($\sigma_s = 2,400 + 0.5 \times 2,400 = 3,600 \text{ kg/cm}^2$) に對しても同様に σ_k 線をひく事を得る。今 ν を以つて彎折荷重に對する安全率とすれば彎折應力 σ_k と抗壓材に對する許容應力 $\sigma_{c.a}$ との間に次の關係が成立する。

$$\sigma_{c.a} = \frac{S}{F} \quad \nu = \frac{\sigma_k}{\sigma_{c.a}}$$

$\lambda \geq 100$ の場合に總べての鋼材に對して主荷重(活荷重及び靜荷重)による應力の安全率として $\nu = 3.5$ を採る。従つて $\lambda \geq 100$ なる抗壓材に對して

$$\sigma_{c.a} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot 3.5}$$

をとる。故に例へば橋梁鋼 St. 37 に対しては、 $\lambda = 100$ にて $\sigma_{c.a}^{100} = 592$ kg/cm^2 となる。

次に $\lambda = 0$ に對し主荷重のみの場合 $\sigma_{c.a}^0 = \sigma_a = 1,400$ kg/cm^2 とし、 $\lambda = 0$ と $\lambda = 100$ との間にては $\sigma_{c.a}$ 線は拋物線形に變化するものとする。例へば St. 37 に対しては $\lambda^2 = 2p(1,400 - \sigma_{c.a})$ にて $\sigma_{c.a}^{100} = 592$ kg/cm^2 を挿入して p を求むれば $p = \frac{10,000}{2 \times 808}$ となるを以つて、 $\lambda = 0 \sim 100$ 間の St. 37 に対する $\sigma_{c.a}$ 線は次の式にて示される事になる。

$$\sigma_{c.a} = 1,400 - 0.0808\lambda^2$$

而して前述の如く $\frac{\omega S}{F} \cong \sigma_a$ と定めたるを以つて材料強度の全利用の際には

$$\sigma_a = \frac{\omega S}{F} = \omega \cdot \sigma_{c.a}$$

となる。例へば St. 37 に対し $\frac{\omega S}{F} = 1,400 = \omega \sigma_{c.a}$ となる。

従つて彎折係數 ω は次の式を満足する。

$$\omega = \frac{\sigma_a}{\sigma_{c.a}} = \frac{r \cdot \sigma_a}{\sigma_k}$$

風壓及び附加外力の影響を計算に入れる時には σ_a の代りにその場合の許容應力 σ'_a を用ひるとよい。

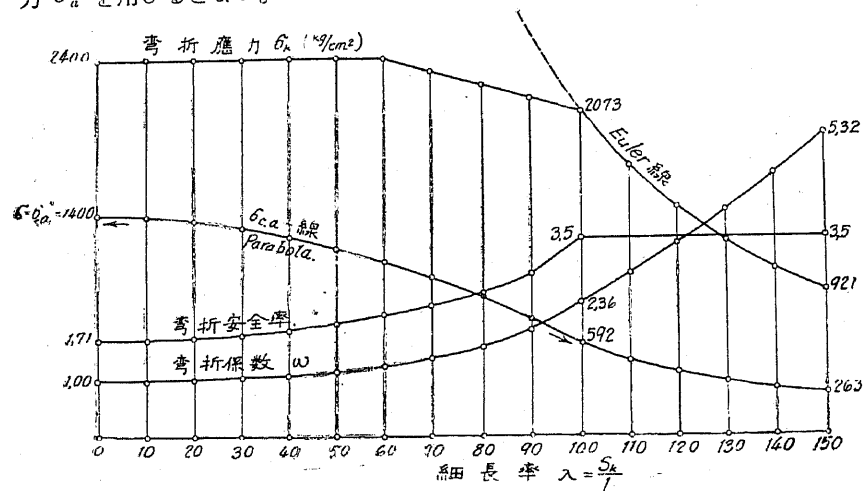


Fig. 117

Fig. 117 は普通鋼 St.

