第五章 彎曲强度

第一節 彎曲應力 (Bending Stress)

茲に Fig. 98 の如き簡單なる場合を考へる。桁の軸は直線で斷面は軸に關して對稱とする。A 點にて固定せられた桁 AB の自由端 B に於いて桁の主軸面にある力 P が働くとすれば、この力は A から x の距離にある斷面 CC に對し力率 $-P(l-x)$ とその斷面上に力 P を作用せしめる事になる。第二のものは剪力であつて暫くこれを別にすれば、桁の任意の斷面に於いて外力として唯力率（偶力）が作用するのみである。而して桁斷面と力率面は互に直角に交る。今次の記號を用ひる。

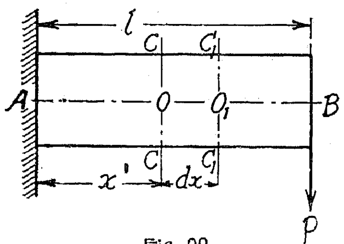


Fig. 98

M_b ＝ 考へてゐる斷面に生ずる彎曲力率（普通右まはりを正とする）

η ＝ 重心を通る主軸線から微分面積 $dF = zd\eta$ までの距離（垂直下方に向ふを正とする）(Fig. 100)

$\mathrm{I} = \int \eta^2 dF = \int \eta^2 z d\eta$ ＝ 斷面の重心を通る主軸線に關する慣性能率

e_1 ＝ η の最大正號の値

e_2 ＝ η の最大負號の値

但斷面が主軸に對して對稱の場合には $e_1 = -e_2 = e$

σ ＝ M_b により主軸線より距離 η にある微分面積 $dF = z \cdot d\eta$ に生ずる應力

$\sigma_{b.a}$ ＝ 許容彎曲應力

x, y ＝ Fig. 99 (a) に於いて始め直線でありし主軸線上の一點が彎曲の後採る彈性線上の位置を示す座標

ρ ＝ 任意の一點 O に於ける彈性線の曲率半徑

$\alpha = \dfrac{1}{E}$ ＝ 變形率卽ち $1\,kg/cm^2$ に依る長さ $1\,cm$ の變形

力 P が作用せし結果桁は Fig. 99 (a) の如く彎曲し、Fig. 98 に於いて距離 dx だけ離れた二斷面 CC 及び C_1C_1 は始め平行でありしに係らず、彎曲後は四邊形の形が崩れて Fig. 99 (a), (b) に示す樣になり、二つの斷面は $\angle CMC_1 = d\varphi$ なる角をなすに至る。この際彎曲後もその面は平面であり又常に主軸に直角を保つものと假定する。而して GH から上にある纎維は伸脹し、又それから下にあるものは短縮するのであつて、纎維層 GH は變形が零であるから之を**中性層**或は**中軸線** (Neutral axis) と云ふてゐる。

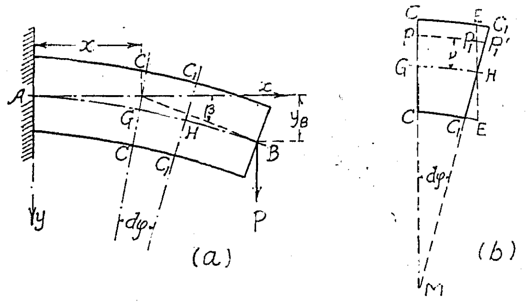


Fig. 99

斷面 CGC に於いて中軸線 GH から v なる距離に於ける單位變形 ε は Fig. 99 (b) に從つて

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{PP_1' - PP_1}{PP_1} = \frac{P_1P_1'}{PP_1} = \frac{vd\varphi}{dx}$$

となり、この層に於ける應力 σ は變形率 α を用ひて次の如くなる。

$$(2) \qquad \sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{vd\varphi}{\alpha dx}$$

而してこの (2) 式に依つて與へられる應力 σ は斷面に直角なる力は存在せずして單に彎曲力率のみが作用する場合の應力であつて、かくの如く彎曲力率 M_b から桁の內部に生じた應力はその斷面に働く力率 M_b と平衡を保つことを必要とする。從つて先づ桁軸の方向に於ける內力の和は零である事を要し、且つ又內力は M_b と等しくして反對の方向の力率を生ずることを要す。この第一の條件より

$$(3) \qquad \int \sigma dF = 0$$

又 $\dfrac{d\varphi}{dx}$ を一つの斷面に於いて同一なりと假定すれば公式 (2) からして

$$(4) \qquad \int \frac{1}{\alpha} v dF = 0$$

更に變形率 α が斷面の各點に於いて同一なりとすれば、卽ち應力 σ の大さ、

及び符號に關係せざるものと假定すれば上式から

(5) $\int v dF = 0$

となる。從つて變形及び應力が零である直線は斷面の重心を通る。之れ中軸若しくは零軸と稱するものである。

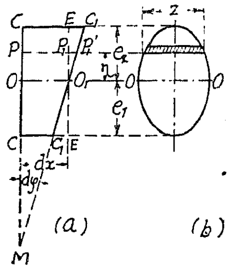


Fig. 100

次に Fig. 100 (a), (b) に於いて $\overline{OO}$ を中軸とし $v = \eta$ とすれば第二の條件から

(6) $\int \sigma dF \cdot \eta = M_b$

之れに公式(2)の關係を用ひて

$$M_b = \frac{1}{\alpha}\frac{d\varphi}{dx}\int \eta^2 dF$$

を得る。今斷面の重心軸 OO に關する慣性能率を I とすれば

(7) $I = \int \eta^2 \cdot dF$

從つて、次の關係式を得る。

(8) $M_b = \frac{I \cdot d\varphi}{\alpha \cdot dx}$ 或は $\frac{d\varphi}{dx} = \alpha \frac{M_b}{I}$