彎折應力及び彎折係數の表

37 に対する σ_k 線、 $\sigma_{c.a}$ 線、 r 線、 ω 線を示したものであつて、更にこの ω 及び σ_k の値を表にすれば次の如くなる。この表は $\lambda = 150$ 迄の値を示してゐるが實際上 $\lambda = 150$ となる事は極めて稀れである。

(b) 偏倚荷重

部材力 $S = S_y + \varphi S_p + \dots$ が軸から偏倚して働くか、或は軸壓力 S の他に彎曲率 $M = M_y + \varphi M_p + \dots$ が作用すれ

細長率 $\lambda = \frac{S_k}{i}$	彎折應力 $\sigma_k (kg/cm^2)$		彎折係數 ω
	$\lambda \leq 60$	$\lambda > 60$	
	$\sigma_k = 2,400$	$\sigma_k = 2890.5 - 8.175\lambda$	
		$\sigma_k = \frac{20,726,000}{\lambda^2}$	
0	} 2,400		1.00
10		1.01	
20		1.02	
30		1.05	
40		1.10	
50		1.17	
60		1.26	
70		2,313	1.39
80		2,237	1.59
90		2,155	1.88
100		2,073	2.36
110		1,713	2.86
120		1,437	3.41
130		1,226	4.00
140		1,057	4.64
150	921	5.32	

ば次式に依つて計算せられた應力が許容限度 σ_a を超過してはならない。

$$\sigma = \frac{\omega S}{F} + \frac{M}{W_n}$$

茲に W_n は全斷面の重心軸に関する純斷面の斷面係數を表す。又 M は全斷面の重心軸に関する彎曲力率である。

終りに我國鐵道省規定橋梁設計仕様書（昭和4年3月制定）に於ける普通鋼 St. 37 に対する許容應力を示せば次の如し。

軸應力

應張力； $1,200$ kg/cm^2

應壓力； $\lambda = \frac{S_k}{i} < 40$ の場合 $1,000$ kg/cm^2

$\lambda = 40 \sim 100$ の場合 $1,200 - 5 \frac{S_k}{i}$

$$\lambda > 100 \text{ の場合 } \frac{2100,000}{3} \left(\frac{i}{\delta_k} \right)^2$$

この結果は獨逸の規定と大差がないのである。

第三節 Navier 彎折公式

前節に導いた長柱に關する Euler 氏公式は荷重が與へられて其の柱の適當な斷面を直接求め得る所の利益があるが、その式の中に構造物の安全度を察知する爲に吾々がつかひ慣れてゐる所の應力の項が含まれてゐないと云ふ缺點がある。この缺點を除く爲に Navier は次の式を導いた。

$$(1) \quad P = F \frac{\sigma_{c.a}}{1 + \kappa \frac{Fl^2}{I}} = F \frac{\sigma_{c.a}}{1 + \kappa \left(\frac{l}{i} \right)^2}$$

茲に P = 柱の許容耐負總荷重

$\sigma_{c.a}$ = 材料の許容抗壓應力

F = 柱の斷面積

l = 柱の長さ

I = 斷面の最小主慣性能率

i = 最小環動半徑 = $\sqrt{\frac{I}{F}}$

κ = 實驗係數

尙之れと同一形のものに Gordon, Rankine, Schwarz 公式と稱するものがある。今この式の成立を説明しよう。

Fig 118 に於いて一つの長柱が荷重を受ける場合を考へて見る。然らばこの長柱はその中央の彎曲し易き方向の面に於いて P_a なる彎曲力率と P なる壓力を受ける。従つて中立軸から e なる距離にある纖維の應力は次式に依つて與へられる。