更に公式(2)の關係から

(9) $\sigma = \frac{M_b}{I}\eta$

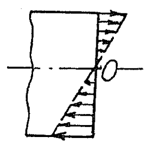


Fig. 101

となる。從つて應力は Fig. 101 に示す樣に微分面積の中軸からの距離に比例する事を知る。今 η の最大正號の値 $\eta = +e_1$ に對して

(10) $\sigma_1 = +\frac{M_b}{I}e_1 = +\frac{M_b}{W_1}, \quad W_1 = \frac{I}{e_1}$

となり、最大負號の値 $\eta = -e_2$ に對して

(11) $\sigma_2 = -\frac{M_b}{I}e_2 = -\frac{M_b}{W_2}, \quad W_2 = \frac{I}{e_2}$

となる。この場合は M_b が負號を有するが故に σ_1 は壓應力、σ_2 は張應力であつてこの W_1 及び W_2 を稱して**斷面係數** (Section modulus) と云ふ。

從つて材料が彎曲力率に耐える爲には次の關係が成立することを要する。

(12) $$\begin{cases} \sigma_{b \cdot a} \geqq \frac{M_b}{I}e_1, & \sigma_{b \cdot a} \geqq \frac{M_b}{I}e_2 \\ \text{或は} \quad M_b \leqq \sigma_{b \cdot a}\frac{I}{e_1}, & M_b \leqq \sigma_{b \cdot a}\frac{I}{e_2} \end{cases}$$

玆に $\sigma_{b \cdot a}$ は許容彎曲應力を示すものであつて、張應力及び壓應力に對する許

容强度 σ_a, $\sigma_{c \cdot a}$ が相等しい樣な材料に於いては $\sigma_{b \cdot a} = \sigma_a = \sigma_{c \cdot a}$ ととる事が出來る。しかし σ_a, $\sigma_{c \cdot a}$ の異る如き材料に於いては $\sigma_{b \cdot a}$ を σ_1, σ_2 の符號に應じて異にし σ_1, σ_2 の內、壓應力が $\sigma_{c \cdot a}$ 張應力が σ_a を超過しない樣にせねばならない。

Fig. 99 (b) 及び Fig. 100 (a) に於いて CC と C_1C_1 との交點 M の點 O よりの距離、卽ち彈性線の點 O に於ける曲率半徑を ρ とすれば

$$dx = \rho d\varphi$$

(13) $\therefore \rho = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{I}{\alpha M_b}$ 或は $\frac{1}{\rho} = \alpha \frac{M_b}{I}$

となる。

之れを要するに曲率半徑の逆數卽ち曲率は變形率 α、彎曲力率 M_b に比例し慣性能率 I に逆比例すると云ふ事が出來る。

次に微分學に於いて、一般に曲率半徑 ρ は次の式にて與へられる。

$$\rho = -\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

所が撓度は普通桁長に比して非常に小であるから近似的に

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \fallingdotseq 1$$

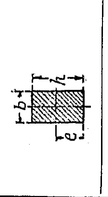
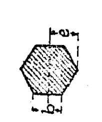
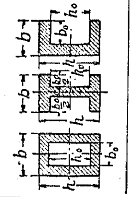
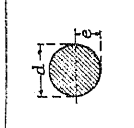
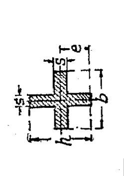
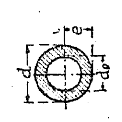
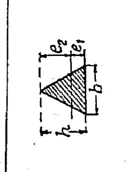
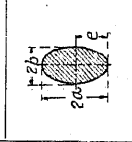
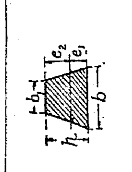
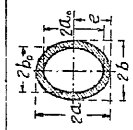
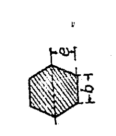
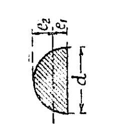
とする事が出來る。從つて

(14) $\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dx^2}$

となり、更に(14)を(13)代入して次の關係を得る。

$$M_b = -\frac{I}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{或は} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{I}M_b$$

以上導いた公式を實地に應用するには先づ斷面の慣性能率 $I = \int \eta^2 dF$ を知る必要がある。その求め方に就いては第二章第五節に述べた樣に計算、圖式、又は Integrater と稱する機械で實用上充分精密に求める事が出來る。機械は J. Amsler-Laffon & Sohn im Schoffhausen am Rhein と云ふ會社から製作販賣されてゐるものが有名である。重要なる斷面に就いて面積(F)、重心軸より最遠纖維までの距離(e)、慣性能率(I)及び斷面係數(W)を揭ぐれば次の如し。