$$\sigma_{c.a} = \frac{P}{F} + \frac{P_a}{I} e$$

$$\therefore (2) \quad P = F \frac{\sigma_{c.a}}{1 + \frac{aeP}{I}}$$

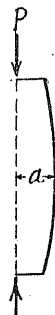


Fig. 118

上式中偏心距離 a の値は未知であるが、前節にも述べた様にその偏心の原因としては彎折を受ける柱に荷重が幾分とも重心軸から偏倚して働くとか、材料の不等質或は材質中の温度の差異、又は軸が完全に眞直でないと云ふ様な事を擧げる事が出来る。然れどもこれ等の原因を數量的に表す事は困難であつて、之れを彎折を受ける抗壓材の計算の困難な原因とも云ふ事が出来る。Navier はこれ等に就いて次の如く考へて見た。即ち先づ力率 $P \cdot a$ のみが働いた場合に中立軸から e の距離にある纖維に生ずる應力は $\sigma = \frac{P \cdot a}{I} e$ にしてその單位變形は $\varepsilon = \alpha \sigma$ となる。従つて $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ を上式に挿入すれば

$$(3) \quad P = \varepsilon \frac{I}{\alpha a e}$$

となる。之れを第二節公式(2)に代入すれば

$$P = \varepsilon \frac{I}{\alpha a e} = \frac{\gamma}{\nu} \frac{1}{\alpha} \frac{I}{l^2}$$

$$(4) \quad \therefore a = \varepsilon \frac{\nu}{\gamma} \frac{l^2}{e} = \kappa \frac{l^2}{e}, \text{ 茲に } \kappa = \varepsilon \frac{\nu}{\gamma}$$

となるを以つて之れを(2)に代入して

$$P = F \frac{\sigma_{c.a}}{1 + \kappa \frac{Fl^2}{I}} = F \frac{\sigma_{c.a}}{1 + \kappa \left(\frac{l}{i} \right)^2}$$

となり、上掲公式(1)を得る事になる。

係數 κ は公式(4)から知る如く、彎曲力率のみに依る最速纖維に於ける單位變形 ε の $\frac{\nu}{\gamma}$ 倍である。従つて κ の値を實驗的に定めると云ふ事は單位變形 ε を定める事に他ならない。而して一定の彎曲力率のみによる斷面の最速纖維に於ける單位變形 ε 及びそれに対応する應力は一定の材料に對し一定であつて抗壓材の長さには無關係である。所が既に第二節に於いて詳述した様に $\frac{\nu}{\gamma}$ の値を兩端の状態の如何により、又長柱の軸が直線でないとか、材質の不等質性、外力 P が柱軸と一致し難いと云ふ様な事情に依り適當にとる必要がある。而して長さが長くなればなるほど、これらの事情は影響を増してくるものであるから κ の値は l と共に増加するものと考へねばならぬ。この事實は實驗の結果の示す所であつてこの意味から κ の値は定數でない。

Laissle 及び Schübler 氏は兩端に鉸を有する柱に對して、 κ として次の如き値を與へた (Bau der Brückenträger, 4. Auflage, 1876, S. 70)

$\kappa = 0.0001$	軟鋼
$\kappa = 0.0003$	鑄鐵
$\kappa = 0.0002$	木材

この値は $r = \pi^2 \cong 10$ とすれば、丁度

$$\varepsilon = \frac{0.001}{\nu}, \quad \frac{0.003}{\nu}, \quad \frac{0.002}{\nu}$$

に相當する事になる。茲に ν は彎折安全率を示す。

Scharowski 氏は鐵骨構造に於ける柱の設計に對し次の値を選んだ。

	許容張應力 (σ_a)	許容壓應力 ($\sigma_{c.a}$)	κ
軟鋼	1,000 kg/cm ²	1,000 kg/cm ²	0.0001
鑄鐵	250	500	0.0002

尙ほ鑄鐵の柱に於いて $\kappa Fl^2 > 3$ なる場合に Scharowski 氏は次式を選んだ。

$$P = \frac{250}{-1 + \kappa \frac{Fl^2}{I}}$$

茲に柱の兩端は鉸を有するものと假定する。

Möller 氏は火事の場合を想像して鑄鐵及び軟鋼の柱に對して次の値を與へた。

$$\sigma_{c.a} = 1,000 \sim 1,200 \text{ kg/cm}^2, \quad \kappa = 0.0004 \quad \text{即ち} \quad \varepsilon = \frac{0.0004}{\nu} r$$

又 Krohn 氏が端が動き得る柱に對して與へた値は (1,885 年)

$$\kappa = \frac{1}{8} \alpha \sigma_{c.a}$$

であつて、茲に α は變形率を表してゐる。

軟鋼に對し	$\alpha = 0.5 \cdot 10^{-6}$,	$\sigma_{c.a} = 800 \text{ kg/cm}^2$	$\kappa = 0.00005$
鑄鐵に對し	$\alpha = 1.11 \cdot 10^{-6}$,	$\sigma_{c.a} = 800 \text{ kg/cm}^2$	$\kappa = 0.00011$

第四節 彎折強度に關する實驗

彎折強度に關しては有名な基本的實驗があるから茲にその二三を簡単に紹介しよう。

(1) Bauschinger の實驗 (München 1,887 年)

多數の實驗が H. U. L の様な斷面に就いて行はれたのであるが、その一つとして建築用鋼の斷面 H に關するものを掲げる。

(a) Fig. 111 の如く、試験片の兩端は尖り自由に彎曲し得るものに就いて行ひたる實驗の結果は次表の様である。この表中、番號 2 は短柱に屬し、Euler 公式と一致せずして普通の抗壓強度 3,035 kg/cm² に達するを知る。

番 號	斷 面			慣性能率 (cm ⁴)	彎折長 <i>l</i> (cm)	彎折荷重		應力 $\sigma'_k = \frac{P'_k}{F}$ (kg/cm ²)	差 異 $\frac{P'_k - P_k}{P'_k} \times 100$ (%)
	幅 (cm)	高さ (cm)	面積 (cm ²)			實 驗 P'_k (kg)	計 算 $P_k = \frac{\pi^2 I}{\alpha l^2}$ (kg)		
1	25.2	13.8	63.55	575.60	405.5	70,500	69,000	1,105	+ 2
2	12.4	7.2	20.70	37.99	89.0	61,000	94,500	3,305	短柱
3	—	—	18.22	—	151.0	30,250	33,000	1,662	- 9
4	—	—	18.22	—	223.0	17,250	15,000	948	+13
5	9.93	4.92	11.16	11.70	156.1	10,650	9,500	956	+11
6	—	—	11.38	—	270.0	4,100	3,200	360	+22
7	—	—	11.76	—	465.0	1,300	1,100	111	+15
8	9.99	5.01	10.58	12.20	254.3	3,900	3,700	369	+ 5
9	9.98	5.01	10.58	12.20	254.3	4,000	3,700	378	+ 8
10	9.95	5.00	10.55	12.20	254.4	3,900	3,700	370	+ 5
11	10.00	5.00	10.56	12.20	254.4	4,050	3,700	384	+ 9
12	9.96	4.99	10.55	12.20	254.3	3,900	3,700	370	+ 5

尙ほ柱の彎曲は比較的小なる荷重に於いても生ずる事を知る爲に番號 12 の試験片に就いて荷重の各段に對する柱の中央點の彎曲を測定せしに次表の如き結果を得た。

(b) 試験片の端が平面である場合
常に壓力の方向と柱軸を一致せしめる爲には柱の兩端面を平行にし、平行な壓力鉸に適合せしめる事が必要である。かゝる場合には兩端緊固と同一の状態になるのであるが、實際上は兩端を精密に平行な壓力鉸に適合せしめる事は困難であつて、柱が荷重を受けるや Fig. 119 に示す如き抗壓材は A の方へ彎曲し初め Fig.

荷重 <i>P</i> (kg)	<i>P</i> : <i>F</i> (kg/cm ²)	中央點に於ける 彎 曲 距 離 (mm)
0	0	0.00
200	19	0.00
400	38	0.04
600	57	0.11
800	76	0.20
1,000	95	0.34
2,000	190	1.25
3,000	284	3.88
3,200	303	5.08
3,400	322	6.86
3,600	341	9.92
3,800	360	17.14

120 に示す様に b, b 點が壓力鉸から離れようとする。従つて端面に於ける 壓應力の分布が變化し、中軸に對し a 側は大となり b 側は小となる。かくして實驗の終末に於いては a 點に於いて破砕するに至る。以上の事情に依り平端面を有する柱に對してはその強度を精密に計算的に出す事は困難である。