断面	面積 F	重心軸より最遠纖維までの距離 e	慣性能率 I	断面	面積 F	重心軸より最遠纖維までの距離 e	慣性能率 I
	bh	$e = \frac{h}{2}$	$\frac{1}{12}bh^3$		$2.6b^2$	$e = b$	$0.54b^4$
	$bh-b_0h_0$	$e = \frac{h}{2}$	$\frac{1}{12}(bh^3-b_0h_0^3)$		$\frac{\pi}{4}d^2$	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{64}d^4$
	$hs+(b-s)s$	$e = \frac{h}{2}$	$\frac{1}{12}[h^3s+s^3(b-s)]$		$\frac{\pi}{4}(d^2-d_0^2)$	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{64}(d^4-d_0^4)$
	$\frac{1}{2}bh$	$e_1 = \frac{1}{3}h$ $e_2 = \frac{2}{3}h$	$\frac{1}{36}bh^3$		πab	$e = a$	$\frac{\pi}{4}a^3b$
	$\frac{b+b_1}{2}h$	$e_1 = \frac{b+2b_1}{b+b_1}\frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2b+b_1}{b+b_1}\frac{h}{3}$	$\frac{1}{36}\frac{b^2+4bb_1+b_1^2}{b+b_1}h^3$		$\pi(ab-a_0b_0)$	$e = a$	$\frac{\pi}{4}(a^3b-a_0^3b_0)$
	$\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2=2.6b^2$	$e=0.866\,b$	$\frac{5\sqrt{3}}{16}b^4=0.54b^4$		$\frac{\pi}{8}d^2$	$e_1 = 0.212d$ $e_2 = 0.288d$	$0.0069d^4$

第二節　靜荷重を受けた桁の彎曲力率及び彈性線

〔1〕肱木桁 (Cantilever)（一端緊固、他端自由の桁）

Fig. 98 に示す如き肱木桁の自由端に P 及び全體に等布せられた荷重 p が作用した場合を考へる。然らば固定端 A から x の距離に於ける任意斷面 CC に働く彎曲力率は次の式にて與へられる。

$$M_b = -P(l-x)-p\frac{(l-x)^2}{2}$$

$x = 0$ 即ち點 A に於いて M_b は絶對値が最大となる。即ち

$$_{min}M_b = -\left(Pl+\frac{pl^2}{2}\right) = -\left(Pl+\frac{Ql}{2}\right),\quad 玆に\ pl = Q\ とする。$$

而して前節公式 (12) に依り、點 A に於ける斷面に對して最大應力を計算しそれが許容限度以内にあるか否かを檢すればよい。尙彈性曲線を定める爲には前節公式 (15) に從つて

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha}{\mathrm{I}}\left[P(l-x)+p\frac{(l-x)^2}{2}\right]$$

と置く。α 及び I を桁全體に對し一定とすれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\mathrm{I}}\left[P\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{p}{2}\left(l^2x-lx^2+\frac{x^3}{3}\right)+C\right]$$

となる。處が固定端にては桿軸の方向は變化せざるを以つて、$x = 0$ に對し $\frac{dy}{dx} = 0$，從つて積分常數 $C = 0$ である。

故に、(1)　$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\mathrm{I}}\left[P\left(l-\frac{x}{2}\right)+\frac{p}{2}\left(l^2-lx+\frac{x^2}{3}\right)\right]x$$

この式から彈性線の任意の點に於いてその切線が桿軸の原方向となす角を知るわけであつて、例へば桁の自由端に於ける切線の方向は (1) 式に於いて $x = l$ と置きて

$$tg\,\beta = \frac{\alpha}{2\mathrm{I}}\left(P+\frac{Q}{3}\right)l^2$$

を得る。β は普通極めて小であるから次の (2) 式を得る。

(2)　$$\beta = \frac{\alpha}{2\mathrm{I}}\left(P+\frac{Q}{3}\right)l^2$$

次に公式（1）を更に積分して、$x=0$ に於いて $y=0$ なる條件を挿入すれば彈性曲線として次式を得る。

$$（3）\qquad y = \frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big[\frac{P}{2}\Big(l-\frac{x}{3}\Big)+\frac{p}{4}\Big(l^2-\frac{2}{3}lx+\frac{x^2}{6}\Big)\Big]x^2$$

又自由端 B に於ける撓度は $x=l$ として

$$（4）\qquad y_B = \frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big(\frac{P}{3}+\frac{pl}{8}\Big)l^3 = \frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big(\frac{P}{3}+\frac{Q}{8}\Big)l^3$$

〔2〕單桁 (Simple beam)

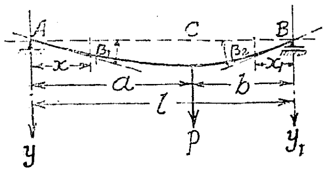


Fig. 102

Fig. 102 に示す樣に一つは固定、他は水平に滑動する支點にて支へられた桁を單桁と云ふ。この桁が等布荷重 p 及び任意の一點 C に集中荷重 P を受けた場合の彎曲力率を求めよう。今 Fig. 102 に於い $Q=p(a+b)=pl$ とすれば A 及び B に於ける支點反力は各々

$$A = P\frac{b}{l}+\frac{Q}{2},\qquad B = P\frac{a}{l}+\frac{Q}{2}$$

となる。區間 AC に於いて A から x の距離にある斷面の彎曲力率は

$$M_b = Ax-\frac{px^2}{2} = \Big(P\frac{b}{l}+\frac{Q}{2}\Big)x-\frac{px^2}{2}$$

となる。$AC=a$ 間に於いて最大彎曲力率の起る位置を求める爲 $\frac{dM_b}{dx}=0$ とすれば之れを解きて $x=\frac{P}{Q}b+\frac{l}{2}$ を得る。この x の値は $\frac{l}{2}$ より大であるから $a>\frac{l}{2}$ なる場合にのみ成立する。卽ち最大彎曲力率は徑間部分 a 及び b の內大なる方にのみ起り、特に

$$\frac{P}{Q}b+\frac{l}{2}<a,\qquad \text{卽ち}\quad \frac{P}{Q}<\frac{2a-l}{2b}=\frac{a-b}{2b}$$