Bauschinger は實驗の結果 Navier 公式 (1) を應用し次の式を與へた。

$$P_k = F \frac{K_e}{1 + \alpha \frac{Fl^2}{I}}$$

茲に P_k = 彎折荷重、 K_e = 抗壓強度、
 α = 實驗係數 軟鋼に對し $K_e = 4,500 \text{ kg/cm}^2$,

(a) の場合、即ち兩端に鉸を有する時

$$\alpha = 0.00009 \sim 0.000614$$

(b) の場合、即ち柱の兩端に平面受臺を有する時

$$\alpha = 0.000041 \sim 0.00031$$

尙ほ Bauschinger が上の公式が成立するものとして多くの實驗の結果により K_e, α を最小自乗法に依つて求めた處

(a) $K_e = 2,270 \text{ kg/cm}^2, \alpha = 0.000058$

(b) $K_e = 3,100 \text{ kg/cm}^2, \alpha = 0.000029$

を得、又實驗に用ひた軟鋼に就き壓搾點を求めたるに $2,150 \sim 3,690 \text{ kg/cm}^2$ となつた、以上彎折試験から求めた K_e 及び α の値を實際の計算に用ひるにはこれを安全率 ν にて割る必要があるのは勿論である (第三節参照)。尙ほ (a) の兩端鉸を有する柱に對して $K_e = 2,270 \text{ kg/cm}^2$ 及び $\alpha = 0.000058$ を以つて計算した P_k の値は實驗と良く一致しないが、(b) の兩端平面なる柱に對し $K_e = 3,100 \text{ kg/cm}^2, \alpha = 0.000029$ を以つて計算した値は良く實驗の結果と一致する。従つて Bauschinger はその實驗の結果に基づいて次の結論を得るに至つた。

- (a) 兩端鉸を有する柱に對しては Euler 公式が實驗と良く適合する。
- (b) 平面端を有する柱に對しては Navier 公式が實驗と良く適合する。

[2] Tetmajer の實驗

- { Schweizerische Bauzeitung 1887, Bd X, S. 93 以下
- { Schweizerische Bauzeitung 1888, Bd XI, S. 110 以下
- { Die angewandte Elastizitäts und Festigkeitslehre, 1905

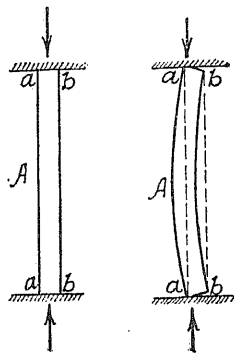


Fig. 119 Fig. 120

(a) 直徑 5 cm を有する鉄鐵及鋼からなる柱の實驗

兩端が部分的緊固の状態にある時 Tetmajer は次の結論を得た。

- 1. 實驗の結果は Euler 公式と良く一致する。
- 2. Navier 公式を用ひると α の値は變化すべきものであつて

普通鋼に對し $\frac{P_k}{F} = \frac{2,650}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i}\right)^2}$

鉄鐵に對し $\frac{P_k}{F} = \frac{2,350}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i}\right)^2}$

茲に $\alpha = 0.0001 \sqrt{0.00867 \frac{l}{i} - 0.6936}$

となる。

(b) 木材柱の實驗

實驗の結果

	變形率 $\alpha = \frac{1}{E^2}$	抗壓強度
落葉松(節なし)	$\frac{1}{104,230}$	318 kg/cm ²
樺 (節あり)		285 kg/cm ²

以上の木材よりなる充分長き柱に對し、柱の兩端が尖つて鈹の作用をする場合の彎折荷重は次の式にて與へられるとした。

落葉松に對し $\frac{P_k}{F} = \frac{318}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i}\right)^2}$

樺に對し $\frac{P_k}{F} = \frac{285}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i}\right)^2}$