なる時は桁の中心と C との間に於いて起る事になる。そしてその最大彎曲力率の値は次の如し。

$$（5）\qquad {}_{max}M_b = \Big(P\frac{b}{l}+\frac{Q}{2}\Big)\Big(\frac{P}{Q}b+\frac{l}{2}\Big)-\frac{p}{2}\Big(\frac{P}{Q}b+\frac{l}{2}\Big)^2 = \Big(P\frac{b}{l}+\frac{Q}{2}\Big)^2\frac{l}{2Q}$$

之れに反し $\frac{P}{Q}\geqq\frac{a-b}{2b}$ なる時は最大彎曲力率の起る點は C 點となるのであつて、その値は

$$（6）\qquad {}_{max}M_b = \Big(P\frac{b}{l}+\frac{Q}{2}\Big)a-\frac{pa^2}{2} = \Big(P+\frac{Q}{2}\Big)\frac{ab}{2}$$

となる。

$Q=0$ なる場合は公式（6）より

$$ {}_{max}M_b = P\frac{ab}{l}$$

となり、特に $a=b=\frac{l}{2}$ に對し次の値を得る。

$$（7）\qquad {}_{max}M_b = \frac{Pl}{4}$$

次に $P=0$ なる場合には公式（5）より

$$（8）\qquad {}_{max}M_b = \frac{Q\cdot l}{8} = \frac{pl^2}{8}$$

區間 AC 內に於ける彈性線は次の微分方程式を滿足する。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big(Ax-\frac{px^2}{2}\Big)$$

α 及び I が一定である假定の下に之を積分すれば

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big(\frac{1}{2}Ax^2-\frac{1}{6}px^3+C_1\Big)$$

$$y = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big(\frac{1}{6}Ax^3-\frac{1}{24}px^4+C_1x+C_2\Big)$$

となる。所が $x=0$ に對し $y=0$ であるから $C_2=0$ となる。同樣に區間 BC に對して

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big(Bx_1-P\frac{x_1^2}{2}\Big)$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big(\frac{1}{2}Bx_1^2-\frac{1}{6}px_1^3+C'\Big)$$

$$y_1 = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\Big(\frac{1}{6}Bx_1^3-\frac{1}{24}px_1^4+C'x_1+C''\Big)$$

$$C'' = 0$$

次に點 C に於ける桁の撓度は y 及び y_1 の公式から導く事を得るを以つて

$$\frac{1}{6}Aa^3-\frac{1}{24}pa^4+C_1a = \frac{1}{6}Bb^3-\frac{1}{24}pb^4+C'b$$

が成立する。又區間 AC の點 C に於ける彈性線の傾斜角は區間 BC の點 C に於ける傾斜角を負號にしたるものに等しい。從つて

$$\frac{1}{2}Aa^2-\frac{1}{6}pa^3+C_1 = -\frac{1}{2}Bb^2+\frac{1}{6}pb^3-C'$$

となる。上の兩式を解きて C_1, C' を得る。

結局

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}
\text{區間 } AC \text{ に對し} \\
\beta_1-\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{1}{2}Ax^2-\dfrac{1}{6}px^3\right)\dfrac{\alpha}{\mathrm{I}} \\
\beta_1 x-y = \left(\dfrac{1}{6}Ax^3-\dfrac{1}{24}px^4\right)\dfrac{\alpha}{\mathrm{I}} \\
\beta_1 = \left(P\dfrac{ab(a+2b)}{6l}+\dfrac{Ql^2}{24}\right)\dfrac{\alpha}{\mathrm{I}} \\
\text{區間 } BC \text{ に對し} \\
\beta_2-\dfrac{dy_1}{dx_1} = \left(\dfrac{1}{2}Bx_1^2-\dfrac{1}{6}px_1^3\right)\dfrac{\alpha}{\mathrm{I}} \\
\beta_2 x_1-y^1 = \left(\dfrac{1}{6}Bx_1^3-\dfrac{1}{24}px_1^4\right)\dfrac{\alpha}{\mathrm{I}} \\
\beta_2 = \left(P\dfrac{ab(2a+b)}{6l}+\dfrac{Ql^2}{24}\right)\dfrac{\alpha}{\mathrm{I}}
\end{array}\right.$$

となる。茲に β_1, β_2 は支點 A 及び B に於ける撓度線への切線の傾斜角である。又力 P の働點 C に於ける撓度は次の式にて與へられる。

$$(10)\quad y_C = \left(P+\frac{l^2+ab}{8ab}Q\right)\frac{a^2b^2}{3l}\frac{\alpha}{\mathrm{I}}$$

特に $a = b = \dfrac{l}{2}$ の場合には

$$(11)\quad \beta_1 = \beta_2 = \beta = \left(P+\frac{2}{3}Q\right)\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\frac{l^2}{16}$$

$$(12)\quad y_C = \left(P+\frac{5}{8}Q\right)\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\frac{l^3}{48}$$

となり、更に $Q = 0$ なれば

$$(13)\quad \beta = \frac{\alpha}{16}\frac{Pl^2}{\mathrm{I}}$$

$$(14)\quad y_C = \frac{\alpha}{48}\frac{Pl^3}{\mathrm{I}}$$

〔3〕固定桁 (Fixed beam)

Fig. 103 に示す如く、固定桁が等布荷重 $Q = pl$ 及び中點に集中荷重 P を受

けた場合に就いて考へる。兩端固定であるから兩端に於ける彈性線への切線は桁軸と一致する。しかし構造上實地には完全に緊固する事は困難である。

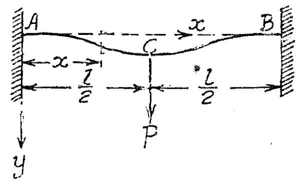


Fig. 103

この場合荷重は對稱であるから桁の半分 AC に就いて考へればよい。支點反力は $A = B = \dfrac{P}{2}+\dfrac{Q}{2}$ にして、固定點 A に於ける彎曲力率を M_A とすれば A 點から x の距離にある點の彎曲力率は次の如くなる。

$$M_b = M_A+Ax-\frac{px^2}{2}$$

前節公式 (15) から

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\left(M_A+Ax-\frac{px^2}{2}\right)$$

I 及び α が一定であると假定すれば

$$\frac{dy}{dx} = -\left(M_Ax+\frac{1}{2}Ax^2-\frac{px^3}{6}\right)$$

となる。茲に $x = 0$ に對し $\dfrac{dy}{dx} = 0$ なるを以つて積分常數は零としたのである。未知數 M_A の値は $x = \dfrac{l}{2}$ に對して $\dfrac{py}{dx} = 0$ なる條件から定める事が出來る。卽ち

$$M_A\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2}+\frac{Q}{2}\right)\frac{l^2}{4}-p\frac{l^3}{48} = 0$$

$$\therefore\ (15)\quad M_A = -\left(\frac{Pl}{8}+\frac{Ql}{12}\right)$$

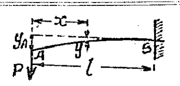
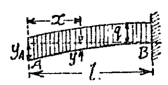
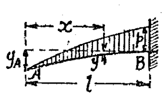
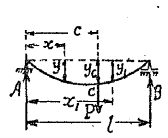
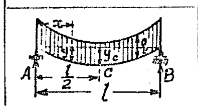
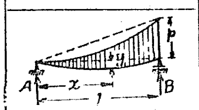
故に M_A は左廻りの力率である事を知る。從つて A から x の距離にある彎曲力率は

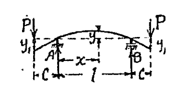
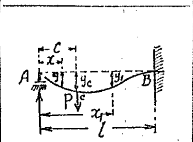
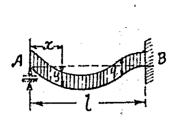
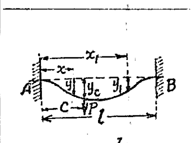
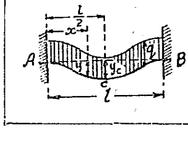
$$M_b = -\left(\frac{Pl}{8}+\frac{Ql}{12}\right)+\left(\frac{P}{2}+\frac{Q}{2}\right)x-\frac{px^2}{2}$$

となり、桁の中心に對して次の値を得る。

$$(16)\quad M_C = \frac{Pl}{8}+\frac{Ql}{24}$$

從つて絕對値は固定點より $\dfrac{Ql}{24}$ だけ小である。桁の中心 C に於ける M_b は

桁の種類及び荷重	支點反力	彎曲力率	彈性線方程式	撓度
	$B = P$	$M_x = -Px$ ${}_{min}M = M_B = -Pl$	$y = \frac{Pl^3}{6EI}\left(2-3\frac{x}{l}+\frac{x^3}{l^3}\right)$	$y_A = \frac{Pl^3}{3EI}$
	$B = ql$	$M_x = -\frac{qx^2}{2}$ ${}_{min}M = M_B = -\frac{ql^2}{2}$	$y = \frac{ql^4}{24EI}\left(3-4\frac{x}{l}+\frac{x^4}{l^4}\right)$	$y_A = \frac{ql^4}{8EI}$
	$B = \frac{pl}{2}$	$M_x = -\frac{px^3}{6l}$ ${}_{min}M = M_B = -\frac{pl^2}{6}$	$y = \frac{pl^4}{120EI}\left(4-5\frac{x}{l}+\frac{x^5}{l^5}\right)$	$y_A = \frac{pl^4}{30EI}$
	$A = \frac{P(l-c)}{l}$ $B = \frac{Pc}{l}$	$M_x = +Ax$ $M_{x_1} = +B(l-x_1)$ ${}_{max}M = M_c = \frac{P(l-c)c}{l}$	$y = \frac{Pc^2(l-c)^2}{6EIl}\left(2\frac{x}{c}+\frac{x}{l-c}-\frac{x^3}{c^2(l-c)}\right)$ $y_1 = \frac{P(l-c)^2c^2}{6EIl}\left(2\frac{l-x_1}{l-c}+\frac{l-x_1}{c}-\frac{(l-x_1)^3}{(l-c)^2c}\right)$	$y_c = \frac{Pc^2(l-c)^2}{3EIl}$ $x = \sqrt{\frac{c(2l-c)}{3}}$ に對し ${}_{max}y = \frac{P(l-c)}{3EIl}\left[\frac{c(2l-c)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}$
$c < \frac{l}{2}$	$c = \frac{l}{2}$ に對し $A = B = \frac{P}{2}$	$c = \frac{l}{2}$ に對し ${}_{max}M = M_c = \frac{Pl}{4}$	$c = \frac{l}{2}$ に對し $y = \frac{Pl^3}{48EI}\left(3\frac{x}{l}-4\frac{x^3}{l^3}\right)$	$c = \frac{l}{2}$ に對し ${}_{max}y = y_c = \frac{Pl^3}{48EI}$
	$A = B = \frac{ql}{2}$	$M_x = \frac{qx}{2}(l-x)$ ${}_{max}M = M_c = \frac{ql^2}{8}$	$y = \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x}{l}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$	${}_{max}y = y_c = \frac{5ql^4}{384EI}$
	$A = \frac{pl}{6}$ $B = \frac{pl}{3}$	$M_x = \frac{plx}{6}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$ $x = 0.5774l$ に對し ${}_{max}M = 0.064pl^2$	$y = \frac{pl^4}{360EI}\left(7\frac{x}{l}-10\frac{x^3}{l^3}+3\frac{x^5}{l^5}\right)$	$x = 0.5193l$ に對し ${}_{max}y = 0.00652\frac{pl^4}{EI}$