茲に $\alpha = 0.0001 \sqrt{0.05 \frac{l}{i} - 0.80}$

若し兩端が平面板にて支へられるならば l の代りに $0.6l$ を用ふ。

斯くして Tetmajer は鋼及び木材の實驗に於いて α の値は $\frac{l}{i}$ の値が増すにつれて著しく増加する事を證明したのである。

[3] 其の他の實驗

以上の他長柱に関する新しき實驗に就いては次の文献を参照せられ度い。

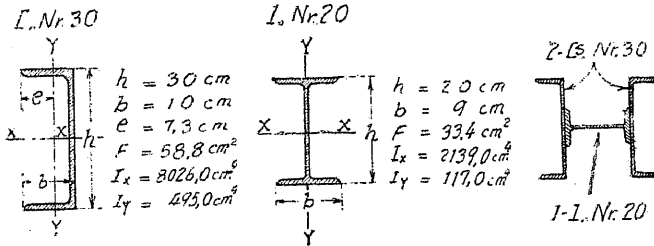
- (1) v. Kármán—Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 81. (1910)
- (2) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, S. 1969.
- (3) H. Müller-Breslau—Die reuere Methoden der Festigkeitslehre, S. 360.

(4) Rudolf Mayer—Die Knickfestigkeit.

練習問題 7

(1) 圖の如く 2-Ls. Nr. 30 及び 1-I. Nr. 20 よりなる長さ 10 m の合成柱あり。次の二計算法により許容彎折荷重を求めよ。

1. 鐵道省規定 橋梁設計仕様書
2. 獨逸國有鐵道仕方書

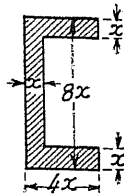


- (答) 1. 108,254 kg
2. 90,706 kg

(2) 長さ 5.2 m の鑄鐵柱が 3,325 kg の荷重を負ひて安全率 20 を有する爲には柱の徑は何程とすべきか。但し柱断面は中空にして内外徑の比 0.6 を有し兩端は鉸構造とし $E = 1,000,000 \text{ kg/cm}^2$ とせよ。

(答) $D = 14.4 \text{ cm}, d = 8.6 \text{ cm}$

(3) 圖の如き溝形断面の長さ 5 m の軟鋼製の柱あり。14 ton の荷重に耐える爲には x を幾程とすべきか。但し柱の一端は動き得るものとし Navier 公式を用ひ $\sigma_{c.a} = 800 \text{ kg/cm}^2, x = 0,00005$ とせよ。



(答) $x = 2.02 \text{ cm}$

(4) 長さ l なる垂直柱あり。自重を受けて彎折せんとする極限に於ける最大自重を求めよ。但し Euler 公式を用ひよ。

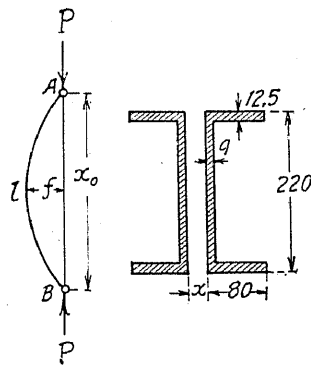
(答) $\frac{27}{32} \frac{\pi EI}{\beta}$

(5) 圖の如く長さ l なる長柱が荷重 P を受ける時中央に於ける撓み f を計算せよ。

(答) $f = \sqrt{2EI \left(\frac{l^2}{\pi^2 EI} - \frac{1}{P} \right)}$

(6) 兩端鉸構造にして圖の如き断面を有する長さ 6.4 m の柱あり。

1. $P = 12,615 \text{ kg}$ を荷ひ安全率 $v = 4$ を有する爲には x を何程とすべきか。



(答) $x = 0.96 \text{ cm}$

2. 1 に於いて定めた x を用ひて許容壓應力 $\sigma_{c.a} = 900 \text{ kg/cm}^2$ なる場合の安全荷重を求めよ。但し Navier 公式に於いて實驗係數 $\alpha = 0.00016$ とせよ。

(答) $P = 11,857 \text{ kg}$

(7) 圖の如き断面にて h を如何程にすれば長柱として最も有効となるか。

(答) $h = 20.2 \text{ cm}$