桁の種類及び荷重	支點反力	彎曲力率	彈性線方程式	撓度
	$A = B = P$	A—B 間にて $M_x = -Pc =$ 一定	A—B 間にて $\rho = \frac{EI}{Pc}$ なる圓弧 $y = y_c-\left(\frac{EI}{Pc}-\sqrt{\left(\frac{EI}{Pc}\right)^2-\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}\right)$	中點にて $y_c = \frac{Pcl^2}{8EI}$ 端にて $y = \frac{Pc^2}{6EI}(3l+2c)$
	$A\ \frac{P(l-c)^2(2l+c)}{2l^3}$ $B = \frac{Pc(3l^2-c^2)}{2l^3}$	$M_x = Ax$ $M_{x_1} = M_B+B(l-x_1)$ ${}_{min}M = M_B = -\frac{Pc(l^2-c^2)}{2l^2}$ $c = \frac{l}{\sqrt{3}}$ に對し ${}_{min}M_B = -0.1925Pl$	$y = \frac{1}{6EI}\left(3Al^2x-Ax^3-3P(l-c)^2x\right)$ $y_1 = \frac{1}{6EI}\left(B(2l^3-3l^2x_1+x_1^3)-3Pc(l-x_1)^2\right)$	$y_c = \frac{Pc^2(l-c)^3}{12EIl^3}(3l+c)$ $x = l\sqrt{\frac{c}{2l+c}}$ に對し ${}_{max}y = \frac{P(l-c)^2c}{6EI}\sqrt{\frac{c}{2l+c}}$
	$A = \frac{3}{8}ql$ $B = \frac{5}{8}ql$	$M_x = \frac{qxl}{8}\left(3-4\frac{x}{l}\right)$ ${}_{max}M = \frac{9}{128}ql^2$ ${}_{min}M = M_B = -\frac{ql^2}{8}$	$y = \frac{ql^4}{48EI}\left(\frac{x}{l}-3\frac{x^3}{l^3}+2\frac{x^4}{l^4}\right)$	$x = 0.4215\,l$ に對し ${}_{max}y = 0.0054\frac{ql^4}{EI}$
 $c \leq \frac{l}{2}$	$A = \frac{P}{l^3}(l-c)^2(l+2c)$ $B = \frac{P}{l^3}(3l-2c)c^2$	$M_x = M_A+Ax$ $M_{x_1} = M_B+B(l-x)$ $M_A = -\frac{Pc(l-c)^2}{l^2}$ $M_B = -\frac{Pc^2(l-c)}{l^2}$ $c = \frac{l}{3}$ に對し ${}_{min}M_A = -\frac{4}{27}Pl$	$y = \frac{P(l-c)^2}{6EI}\left(3c\frac{x^2}{l^2}-3c\frac{x^3}{l^3}-(l-c)\frac{x^3}{l^3}\right)$ $y_1 = \frac{P(l-c)^2}{6EI}\left(\frac{(x_1-c)^3}{(l-c)^2}+3c\frac{x_1^2}{l^2}-3c\frac{x_1^3}{l^3}-(l-c)\frac{x_1^3}{l^3}\right)$	$y_c = \frac{Pc^3}{3EIl^3}(l-c)^3$ $x = \frac{l^2}{3l-2c}$ に對し ${}_{max}y = \frac{2Pc^2}{3EI}\frac{(l-c)^3}{(3l-2c)^2}$
	$A = B = \frac{ql}{2}$	${}_{min}M = M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$ $M_c = \frac{ql^2}{24}$	$y = \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$	$y_c = \frac{ql^4}{384EI}$

正號であるから、A と C との間に彈性線の反曲點(Inflexional point) 卽ち曲率半徑 $\rho = \infty$ なる點が存在せねばならぬ。

$Q = 0$ なる場合には $M_A = -\frac{Pl}{8}$, $M_C = +\frac{Pl}{8}$ となり彈性線の反曲點は $x = \frac{l}{4}$ なる點となる。

又 $P = 0$ なる場合には $M_A = -\frac{Ql}{12} = -\frac{pl^2}{12}$, $M_C = +\frac{Ql}{24} = +\frac{pl^2}{24}$ となり彈性線の反曲點は $x = 0.2113\,l$ なる點である。一次微分方程式を更に積分すれば彈性線の方程式を得る。この際 $x = 0$ に於いて $y = 0$ である事から積分常數を定めると

$$y = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{2}M_A x^2 + \frac{1}{6}Ax^3 - \frac{px^4}{24}\right)$$

となる。$x = \frac{l}{2}$ に對して次の式を得る。

$$(17)\qquad y_C = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{\alpha}{\mathrm{I}}\,\frac{l^3}{192}$$

〔4〕各種の桁及び荷重に對する彎曲力率、彈性線方程式及び撓度の表

前項に述べたと同樣の方法で不變斷面を有する各種桁に就いて集中荷重、等布荷重、又は三角形分布荷重を受けた場合の支點反力、彎曲力率、彈性線方程式、及び撓度を求めたものを表にすれば前揭の如し。

尙各種桁に生ずる彎曲力率及び剪力に關しては、後章に於いて詳述する事にする。

第三節　等强桁 (Beam of Uniform Strength)

一つの荷重が何れの斷面にも同一の最大纖維應力を生ずる樣な桁を稱して等强桁と云ふ。かゝる桁は最小の材料を以つて外力に耐えるもので理想的且つ經濟的形狀をなす桁と云ふべきである。故に等强桁に對しては第一節公式 (10), (11) から

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{\frac{\mathrm{I}}{e_1}} = \frac{M_b}{W_1},\quad \text{又は}\quad \sigma_2 = -\frac{M_b}{\frac{\mathrm{I}}{e_2}} = -\frac{M_b}{W_2}$$

が桁の何れの斷面にても一定である事を要す。從つて桁に生ずる彎曲力率は

$\frac{\mathrm{I}}{e_1}$ 若しくは $\frac{\mathrm{I}}{e_2}$ に從つて變化する事が必要である。

又第一節公式 (13), (14) から

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \alpha\frac{M_b}{\mathrm{I}} = \alpha\frac{M_b}{\frac{\mathrm{I}}{e_1}}\cdot\frac{1}{e_1} = \alpha\frac{\sigma_1}{e_1}$$

が成立する。以下二三の例を示さう。

〔1〕Fig. 104 に示す樣に一定の幅 b を有する肱木桁の自由端に力 P が作用するものとする。A から x なる距離に於いては

$$M_b = -P(l-x),\qquad \mathrm{I} = \frac{1}{12}bz^3$$

$$e_1 = -e_2 = \frac{z}{2},$$

$$W_1 = W_2 = \frac{1}{6}bz^2,$$

$$-\sigma_1 = +\sigma_2 = \sigma$$

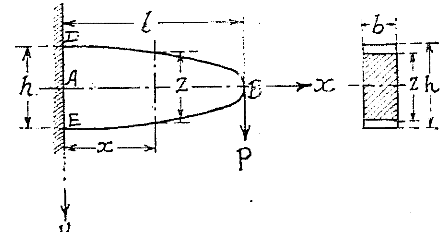


Fig. 104

從つて等强桁なる爲には

$$\sigma = \frac{P(l-x)}{\frac{1}{6}bz^2} = \text{一定}\qquad \text{なるを要す。}$$

今 $l-x = x'$ とすれば

$$z^2 = \frac{6P}{\sigma b}(l-x) = \frac{6P}{\sigma b}x'$$

となる。これ卽ち拋物線の方程式である。從つて Fig. 104 に於いて EBD は一つの拋物線形をなし BA はその主軸である。

$$\overline{AE} = \overline{AD} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6Pl}{\sigma b}}$$

自由端 B に於ける撓度 y_B は第一節公式 (12), (15) に從つて座標軸 x, y に關し

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{\mathrm{I}}M_b = -\frac{\alpha\sigma_1}{e_1} = \frac{\alpha\sigma}{\frac{z}{2}} = \frac{\alpha\sigma}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6P}{\sigma b}(l-x)}} = \frac{2\alpha\sigma\sqrt{l}}{h\sqrt{l-x}}$$

$$\therefore\quad y = \alpha\left(\frac{16Pl\sqrt{l}}{bh^3}\sqrt{(l-x)^3} + \frac{24Pl^2}{bh^3}x - \frac{16Pl^3}{bh^3}\right)$$

但し上の積分に於いては α の値を一定とし、又 $x = 0$ に對し $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = 0$ として積分常數を定めたのである。

$x = l$ に對して　$y_B = \alpha\frac{8Pl^3}{bh^3}$　となる。

前節公式（4）に依り角壔狀桁に於いて同一荷重 P に對する撓度を求めると、$y_B = \alpha\frac{4Pl^3}{bh^3}$ となり、等强桁に對する値の半分となる。上の計算に從へば自由端に於ては斷面積は零であるが、實際上は彎曲力率と同時に剪力をも生ずるのであるから この桁は外力に

耐え得ざるわけである。

〔2〕Fig. 105 に示す樣に桁の高 h が一定なる場合の等强肱木桁を求めて見よう。自由端 B から x_1 の距離にある斷面に於いては

$$M_b=-Px_1,\quad I=\frac{1}{12}h^3z,\quad e_1=-e_2=\frac{h}{2},\quad W=\frac{I}{e}=\frac{1}{6}h^2z,$$

$$-\sigma=\sigma_2=\sigma$$

従つて等强桁なる爲には、$\sigma=\dfrac{Px_1}{\frac{1}{6}h^2z}=$ 一定，卽ち $z=\dfrac{6Px_1}{\sigma h^2}$ となる。故に Fig. 105 に示す如き形となり BC 及び BD は直線である。

又 $\overline{AC}=\overline{AD}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{3}{\sigma}\dfrac{Pl}{h^2}$

彈性線は微分方程式

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{d^2y}{dx^2}=-\alpha\frac{\sigma_1}{e_1}=2\alpha\frac{\sigma}{h}$$

から定まる。處がこの場合 h は一定なるを以つて曲率半徑 ρ は一定値となり、從つて曲線は圓形となる。而して其の半徑は $\rho=\dfrac{h}{2\alpha\sigma}$ となる。

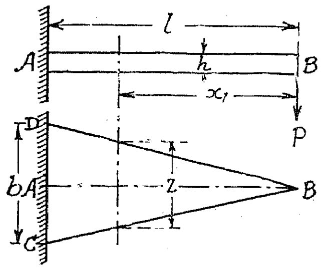


Fig. 105

自由端に於ける撓度は

$$y_B=\frac{l^2}{2\rho}=\alpha\sigma\frac{l^2}{h}=\alpha\frac{6Pl^3}{bh^3}$$

〔3〕Fig. 106 に示す如く、單桁に於いて任意の一點 C に荷重 P が作用する場合には AC 部分は C に於いて固定せられ A に於いて荷重 $P\frac{b}{l}$ により作用せられた肱木桁に相當し、BC 部分は C に於いて固定せられ B に於いて荷重 $P\frac{a}{l}$ により作用せられた肱木桁に相當する。今桁の斷面を圓形とすれば、AC 部分に於いて A から x の距離にある斷面にては

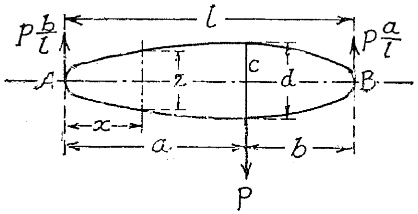


Fig. 106

$M_b=P\dfrac{b}{l}x,\quad \dfrac{I}{e_1}=\dfrac{I}{-e_2}=\dfrac{\pi}{32}z^3,\ \sigma_1=-\sigma_2=\sigma$ となるを以つて、$\sigma=\dfrac{P\frac{b}{l}x}{\frac{\pi}{32}z^3}=$ 一定 とすれば、$z^3=\dfrac{32Pb}{\pi\sigma l}x$ となる。これ三次拋物線の方程式にして、點 C に於ける直徑を求むれば次の如し。

$$d=\sqrt[3]{\frac{32Pab}{\pi\sigma l}}$$

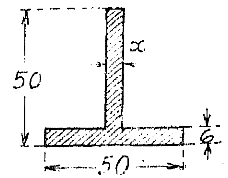
BC 部分に對しても同樣の形となり、$z^3=\dfrac{32Pa}{\pi\sigma l}x$ となる。玆に x は B 端よりの距

離とする。

以上述べし所は單に彎曲力率のみを考へたのであつて剪力を考へると又別の結果となる。

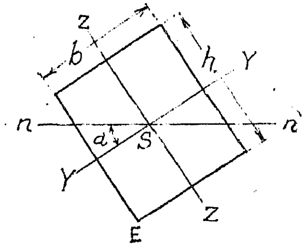
練習問題 6

（1）圖の如き斷面（單位 mm）にて單桁として最も有効なる爲には x を何程とすべきか。但し許容抗張强度 $\sigma_a=300\ kg/cm^2$、許容抗壓强度 $\sigma_{c\cdot a}=800\ kg/cm^2$ とせよ。（答）$x=5mm$



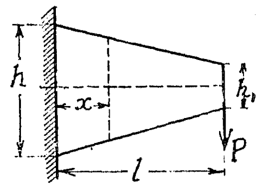
（2）矩形斷面の桁が圖の如く α だけ傾いて架設され、M なる彎曲力率を受けるものとする。α が如何なる値をとる時 E 點の應力は最大となるか、又その時の應力の値如何（注意 nn 軸に關する彎力率 M を主軸 Y, Z に關するものに分解して考へよ）。

（答）$tg\,\alpha=\dfrac{h}{b}$,　${}_{max}\sigma=\dfrac{6M\sqrt{b^2+h^2}}{b^2h^2}$



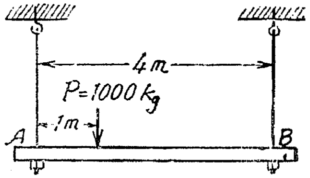
（3）圖の如き幅一定なる矩形斷面の肱木桁がその一端に P なる荷重を荷ふ時最も危險なる斷面の位置 x を求めよ。又その點の彎曲力率如何、但し自重を無視すべし。

（答）$x=l\dfrac{h-2h_1}{h-h_1}$,　$M=\dfrac{Plh_1}{h-h_1}$



（4）圖の如く正方形斷面の木桁 AB が二本の鐵棒に吊されて $P=1{,}000\ kg$ を A より $1m$ の位置にて荷ふものとする。木の許容彎曲應力 $\sigma_{b\cdot a}=70\ kg/cm^2$、鐵の許容張應力 $\sigma_a=700\ kg/cm^2$ として木桁及び各鐵棒の寸法を定めよ。

（答）木桁斷面 18.6 cm×18.6 cm、鐵棒直徑 1.2 cm 及び 0.7 cm



（5）矩形斷面の肱木桁の自由端に荷重 P を荷ふ場合、各斷面が相似形なる等强桁は如何なる形狀となるか。又自由端の撓度如何。

（答）高さ $h_x=h\left(\dfrac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$,　幅 $b_x=b\left(\dfrac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$;

撓度 $y_B=\dfrac{3}{5}\dfrac{Pl^3}{EI}$

（6）正方形斷面の對角線を垂直に用ひたる桁に於いて其の上下端を削りとりて斷面係數

を增加せんとす。其の最大なる爲に切りとるべき三角形の寸法を求む。

（答）一邊の九分の一

（７）桁高 45 cm, $I_x = 45{,}880\ cm^4$ なる I 字形鋼が徑間中央に 8 ton の集中荷重を受ける時最大徑間何程に使用し得るか。

但し許容彎曲應力 $\sigma_{b \cdot a} = 1{,}000\ kg/cm^2$, 桁自重 115 kg/m とす。

（答）9.54 m